

MODÈLES DE PRIX DE PRODUITS FINANCIERS.

J-P. LAURENT*

14 octobre 1996

Introduction.

Professors Scholes and Merton and I discovered the first problem with the formula early on. Although our search for the formula was an academic effort, and our main goal was to find the truth, we did try to use it to make money.

We applied the formula to some warrants and found some where price seemed lower than value. We bought them and waited for them to go up. As it turned out, we did not make money, but we did find some more truth.

F. BLACK (1992).

Un modèle financier repose le plus souvent sur une représentation formalisée des prix des actifs financiers ou des taux d'intérêt. Une telle représentation abstraite peut être recherchée dans une perspective de meilleure compréhension générale et a également pour but de fournir des **outils pour améliorer la gestion financière** : gestion des risques financiers, allocation

*Laboratoire de Finance et d'Assurance, CREST.

L'auteur remercie C. Gouriéroux, P. Poncet, T. de Roquemaurel pour leurs commentaires.

d'actifs, création de nouveaux produits financiers. La *mise en œuvre de modèles dans une perspective d'application et de résolution de problèmes pratiques* soulève un certain nombre de questions spécifiques, qui n'apparaissent pas quand on reste dans un strict domaine théorique.

Un exemple peut illustrer ce propos général ; la théorie de la finance fournit un nombre important de modèles de la *structure par terme des taux d'intérêt*. On peut, par exemple, classer les modèles en fonction du nombre de variables d'état, du caractère déterministe ou pas de la volatilité des taux à terme, de la nature exogène ou endogène de la courbe des taux initiale, du caractère constant ou pas des paramètres non observés... Dans une perspective de *gestion du risque de taux d'intérêt d'un établissement financier, de création d'un nouveau produit de crédit ou d'épargne*, quel modèle retenir ? Quels sont les critères de choix ? La théorie ne dit rien des valeurs des paramètres non observés qui interviennent dans ces modèles : comment les obtenir ? À partir d'estimations dans des séries temporelles, de façon "implicite" à partir des prix des obligations ou des taux des contrats d'échange de taux d'intérêt et des prix d'options de taux d'intérêt déjà négociées ? Les modèles de structure par terme des taux reposent souvent sur des hypothèses institutionnelles et d'évolution du taux court qui ne sont manifestement pas vérifiées en pratique. Dans quelle mesure les prix des obligations ou des options de taux d'intérêt qui dérivent de ces modèles ainsi que la sensibilité aux taux d'intérêt de ces prix prennent-ils des valeurs raisonnables ?

Les questions évoquées sont de première importance pour le **concepteur de nouveaux produits financiers** ou le **gestionnaire des risques de taux d'intérêt**, par exemple.

Il est utile de façon préalable de préciser le *contexte institutionnel*, et notamment le développement des marchés dérivés (**section 1**). Dans ce cadre, les modèles financiers quantitatifs ont été et restent un important *levier pour la création de nouveaux produits et la gestion des risques* (**section 2**). Ces modèles financiers peuvent être construits sur des bases rigoureuses à partir des apports de la théorie financière moderne (**section 3**). L'utilisation de modèles dans un cadre opérationnel de gestion financière est associée au développement d'une *ingénierie financière* qui s'intéresse aux méthodes numériques d'évaluation, à la compatibilité avec les prix de marché, à la *robustesse* et aux *domaines d'utilisation des modèles* (**section 4**). Enfin, les modèles financiers doivent s'intégrer au sein des *systèmes d'information* des

établissements financiers et leur utilisation pratique implique une bonne prise en compte des expertises qualitatives développées notamment par les opérateurs de marché (**section 5**).

1 Le contexte institutionnel.

As we all know, the past twenty years have seen revolutionary changes in the structure of the world's financial markets and institutions and in our understanding of how to use them to provide new investment opportunities and ways of managing risk.

R. MERTON (1995).

Le développement de la modélisation financière est à replacer dans un *contexte institutionnel*. Les marchés de capitaux se sont notablement transformés depuis trente ans. Ces marchés sont pour une bonne part animés par de *grands intermédiaires* qui jouent un rôle central dans le développement de nouveaux contrats décharge des risques. Les *banques commerciales* peuvent de ce fait moderniser leur gestion financière. Plusieurs facteurs sont susceptibles d'expliquer ces évolutions, notamment les *progrès des technologies de l'information* et les *avancées conceptuelles de la théorie financière*.

1.1 Marchés de capitaux et grands intermédiaires.

This chapter describes the evolution of the financial infrastructure into the next century. We argue that derivative instruments are one of the foundations of this new infrastructure.

M. SCHOLES (1995).

La sphère financière connaît depuis vingt ou trente ans une profonde mutation. Parmi les traits les plus saillants de cette évolution, on peut noter le développement considérable des *produits financiers dérivés* et un mouvement de *concentration et d'internationalisation* des établissements financiers opérant sur les marchés de capitaux.

On peut tout d'abord retracer quelques caractéristiques de cette mutation avant d'en examiner les moteurs.

Le développement des produits dérivés est tout autant *quantitatif* que *qualitatif* ; quantitatif du fait de l'importance des volumes de transaction et des positions ouvertes sur certains grands marchés (par exemple contrats à terme et options sur indices boursiers, sur emprunts d'État)¹, quantitatif également par l'abondance de nouveaux contrats d'échange de risques, souvent qualifiés d'exotiques², dont la finalité économique, couverture, spéculation est parfois contestée, y compris devant les tribunaux (voir par exemple les différents qui opposent Procters and Gamble, Gibson Greetings et Banker's Trust, la Seita avec Salomon Brothers)³ ⁴. Mais si l'importance de l'activité sur les marchés de nouveaux produits financiers témoigne de leur vitalité, plus importants encore sont les changements qualitatifs en cours.

¹Selon le Global Derivatives Study Group (1993), le volume quotidien d'activité pour les contrats à terme est 420 milliards de dollars. La Banque des Règlements Internationaux (1994) estime que les positions notionnelles ouvertes de produits dérivés sont de 7839 milliards de dollars pour les marchés organisés et de 5346 milliards de dollars pour les marchés de gré à gré.

²Selon Duffie et Rahi (1995), citant le Wall Street Journal, il y aurait plus de 1200 familles de produits dérivés, pour la plupart négociés sur des marchés de gré à gré. Kindleberger (1990) relativise cette évolution : *"Il y a plus de mille ans qu'on innove en matière d'instruments financiers"*, mais reconnaît que *"le mouvement s'est accéléré après la seconde guerre mondiale"*.

³Si une longue polémique a porté sur l'interprétation de cette phrase de l'Ancien Testament, *"Tu n'exigeras de ton frère aucun intérêt ni pour argent, ni pour vivres, ni pour aucune chose qui se prête à intérêt"*, il semble difficile de considérer que cette condamnation s'étende aux contrats d'échange de risque qui n'impliquent pas de prêt d'argent...

⁴Voir DiMartino, Ward, Stevens et Sargisson (1996) pour une discussion du cas de Procter et Gamble. Procter et Gamble a du passer dans ses comptes une provision de 157 millions de dollars au troisième trimestre 1994, du fait de deux contrats contractés avec Bankers Trust. Pour les auteurs, cette expérience conduit à réexaminer les objectifs et les conditions d'activité des trésoreries d'entreprises plutôt qu'à une remise en cause de l'utilité économique des nouveaux produits financiers : *"Perhaps, the greatest significance of Procter and Gamble's loss is that the event became a catalyst for CFO's to re-examine the role of their corporate treasurers, review their firm's financial policies regarding risk management, and evaluate their firm's ability to monitor its derivatives positions"*. Selon Option Finance, la Seita aurait perdu 150 millions de francs à l'occasion de deux contrats négociés avec Salomon Brothers. Voir Mouy et Nalbantian (1996) pour une discussion sur la responsabilité des établissements financiers en matière de négoce de produits dérivés.

Tout d'abord, la plupart des produits dérivés *séparent la fonction traditionnelle de financement et celle de gestion des risques*. De ce fait, la gestion des risques financiers devient plus flexible : l'utilisation de contrats d'échange de taux d'intérêt et de contrats à terme sur taux d'intérêt permet de gérer le risque de taux d'intérêt indépendamment du risque de liquidité. De même, l'utilisation de profils de risque non linéaires (options) permet de limiter les risques de pertes sur un portefeuille sans pour autant renoncer aux gains et sortir de la position.

De manière plus générale, *il est possible de séparer les risques financiers et d'écrire des contrats contingents à des évènements de plus en plus spécifiques*, et donc de transférer de la richesse dans un nombre plus grand d'états de la nature⁵. Pour certains comme Merton, les marchés ont une tendance naturelle à évoluer vers la possibilité d'assurer tous les risques^{6 7}.

Cette évolution des contrats financiers ne s'est pas accompagnée, loin s'en faut, d'une disparition des intermédiaires financiers.

Le processus de marchandisation des créances⁸ et le développement de marchés dérivés organisés n'empêchent pas les intermédiaires financiers de jouer un rôle central dans les transformations en cours. En fait, presque tous les contrats négociés sur les marchés de gré à gré font intervenir un établissement financier et la grande majorité d'entre eux sont des

⁵De ce point de vue, la possibilité d'effectuer des transactions à tout instant sur de larges plages horaires (marché des changes, Globex) contribue à cette évolution en augmentant la gamme de stratégies d'investissement. Une telle évolution des modes de transaction a néanmoins ses détracteurs. Pour M. Allais (The Los Angeles Times, 26 octobre 1989), *"The continuous trading market is an aberration from an economic viewpoint and generates a potentially permanent instability favoring fraud and manipulation of the market"*.

⁶Par exemple, pour M. Scholes (1995), *"New and innovative risk-sharing mechanisms have been developed over the last ten years to allow individuals and corporations to pool risks and to share them efficiently with other parties"*.

⁷On peut remarquer que pour Grossman (1995) l'augmentation du nombre de contrats échangés ne signifie pas nécessairement que le champ des risques assurables sur les marchés s'accroît : *"Complete equitization should not be confused with complete contingent claims markets"*.

⁸Par marchandisation des créances, on entend la négociabilité sur des marchés financiers secondaires de toutes sortes de contrats financiers. Ce concept englobe notamment ceux de titrisation et de désintermédiation. Les anglophones utilisent le terme *"securitization"* pour titrisation et *"equitization"* pour marchandisation (voir Grossman (1995)).

opérations purement interbancaires. À cause des difficultés de compensation entre contrats sur les marchés de gré à gré et de la durée souvent longue de ceux-ci (voir l'exemple des contrats de swap), *les établissements financiers gèrent des montants considérables de produits dérivés.*

De même, les établissements bancaires et financiers sont très présents sur les marchés organisés, que ce soit comme intervenants directs, donneurs d'ordre, courtiers, adhérents compensateurs...

On peut d'ailleurs noter l'émergence d'acteurs globaux sur les marchés de capitaux. Ces entités, souvent filiales de grandes banques commerciales, sont dotées de fonds propres importants, sont multinationales⁹, très présentes sur les principaux marchés financiers et en contact avec les grands clients institutionnels (fonds de retraite, compagnies d'assurances, grandes entreprises multinationales). La présence de coûts fixes (réseaux commerciaux, informatique de gestion¹⁰, coûts salariaux) dans le processus de fabrication des produits financiers, la compensation et la diversification des risques liés aux différentes activités commerciales sur les marchés créent des économies d'échelle et d'envergure qui sont un facteur de concentration du secteur¹¹.

Sans pour autant exercer un oligopole (il n'y a pas de "Haute Banque" des marchés de capitaux), ces établissements exercent une *fonction importante dans la compensation des risques financiers échangés et transférés entre les différents acteurs économiques.* On peut de ce point de vue esquisser un parallèle avec les clearing banks, à la différence près qu'il n'existe pas de lieu unique de compensation¹².

⁹De par leur implantation géographique (européenne, asiatique, américaine) et leur personnel.

¹⁰À titre d'exemple, le budget informatique annuel du Crédit Lyonnais est de l'ordre de cinq milliards de francs, celui de Citicorp de 1,5 à 2 milliards de dollars.

¹¹Ce mouvement de concentration s'accompagne parallèlement d'un développement de la spécialisation, notamment dans le domaine de la gestion institutionnelle de fonds. Les cabinets d'analyse financière ou spécialisés dans le suivi et l'analyse des performances, les fournisseurs d'information financière, de logiciels d'analyse des risques, les établissements procurant des services de "global custody" ont considérablement accru leur professionnalisme.

¹²On peut également remarquer que les positions prises sur les marchés par les établissements financiers ne sont suivies par aucune institution, au contraire des soldes de trésorerie par exemple. Les agences de notation pallient dans une certaine mesure à l'absence d'information sur les risques pris par les différents

1.2 Banques commerciales.

Il y a dix ans, lorsque j'ai rejoint ce groupe, l'utilisation de produits dérivés était pratiquement inexistante... Aujourd'hui, cela n'est plus possible. Nous devons nous refinancer sur les marchés de capitaux du monde entier.

F. HENROT (1995).

Ces évolutions des marchés de capitaux ne sont pas sans conséquences sur l'organisation et les produits des banques commerciales¹³.

Un des traits caractéristiques de l'activité bancaire est l'octroi de crédits et la collecte de dépôts¹⁴. Or, les *produits bancaires tendent à devenir plus "structurés"*, à incorporer des options, des mécanismes de protection contre les risques (crédits à taux variable plafonné, produits d'épargne à capital et indexation garantis, assurance chômage des crédits immobiliers aux particuliers)¹⁵.

Ainsi si par nature, les banques commerciales¹⁶, notamment dans l'activité de banque de établissements et permettent de renseigner créanciers et actionnaires. Outre l'absence de suivi régulier des positions, il n'y a pas non plus de bases de données recensant a posteriori les positions prises sur les grands marchés par les établissements les plus actifs.

¹³De manière générale, l'organisation de la banque commerciale, notamment en matière de gestion des risques, n'est pas indépendante de son environnement financier ; voir Schrand et Unal (1995) pour une discussion dans le cas des Savings and Loans.

¹⁴On parle souvent d'*intermédiation bancaire*. On considère alors que les opérations d'octroi de crédits, de collecte de dépôts et de gestion des moyens de paiement sont liées. La loi bancaire de 1984, contrairement à la loi du 14 juin 1941, ne lie plus ces différentes activités. Son article premier énonce, *Les opérations de banque comprennent la réception de fonds du public, les opérations de crédit, ainsi que la mise à la disposition de la clientèle ou la gestion de moyens de paiement*. Voir Burgard, Cornut et Robert de Massy (1995) pour une discussion.

¹⁵Il ne faut pas en conclure que les produits dérivés sont la seule réponse aux besoins de couverture des individus. Malinvaud (1973) montre que quand il s'agit de risques individuels peu corrélés et donc diversifiables, l'organisation de marchés d'assurance est en général une procédure plus efficace de gestion des risques.

¹⁶Dans le cas d'une banque qui pratique à la fois les métiers de marchés de capitaux et les métiers de banque commerciale, on parle ici de la seconde activité, qui s'exerce souvent à travers des réseaux d'agences.

détail, vendent peu de produits dérivés, elles les utilisent afin de proposer des *financements ayant des profils de risque plus adaptés aux besoins de leurs clientèles*. On peut remarquer que cette évolution est également favorisée par la plus grande souplesse des informatiques de gestion et le développement d'outils d'aide à la vente¹⁷.

Un autre domaine où l'articulation entre les marchés de capitaux et la banque commerciale est très étroite est celui de la *gestion actif-passif* (ou ALM, "*Asset Liability Management*")¹⁸.

On peut en noter deux formes complémentaires, la *titrisation de créances et la gestion des risques dans le bilan*. Les gestionnaires des risques dans les banques commerciales ont pris progressivement conscience du caractère financier complexe de certains contrats de crédit ou de prêt, lié à la présence d'"options cachées"¹⁹. Parmi ces options cachées, on peut noter les options de remboursement anticipé de prêts immobiliers ou les clauses de rachat en assurance-vie.

Les risques financiers associés à ces clauses optionnelles peuvent être transférés aux marchés financiers par des mécanismes de cession de créances (titrisation). Il est fréquent que ces cessions soient l'occasion d'un "*découpage des risques*" (tranches des "Collateralized Mortgage Obligations"²⁰ par exemple) afin de permettre une gestion plus efficace de ces risques sur les marchés.

Une alternative est la gestion de ces risques "dans le bilan", c'est-à-dire sans cession sur le marché des créances générant le risque. De ce point de vue, les banques commerciales

¹⁷L'ensemble de ces évolutions technologiques et financières n'est pas indépendante du mouvement de concentration bancaire, notamment aux États-Unis. Selon K. Viermetz (1996), vice-chairman de JP Morgan, "*L'innovation et la technologie sont en passe de devenir le moteur des services financiers. (...) Ces investissements ne tarderont pas à devenir le principal obstacle pour de nouveaux entrants sur le marché, et seront l'élément déterminant du succès ou de l'échec.*"

¹⁸La gestion actif-passif renvoie à la stratégie des firmes quant à leur gestion des risques financiers ; voir Smith et Stulz (1985), Culp et Miller (1995), Smith (1995), Fite et Pfeleiderer (1995), Stulz (1996) pour des discussions sur la couverture des risques financiers par les entreprises.

¹⁹On devrait plutôt parler d'options liées ou de contrats avec des clauses optionnelles ; les anglophones utilisent l'expression "*embedded options*". Voir Richard et Roll (1989), Frachot et Gouriéroux (1995), Boulier (1996) pour une discussion sur ces clauses contractuelles.

²⁰Voir Frachot et Gouriéroux, Titrisation et remboursements anticipés, *Economica*, 1995.

font de plus en plus appel aux produits dérivés, notamment pour gérer leurs risques de taux d'intérêt²¹, à travers des produits comme les *contrats d'échange de taux d'intérêt* ou les *caps*²² et les *floors*^{23 24}.

1.3 Facteurs d'évolution.

Telecommunications and computing technology have created more efficient channels through which entities can provide financial services... Further reduction of frictions and restrictions will enable investors and corporations to transact, to save, to shift and pool risks...

M. SCHOLES (1995).

Le développement des marchés de produits dérivés peut être mis en perspective en lui associant d'autres modifications de l'environnement économique et financier, qui ont facilité ce développement.

²¹Cette stratégie est cohérente avec la logique de spécialisation ; selon Hindy (1993), "*the increasing volatility of many markets is forcing many organisations to decide which risks to assume as their core business and which to transfer elsewhere*". Voir aussi Bryan (1988).

²²Un *cap* est un contrat qui procure à l'acheteur, à chaque période de référence (par exemple un trimestre), un flux monétaire égal au produit du montant nominal du *cap* par la différence entre le taux d'intérêt de la période de référence et un taux prédéterminé (dit taux d'exercice), si cette différence est positive. Les paiements se font jusqu'à l'échéance du contrat, également appelée maturité du *cap*. Un *floor* est un contrat similaire, à ceci près que le flux monétaire fait intervenir la différence entre le taux d'exercice et le taux de la période de référence, si cette différence est positive.

²³Une enquête menée par NALMA, l'association nord-américaine des gestionnaires actif-passif auprès de vingt-deux grandes banques commerciales montre que seulement cinq d'entre elles placent la titrisation sur le même plan ou devant les produits dérivés en ce qui concerne la gestion du risque de taux d'intérêt. Il faut également préciser que la gestion du risque de taux d'intérêt n'est pas la seule motivation de la titrisation. Voir également Espy, Tufano et Headley (1994) pour une discussion sur l'utilisation de produits dérivés de taux d'intérêt par Banc One Corporation.

²⁴Les contrats d'échange de taux d'intérêt à amortissement indexé sur les taux d'intérêt sont un produit de plus en plus utilisé pour la couverture des options de remboursement anticipé. James et Smith (1994) estiment leur encours à 200 milliards de dollars à la fin de l'année 1993.

Au premier rang de ces modifications, on peut noter l'*abaissement des coûts de transaction*, permis par les progrès dans les technologies de l'information et des télécommunications. Ceci permet de réduire les coûts de production et est un facteur important dans le développement de nouveaux contrats²⁵.

L'environnement réglementaire a été relativement libéral et peu de barrières existent pour les opérations internationales. Les banques centrales semblent considérer positivement le développement des marchés de produits dérivés²⁶.

On peut de plus remarquer qu'il est difficile de mettre en place des réglementations au niveau international²⁷ et illusoire de réglementer uniquement à un niveau national (du fait des risques de délocalisation des marchés)^{28 29}.

²⁵Selon Fite et Pfeleiderer (1995), "*over the past few decades, the performance of financial markets has been largely improved by the development of new technologies in communications and information processing.*" Remarquons néanmoins que la présence de coûts de transaction, notamment de frais de livraison et de stockage, peut faciliter l'apparition de marchés à terme où ces coûts ne sont portés qu'à l'échéance des contrats. C'est l'une des explication du développement des marchés à terme de marchandises (voir Simon (1986)). Selon Quittard-Pinon (1993), le marché des contrats d'échange de devises a vu son développement favorisé par la présence, en Grande-Bretagne, d'une taxe sur les achats de devises étrangères.

²⁶"*Le développement de l'utilisation de produits dérivés devrait contribuer à une allocation plus efficiente des ressources et renforcer la capacité de résistance aux chocs de l'économie... Les éléments disponibles à ce jour laissent penser que les évolutions intervenues sur les marchés dérivés n'ont probablement pas affecté de façon significative les canaux de transmission de la politique monétaire.*" (Extraits de la conclusion du rapport Hannoun publié dans le bulletin de la Banque de France en février 1995).

²⁷De nombreux problèmes de coordination entre les différentes institutions aux cultures différentes peuvent se poser, à l'image des négociations entre l'IOSCO et la BRI pour la réglementation des risques de marché.

²⁸Cette problématique de la réglementation bancaire n'est pas nouvelle ; on peut par exemple citer le rapport Radcliffe (1959) :

"*On ne peut l'envisager qu'en dernière extrémité, pas simplement à cause des lourdeurs administratives que cela suppose, mais aussi parce que la création permanente de nouvelles institutions financières rendraient vaines toutes les tentatives de contrôle des autorités.*"

²⁹La littérature attribue néanmoins une grande importance aux réglementations prudentielles, fiscales et comptables dans l'innovation financière. Par exemple, pour Duffie et Rahi (1995) :

"*New securities are often designed in response to accounting standards, regulations and tax codes... These innovation-inducing changes are not always characterized by some new or significantly greater economic risk to be hedged. Instead, in a large fraction of cases, the motivating event is new regulation, a change in fiscal or monetary policies of governments, or adjustments in accounting standards or tax codes.*" De ce point

Un autre élément d'importance dans l'émergence des marchés de produits dérivés est l'apparition de nouveaux clients et de nouvelles demandes, du fait des modifications de l'environnement économique :

- L'interdépendance accrue des économies nationales (développement des échanges commerciaux et des entreprises internationales) a contribué à faire apparaître de nouveaux besoins, notamment pour la gestion des risques de change (change à terme, options de change).
- La persistance de déséquilibres dans les balances des paiements, le développement de la gestion collective des fonds de retraite lié aux évolutions démographiques, sont associés à d'importants mouvements de capitaux. Les grands investisseurs institutionnels (caisses de retraite, compagnies d'assurance, fonds communs de placement) utilisent de plus en plus les produits dérivés, notamment pour couvrir rapidement leurs risques ou prendre des positions sur les marchés, alors que la liquidité des marchés sous-jacents ne le permettrait pas.
- Nous avons déjà mentionné que les sociétés de financement spécialisées dans les prêts à long terme et les banques commerciales font une utilisation importante de produits dérivés de taux d'intérêt.

Tous ces acteurs, utilisateurs potentiels finaux des produits sophistiqués de gestion des risques, sont également dotés des structures d'intervention et de négociation (salles de marché, opérateurs), c'est-à-dire de la logistique qui leur permet d'opérer effectivement sur les marchés.

Des facteurs conjoncturels comme certaines périodes de forte volatilité des taux d'intérêt et des taux de change ont pu également favoriser l'émergence de besoins supplémentaires de couverture des risques³⁰.

de vue, les moindres contraintes réglementaires ont sans doute contribué à l'essor des marchés de produits dérivés.

³⁰Certains détracteurs des nouveaux produits financiers considèrent que les nouveaux marchés financiers sont la cause et non la conséquence de l'accroissement de la volatilité. Ils estiment que la baisse des coûts de transaction, le fort effet de levier permis par les contrats à terme et les options, facilitent une spéculation

Enfin, parmi les facteurs qui ont puissamment contribué à cette mutation financière, *les progrès techniques et conceptuels dans les stratégies dynamiques d'investissement et de couverture des risques* ont joué un rôle majeur. Ce n'est pas par une simple coïncidence que l'année 1973 a vu à la fois la publication des articles fondateurs de Black et Scholes et de Merton et l'ouverture de marchés organisés d'options sur actions à Chicago. Les outils forgés par les universitaires ont instantanément donné aux hommes de marché une maîtrise des produits à base d'options et ont par là même autorisé leur développement rapide³¹.

2 Les modèles financiers, un levier pour la gestion financière.

Nous avons vu que les intermédiaires financiers jouent un rôle central dans le processus d'échange et de transformation des risques financiers. La modélisation quantitative va alors être un facteur important de compétitivité, notamment pour la *mesure et la couverture des risques et la création de nouveaux produits financiers*³².

déstabilisatrice (manipulation de cours, comportements irrationnels, "mimétisme"). Ces considérations vont à l'encontre de l'analyse classique qui considère que la spéculation a des effets stabilisants. Par ailleurs, de nombreuses études empiriques montrent que l'introduction de nouveaux marchés (notamment d'options sur actions individuelles) n'ont que peu ou pas d'effet sur la volatilité des titres sous-jacents. Voir Conrad (1989), Choe, Chrissos et Levasseur (1988), Hamon et Jacquillat (1992), Charletty-Lepers et Portait (1994), Aglietta (1996) pour des discussions.

³¹Boulier et Gouriéroux (1995) remarquent que *"l'introduction importante des modèles et techniques mathématiques en Finance est intimement liée aux développements des marchés et surtout à la transformation de leurs modes de fonctionnement."* Pour Fite et Pfeleiderer (1995), *"the creation and widespread use of derivatives has been brought about in large measure by conceptual advances that have allowed various financial institutions to value and hedge these complex instruments."*

³²Ainsi, selon Hindy (1993), *"some businesses cannot survive without formal risk management programs that are constantly evaluated and developed - successful investment banks, for example."*

2.1 Amélioration de la mesure des risques financiers.

On a suggéré que nous examinions les affaires industrielles. Il y en a certainement quelques-unes excellentes, mais des entreprises industrielles, même les mieux conçues et les plus sagement administrées, comportent des risques que nous considérons incompatibles avec la sécurité indispensable avec laquelle doivent être employés les fonds des banques de dépôt. Le Crédit Lyonnais ne peut trouver de meilleur exemple pour l'emploi de ses fonds que la Banque de France.

H. GERMAIN, PRÉSIDENT DU CRÉDIT LYONNAIS (1942).

La *mesure des risques financiers* et notamment des *risques de marché* (liés aux variations des taux d'intérêt, des cours de change, des cours des actions)³³ est un thème important qui concerne aussi bien les autorités de contrôle que les établissements financiers³⁴.

Au sein des établissements financiers plusieurs types de préoccupations peuvent être distingués selon la nature des intervenants.

À cause des enjeux et des incitations des autorités de contrôle, les directions générales s'impliquent dans l'*organisation de la gestion des risques*, suivent de façon régulière des *indicateurs synthétiques* de l'exposition globale de leur établissement aux risques financiers, à l'intérieur de *limites de risques* définies a priori.

Les équipes de gestion actif-passif et de middle-office, qui ont en charge des tâches de contrôle interne, doivent définir des mesures pertinentes des risques financiers et contribuer

³³Nous nous centrons dans notre présentation sur les risques de marché ; voir par exemple Chiappori et Yanelle (1996) pour une présentation d'ensemble des risques de l'activité bancaire. Remarquons que le risque de défaut n'est pas sans relation avec les risques de marché. On peut citer l'évaluation de dette risquée (Merton (1974), Jarrow, Lando et Turnbull (1993)), l'évaluation de contrats d'échange de taux d'intérêt en présence de risque de contrepartie (Cooper et Mello (1991), Duffie et Huang (1996)), la valorisation d'options en présence de risque de contrepartie (Johnson et Stulz (1987), Hull et White (1995), Jarrow et Turnbull (1995)).

³⁴Pour S. Figlewski (1994), "*the single most common reason for losing money in derivatives, and probably in investment in general, is failure to accept that the most fundamental principle of investment theory applies to you : you cannot make large profits without bearing large risk.*"

à la définition des limites de position³⁵. Ces mesures de risque sont indispensables pour suivre l'évolution du risque a priori des activités, évaluer les performances des équipes opérationnelles, notamment dans les salles de marché, déterminer des limites de position et allouer les fonds propres de l'établissement³⁶. Les équipes de négociation ("trading") utilisent en permanence des indicateurs de risque de leurs portefeuilles, afin de déterminer l'évolution de leur tarification (les écarts entre cours acheteurs et vendeurs) et plus généralement pour optimiser la gestion de leur portefeuille et détecter des stratégies rentables et peu risquées.

Les autorités de contrôle nationales (Commission des Opérations de Bourse, Commission Bancaire, Government Accounting Office aux États-Unis) et internationales (Banque des Règlements Internationaux³⁷, IOSCO, Commission Européenne), des groupes professionnels (Groupe des Trente³⁸, ISDA³⁹, Association Française des Banques, Fédération Bancaire Européenne) sont très préoccupés par la mesure des risques de marché, des risques liés aux produits dérivés et du risque de taux global, ces questions étant liées à celle de la sécurité du système financier⁴⁰.

De nombreuses propositions vont dans le sens d'une plus grande diffusion externe (auprès des autorités de contrôle, des actionnaires, des créanciers) d'*indicateurs de risque des éta-*

³⁵La séparation des fonctions de contrôle des risques et de prise opérationnelle des risques est un élément important des recommandations du Groupe des Trente (1993) et du Derivatives Policy Group (1995). Le cas de la Banque Barings dont les pertes sur les marchés ont été estimées à 1,39 milliards de dollars illustre les conséquences des défaut d'organisation interne. Pour reprendre Stoll (1995), "*management gave Leeson so much free rein that he both traded and managed back-office operations. In effect, Leeson turned out to be judge and jury of his own actions.*"

³⁶Voir par exemple Bensaïd et de Bandt (1995) pour une discussion du rôle des stop-loss comme outil de contrôle des risques.

³⁷Basle Committee on Banking Supervision, "An internal model-based approach to market risk capital requirements", Avril 1995.

³⁸Group of Thirty, Derivatives : Practices and Principles, Global Derivatives Study Group, 1993.

³⁹International Swap Dealers Association.

⁴⁰Un exemple de ces préoccupations est donné par les poursuites engagées en octobre 1995 par la SEC à l'encontre de Gibson Greetings. Selon Kramer (1996), "*the SEC found that Gibson did not properly maintain its books and records, its internal controls, and its reporting and disclosure obligations. Gibson was found to have violated the securities laws in connection with its accounting for and disclosure of its derivative transactions.*" Voir également Littlejohn (1995), Jouini (1996) à propos du contrôle des risques et de la réglementation.

*blissements financiers*⁴¹. Ceci suppose un minimum de consensus quant aux mesures appropriées des risques financiers⁴². Les projets de la BRI en matière de réglementation des risques de marché font maintenant référence de manière explicite à la notion de *modèle interne* de mesure des risques et instituent des procédures de validation des modèles utilisés par les établissements financiers⁴³.

Dans tous les domaines évoqués, la modélisation financière apporte des outils décisifs, des mesures plus fiables et plus synthétiques car prenant mieux en compte l'*interdépendance entre les risques financiers* et leur *caractère souvent non linéaire*.

2.2 Fabrication de produits financiers.

Pour un groupe bancaire, les produits dérivés sont utilisés dans le cadre de la gestion de ses propres positions de taux, de change et de portefeuille d'une part, et d'autre part dans l'offre de services et de produits à ses clients.

A. LEVY-LANG (1995).

Nous avons déjà discuté du développement qualitatif et quantitatif des contrats d'échange des risques financiers ("produits dérivés"). La modélisation financière intervient dès la phase

⁴¹Le règlement 119 du FASB (Financial Accounting Standard Board) demande aux entreprises une présentation de leurs risques de défaut et de marché induits par leurs investissements en produits dérivés. Voir Carpenter (1996), Caudal (1996) pour des discussions ; voir également Kessler et Ullmo (1996) à propos de la comptabilité en valeur de marché.

⁴²Selon Dimson et Marsh (1995), à propos de la réglementation sur les besoins en fonds propres pour la couverture des risques de marché, *"the debate which led to this impasse was highly political, involving extensive lobbying, intricate negotiations, and some horse trading... There was also a very real tension among the alternative procedures for determining capital adequacy."*

⁴³Ceci a d'ailleurs nécessité des adaptations de la "CAD" (Capital Adequacy Directive), la directive européenne "adéquation des fonds propres". Selon Nouy (1996), *"il est donc possible, si ce n'est probable, que la méthode standard ne constitue plus, dans deux ans, une alternative réaliste (aux modèles internes) pour les grands opérateurs internationaux"*. Voir également Thoraval (1996a, 1996b) pour une discussion sur les modèles internes de mesure des risques.

de *conception du produit* et est souvent un facteur non négligeable d'*optimisation des configurations*. Il peut s'agir soit d'aider à définir les proportions d'actifs dans des portefeuilles, soit de préciser des clauses contractuelles, notamment dans des contrats optionnels. Les modèles financiers interviennent également dans le *processus de fabrication* et de gestion des produits financiers, car ils fournissent des *stratégies de couverture des risques* induits par la vente de ces produits.

2.2.1 Configuration de produits financiers.

Surely, the mere fact that a particular bottle of wine is priced correctly does not mean that the bottle of wine is the appropriate consumption good for every consumer.

GROSSMAN (1995).

La plupart des produits négociés sur les marchés organisés ou de gré à gré connaissent d'amples fluctuations dans leurs volumes de transaction, peuvent ne plus être négociés pendant un certain temps, puis réapparaître quand la conjoncture des marchés financiers leur est favorable. Il y a ainsi des cycles d'activité des contrats d'échange des risques.

Bien que les mouvements de capitaux soient peu contraints, l'activité a également une dimension spatiale⁴⁴ : certains produits peuvent se développer auprès d'émetteurs japonais, d'investisseurs suisses, dans telle ou telle devise, auprès d'une clientèle de particuliers ou de grandes entreprises...

Les intermédiaires financiers jouent un rôle très actif dans l'animation commerciale des marchés. Une de leurs fonctions est de proposer à leurs clients des *produits adaptés à leurs besoins*. Ces "produits" sont souvent des portefeuilles d'actifs et des clauses contractuelles dans des contrats optionnels. Il s'agit par exemple de déterminer quels actifs introduire dans un portefeuille, le degré de diversification internationale, les poids relatifs des différents actifs, l'exposition du portefeuille à certains facteurs de risque... L'établissement financier peut par exemple proposer à son client investisseur, désirant protéger son portefeuille contre une baisse des cours, d'introduire une barrière désactivante dans une option de vente afin d'en diminuer le coût.

Les modèles financiers vont fournir divers outils qui permettent d'optimiser le couple rendement-risque d'un portefeuille⁴⁵.

⁴⁴Cette dimension est essentielle dans les réflexions en cours sur l'amélioration des indices d'activité. Voir par exemple, Gouriéroux, Jasiak et Le Fol (1996) pour une discussion.

⁴⁵Par exemple, l'établissement financier peut utiliser un modèle économétrique pour évaluer l'espérance et la variance conditionnelles des rentabilités, pour un horizon donné, évaluer les portefeuilles moyenne-variance

Les modèles financiers permettent également de calculer très rapidement le prix de revient de nouvelles configurations "à blanc", jusqu'à ce que la configuration qui permette à l'échange de se réaliser, soit définie⁴⁶. Ainsi, l'investisseur de l'exemple précédent ne va pas seulement négocier le prix de l'option de vente, mais également le niveau du taux d'exercice, le niveau de la barrière⁴⁷. Ce processus itératif de négociation s'apparente à un *tâtonnement entre l'acheteur et le vendeur*.

Ainsi les modèles financiers, de par les *possibilités de simulation* qu'ils offrent, jouent un rôle puissant de rapprochement de l'offre et de la demande. Dans un monde walrasien, les agents ont à leur disposition un certain nombre de marchés de biens et de marchés financiers, et les prix sont négociés sur ces marchés. Dans le contexte institutionnel actuel, *sont à la fois négociés les prix et les caractéristiques des contrats échangés*⁴⁸.

2.2.2 Production de produits financiers.

This theory has been especially useful for practitioners because it not only provides a standard of value but also provides a production technology for duplicating the payoffs of any contingent claim by using an appropriate dynamic strategy.

J. COX ET C.F. HUANG (1989).

optimaux pour cet horizon, mener des analyses de robustesse par rapport aux paramètres estimés. De plus en plus fréquemment, un investissement institutionnel est précédé d'une négociation sur les caractéristiques de risque du portefeuille.

⁴⁶Les modèles financiers facilitent la détermination du prix de revient de produits financiers peu négociés. Mais le problème n'est pas lié à une asymétrie d'information où l'un des agents posséderait une information privée.

⁴⁷Cette approche empirique de détermination de la demande s'écarte quelque peu de l'approche traditionnelle en économie financière qui suppose donnés des marchés ouverts.

⁴⁸Notre présentation d'un "nouveau produit" diffère de l'approche traditionnelle. En principe, un nouveau produit financier complète la gamme des contrats d'investissement et d'échange des risques en présentant des *caractéristiques de rendement et de risque différentes* de celles accessibles aux agents économiques sur les marchés. Ici, il s'agit simplement d'une innovation commerciale qui n'a pas un caractère d'irréversibilité. Ce n'est pas nécessairement une innovation liée à un progrès dans la technologie de fabrication des produits ; il peut simplement s'agir d'un produit utilisant une technologie existante et qui ne faisait pas antérieurement l'objet d'une demande significative de la part des agents économiques.

Les modèles financiers ont également une fonction dans la gestion des produits financiers, en fournissant des *stratégies dynamiques d'investissement* appropriées. Pour mieux comprendre la fonction de ces modèles, on peut présenter une typologie simple des *modes de fabrication des produits financiers* selon que les couvertures sont *statiques* ou *dynamiques*.

Une première façon pour un intermédiaire de fabriquer un produit financier est d'*assembler de manière statique des actifs déjà existants* dans des proportions judicieusement choisies.

Du fait de la présence de coûts de transaction et de coûts fixes, il peut y avoir des économies d'échelle dans ce processus de production. Ceci permet notamment de mettre à disposition des particuliers des produits comme des emprunts à taux variable plafonné, que les établissements de crédit synthétisent à partir de refinancements à taux variable et de *caps*, ou des fonds indiciaires passifs.

L'intermédiaire financier agit alors comme un commerçant qui s'approvisionne sur les *marchés de gros* (les marchés financiers), reconditionne les produits et les *distribue au détail* via des *circuits de distribution* spécifiques (réseaux d'agences, apporteurs d'affaires, marketing direct)⁴⁹. En ce qui concerne le crédit, les produits achetés et vendus restent le plus souvent dans le bilan de l'intermédiaire bancaire. Dans le domaine de la gestion collective, les titres sont le plus souvent achetés pour le compte des clients.

Même dans cette approche statique de la fabrication des produits financiers, il subsiste cependant des risques résiduels⁵⁰ qui doivent être évalués, mesurés et éventuellement cou-

⁴⁹Dans certains cas, l'établissement financier peut n'être qu'un simple intermédiaire qui cherche des contreparties prêtes à s'échanger mutuellement des risques.

⁵⁰Par exemple, les caractéristiques des *caps* achetés, leur montant, leur durée, leurs taux d'exercice, leurs dates d'exercice peuvent différer légèrement des caractéristiques des *caps* contenus dans les crédits à taux variable plafonné vendus aux clients. Pendant la durée de leur "placement", c'est-à-dire entre le moment où les *caps* sont achetés sur le marché et le moment où les crédits sont vendus, le risque de taux d'intérêt doit être couvert. En ce qui concerne la gestion indiciaire, à cause de la gestion des entrées et des sorties dans l'indice, de la gestion de la liquidité des fonds, il subsiste une petite partie des actifs qui est gérée dynamiquement. Le décalage entre les dates d'achat et de revente d'un actif financier est un des risques importants du métier de teneur de marché, au contraire des métiers de courtage où le risque de décalage de cours est porté par les clients. Les métiers traditionnels d'intermédiation participent en tout cas de notre

verts sur des marchés corrélés. L'utilisation de modèles financiers est alors très utile pour permettre de mesurer et de limiter l'exposition à ces risques résiduels.

Très souvent, les établissements financiers vendent un nouvel actif, c'est-à-dire une nouvelle distribution de *flux monétaires*⁵¹, par exemple une option de taux d'intérêt aux caractéristiques inédites, afin de satisfaire la demande de leurs clients, prennent à leur charge la fabrication de ce flux monétaire, et *s'adossent de manière dynamique* sur les marchés de gros pour couvrir leurs risques.

Il y a alors un véritable *processus de production du flux monétaire vendu*, à partir de stratégies de gestion d'actifs sous-jacents. Les modèles financiers jouent alors un rôle central dans ce processus de production car ils permettent de spécifier ces stratégies de duplication dynamique⁵² ; ils fournissent en fait des *procédés de fabrication*⁵³.

3 Le cadre théorique de la modélisation financière.

The twin assumptions that trading takes place continuously in time and that the underlying stochastic variables follow diffusion-type motions with continuous sample paths lead to a set of behavioral equations for intertemporal portfolio selection that are both simpler and richer than those derived from the corresponding discrete-trading model.

classification.

⁵¹Un flux monétaire engendré par un produit financier est défini comme la quantité de "monnaie" reçue aux différentes dates futures dans les différents états du monde, par le détenteur du produit financier. Ce flux est donc une grandeur aléatoire, puisqu'on ne connaît, à la date d'évaluation du flux, que les probabilités d'être dans tel ou tel état du monde. On aurait pu remplacer "quantité de monnaie" par "nombre d'unités de numéraire", un numéraire étant ici une unité de compte arbitraire.

⁵²Cela concerne aussi bien les marchés dérivés (duplication de contrats optionnels) que la gestion de portefeuilles avec par exemple les méthodes d'assurance de portefeuille.

⁵³Nous avons discuté de l'importance des modèles financiers pour la mesure des risques et la fabrication de produits financiers. La troisième fonction des modèles est de fournir un référentiel de valeur pour un produit financier donné. Il est ainsi possible d'étalonner un prix observé sur un marché par rapport à un prix théorique fourni par un modèle. Ceci peut aider à repérer des opportunités d'arbitrage et à les éliminer, rétablissant ainsi l'efficacité des marchés.

Pour mieux comprendre l'apport des modèles à la gestion financière opérationnelle, il est utile de revenir sur la notion de **modèle de prix de produits financiers** et d'examiner les apports de la théorie financière⁵⁴.

Nous allons voir que les *prix de produits financiers* sont un objet central de la **modélisation financière**. La théorie de la finance s'attache particulièrement à l'étude de la *loi de probabilité des prix futurs de produits financiers*. Dans le cadre de *marchés financiers compétitifs*, elle met en évidence les relations entre les flux monétaires engendrés par des produits financiers et leurs prix à travers les notions de *modèle d'évaluation cohérent de produits financiers*, de *prix d'état* et de *probabilités risque-neutre*. La théorie financière fournit également des *prix de revient de produits dérivés* en fonction de prix d'actifs sous-jacents, notamment dans le cadre de *marchés complets*. Ce cadre théorique nous permet de voir les produits financiers comme des assemblages et des combinaisons complexes d'actifs élémentaires, et fournit ainsi des décompositions des risques et des *procédés de fabrication et d'évaluation des coûts*. Enfin, l'économétrie de la finance offre plusieurs approches pour estimer les paramètres non observés qui interviennent dans les modèles d'évaluation de produits financiers et dans les stratégies de couverture des risques.

3.1 Une modélisation des prix des actifs financiers.

L'objet principal de la modélisation financière est la connaissance des *prix d'actifs financiers* (et des niveaux de taux d'intérêt) et plus précisément de leurs *évolutions temporelles* et de leurs *évolutions jointes*⁵⁵.

⁵⁴Boulier (1993) remarque que "*Théorie et Finance ne sont pas des disciplines que l'on associe spontanément. Dans le monde des images d'Épinal, tout tend à les opposer. Ainsi, les intellectuels amoureux de la première ont longtemps rejeté la seconde. De leur côté les praticiens de la finance ont souvent répondu par l'indifférence aux débats soulevés par les professionnels de la théorie. Signe des temps les murs tombent...*" Pour Quittard-Pinon, (1993), "*l'intérêt d'une approche scientifique de la finance paraît aujourd'hui banal pour certains, évident pour beaucoup, inutile pour quelques uns*".

⁵⁵ou covariations ou évolutions simultanées.

Les actifs financiers dont on étudie l'évolution des prix sont très nombreux. Il est de tradition de distinguer les *actifs* dits *primaires* ou *de base* (actions, obligations par exemple). On considère souvent que l'offre nette de ces actifs est exogène (au moins à court terme) et positive. Un choc négatif sur l'économie va alors réduire la valeur nette de ces actifs et le patrimoine des agents économiques. D'autres actifs (la plupart des options, contrats à terme) sont en offre nette nulle. Les chocs sur l'économie occasionnent alors des transferts entre les agents économiques, mais pas de modification (à court terme) de la richesse nette globale.

On distingue également les *actifs sous-jacents* (souvent les mêmes que les actifs de base) et les *actifs dérivés* dont les flux monétaires se calculent en fonction des prix des actifs sous-jacents⁵⁶. La notion d'actif dérivé est souvent entendue de manière plus restrictive : on considère alors les actifs dérivés comme des combinaisons redondantes des actifs de base. Les actifs dérivés construits à partir de plusieurs actifs sous-jacents sont parfois qualifiés d'hybrides.

Enfin, on distingue les actifs financiers facilement négociables sur des marchés secondaires organisés (bourses de valeurs) ou de gré à gré (on parle alors souvent de *titres financiers*) et les créances plus difficilement négociables (créances bancaires, actifs immobiliers...).

Les actifs négociés sur des marchés peuvent être *combinés* entre eux pour former des *portefeuilles* dont on peut observer l'évolution des prix. On s'intéresse souvent à l'évolution jointe des prix de certains groupes d'actifs, par exemple du prix d'un actif sous-jacent et des prix des actifs dérivés construits à partir de cet actif. Outre la dynamique temporelle, il y a donc une dimension transversale dans la modélisation financière⁵⁷.

Notons au passage que l'on peut chercher à représenter l'évolution des prix dans différentes *échelles de temps* : à tout instant (en temps continu), selon diverses échelles de temps discrètes (quotidiennes, hebdomadaires...) ⁵⁸.

⁵⁶Un exemple simple est celui d'une option d'achat européenne dont le flux monétaire à la date d'exercice est une fonction non linéaire du prix de l'actif sous-jacent. On peut remarquer suivant l'approche initiée par Merton qu'une action est un actif de base et que c'est également un actif dérivé lié à la valeur de l'entreprise.

⁵⁷Il y a des relations entre les prix d'actifs à date d'observation donnée. On a affaire à ce que les économètres appellent des données de panel.

⁵⁸Il existe également des représentations des prix dans des échelles de temps "déformées" où les prix ne

Remarquons que la modélisation des prix des actifs financiers implique souvent de manière préalable la modélisation de l'*information disponible* et éventuellement de la façon dont cette information est traitée (formation des anticipations). En aval, la modélisation des prix permet également de préciser la nature de *stratégies d'investissement optimales* et la *demande de produits financiers* en fonction des préférences individuelles des agents. Les prix des actifs financiers jouent donc un rôle central dans la modélisation financière⁵⁹.

3.2 La spécificité des modèles financiers.

Outre la nature des grandeurs étudiées, un certain nombre de traits caractérise la modélisation financière et la distingue des approches souvent utilisées dans d'autres domaines scientifiques : usage important de *modèles probabilistes*, *d'approches partiellement structurelles*, *abondance de données* et *possibilités d'expérimentation cependant limitées*⁶⁰.

Une caractéristique des prix des actifs financiers et des taux d'intérêt est qu'une grande partie de leur évolution ne peut s'expliquer par des modèles déterministes simples⁶¹. *La plupart des modélisations financières reposent sur une représentation probabiliste des prix des actifs financiers et des taux d'intérêt*⁶².

sont observés qu'à des dates aléatoires, par exemple quand le volume cumulé des transactions (depuis la dernière observation) dépasse un seuil donné. Ces modélisations sont de plus en plus utilisées dans l'étude des données intrajournalières. Voir par exemple, Gouriéroux, Ghysels et Jasiak (1994).

⁵⁹Notons néanmoins que des modèles quantitatifs peuvent être utilisés pour d'autres grandeurs financières que les prix : volumes de transaction, dates d'intervention sur les marchés financiers, portefeuilles d'intermédiaires financiers et d'épargnants, stratégies d'investissement, information et anticipations d'agents économiques, parts des différentes catégories de titres dans le passif des sociétés anonymes, grandeurs comptables.

⁶⁰On peut par exemple envisager de tester une stratégie financière de gestion de portefeuilles à blanc ou sur un montant limité ; l'expérimentation peut également s'envisager dans certaines limites en matière d'octroi de crédit.

⁶¹Dans un système mécanique, il est possible à partir des lois physiques d'étudier la trajectoire d'un corps dans l'espace, de prévoir l'évolution de cette trajectoire à partir d'équations différentielles ordinaires ; la prévision à partir de la résolution de ce système d'équations différentielles peut se faire avec la précision souhaitée si les solutions présentent une régularité suffisante par rapport aux conditions initiales.

⁶²Il existe néanmoins quelques modèles où les prix des actifs financiers sont supposés suivre des processus déterministes fortement non linéaires, de type chaotique.

Ainsi, le problème de prévision se déplace de la détermination de la valeur du prix à une date future à la détermination de la *loi de probabilité du prix de l'actif*⁶³, ce dernier étant vu comme une variable aléatoire. Un problème de choix de portefeuille devient un choix d'un portefeuille dont la loi de probabilité (de la valeur) a de bonnes caractéristiques du point de vue de l'investisseur.

Par ailleurs, contrairement aux sciences expérimentales, il n'est en général pas possible en finance de reproduire toutes choses égales par ailleurs les conditions qui ont amené l'observation de la date courante. Ceci accroît l'importance de l'*inférence statistique*, puisque les paramètres non observés intervenant dans les lois de probabilité des prix doivent être estimés à partir d'échantillons finis et donnés de réalisations des prix passés.

Néanmoins, les données de prix d'actifs financiers sont abondantes ; ceci, ainsi que le développement important des capacités informatiques (sur le plan des matériels et des logiciels) de traitement et d'analyse de ces données, a beaucoup contribué aux progrès dans l'utilisation pratique des modèles financiers⁶⁴.

Une autre spécificité de la modélisation financière est qu'il existe de nombreuses *approches structurelles*, que ce soit des modèles d'équilibre à agent représentatif dans la lignée des travaux de Lucas (1978) ou des modèles de valorisation d'actifs financiers par absence d'opportunités d'arbitrage, qui induisent des contraintes fortes sur les distributions des prix⁶⁵.

Beaucoup de modèles financiers relient les *deux premiers moments conditionnels*, l'espérance de rentabilité des actifs financiers et leur variance. L'objectif est en fait de préciser

⁶³Il s'agit en général de la loi, conditionnelle à l'information disponible, des prix à des dates futures. Remarquons que cette information disponible n'est pas nécessairement la même pour tous les agents, car ceux ci peuvent disposer d'informations privées.

⁶⁴À titre de comparaison, il y a beaucoup plus de données disponibles que dans le domaine de la modélisation macroéconomique, puisqu'en finance les données temporelles sont fréquemment quotidiennes, voire intrajournalières, alors que les macroéconomistes travaillent souvent à partir de données annuelles ou trimestrielles. Il est dès lors plus facile en finance de départager des modèles aux spécifications différentes et d'estimer précisément un grand nombre de paramètres.

⁶⁵Dans d'autres domaines de la gestion, par exemple le marketing, il est beaucoup moins fréquent d'utiliser des modèles issus de la théorie du consommateur et la modélisation des comportements s'appuie davantage sur des analyses descriptives (typologies comportementales, analyse des données).

le concept intuitif de rémunération d'un surcroît de risque d'un actif financier par une augmentation de l'espérance de rentabilité⁶⁶.

Les modèles financiers se sont également attachés à préciser la loi de probabilité de la valeur d'un portefeuille d'actifs financiers, à partir de la *loi jointe des prix des divers actifs financiers*. Ceci a permis de préciser d'un point de vue théorique et statistique comment la diversification permettait de réduire le risque d'un portefeuille sans pour autant dégrader la rentabilité attendue du portefeuille.

3.3 Modèles d'évaluation de produits financiers.

Un *modèle d'évaluation de produits financiers* ou *opérateur de prix* est une fonction qui associe un *prix* aux caractéristiques d'un *flux monétaire* engendré par un produit financier. La connaissance des relations entre flux monétaires et prix est essentielle pour la *conception* et la *simulation* de produits financiers. Dans des *marchés financiers compétitifs*, où les coûts de transaction et les contraintes sont faibles, les possibilités de gains sans risque rares, on peut introduire la notion d'*absence d'opportunités d'arbitrage*. Dans ces marchés, les établissements financiers doivent utiliser des *modèles cohérents d'évaluation de produits financiers*. Ces modèles se caractérisent par la connaissance des prix d'actifs élémentaires fictifs, les *prix d'état*. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, il est possible de construire des modèles cohérents d'évaluation de produits financiers et de les associer à des *probabilités risque-neutre*.

⁶⁶Le risque n'est en général pas directement mesuré par la variance de la rentabilité, mais par des sensibilités à des *facteurs de risque*, obtenues à partir de la matrice de variance/covariance. Ces facteurs de risque peuvent être par exemple le risque de marché, les variations de la consommation agrégée ou encore des facteurs non directement observables. Les relations entre espérance de rentabilité et sensibilités sont obtenues par deux approches complémentaires : soit par des modèles d'équilibre dont les plus célèbres représentants sont le MEDAF (Modèle d'Équilibre des Actifs Financiers), le modèle d'équilibre général intertemporel de Merton (1973) et le CCAPM de Breeden (1979) ; soit en invoquant l'absence d'opportunités d'arbitrage dans des marchés compétitifs comme dans Ross (1976), Chamberlain et Rothschild (1983).

3.3.1 Nature compétitive des marchés financiers.

Dans le cadre de marchés parfaits, un fermier ne peut pas en général accroître le revenu de la vente de son lait en l'écraimant et en vendant la crème séparément, bien que le prix de la crème par unité de poids soit supérieur à celui du lait. L'avantage qu'il aurait à écraimer le lait serait purement illusoire. En effet, ce qu'il gagnerait sur la vente de la crème, il le perdrait en vendant son résidu de lait écrémé à un prix plus faible.

F. MODIGLIANI ET M. MILLER (1958).

Une des caractéristiques des marchés financiers est leur nature particulièrement *compétitive*. Même si la rubrique des faits divers se fait régulièrement l'écho de manipulations des cours boursiers (voir l'exemple de l'assèchement du marché par Salomon Brothers lors d'une adjudication de bons du Trésor américain⁶⁷), les marchés financiers sont le plus souvent atomisés et les parts de marché des principaux intervenants faibles.

Cette compétition entre les agents a pour conséquence naturelle une tendance à la disparition des opportunités de gain sans risque et sans mise de fonds (des *opportunités d'arbitrage*)⁶⁸. Dans un marché compétitif et sans contraintes, il ne devrait pas être possible de réaliser un profit en achetant deux unités d'un actif financier et en les revendant au détail ou

⁶⁷Voir Jegadeesh (1993), Jordan et Jordan (1996) pour des analyses. Ces derniers auteurs estiment que le montant de la manipulation est compris entre vingt et trente millions de dollars, pour une adjudication de 12,29 milliards de dollars.

⁶⁸Pour illustrer ce qu'est une opportunité d'arbitrage, Varian (1987) rapporte l'histoire suivante : Dans le New Hampshire un professeur d'économie et un fermier Yankee attendaient le car. Pour passer le temps le fermier suggéra un jeu.

"A quoi donc voudriez-vous jouer ?" répondit le professeur.

"Eh bien" dit le fermier, "Que pensez-vous de ce jeu : je vous pose une question et si vous ne pouvez pas y répondre vous me donnez un dollar. Puis vous me posez une question et si je ne peux pas y répondre je vous donne un dollar".

"Ça me paraît bien, dit le professeur, mais je dois vous prévenir : je ne suis pas n'importe qui, je suis un professeur d'économie".

"Oh, répondit le fermier, dans ce cas nous devrions changer les règles. Voilà ce que l'on va faire : si vous ne pouvez pas répondre à ma question vous me donnez toujours un dollar, mais si je ne peux pas répondre à la vôtre, je ne vous donnerai que cinquante cents".

en rassemblant divers actifs et en les revendant de manière jointe, car ces opérations se font sans mise de fonds et sans risque⁶⁹. Ainsi, l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage est-elle souvent retenue dans la théorie financière⁷⁰.

C'est une des facettes de l' "efficacité" des marchés financiers, distincte de l'efficacité informationnelle⁷¹ ou de l'efficacité allocative (Pareto-optimalité) des marchés financiers

"Bien, dit le professeur, cela semble équitable".

"O.K, dit le fermier, Voici ma question : Qu'est-ce qui monte la colline sur sept pattes et qui la redescend sur trois ?".

Le professeur réfléchit un moment à cette devinette et finalement répond : *"Sapristi, je ne sais pas... et alors, qu'est-ce qui monte la colline sur sept pattes et qui la redescend sur trois ?"*

Eh bien, dit le fermier, je ne sais pas non plus, mais si vous me donnez votre dollar, je vous donnerai mes cinquante cents !"

⁶⁹Ce raisonnement ne vaut que pour un marché parfait. En pratique, il y a bien des risques, notamment celui de la non simultanéité des opérations.

⁷⁰La difficulté de trouver des opportunités d'arbitrage est admise même par les détracteurs de l'hypothèse des marchés efficaces. Selon Shiller (1984) : *"... the ordinary investor's predictable patterns of behavior are prevented from causing big short-run profit opportunities by the limited amount of smart money in the economy."*

On retrouve l'idée d'absence d'opportunités d'arbitrage dans Bachelier (1900) : *"J'ai en effet reconnu, il y a plusieurs années, qu'il était possible en l'admettant d'imaginer des opérations où l'un des contractants gagnerait à tous les cours."*

Sans reproduire les calculs, élémentaires mais assez pénibles, je me contente de présenter un exemple.

L'opération suivante : achat d'une unité /1fr, vente de quatre unités /50c, achat de trois unités /25c, donnerait un bénéfice à tous les cours pourvu que l'écart du /25c au /50c soit au plus le tiers de l'écart du /50c au /1fr.

Nous verrons que des écarts semblables ne se rencontrent jamais en pratique."

⁷¹Pour reprendre Keynes (1924) dans la préface à la traduction française de *A Tract on Monetary Reform* :

"Chaque fois que le franc perd de sa valeur, le ministre des Finances est convaincu que c'est pour toutes sortes de raisons, sauf pour une raison économique. Pour lui, c'est à cause de la présence d'étrangers dans les couloirs de la Bourse, de forces spéculatives pernicieuses et malignes. Une telle attitude ressemble plutôt à celle du sorcier qui attribue la maladie du bétail au "mauvais œil" et la tempête à l'insuffisance des sacrifices faits à une idole quelconque." On peut remarquer que l'efficacité selon Fama est en premier lieu informationnelle. Selon Fama et Miller (1972), *"A market in which prices fully reflect available information is called efficient... at any point in time, market prices of securities provide accurate signals for resource allocation."* Selon Fama (1976), *"an efficient capital market is a market that is efficient in processing information."* Grossman (1976), Grossman et Stiglitz (1980), Diamond et Verrechia (1981), Admati

complets⁷².

3.3.2 Modèles d'évaluation de produits financiers.

Un *modèle d'évaluation de produits financiers* ou *opérateur de prix* est une fonction qui à tout *flux monétaire*⁷³ associe un prix. L'étude des opérateurs de prix est importante, que ce soit pour la création de nouveaux contrats financiers, ou la mesure des risques puisque ce sont les opérateurs de prix qui permettent de *simuler des prix de nouveaux produits* ou des *valeurs de portefeuilles d'actifs financiers*.

Un opérateur de prix est dit *cohérent* s'il est *linéaire, positif et compatible avec les prix observés* de produits financiers négociés⁷⁴. La linéarité est liée à l'absence de frictions (coûts de transaction, contraintes de vente à découvert). Dans un tel contexte, le prix d'une combinaison linéaire de flux monétaires est la combinaison linéaire des prix des flux monétaires. La positivité signifie que le prix d'un flux monétaire positif calculé par un opérateur de prix doit être positif. La compatibilité avec les prix observés implique que les prix de produits financiers négociés sur les marchés doivent être égaux aux prix calculés par le modèle d'évaluation.

Un établissement financier qui tarifierait les produits financiers qu'il commercialise avec un modèle d'évaluation non cohérent s'exposerait immédiatement à de lourdes pertes⁷⁵. Ces contraintes de cohérence d'un modèle financier apparaissent comme des *contraintes*

(1985) discutent de l'efficacité informationnelle des marchés financiers dans un contexte où les agents ont des informations privées.

⁷²Voir infra pour une discussion sur les marchés financiers complets.

⁷³Nous nous sommes implicitement limités au cas d'actifs financiers européens, qui n'impliquent aucune décision de la part du détenteur, contrairement aux actifs américains, où le détenteur doit décider d'une date optimale de paiement. Le terme anglais "payoff" est souvent utilisé en lieu et place de flux monétaire. La définition précise du flux monétaire et de son prix caractérisent un produit financier.

⁷⁴Dans la terminologie d'Harrison et Kreps (1979), Harrison et Pliska (1981), tout opérateur de prix ("*price system*" est linéaire et positif ; il est *cohérent* s'il est de plus compatible avec les prix observés de produits financiers négociés. Un opérateur de prix est parfois dit cohérent s'il est associé à un modèle d'équilibre général et à une spécification endogène des primes de risques ; voir He et Leland (1993), Bick (1987,1990), Pham et Touzi (1996).

⁷⁵Sauf à supposer que cet établissement a un pouvoir de marché et qu'il peut influencer sur les prix.

minimales, qui doivent être nécessairement vérifiées par tout modèle d'évaluation.

Un opérateur de prix fait implicitement référence à une *structure d'information*, via les ensembles sur lesquels il opère. Un flux monétaire doit notamment être calculable en fonction de l'information disponible à sa date de paiement.

La cohérence d'un modèle d'évaluation de produits financiers n'est pas indépendante de la structure d'information : un flux monétaire peut être positif de façon certaine pour un agent informé, sans que ce soit le cas pour un agent non informé. Si un tel flux monétaire a un prix négatif ou nul, le modèle d'évaluation ne sera pas un opérateur positif pour l'agent informé, alors qu'il est possible qu'il le soit pour le non informé.

Un opérateur de prix peut être cohérent avec un sous-ensemble d'actifs, mais pas de manière globale. Un tel problème peut survenir quand on réévalue des livres d'options sur un actif sous-jacent donné (voir Shimko (1993), Hodges (1996) pour des discussions)⁷⁶.

3.3.3 Prix d'actifs financiers élémentaires.

An important subfield of physics - Nuclear Physics - deals with the smallest particles of which matter is composed. Constructs developed by Kenneth Arrow and Gerard Debreu provide a similar foundation for financial economics. With a bit of hyperbole, the approach may be termed Nuclear Financial Economics.

W. SHARPE (1995).

Un *actif fictif élémentaire* ou actif contingent d'Arrow-Debreu est un actif qui paye une unité de *numéraire*⁷⁷ dans chaque état de la nature. Ces actifs sont *virtuels* car ils ne sont pas en général directement négociés sur les marchés financiers. La notion d'actifs élémentaires implique de préciser l'ensemble des *états de la nature* et la manière dont ces états sont révélés

⁷⁶La pratique la plus courante pour la réévaluation de livres d'options européennes est de calculer des paramètres de volatilité implicite à partir de prix observés puis, de procéder à des interpolations pour obtenir des volatilités implicites correspondant à d'autres prix d'exercice et dates d'exercice ; une telle procédure ne garantit pas la positivité des prix d'état.

⁷⁷Un numéraire est un actif de prix positif et ne distribuant pas de dividendes, qui sert d'unité de compte.

au cours du temps (la structure d'information)⁷⁸. Un flux monétaire engendré par un actif financier se caractérise par la quantité d'unités de numéraire perçue dans les différents états de la nature. Ainsi, les actifs financiers peuvent être vus comme combinaisons linéaires d'actifs élémentaires⁷⁹.

Considérons un modèle d'évaluation cohérent. Les prix des actifs élémentaires calculés par ce modèle sont appelés *prix d'état* ou prix d'Arrow-Debreu. Un modèle d'évaluation cohérent étant supposé linéaire, il est complètement caractérisé par les prix d'état. En effet, tout actif financier se décomposant comme combinaison linéaire d'actifs élémentaires, son prix s'obtient comme la même combinaison linéaire des prix des actifs élémentaires. On peut également voir le prix d'un flux monétaire comme la valeur moyenne de ce flux monétaire pondérée par les prix d'état⁸⁰.

En fait les *prix d'état* ont formellement la structure d'une *loi de probabilité* portant sur les états de la nature : les prix d'état sont positifs (puisque le modèle d'évaluation est cohérent) et somment à un : ceci provient du fait que le prix d'une unité de numéraire délivrée à une

⁷⁸Le nombre des états peut être fini ou infini. On utilise les notions de *modèles discrets* et de *modèles continus* comme dans l'étude des lois de probabilité.

⁷⁹Les actifs élémentaires forment simplement une base sur laquelle il est possible de décomposer tout flux monétaire engendré par un produit financier. Selon Huang et Litzenberger (1988), "*a complex security is a bundle of state contingent claims.*" Le concept de prix d'état apparu dans la littérature économique théorique a connu une deuxième jeunesse au moment du développement des marchés organisés d'options sur indice boursier à Chicago avec les concepts de "superfund" et de "supershares" introduits par Hakanson (1976) ; voir aussi Hakanson (1978), Garman (1978), Nachman (1989) pour des discussions. Ross (1976) parle d'"efficient fund" et montre que des options sur ce portefeuille d'actifs permettent de s'assurer contre tous les risques ; voir aussi John (1981), Green et Jarrow (1987) pour une discussion.

⁸⁰Dans le cas d'un continuum d'états, il s'agit de l'espérance du flux monétaire par rapport à une mesure. Cette possibilité d'associer une mesure de probabilité à un modèle d'évaluation linéaire et positif provient d'un des théorèmes de représentation de Riesz. Voir par exemple Duffie (1994). Madan et Milne (1994) introduisent une notion différente. Ils considèrent un continuum d'états et des flux monétaires de variance finie. L'ensemble des flux monétaires formant un espace de Hilbert séparable, il existe des bases dénombrables sur lesquelles il est possible de décomposer tout flux monétaire. La connaissance des prix des éléments de la base permet alors d'évaluer tout produit financier. Cette approche s'apparente à la résolution de l'équation fondamentale d'évaluation dans le modèle de Black et Scholes par des développements en série de Fourier. Contrairement aux actifs contingents, les éléments d'une base ne sont pas "atomiques".

date future, calculé par un modèle d'évaluation cohérent est égal à une unité de numéraire aujourd'hui. Le prix d'un flux monétaire engendré par un produit financier, d'après un modèle d'évaluation cohérent peut alors être vu comme l'espérance sous cette nouvelle probabilité, appelée *probabilité risque-neutre*, du flux monétaire. De même que les prix d'état, cette probabilité risque-neutre caractérise complètement le modèle d'évaluation⁸¹.

L'*existence* d'un modèle d'évaluation cohérent de produits financiers n'est pas immédiate. Un des résultats importants de la finance moderne, est de montrer l'équivalence entre l'*absence d'opportunités d'arbitrage* et l'*existence* d' (au moins) un modèle cohérent d'évaluation de produits financiers (ou encore entre l'absence d'opportunités d'arbitrage et l'existence d'une probabilité risque neutre)⁸². Remarquons qu'à ce stade et sous réserve

⁸¹Cette probabilité est équivalente à la probabilité initiale, c'est-à-dire qu'elle admet les mêmes ensembles de mesure nulle ; ceci résulte de la positivité des prix d'état.

La probabilité risque-neutre est caractérisée par sa densité (ou dérivée de Radon-Nykodim) par rapport à la probabilité initiale (voir par exemple Duffie (1988)). Cette densité est souvent appelée *mesure martingale équivalente* ("equivalent martingale measure" ou "state price density"). Quand elle est actualisée par un numéraire, on parle de "*déflateur de prix contingents*" ("*state price deflator*").

Il se peut que la probabilité initiale admette une densité par rapport à la mesure de Lebesgue (notamment quand les prix des actifs sont modélisés par des processus de diffusion). La densité de la probabilité risque-neutre par rapport à la mesure de Lebesgue peut être vue comme la probabilité risque-neutre de transition (d'un état à une date donnée à un autre état à une date future) des prix des actifs sous-jacents. Corrigée d'un terme d'actualisation, cette densité est appelée *noyau d'évaluation* ("*pricing kernel*"), *fonction de prix d'état* ou *fonction de Green*. Dans le cas de modèles en temps continu, la fonction de Green joue le rôle des prix d'état des modèles discrets.

⁸²Il existe diverses variantes de ce théorème fondamental, selon que les stratégies financières sont en temps discret ou en temps continu, selon que l'ensemble des opportunités d'investissement est de dimension finie ou infinie. Le cas du temps continu et des espaces de dimension infinie introduit des complications techniques supplémentaires : restrictions sur les stratégies admissibles, utilisation de martingales locales, définition précise des opportunités d'arbitrage ("*free lunches*")...

La relation entre absence d'opportunités d'arbitrage et existence d'une probabilité risque-neutre apparaît dans un cadre statique dans Ross (1976), dans un cadre dynamique dans Ross (1978), Cox et Ross (1976) et formalisé et généralisé par Harrison et Kreps (1979), Harrison et Pliska (1981).

Dalang, Morton et Willinger (1990), Kabanov et Kramkov (1993), Schachermayer (1994) étudient les modèles en temps discret quand la dimension de l'espace des états n'est pas finie.

Dans le cas de modèles en temps continu et quand les prix des actifs sont bornés, Delbaen (1992) montre l'équivalence entre l'existence d'une probabilité risque-neutre et l'hypothèse de "*no free lunch with bounded*

que l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage est vérifiée, il y a en général plusieurs modèles cohérents d'évaluation de produits financiers.

Sous une probabilité *risque-neutre* les gains des *stratégies financières autofinancées* (c'est-à-dire sans mise ou retrait de fonds après la date initiale) et sans mise de fonds initiale sont nuls en espérance.

Certains auteurs considèrent que la probabilité historique est déjà une probabilité risque-neutre. Cette condition est plus restrictive que l'existence d'une probabilité risque-neutre équivalente à la probabilité initiale (voir Mandelbrot (1966), Samuelson (1970) pour des discussions). La notion de probabilité risque-neutre dépend du choix de numéraire ; Conze et Viswanathan (1991), Geman, El Karoui et Rochet (1995) examinent cette dépendance. En particulier, quand le numéraire est le "*numeraire portfolio*" (aussi connu comme le "*growth portfolio*"), c'est-à-dire le portefeuille qui maximise l'espérance du rendement logarithmique, Long (1990), Bajoux et Portait (1994) montrent que la probabilité historique est risque-neutre.

3.4 Évaluation de produits financiers dérivés.

So we find ourselves in the awkward position of being able to derive unambiguous values only for redundant assets, and unable to value options which have social value.

N. HAKANSON (1978).

La théorie de l'*évaluation par arbitrage* est devenue essentielle en finance car elle fournit un cadre pour la **fabrication** de *produits financiers*. À partir de la connaissance des prix d'*actifs sous-jacents*, elle permet d'évaluer les *prix de revient* et des *stratégies de couverture* pour une large catégorie de *produits financiers dérivés*. L'idée de base est la *duplication des flux monétaires des produits dérivés* par des stratégies d'investissement utilisant les actifs *risk*". Ansel et Stricker (1992, 1993) obtiennent des résultats voisins. Delbaen et Schachermayer (1994a) montrent que cette équivalence ne tient plus quand les prix des actifs ne sont pas bornés ; Delbaen et Schachermayer (1994b) fournissent des résultats complémentaires.

sous-jacents. Dans les *marchés financiers complets*, tous les produits financiers dont les flux monétaires sont calculables en fonction du prix d'actifs sous-jacents sont dupliquables et peuvent donc être fabriqués à partir des actifs sous-jacents⁸³. Dans les *marchés financiers incomplets*, il existe des produits financiers qui ne peuvent être parfaitement reproduits à partir des actifs sous-jacents.

3.4.1 Marchés complets et duplication.

Un produit financier est dit *dupliquable* quand il est parfaitement reproductible par une stratégie autofinancée construite à partir d'actifs déjà négociés⁸⁴. Un tel produit est en fait *redondant*, car il ne modifie pas l'*ensemble des opportunités d'investissement*. Le prix d'un tel produit financier en l'absence d'opportunités d'arbitrage est simplement la mise de fonds initiale dans la stratégie dupliquante. On parle alors d'*évaluation par absence d'opportunités d'arbitrage*⁸⁵.

Un marché financier est dit *complet* quand tout nouveau produit financier est dupliquable^{86 87}.

⁸³Ainsi, dans un marché financier complet les actifs contingents d'Arrow-Debreu peuvent eux-mêmes être fabriqués à partir des actifs sous-jacents et les prix d'état sont les prix de revient des actifs contingents.

⁸⁴Il existe une notion un peu plus faible de la duplication : il s'agit de pouvoir approximer de manière arbitraire le flux monétaire du produit financier par des flux monétaires de stratégies autofinancées.

⁸⁵Voir par exemple Ingersoll (1987), Varian (1987), Huang et Litzenberger (1988), Demange et Rochet (1992), Duffie (1994), Dana et Jeanblanc-Picqué (1994) pour des discussions sur l'évaluation de produits financiers dupliquables.

⁸⁶Dans un tel marché, il n'y a d'ailleurs pas lieu de créer de "nouveaux produits" puisque ceux-ci sont redondants.

⁸⁷Il y a deux approches légèrement différentes de la complétude des marchés. Pour les économistes, cela signifie qu'il y a suffisamment de marchés ouverts pour que *tous les risques soient assurables*. La notion souvent utilisée en finance est légèrement différente : on considère un actif sous-jacent de prix exogène, un actif sans risque et le marché (pour cette classe d'actifs) est dit complet si on peut dupliquer tout produit financier dont le flux monétaire est calculable en fonction du prix de l'actif sous-jacent *avec l'actif sous-jacent et l'actif sans risque*. Ceci n'implique pas que des produits dérivés *d'autres actifs sous-jacents* soient dupliquables. Il se peut également qu'un flux monétaire ne soit pas dupliquable avec l'actif sous-jacent et l'actif sans risque, mais le devienne si l'on peut utiliser *d'autres actifs dans le portefeuille de couverture*.

Un deuxième théorème fondamental de la finance établit l'équivalence entre le caractère complet d'un marché et l'existence d'un unique modèle cohérent d'évaluation de produits financiers (et donc d'une *unique probabilité risque-neutre*)⁸⁸. Le prix produit par le modèle d'évaluation est alors un véritable *coût de production* du produit financier. On conçoit que les marchés complets sont des objets tout à fait extraordinaires, au sens littéral du terme⁸⁹.

On peut remarquer en particulier que dans un marché complet, les prix des produits financiers sont donnés par l'espérance du flux monétaire associé, sous l'unique probabilité risque-neutre⁹⁰. Quand il existe des variables d'état dont la dynamique est markovienne⁹¹, alors les prix des actifs sont solutions d'équations aux dérivées partielles.

Dans des marchés complets markoviens, l'évaluation de nouveaux produits financiers et

⁸⁸Lamberton et Lapeyre (1991) donnent une démonstration pour des modèles à temps et états discrets, Dalang, Morton et Willinger (1990) pour des espaces de dimension infinie en temps discret ; voir Harrison et Pliska (1983), Müller (1989), Jarrow et Madan (1991), Chatelain et Stricker (1994) pour les modèles en temps continu. Le cas des espaces d'états de dimension infinie pose problème notamment en présence de sauts dans les prix des actifs. Artzner et Heath (1995) donnent un exemple où le marché est complet et où il y a plusieurs probabilités martingales en utilisant une infinité d'actifs avec des trajectoires de prix discontinues.

⁸⁹Ainsi, selon Huang et Litzenberger (1988), "*one can see, by casual empiricism, that in actual securities markets the number of corporate securities is less than the number of the states of nature. Hence we would not in general be able to create a complete set of state contingent claims by forming portfolios of existing corporate securities.*" L'incomplétude est due à une insuffisance du nombre de produits financiers par rapport au nombre d'états de la nature. Le fait de pouvoir créer des produits synthétiques en gérant dynamiquement des actifs de base, augmente le nombre de produits négociés. Les marchés complets ont des propriétés particulières qu'on a bien peu de chances de rencontrer en pratique : existence d'équilibres et d'agents représentatif et surtout Pareto-optimalité ; de plus quand il existe des asymétries d'information, celles-ci n'ont aucun effet car les prix des actifs financiers véhiculent toute l'information ("fully revealing equilibria").

⁹⁰La notion selon laquelle le prix d'un actif est l'espérance actualisée de son flux monétaire futur sous une probabilité risque-neutre apparaît dans Arrow (1953) pour un modèle à deux périodes. Drèze (1971) considère des flux futurs exprimés en unités de numéraire et les probabilités risque-neutre associées à ces numéraires. Ces auteurs considèrent la relation entre équilibre et probabilité risque-neutre et ne font pas encore la liaison entre absence d'opportunités d'arbitrage et existence de probabilités risque-neutre.

⁹¹Un processus est markovien quand la loi de probabilité conditionnelle (à l'information disponible) des valeurs futures du processus ne dépend en fait que de la valeur courante du processus. Dans la suite de notre présentation nous considérerons implicitement des processus de diffusion, un cas particulier de processus de Markov.

la détermination de stratégies de couverture se ramène à des *problèmes d'analyse numérique*. Les prix des actifs dérivés sont notamment déterminés indépendamment des préférences des agents, de leur revenu et de leur richesse initiale⁹²...

Un modèle de marchés complets markoviens est donc un outil très puissant et commode pour calculer les prix de nouveaux produits financiers à partir des prix d'actifs sous-jacents⁹³. Cette force opérationnelle explique pour une bonne part le succès rencontré par cette famille de modèles⁹⁴.

3.4.2 Marchés financiers incomplets.

Il n'y avait plus de vérité, ni logique, l'idée de valeur était pervertie, au point de perdre tout sens réel. Le bruit courait que Gundermann, contrairement à ses habitudes de prudence, se trouvait engagé dans d'effroyables risques ; depuis des mois qu'il nourrissait la baisse, ses pertes avaient grandi à chaque quinzaine, au fur et à mesure de la hausse, par sauts énormes ; et l'on commençait à dire qu'il pourrait bien avoir les reins cassés. Toutes les cervelles étaient à l'envers, on s'attendait à des prodiges.

E. ZOLA (L'ARGENT, 1891).

⁹²L'évaluation des actifs dérivés ne s'affranchit néanmoins pas de l'économie ; le prix de duplication d'un actif dérivé dépend en général de la spécification de la dynamique temporelle des actifs sous-jacents. Or, par exemple, toute spécification a priori de ces dynamiques n'est pas forcément compatible avec l'existence d'un équilibre économique.

⁹³Le formalisme mathématique peut sembler lourd, mais il est souvent le plus adapté aux problèmes pratiques ; ainsi, peut-on remarquer la simplicité de la formule d'évaluation d'options de Black et Scholes. La modélisation financière évolue entre les deux écueils mentionnés par Kolm (1966) à propos de l'économie :

“Chacun pense que la quantité optimale de mathématiques en économie se trouve par miracle être précisément ce qu'il a eu l'occasion d'en apprendre par ailleurs : moins conduit à un verbiage stérile et plus, à des raffinements sophistiqués, controvés, démonstrateurs d'évidence, les deux premiers sacrifiant également la science à l'esthétisme des allitérations ou à l'élégance des équations. Nous osons suggérer qu'il est aussi possible d'adapter ses connaissances aux besoins”.

⁹⁴Un autre élément marquant des marchés financiers complets est la simplicité avec laquelle on peut caractériser les stratégies optimales de gestion de portefeuilles grâce à la méthode de dualité dite des martingales, développée par Cox et Huang (1989), Karatzas, Lehoczky et Shreve (1987). Dans le cas markovien, on aboutit à des équations aux dérivées partielles *linéaires*.

En général, même quand les marchés sont parfaits (absence de frictions et de coûts de transaction, absence de contraintes sur les stratégies d'investissement), il existe de nombreux produits financiers qui ne sont pas parfaitement dupliquables ; leurs prix ne peuvent être déterminés de manière unique à partir de l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage⁹⁵. Il y a en fait multiplicité de modèles d'évaluation de produits financiers. Un tel marché financier est dit *incomplet*^{96 97}.

On peut caractériser les probabilités risque-neutre par une spécification des primes de risque associées aux risques non négociables sur les marchés financiers (voir Pages (1987) pour certaines formes d'évolution des prix fondées sur des mouvements browniens). On peut distinguer la probabilité risque-neutre minimale de Follmer-Schweizer pour laquelle les primes des risques non négociables sont nulles.

Dans le cas de marchés incomplets, trois problèmes ont particulièrement fait l'objet de recherches : la *super couverture* ("super replication"), la *gestion optimale de portefeuilles* et la *couverture quadratique* :

⁹⁵La présence de coûts de transaction technologiques et informationnels va limiter le nombre de produits financiers négociés et les fonctions de partage des risques des marchés financiers. Il existe une abondante littérature sur l'évaluation de produits "dérivés" de l'actif d'une entreprise (actions, obligations, warrants), en présence d'information asymétrique sur la valeur de l'actif. Cette littérature évalue le prix des produits dérivés, leur configuration optimale ("security design") et les marchés de produits dérivés ouverts. Il est possible par exemple qu'un nombre insuffisant de produits soient négociés pour rendre le marché complet. Voir Demange et Laroque (1995) pour une discussion.

⁹⁶Dans un marché incomplet, la négociabilité d'un nouveau contrat financier peut augmenter l'ensemble des opportunités d'investissement. Il est d'usage de distinguer deux sources d'incomplétude, selon que les marchés restent parfaits, i.e sans coûts de transaction, ou pas. En présence de coûts de transaction, les opérateurs de prix ne sont plus linéaires : la valeur de la somme de deux flux monétaire peut être supérieure à la somme des valeurs des flux monétaires ; il y a des économies d'envergure dans le processus de duplication et on perd la propriété d'additivité (voir par exemple Jouini et Kallal (1995))

⁹⁷La notion de marchés incomplets est souvent utilisée de manière plus restrictive ; il s'agit d'un cadre formel où le nombre de sources de risques est supérieur au nombre d'actifs sous-jacents ; c'est par exemple le cas des modèles à volatilité stochastique. Il existe un cadre plus général que celui des marchés incomplets qui est celui des "marchés contraints". Ceci englobe également le cas de contrainte de positivité de la richesse ou d'interdiction de ventes à découvert. La plupart des résultats des marchés incomplets s'étendent au cas des marchés contraints ; voir Cvitanic et Karatzas (1992, 1993).

- Le problème de *super couverture* consiste à rechercher l'investissement initial le plus faible associé à une stratégie autofinancée qui domine le produit financier qu'on cherche à couvrir⁹⁸. Ce problème a été examiné par El Karoui et Quenez (1991), Jacka (1992), El Karoui et Jeanblanc-Picqué (1992), Cvitanic et Karatzas (1993), Avellaneda, Levy et Parás (1995) dans le cas de marchés incomplets, et par Bensaïd, Lesne, Pages et Scheinkman (1992) dans le cas de coûts de transaction. On peut montrer que ce prix de super couverture est la plus grande valeur de l'espérance de l'actif à couvrir calculée sur toutes les probabilités risque-neutre possibles.
- Les méthodes de dualité permettent de caractériser la stratégie optimale de gestion de portefeuilles dans un cadre dynamique. Ces méthodes ont été introduites pour les marchés incomplets par He et Pearson (1991), Karatzas et al. (1991) et étendues au cas des marchés contraints par Cvitanic et Karatzas (1992). Elles mettent en évidence le rôle de la *probabilité risque-neutre minimax*, solution d'un problème d'optimisation dual dans l'ensemble des probabilités risque-neutre et qui permet (formellement) de réaliser une *complétion fictive* du marché⁹⁹.
- Le problème de *couverture quadratique* consiste à rechercher une stratégie de couverture qui minimise l'espérance du carré du résidu de couverture. Ce problème traditionnel en finance a été introduit dans un cadre dynamique simple par Duffie et Richardson (1991), et a fait l'objet de plusieurs articles de Schweizer (1992, 1994)¹⁰⁰. La caractérisation de la stratégie optimale de couverture et le prix de couverture¹⁰¹ font

⁹⁸Ici dominer signifie que le flux monétaire du portefeuille de couverture, issu de la stratégie autofinancée est supérieur ou égal à celui du produit financier à couvrir, dans tous les états du monde de probabilité non nulle.

⁹⁹Il s'agit d'introduire de nouveaux actifs complétant le marché, mais dont la demande est nulle. Une fois le marché ainsi complété, il est possible de se ramener à la méthodologie de Cox et Huang (1989). Davis (1994) propose la construction d'un modèle dévaluation à partir de la mesure minimax. Voir également He et Pagès (1993), El Karoui et Jeanblanc-Picqué (1994), Lioui et Poncet (1996), Lioui, Nguyen et Poncet (1996), Cuoco (1996) pour le cas où une partie de la richesse terminale est exogène (revenu aléatoire ou actif à couvrir). Cvitanic (1996) donne une présentation synthétique des techniques de dualité en finance.

¹⁰⁰Voir également Di Masi, Kabanov et Runggaldier (1994) pour une application aux modèles à volatilité stochastique.

¹⁰¹Le prix de couverture est l'investissement initial dans la stratégie de couverture qui permet de minimiser l'espérance du carré du résidu de couverture. On peut montrer qu'on construit bien ainsi un opérateur de

intervenir une probabilité risque-neutre particulière, la probabilité quadratique optimale (variance optimal measure) de Schweizer (1995) et Delbaen et Schachermayer (1995) (voir Gouriéroux, Laurent, Pham (1996)).

L'évaluation de nouveaux produits financiers dans un cadre de marchés financiers incomplets avec des agents aux préférences hétérogènes pose des problèmes économiques complexes. En théorie, il n'est plus alors légitime de considérer que les prix des actifs financiers sous-jacents sont exogènes. L'ouverture d'un nouveau marché devrait entraîner des réallocations dans les portefeuilles d'actifs des agents et des modifications des prix des actifs sous-jacents lorsqu'un nouvel équilibre se réalise.

On est néanmoins fréquemment amené en pratique, à supposer que la négociabilité d'un nouveau produit financier n'a que peu d'effet sur la dynamique des prix des actifs sous-jacents. Au vu des études empiriques menées après l'ouverture de marchés organisés d'options à Chicago¹⁰², cette hypothèse, bien que simplificatrice n'est pas déraisonnable (en particulier à court terme).

3.5 Un développement des méthodes d'inférence.

On peut distinguer deux principales relations entre l'inférence statistique et la modélisation financière. La première approche part des données et a pour but de mieux spécifier les modèles théoriques, tandis que la seconde vise à estimer des *paramètres non observés* dans des modèles théoriques.

3.5.1 Des données vers les modèles.

L'expérience est la seule source de la vérité, elle seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau, elle seule peut nous donner la certitude.

H. POINCARÉ (LA SCIENCE ET L'HYPOTHÈSE, 1902).

prix.

¹⁰²Voir par exemple, Conrad (1989), Hamon et Jacquillat (1992).

Une première direction est d'utiliser des données de prix d'actifs financiers et de produits dérivés (en général il s'agit de chroniques de prix) et d'essayer d'ajuster des modèles descriptifs et empiriques, de mettre en évidence des *faits stylisés* : hétéroscédasticité conditionnelle¹⁰³, volatilité stochastique¹⁰⁴, asymétries dans les rentabilités¹⁰⁵, forme des queues de distribution conditionnelles et non conditionnelles¹⁰⁶, racines unitaires et cointégration¹⁰⁷, mémoire longue et persistance de la volatilité¹⁰⁸, agrégation des rentabilités sur différents horizons, propriétés des données à haute fréquence, etc.

On peut partir de certains modèles descriptifs comme les modèles GARCH faibles¹⁰⁹ avec l'idée qu'il seront ensuite utiles pour spécifier un modèle théorique. Les modèles en temps déformé et les processus subordonnés sont une autre manière de prendre en compte la dynamique des prix et le caractère stochastique de la volatilité.

Au fur et à mesure se construit un ensemble de connaissances sur les caractéristiques des séries temporelles financières. Ces connaissances peuvent aider à la *spécification des dynamiques théoriques des prix* et de leur liaison avec les prix des actifs sous-jacents.

3.5.2 Des modèles théoriques vers les données.

C'est toujours le phénomène concret qui décide si une théorie doit être acceptée ou repoussée. Il n'y a pas, et il ne peut y avoir, d'autre criterium de la vérité d'une théorie que son accord plus ou moins parfait avec les phénomènes concrets.

W. PARETO (MANUEL D'ÉCONOMIE POLITIQUE).

¹⁰³Voir par exemple Gouriéroux (1992), Bollerslev, Engle et Nelson (1993) pour une présentation des modèles ARCH en finance ou Bollerslev, Chou et Kroner (1992) pour une revue de la littérature.

¹⁰⁴Ghysels, Harvey et Renault (1996) font une revue de la littérature sur les modèles à volatilité stochastique. Taylor (1986) et Harvey, Ruiz et Shephard (1994) présentent de tels modèles en temps discret.

¹⁰⁵Voir par exemple Campbell et Hentschel (1991), Gouriéroux et Monfort (1992) pour des discussions.

¹⁰⁶De Vries (1991), Ghose et Kroner (1995) comparent les indices de queues des modèles GARCH et les lois stables.

¹⁰⁷Voir par exemple Baillie et Bollerslev (1989) pour une application aux taux de change.

¹⁰⁸Dinz, Granger et Engle (1993), Henry et Payne (1996), Andersen et Bollerslev (1996) sont des exemples d'application.

¹⁰⁹Ces modèles, introduits par Drost et Nijman (1993), gardent les mêmes propriétés pour tout découpage de l'intervalle de temps.

On peut également partir de modèles théoriques d'évaluation de produits financiers et de mesure des risques, en estimer les paramètres non observés et tester ces modèles contre des spécifications alternatives. Lo (1986), Clément, Gouriéroux et Monfort (1993), Melino (1994), Gouriéroux, Monfort et Tenreiro (1994), Jacquier et Jarrow (1995), Renault (1996), Bates (1996) illustrent cette approche. Cette phase d'estimation est un préalable indispensable à toute *utilisation pratique d'un modèle financier*.

L'approche traditionnelle consiste à privilégier l'utilisation des données de prix d'actifs sous-jacents, sans utiliser l'information sur les prix des actifs dérivés¹¹⁰. On peut distinguer quelques approches et problématiques lorsqu'il s'agit d'estimer des paramètres inconnus dans des modèles financiers à partir d'observations discrètes :

- Il est souvent difficile d'écrire la loi conditionnelle à des dates discrètes d'un processus de diffusion. Les méthodes d'inférence indirecte (Gouriéroux, Monfort et Renault (1993)), les méthodes de moments simulés (Duffie et Singleton(1993)) et les méthodes de moments fondés sur le générateur infinitésimal (Hansen et Scheinkman(1995)) permettent de contourner ce problème¹¹¹.
- Les modèles financiers font souvent intervenir des variables d'état (non observées) pour expliquer la dynamique des prix. Ainsi, dans les modèles à volatilité stochastique, la volatilité instantanée conditionne l'évolution future des prix, mais n'est pas observée¹¹². Dans le domaine de la gestion de portefeuilles, les modèles à facteurs font dépendre les dynamiques des prix des actifs financiers d'un nombre réduit de facteurs de risque inobservables. L'inférence doit permettre de retrouver à la fois les paramètres de la

¹¹⁰Historiquement, l'information sur les prix des actifs dérivés était moins facilement accessible. Une autre justification de la non utilisation de ces données est leur présumée moindre qualité, du fait d'éventuels problèmes de liquidité et de mauvaise évaluation des prix des actifs dérivés. Comme nous le discutons dans la section consacrée à la compatibilité entre prix théoriques et prix observés, la principale raison nous semble toutefois d'ordre conceptuel.

¹¹¹Voir Broze, Scaillet et Zakoïan (1995), de Jong (1995), Frachot, Lesne et Renault (1995), Conley, Hansen, Luttmer et Scheinkman (1996), Aït-Sahalia (1996), pour des applications aux modèles de taux d'intérêt.

¹¹²Un exemple similaire concerne les modèles dits à changement de régime, introduits par Hamilton (1989), où les deux premiers moments conditionnels sont gouvernés par une chaîne de Markov inobservable. Ces modèles peuvent être très utiles pour mieux comprendre et évaluer les krachs sur les marchés financiers.

dynamique de ces facteurs et la sensibilité des différents titres aux facteurs de risque¹¹³.

- Un modèle d'évaluation de produits financiers se caractérise par la loi des prix des actifs sous-jacents sous la probabilité risque-neutre. Or, les observations de prix correspondent à un tirage effectué *sous la probabilité historique*. Le passage entre probabilité risque-neutre et probabilité historique se fait à l'aide de primes de risque. En temps continu, ces primes de risque affectent la moyenne conditionnelle et pas la volatilité des rentabilités. Les approches semi-paramétriques permettent d'estimer directement des paramètres de la probabilité risque-neutre sans avoir à spécifier la moyenne conditionnelle et les primes de risque¹¹⁴.

De même que pour les évaluations de prix et de couverture de produits financiers dérivés, ces méthodologies sont très coûteuses sur le plan numérique : la fonction de vraisemblance des données n'a en général pas de forme explicite, et les méthodes simulées sont souvent nécessaires.

4 Des outils d'aide à la gestion.

The rapid five-year growth in over-the-counter derivatives reflects a growing confidence in the issuing institutions' modeling and evaluation skills. I think that confidence comes not just from improved technology, but from literally having used those types of models in real-world practice on a large scale for a considerable periode of time.

R. MERTON (1995).

Nous avons vu que la modélisation des prix des actifs financiers fait largement appel à l'économie financière. Mais la modélisation financière est également caractérisée par son *caractère opérationnel*. Ceci est à replacer dans un contexte institutionnel : les établissements

¹¹³Voir Diebold et Nerlove (1989), Engle, Ng et Rothschild (1990), Gouriéroux, Monfort et Renault (1991), Gouriéroux (1992), Gouriéroux et Monfort(1995) pour des discussions sur la spécification et l'estimation de tels modèles.

¹¹⁴Voir par exemple Genon-Catalot et Jacod (1993), Danesi, Genon-Catalot et Laurent (1995).

financiers mettent en place des équipes de recherche et de développement dont la mission est notamment de fournir des outils d'évaluation de nouveaux produits et des méthodologies de mesure des risques¹¹⁵.

L'utilisation de modèles financiers dans un cadre opérationnel fait apparaître de nouveaux problèmes : De nombreux modèles théoriques d'évaluation de produits financiers ne sont pas *compatibles avec les prix observés d'actifs financiers négociés* et leur utilisation pratique nécessite des aménagements. Il faut également préciser ce que sont les *entrées* et les *sorties* d'un modèle d'évaluation de produits financiers et discuter de sa *robustesse* et de son *domaine d'utilisation*.

4.1 Compatibilité des modèles et des prix observés.

Il est possible d'étudier mathématiquement l'état statique du marché à un instant donné, c'est-à-dire d'établir la loi de probabilité des variations de cours qu'admet à cet instant le marché... La détermination de la loi de probabilité qu'admet le marché à un instant donné sera l'objet de cette étude... Si à l'égard de plusieurs questions traitées dans cette étude, j'ai comparé les résultats de l'observation à ceux de la théorie, ce n'était pas pour vérifier des formules établies par des méthodes mathématiques, mais pour montrer seulement que le marché, à son insu, obéit à une loi qui le domine : la loi de la probabilité.

L. BACHELIER (1900).

Un modèle cohérent d'évaluation de produits financiers engendre des *prix compatibles avec les prix d'actifs négociés* sur des marchés liquides¹¹⁶. Les modélisations usuelles n'ont pas en général cette propriété. En outre, la *forme usuelle* d'un modèle d'évaluation fait intervenir des *quantités non observables* (paramètres, variables d'état). On devrait de ce fait parler de *famille de modèles d'évaluation*. Nous discutons d'ajustements permettant de déterminer les quantités non observables à partir de *l'information disponible* et de réduire

¹¹⁵Ainsi, M. Albouy et B. Husson (1996) remarquent-ils que *la recherche en finance s'est à la fois éloignée et rapprochée des préoccupations des professionnels... Elle s'en est rapproché chaque fois que les chercheurs ont été sollicités pour participer au développement d'une ingénierie financière en cours d'élaboration.*

¹¹⁶Voir Harrison et Kreps (1979), Harrison et Pliska (1981).

voire de supprimer les écarts entre les prévisions de prix d'un modèle et les observations. Ceci permet de mettre en évidence une *forme opérationnelle d'un modèle d'évaluation* de produits financiers où les prix observés d'actifs négociés apparaissent comme les *véritables entrées* du modèle. Un modèle d'évaluation de produits financiers opérationnel permet ainsi de calculer des prix de revient de produits complexes ou peu négociés à partir des prix de produits couramment négociés tout en conservant les propriétés de cohérence dont nous avons déjà discuté¹¹⁷.

4.1.1 Le "calage" des modèles d'évaluation.

Au commencement de la découverte, il y a l'anomalie, à savoir la révélation d'un écart entre le comportement de la nature et certaines prévisions du modèle scientifique normal.

T. KUHN, LA STRUCTURE DES RÉVOLUTIONS SCIENTIFIQUES (1972).

Considérons la *forme usuelle* que prend un modèle théorique d'évaluation de produits financiers. À chaque flux monétaire il associe un prix, ce prix dépendant outre la forme du flux monétaire, de *variables d'état* et de *paramètres* intervenant dans la dynamique des variables d'état. Rappelons que les variables d'état permettent de représenter avec parcimonie l'ensemble de l'information pertinente contenue dans les prix passés ou en d'autres termes l'"état du monde"¹¹⁸. Cette *forme usuelle* résulte de la démarche classique de construction suivante : spécification de la dynamique des variables d'état, écriture des flux monétaires en fonction de ces variables d'état et résolution d'une équation aux dérivées partielles qui fournit la fonction de prix d'état et le prix d'un flux monétaire arbitraire en fonction des variables d'état (à la date courante) et des paramètres. Ce qu'on appelle usuellement "modèle"

¹¹⁷L'idée que la fonction des modèles est de permettre l'évaluation de produits financiers complexes, à partir de l'observation de prix de produits financiers plus simples se retrouve dans Derman (1996) : "*Most of the successful and reliable applications of finance in the trading arena involve finding the theoretical fair value of complex instruments relative to simple ones. It is not disparaging to observe that relative-value applications are often sophisticated forms of interpolation and extrapolation, rather than predictions.*"

¹¹⁸Les prix de l'actif sous-jacent et de l'actif sans risque sont les variables d'état dans la modélisation de Black et Scholes. Nous discutons plus bas de l'identification de variables d'état à des prix d'actifs.

est en fait une *famille de modèles d'évaluation* dépendant des valeurs des paramètres et des variables d'état.

Ceci met en évidence deux problèmes pratiques. Tout d'abord, les *paramètres et les valeurs des variables d'état* ne sont pas directement observés ; comment les déterminer ? Ensuite, *il est fréquent qu'un modèle d'évaluation ne soit pas compatible avec certains prix observés d'actifs financiers* ; il n'est donc pas cohérent car seules des contraintes de cohérence interne (linéarité, positivité) sont vérifiées. L'utilisation opérationnelle de modèles d'évaluation requiert la résolution de ces deux problèmes.

Examinons au préalable les *informations pertinentes* à la disposition de l'utilisateur d'un modèle d'évaluation. Il s'agit en général de *prix observés* d'actifs financiers négociés et rentrant dans le champ des actifs évaluable par le modèle¹¹⁹. Il peut s'agir de chroniques de prix et l'on se place dans le cadre usuel de l'estimation de paramètres décrit précédemment ; il peut s'agir uniquement de prix de la date courante et l'on parle alors fréquemment de "*calage*" des paramètres du modèle.

Comment déterminer les quantités non observées à partir de l'ensemble des prix observés ? La *compatibilité du modèle d'évaluation avec les prix observés* est le *critère de choix* le plus souvent retenu. On va alors rechercher des valeurs des paramètres et des variables d'état pour que le modèle d'évaluation de produits financiers soit cohérent. En général, dans une famille de modèles d'évaluation, peu de modèles sont compatibles avec les prix observés d'actifs financiers. Or, outre la valeur économique qu'on peut attribuer à des prix observés sur des marchés liquides et concurrentiels¹²⁰, la compatibilité avec les prix observés est une

¹¹⁹L'observabilité est une notion relative ; un courtier d'options sur indice boursier observe plus de prix de transaction qu'un agent économique en périphérie du marché. Sur les marchés de gré à gré, il y a de nombreuses transactions dont les prix ne sont pas observés par l'ensemble des agents. Selon Black (1986), "*it is actually easier to list observables than unobservables, since so many things are unobservable.*" On peut remarquer que le développement des marchés d'options accroît notablement l'ensemble des prix observés (accroissement par exemple du nombre de dates d'exercice et de prix d'exercice faisant l'objet de transactions).

¹²⁰Pour reprendre la formule de Hayek (1945), "*We must look at the price system as a ... mechanism for communicating information if we want to understand its real function... The most significant fact about this system is the economy of knowledge with which it operates, or how little the individual participant need to know in order to take the right action... by a kind of symbol, only the most essential information is passed*

propriété recherchée pour des raisons pratiques. Un établissement qui tarifie ses produits en contradiction avec les prix négociés sur les marchés existants s'expose à de lourdes pertes¹²¹.

S'il existe au moins un jeu de paramètres et de variables d'état tel que les prix théoriques soient égaux aux prix observés des actifs financiers négociés, un "calage parfait" est possible. Il existe alors une intersection non vide entre modèles d'évaluation compatibles avec les prix observés et la famille de modèles qu'on s'est donnée a priori¹²².

4.1.2 Construction de modèles compatibles.

When shares become publicly known in an open market, the value which they acquire there may be regarded as the judgment of the best intelligence concerning them.

G. GIBSON (1889).

Il est malheureusement fréquent qu'un calage parfait ne soit pas possible. Par exemple dans le cadre du modèle d'évaluation d'options de Black et Scholes, il n'existe en général pas de valeur du paramètre de volatilité qui assure la compatibilité avec l'ensemble des prix d'options¹²³.

on..." Pour M. Allais, les deux premières "conditions de validité d'une théorie" sont :

1) *La cohérence logique interne du modèle.*

2) *Le modèle doit être vérifié par les faits, a) au stade des hypothèses, b) au stade des résultats.*"

¹²¹En revanche, s'il s'agit de modéliser des sensibilités de prix de produits dérivés par rapport à des prix d'actifs sous-jacents, afin de déterminer des stratégies de couverture des risques financiers, il n'est pas a priori exclus de recourir à un modèle non compatible ; par exemple, on pourrait envisager de calculer un delta d'option dans le modèle de Black-Scholes avec une volatilité "historique" et non pas implicite. Le critère qui va alors être utilisé pour la détermination des quantités non observées est celui de la qualité de la couverture. Voir Bossaerts et Hillion (1995), Gouriéroux et Laurent (1995) pour une discussion.

¹²²S'il existe plusieurs jeux de paramètres et de variables d'état compatibles avec les prix observés, alors il faut soit augmenter l'ensemble des prix observés à la date courante, soit utiliser des chroniques de prix ou de l'information a priori pour déterminer un modèle d'évaluation.

¹²³Jacquier et Jarrow (1995) remarquent "If the contingent claim price differs from the theoretical value, then there is an arbitrage opportunity, and the model is rejected with probability one". D'un point de vue économétrique, on a affaire à des modèles mal spécifiés, puisqu'ils induisent des relations déterministes entre les prix, non vérifiées par les données. Voir par exemple Monfort (1995) pour une discussion sur l'inférence

Il est alors possible d'effectuer un "calage approché" ; on se donne une mesure de proximité entre prix théoriques et prix observés et l'on cherche des valeurs des variables d'état et des paramètres qui assurent la plus grande proximité des prix théoriques avec les prix observés¹²⁴. Si les prix théoriques diffèrent "peu" des prix observés, on a construit un modèle presque compatible. La spécification de la dynamique des variables d'état est alors suffisamment réaliste et la fonction des prix d'état associée permet de reproduire assez fidèlement les prix négociés d'actifs financiers.

La détermination des quantités non observées peut être réalisée *en une fois ou de manière séquentielle*, en commençant par déterminer les variables d'état puis les paramètres.

Considérons à nouveau l'exemple du modèle de Black et Scholes. Ce modèle fait intervenir une variable d'état log-normale. Le prix *théorique* de l'actif sous-jacent est égal à la valeur courante de cette variable d'état. Les prix *théoriques* des options européennes d'achat sur cet actif sous-jacent dépendent également de la variable d'état et d'un paramètre de volatilité à travers la formule de Black et Scholes. On peut penser aux deux procédures suivantes :

- recherche simultanée de la valeur de la variable d'état **et** de la valeur du paramètre de volatilité qui minimisent une distance entre les prix d'options observés des actifs (options **et** actif sous-jacent) et les prix théoriques. La valeur de la variable d'état ainsi déterminée différera en général du prix observé de l'actif sous-jacent (voir par exemple Manaster et Rendleman (1982), Bhattacharya (1987), Patilea, Ravoteur et Renault (1996)).
- détermination de la variable d'état à partir du prix de l'actif sous-jacent puis dans un *deuxième temps* de la valeur du paramètre de volatilité qui permet le meilleur ajustement des prix d'options (la valeur de la variable d'état étant déjà fixée). Le modèle reproduira alors parfaitement le prix observés de l'actif sous-jacent mais les prix observés d'options seront moins bien ajustés qu'avec l'approche précédente. La seconde

dans le cas de modèles mal spécifiés.

¹²⁴Pour des applications aux modèles de structure par terme des taux d'intérêt, voir Brown et Dybvig (1986), De Munnik et Schotman (1994).

procédure quoique couramment utilisée est discutable quand les marchés d'options sont très liquides et que les prix y sont connus avec plus de précision que ceux de l'actif sous-jacent¹²⁵.

L'identification de variables d'état et de prix d'actifs observés revient à spécifier directement la dynamique de certains prix d'actifs. Les prix théoriques directement modélisés et les prix observés sont égaux par construction du modèle. Nous avons vu l'utilisation de cette procédure dans le cadre du modèle de Black et Scholes. Dans un contexte de taux d'intérêt, Duffie et Kan (1995) construisent un modèle où les prix théoriques des zéro-coupons sont parfaitement ajustés aux prix observés pour quelques maturités arbitraires. L'exemple de la structure par terme des taux d'intérêt est important à cet égard :

- Les modèles de taux d'intérêt font intervenir des variables d'état différant de prix d'actifs (taux d'intérêt instantané par exemple).
- les premiers modèles d'options sur obligations Courtadon (1982), Brennan et Schwartz (1982) ne permettaient pas un ajustement parfait du prix des actifs sous-jacents¹²⁶.

Si l'approche de calage approché ne donne pas satisfaction, on va en pratique *modifier* explicitement ou implicitement *le modèle d'évaluation*.

Une pratique courante consiste à calculer une volatilité implicite pour chaque prix d'option observé¹²⁷, puis à interpoler les volatilités implicites. Il ne s'agit plus formellement du

¹²⁵On peut également remarquer que l'identification du prix d'une action sous-jacente avec la variable d'état est remis en cause dans les modèles où la valeur de l'actif de la société émettrice est retenue comme la variable d'état ; voir Ingersoll (1977), Brennan et Schwartz (1977), Geske (1979), Bensoussan, Crouhy et Galai (1994), Augros et Leboisne (1996) pour des discussions.

¹²⁶Ceci entraîne des violations de la relation de parité entre options d'achat et de vente. Ball et Torous (1983) tentent de modéliser directement les prix des obligations, mais la dynamique choisie permet de réaliser des opportunités d'arbitrage. Heath, Jarrow et Morton (1992) en fournissant une dynamique des prix des zéro-coupons sous la probabilité risque-neutre et en se concentrant sur la spécification de la volatilité permettent de construire des modèles où l'ajustement des prix des obligations est parfait *à la date initiale*. En revanche, les prix théoriques et observés des obligations diffèrent aux dates ultérieures.

¹²⁷La volatilité implicite d'une option de prix d'exercice et de date d'exercice donnés est la valeur du paramètre de volatilité du modèle de Black et Scholes qui rend égaux le prix théorique de l'option et le prix

modèle de Black et Scholes et en particulier la fonction de prix d'état change de structure¹²⁸. Une telle procédure assure une parfaite compatibilité avec les prix observés d'options mais peut produire un modèle d'évaluation non cohérent ne vérifiant pas la propriété de positivité (voir Shimko (1993), Hodges (1996) pour des discussions)¹²⁹.

En revanche, il est possible de considérer le modèle d'évaluation cohérent *le plus proche d'un modèle d'évaluation a priori*¹³⁰. Il s'agit d'une estimation de la fonction de prix d'état à partir d'un modèle a priori et de l'*information contenue dans les prix des actifs dérivés* et notamment celle provenant des prix d'options de diverses dates et prix d'exercice¹³¹. Banz et Miller (1978), Derman et Kani (1993, 1994), Rubinstein (1994), Barle et Cakici (1995), Jackwerth et Rubinstein (1995), Dumas, Fleming et Whaley (1995), Buchen et Kelly (1996), Derman, Kani et Chriss (1996), Laurent et Scaillet (1996), Abken, Madan et Ramamurtie (1996), Malz (1996a et b), Bahra (1996) illustrent cette approche. Dupire (1993) est un cas particulier où l'information contenue dans les prix d'options est suffisamment riche pour permettre de déterminer parfaitement la fonction de prix d'état sans que le critère de proximité entre modèles ou le modèle a priori interviennent. Dans le cas d'un continuum d'états, Breen et Litzenberger (1978) relie la dérivée seconde du prix des options d'achat (de date d'exercice donnée) par rapport au prix d'exercice et la fonction de prix d'état correspondant à l'horizon de la date d'exercice.

Les méthodes d'ajustement de paramètres déterministes mais non constants, illustrées par Hull et White (1990, 1993) pour des modèles de structure par terme des taux d'intérêt, procèdent du même esprit mais s'intéressent essentiellement à la structure par date d'exercice observé. Heynen, Kemma et Vorst (1991), Bates (1996), Patilea, Ravoteur et Renault (1996) discutent de ce concept.

¹²⁸ Ainsi, les prévisions de prix de nouvelles options vont dépendre de la méthode d'interpolation retenue.

¹²⁹ On peut également envisager de lisser la courbe des volatilités implicites de manière non paramétrique avec des noyaux comme dans Gouriéroux, Monfort et Tenreiro (1994) ou Aït-Sahalia et Lo (1995).

¹³⁰ Il faut alors définir un critère de proximité entre modèles.

¹³¹ Néanmoins, les prix d'options d'achat et de vente ne donnent que peu ou pas d'information sur la nature des corrélations et sont de ce fait peu utiles pour la valorisation des options hybrides ; voir Laurent (1996) pour une discussion.

des prix d'options^{132 133}.

4.2 Des sorties calculables.

Along with the boom in option products, there has been a boom in the use of option formula.

F. BLACK (1992).

Tout modèle opérationnel doit fournir des sorties (prix de produits financiers, stratégies dynamiques, mesures de risque) effectivement calculables et dans des délais qui intègrent les contraintes de production de ces produits. Ceci impose souvent le recours à des *algorithmes numériques*. Nous discutons ensuite des *délais acceptables pour le calcul des sorties d'un modèle*.

4.2.1 Méthodes numériques d'évaluation des produits financiers.

... si une telle ingénierie des produits dérivés existe, elle reste encore - me semble-t-il - assez rudimentaire du point de vue des méthodes et techniques quantitatives.

P-L. LIONS (1995).

En général la théorie financière ne fournit pas directement des prix ou des évaluations de paramètres non observés, mais des caractérisations de ces grandeurs comme solutions de problèmes d'optimisation ou d'équations aux dérivées partielles par exemple. Pouvoir évaluer de façon concrète des prix de nouveaux produits financiers ou des stratégies de couverture (les *sorties des modèles*) implique la résolution de ces problèmes.

¹³²Il n'existe cependant pas toujours des paramètres fonctionnels qui permettent de réaliser un ajustement du modèle aux prix de marché ; voir Cherbonnier et Laurent (1993), Laurent (1995).

¹³³En ce qui concerne l'estimation de prix de zéro-coupons à partir de prix d'obligations, Gouriéroux et Scaillet (1995) proposent d'introduire des termes d'erreur directement au niveau des prix des zéro-coupons afin de retrouver une compatibilité entre prix négociés et prix théoriques d'obligations. Ceci revient à augmenter le nombre de degrés de liberté dans la fonction de prix d'état.

Une *spécification complète d'un modèle d'évaluation de prix de produits financiers inclut donc la spécification des algorithmes qui permettent de calculer des prix ou des stratégies de couverture* de produits financiers. Des modèles théoriques similaires peuvent avoir des propriétés assez différentes selon les techniques numériques utilisées. Ainsi le modèle binomial de Cox, Ross, Rubinstein (1979) permet de calculer de manière approchée les prix d'option d'achat du modèle de Black et Scholes. Néanmoins, les gammas (dérivées secondes du prix de l'option par rapport au prix du sous-jacent) sont nuls pour le modèle binomial (en tout point de dérivabilité) et strictement positifs pour le modèle de Black et Scholes¹³⁴.

L'équation de diffusion de la chaleur utilisée depuis deux siècles par les physiciens et les ingénieurs est le prototype des équations différentielles introduites pour caractériser les prix des produits financiers¹³⁵. Ces prix peuvent être également représentés comme la valeur moyenne des flux monétaires pondérés par les prix d'état (l'espérance actualisée du flux monétaire sous la probabilité risque-neutre)¹³⁶.

Il arrive (exceptionnellement) que l'on puisse résoudre explicitement les équations différentielles donnant les prix et les exprimer à partir de fonctions classiques (c'est le cas de la formule de Black et Scholes). On parle alors de "*formules fermées*" ("closed-form formulas"). Quand les produits financiers deviennent complexes (options exotiques, américaines) et les modélisations plus riches (paramètres non constants, volatilité stochastique, plusieurs facteurs de risque), il est *nécessaire de recourir à des méthodes numériques* :

- Il est fréquent d'*approximer la fonction de prix d'état par une fonction de prix d'état associée à un modèle discret*. Les méthodes d'arbres binomiaux de Cox, Ross et Rubinstein (1979) et trinomiaux (voir notamment Hull et White (1990, 1993)), les méthodes

¹³⁴De ce fait, la méthode utilisée en pratique pour évaluer les gammas consiste à *étendre l'arbre* ; voir Hull (1993), chapitre 14 pour une présentation de cette approche. Pelsser et Vorst (1994) font une comparaison entre les deux façons de calculer deltas et gammas.

¹³⁵Les problèmes d'évaluation dans des marchés complets markoviens impliquent la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires de type parabolique ; dans les cas de marchés incomplets ou avec des coûts de transaction on obtient en général des équations non linéaires.

¹³⁶La "formule de Feynman-Kac" permet de faire un lien entre les deux représentations des prix. La fonction de Green est également utile pour l'évaluation de produits financiers. Cette fonction est solution de l'équation différentielle de Fokker-Plank.

de différences finies¹³⁷, de Monte Carlo¹³⁸, de quasi-Monte Carlo¹³⁹ et de quadratures relèvent de cette approche.

- Une approche *duale* consiste à *approximer le flux monétaire* qu'on cherche à évaluer par un flux monétaire plus simple. Dans un premier temps, on se donne un ensemble d'actifs dont les prix sont calculables de manière précise. On cherche ensuite la combinaison linéaire de ces actifs qui est la plus proche du flux monétaire à évaluer¹⁴⁰. Madan et Milne (1994), Tilley (1993), Barraquand et Martineau (1995), Laurent et Scaillet (1996) sont des illustrations de cette approche avec des actifs de base différents.

4.2.2 Délais de calcul des sorties.

Le délai acceptable pour calculer un prix de produit financier varie selon les marchés et les modes de négociation. Sur certains marchés liquides et concurrentiels (options sur contrat notionnel par exemple), la rapidité est indispensable ; les opérateurs de marché doivent pouvoir recalculer des prix, en "temps réel". En revanche, pour certains produits complexes (contrats d'échange de taux d'intérêt à amortissement indexé sur les taux d'intérêt par exemple), la capacité de l'établissement financier à comprendre les besoins du client compte au moins autant que la rapidité de cotation des produits.

Les modèles d'évaluation de prix de produits financiers sont utilisés de façon intensive par les établissements financiers. Outre la mise à jour en temps réel des prix de certains produits dérivés que nous venons d'évoquer, *les modalités d'utilisation des modèles alourdissent les contraintes liées aux délais de calcul :*

- Les opérateurs négocient souvent simultanément plusieurs lignes de produits, et ils

¹³⁷Notons que les différences finies appartiennent aux méthodes d'approximation d'équations. Les méthodes d'approximation des solutions utilisant la formulation intégrale ou variationnelle des équations (résidus pondérés, éléments finis) sont encore assez peu utilisées en finance.

¹³⁸Boyle, Broadie et Glasserman (1995) font une revue de la littérature sur ces méthodes et leurs applications à l'évaluation et à la couverture de produits dérivés.

¹³⁹Le tirage se fait de manière déterministe. Voir Paskov et Traub (1995) pour une application en finance.

¹⁴⁰Il s'agit en général d'une projection sur l'ensemble des opportunités d'investissement statiques engendré par les actifs choisis.

doivent pouvoir disposer de l'évaluation rapide de l'ensemble de ces produits, ainsi que des éléments quantitatifs de mesure du risque, également fournis par les modèles.

- L'ajustement des paramètres non observés des modèles implique souvent plusieurs dizaines ou centaines de recalculs des formules d'évaluation¹⁴¹ et doit également être réalisé en temps réel.
- La réévaluation des portefeuilles, chaque fin de journée (voire plus fréquemment), implique souvent le calcul de plusieurs milliers de prix.

Ces *contraintes opérationnelles* incitent à la recherche de méthodes numériques plus efficaces (choix des schémas de discrétisation, techniques d'accélération de convergence, techniques d'estimation récursives) voire *orientent le choix des modèles*¹⁴² ; une des raisons du succès du modèle de Black et Scholes est la simplicité de sa mise en œuvre.

4.3 Robustesse et domaine d'utilisation.

I sometimes wonder why people still use the Black-Scholes formula, since it is based on such simple assumptions - unrealistically simple assumptions. Yet that weakness is also its greatest strength. People like the model because they can easily understand its assumptions. The model is often good as a first approximation, and if you can see the holes in the assumptions you can use the model in more sophisticated ways.

F. BLACK (1992).

On peut s'interroger sur la qualité opérationnelle des modèles théoriques. Rappelons qu'un modèle a pour fonction de fournir des procédés de fabrication de nouveaux produits financiers (par des stratégies dynamiques d'investissement), d'évaluer des prix de revient de nouveaux

¹⁴¹Cet ajustement se fait souvent en minimisant une distance entre prix théoriques et observés d'actifs financiers. Il est réalisé de manière itérative ; pour chaque valeur intermédiaire des paramètres, on recalcule l'écart entre les prix simulés et les prix observés et donc les prix à l'aide du modèle d'évaluation.

¹⁴²Ces contraintes opérationnelles expliquent aussi l'utilisation de plusieurs modèles par les établissements financiers pour une même gamme de produits.

produits financiers et de fournir des mesures de risque. Un modèle donc être évalué autant en fonction de sa capacité à répondre à ces objectifs que de la vraisemblance économique de ses hypothèses. Nous allons examiner deux concepts utiles pour la pratique opérationnelle des modèles. La *robustesse d'une prévision de prix* mesure la *sensibilité de cette prévision à des erreurs de mesure* sur les entrées du modèle. Le *domaine d'utilisation d'un modèle* est l'*ensemble des produits financiers que le modèle peut évaluer et couvrir* avec une précision satisfaisante.

4.3.1 Robustesse des prévisions de prix.

The practitioner should therefore apply the continuous-time theory only tentatively, assessing its limitations in each application.

R. MERTON (1990).

Les *sorties d'un modèle financier* sont en général les prix de revient de nouveaux produits financiers et les stratégies de fabrication par des couvertures dynamiques. Nous allons discuter de la *sensibilité des sorties d'un modèle financier aux erreurs de mesure dans les entrées* et du *compromis entre robustesse et sensibilité d'un modèle*.

La robustesse de l'évaluation d'un prix de produit financier ou d'une stratégie de couverture est liée à la sensibilité des sorties du modèle par rapport à certaines entrées. Supposons qu'une entrée particulière soit soumise à un bruit d'observation ; les prévisions d'un prix de produit financier donné vont-elle être très perturbées par ce bruit ? L'analyse de la robustesse des prévisions de prix est un point pratique important.

Pour l'illustrer, prenons à nouveau l'exemple du modèle de Black et Scholes et supposons que le paramètre de volatilité soit déterminé de manière implicite à partir du prix du sous-jacent et du prix d'une option d'achat de maturité d'un mois. Supposons que l'on cherche à évaluer des options à la monnaie de maturité de cinq ans sur cet actif sous-jacent. Une petite erreur de mesure du prix de l'actif sous-jacent ou de l'option un mois (ou simplement un décalage temporel dans l'observation de ces deux prix) va induire des modifications importantes de la volatilité implicite, car la sensibilité du prix d'une option courte par rapport

à ce paramètre (le "vega") est faible. Les modifications induites sur le prix des options cinq ans vont être importantes car leur vega est élevé. On a donc une détermination peu robuste du prix des options longues. Remarquons que ce n'est pas ici la qualité intrinsèque du modèle de Black et Scholes qui est en cause (l'hypothèse de constance de la volatilité)¹⁴³. Supposons qu'on cherche maintenant à évaluer un portefeuille d'options longues, en s'étant préalablement assuré que son vega est nul. Alors, on fera une prévision de prix plus robuste du prix de ce portefeuille, puisque moins sensible à des erreurs de mesure sur les entrées¹⁴⁴.

La robustesse a un prix, celui d'une *moindre sensibilité à l'information apportée par les entrées*. Supposons que l'on observe les prix d'un actif sous-jacent et d'options européennes sur cet actif sous-jacent. On peut déterminer le prix de nouvelles options à partir de la volatilité implicite moyenne. Une telle procédure présente l'avantage de diminuer l'effet des erreurs de mesure. En revanche, elle n'attribue que peu de valeur à l'information supplémentaire apportée par un prix d'option donné. Supposons par exemple qu'une option de prix d'exercice donné ait une volatilité implicite sensiblement supérieure à la moyenne. Ceci peut refléter une erreur de mesure de cette volatilité implicite, mais également donner une information intéressante sur la structure des prix d'état. Ne pas intégrer cette information est dommageable quand il s'agit par exemple de prévoir de nouveaux prix d'options.

De manière générale, les procédures d'ajustement de fonctions de prix d'état à partir de prix d'options, comme dans Shimko (1993), Dupire (1993), Derman et Kani (1994), Rubinstein (1994), Barle et Cakici (1995), Buchen et Kelly (1996), Derman, Kani et Chriss (1996) ou d'ajustement de paramètres déterministes mais non constants comme dans Hull et White (1990, 1993) augmentent les degrés de liberté dans l'ajustement des modèles, sont sensibles aux données en entrée, mais sont peu robustes¹⁴⁵.

¹⁴³Bien entendu, il est également possible que la qualité de la prévision soit mauvaise du fait de la qualité du modèle, voir infra.

¹⁴⁴En statistique, la médiane empirique est un estimateur plus robuste de l'espérance d'une variable aléatoire à distribution symétrique que la moyenne empirique car elle n'est pas affectée par la présence d'une valeur aberrante.

¹⁴⁵De ce fait la pertinence économique de telles fonctions de prix d'état est limitée ; voir Lyons (1988), Dumas, Fleming et Whaley (1995), Bates (1991, 1996) pour des discussions.

4.3.2 Domaine d'utilisation d'un modèle financier.

I want to focus in this article on the third reason for a difference between value and price : that the Black-Scholes formula may be wrong.

F. BLACK (1992).

Le *domaine d'utilisation du modèle* est l'ensemble des *produits financiers qu'on peut raisonnablement évaluer et couvrir*¹⁴⁶. Nous allons montrer que c'est une extension de l'*ensemble des opportunités d'investissement statiques*. Nous nous proposons d'abord d'examiner cet ensemble avant de discuter de l'utilisation de modèles de marchés complets.

L'ensemble des opportunités d'investissement statiques est l'ensemble des combinaisons linéaires des flux monétaires des actifs négociés. On considère ainsi des portefeuilles statiques constitués à partir des actifs négociés¹⁴⁷. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, tout produit appartenant à cet ensemble est évalué sans ambiguïté et parfaitement couvert. En effet, tous les produits appartenant à cet ensemble sont redondants de manière évidente et parfaitement dupliquables.

Remarquons qu'aucune hypothèse n'est faite sur la dynamique des actifs, leur volatilité, leurs corrélations... pas plus que sur la fréquence autorisée pour traiter sur les marchés des actifs sous-jacents. Comme la couverture est statique, le prix et la couverture dépendent peu de la présence de coûts de transaction¹⁴⁸. On a ainsi une *évaluation sans modèle théorique*¹⁴⁹.

¹⁴⁶Notre analyse considère que l'erreur de modélisation est inhérente à la modélisation ; On retrouve ce point de vue par exemple dans Jacquier et Jarrow (1995) : *"Practitioners, on the other hand, view the contingent claim models (assumptions, implications) as part of a larger system used to generate profits. The model is seen as an approximation with inherent error. It is replaced if a better model is discovered... Even with the advent of more sophisticated volatility based models, it is still desirable to introduce the notion of model error in the estimation."*

¹⁴⁷En l'absence de coûts de transaction et de contraintes sur les positions, cet ensemble est un sous-espace dont la dimension est au plus égale au nombre d'actifs négociés ; on parle aussi d'ensemble engendré par les actifs négociés.

¹⁴⁸Contrairement aux stratégies de couverture en temps continu qui impliquent des réaménagements très fréquents des portefeuilles. Voir par exemple Soner, Shreve et Cvitanic (1995) pour une discussion sur l'effet de coûts de transaction proportionnels.

¹⁴⁹Il existe de nombreuses relations entre prix d'actifs financiers du type précédent : les relations dites de

Nous pouvons maintenant considérer un nouveau produit dont les flux monétaires sont “proches”¹⁵⁰ de ceux d’un portefeuille statique d’actifs financiers négociés. On va pouvoir *évaluer et couvrir de manière approximative* ce produit comme précédemment. Pour donner un exemple concret, une option dont l’échéance est dans trois mois sera couverte approximativement par une option de même prix d’exercice et de date d’échéance de trois mois et un jour. De manière générale, tout modèle d’évaluation compatible avec les prix observés permet d’évaluer et de couvrir des actifs proches des actifs existants. Ceci résulte simplement de la continuité supposée des opérateurs de prix. On a ainsi construit une sorte de modèle naïf où les produits financiers sont valorisés et couverts au voisinage des entrées du modèle (les prix observés) par approximation. À la limite si tous les actifs sont négociés, tous les nouveaux produits sont évaluablement simplement¹⁵¹.

Pour un modèle donné, le *domaine d’utilisation* est l’ensemble des flux monétaires pour lesquels le modèle fournit une bonne approximation du prix de revient et des couvertures dynamiques. Ce domaine d’utilisation est une extension de l’ensemble des opportunités d’investissement statiques. Préciser le domaine d’utilisation d’un modèle d’évaluation de prix de produits financiers est un enjeu important.

cash and carry ou de déport/report, entre la valeur d’une option européenne et la valeur de l’actif sous-jacent, la relation de parité entre options d’achat et options de vente, entre *caps* et options sur contrats d’échange de taux d’intérêt, entre portefeuille d’options et option sur un portefeuille ; voir Merton (1973), Jarrow et Rudd (1983), Cox et Rubinstein (1985), Augros et Navatte (1987) pour des discussions dans le cas de options, Laurent (1992), Jacquillat et de Laguiche (1991) pour les produits de taux d’intérêt et Poncet, Portait et Hayat (1996) plus généralement.

¹⁵⁰La notion de proximité implique de définir une distance entre flux monétaires. Voir par exemple Harrison et Kreps (1979) pour une discussion sur différentes mesures envisageables. En pratique, on ne va pas accorder la même importance à un écart entre deux flux selon que cet écart est très ou peu probable.

¹⁵¹On retrouve l’idée de Ross (1976) que les options complètent le marché. Voir également Bajoux-Besnainou et Rochet (1996). L’idée d’évaluation par approximation avec des portefeuilles statiques se trouve dans Garman (1976). Suivant Ross (1976), John (1981), Green et Jarrow (1987), Nachman (1989) proposent d’approcher tout flux monétaire à partir d’options sur des portefeuilles particuliers. Madan et Milne (1994), Abken, Madan et Ramamurtie (1996) décomposent les flux monétaires sur une base de polynômes d’hermite. Laurent et Scaillet (1996) approximent un flux monétaire à partir de flux monétaires d’actifs négociés. Voir aussi Granito (1987) pour des options de taux d’intérêt, Derman, Ergener et Kani (1995) pour des options exotiques ou Avellaneda, Levy et Parás (1995) pour une couverture statique avec des options classiques et dynamique avec l’actif sous-jacent.

Ainsi, dans le modèle de Black et Scholes postule-t-on l'existence d'un actif sans risque, d'un actif sous-jacent dont le prix suit un processus de diffusion lognormal et la possibilité d'acheter et de vendre sans frictions à tout instant. On peut dans cette économie exprimer le prix de revient d'une option européenne d'achat (ou de vente) arbitraire en fonction du taux sans risque, du prix de l'actif sous-jacent, de sa volatilité et des caractéristiques de l'option (prix d'exercice, date d'exercice). Dans l'économie réelle, les hypothèses du modèle de Black et Scholes ne sont pas parfaitement vérifiées¹⁵². Que se passe-t-il si l'on continue à effectuer des prévisions de prix de revient d'options avec les formules d'évaluation issues du modèle théorique¹⁵³ ?

- Prenons le cas d'une option courte (par exemple de date d'échéance d'un mois) sur un actif sous-jacent très liquide (une devise). Les coûts de transaction cumulés seront assez faibles même si le portefeuille de couverture est fréquemment réaménagé et supposer la volatilité constante sur une courte période est une approximation assez réaliste. Le modèle de Black et Scholes peut alors fournir une assez bonne approximation du prix de revient de l'option.
- En revanche, s'il s'agit d'évaluer le prix de revient d'une option venant à échéance dans cinq ans et écrite sur un sous-jacent supportant des coûts de transaction élevés, l'utilisation du même modèle requiert une confiance naïve et dangereuse dans la théorie¹⁵⁴.

¹⁵²Pour reprendre la formule de J-M. Lasry, *“la formule de Black et Scholes, le théorème de Modigliani-Miller, comme les lois de Galilée, décrivent des comportements stylisés dont la réalité s'écarte : ces modèles fournissent des repères, des points de départ précieux pour comprendre des réalités plus complexes et pour bâtir des savoir-faire et des pratiques qui intègrent d'autres phénomènes volontairement négligés dans les premiers modèles”* (dans Risques et enjeux des marchés dérivés, PUF, 1995).

¹⁵³Il est alors important de préciser les sources d'erreur dans la prévision des prix : selon Jacquier et Jarrow (1995), *“there are two sources of uncertainty in the prediction made by the trader or the econometrician. The first is parameter estimation, and the second is model error.”*

¹⁵⁴Nous considérons ici que la couverture se fait uniquement avec l'actif sous-jacent et pas avec d'autres options. Supposons au contraire qu'outre l'actif sous-jacent, l'établissement financier puisse acheter et vendre une option venant à échéance dans six ans. Le modèle de Black et Scholes va simplement conduire à des stratégies de couverture dont le delta (calculé par le modèle) est égal au delta (calculé par le modèle) de l'option cinq ans à couvrir. Comme il y a deux actifs de couverture (l'actif sous-jacent et l'option six ans) et une seule contrainte, les parts respectives de l'actif sous-jacent et de l'option six ans dans le portefeuille

5 Au delà des modèles.

Si la théorie financière fournit des outils et concepts indispensables pour la mise en oeuvre de modèles financiers, il ne faut pas perdre de vue leur *contexte d'utilisation* :

- La capacité des établissements financiers à assimiler rapidement les nouvelles techniques de gestion financière, à développer de véritables savoir-faire en matière de mise en oeuvre de modèles quantitatifs et la connaissance par les équipes qui utilisent ces modèles de leurs apports et de leurs limites, sont un indéniable facteur de compétitivité¹⁵⁵.
- L'intégration des modèles au sein des autres systèmes d'information de l'établissement financier et la capacité à faire évoluer rapidement les environnements informatiques pour répondre aux besoins de la clientèle sont des enjeux stratégiques¹⁵⁶.

5.1 Des modèles et des hommes.

Le rôle de juge, dans les sciences logico-expérimentales, revient à l'expérience ; mais l'on comprend qu'il puisse en certains cas, être délégué à des hommes "compétents", pourvu qu'il ne soient pas choisis en vue du sens de la réponse que l'on désire obtenir.

de couverture sont indéterminées. Dans le cadre théorique du modèle, le choix de ces parts est indifférent. En pratique, il est probable qu'utiliser surtout l'option six ans dans le portefeuille de couverture donnera de meilleurs résultats (car les erreurs de modélisation tendent à s'annuler entre l'option cinq ans et l'option six ans). On devrait donc également considérer le domaine d'utilisation du modèle selon la façon dont il est utilisé.

¹⁵⁵Pour reprendre E. Pflimlin, Président du Crédit Mutuel, *"la banque s'intéressait à l'argent ; elle s'intéressera davantage aux hommes. Ce n'est pas le moindre paradoxe de la banque virtuelle"*.

¹⁵⁶Ainsi selon P. Lamy, membre du comité exécutif du Crédit Lyonnais, *"cette conception induit des transformations assez profondes dans les organisations et la nécessité que tout fonctionne ensemble, notamment pour éditer des informations utilisables à la fois par la comptabilité, le contrôle de gestion ou la maîtrise des risques"*. L'importance de l'informatique n'est pas spécifique aux produits de marchés financiers. Selon E-F de Lencquesaing, Directeur de la Production au CCF, *"l'informatique est le "cœur" de la production de l'entreprise Banque (...) Le circuit opératoire s'apparente à une transformation d'information initiale grâce à un processus d'enrichissement. Il est dès lors possible de parler de process industriel."*

Nous avons présenté les modèles financiers comme des outils d'aide à la gestion financière, fournissant des mesures des risques financiers, des procédés de fabrication de nouveaux produits. Toute technologie a ses ingénieurs, qui la mettent en œuvre avec les capacités d'adaptation, de créativité et d'esprit critique propres à l'intelligence humaine. Ce qui est vrai de l'industrie où la technologie est très évoluée, l'est également dans la banque¹⁵⁷. L'anecdote de l'achat de warrants par F. Black nous montre que la connaissance d'un modèle d'évaluation n'est pas à elle seule une garantie de succès sur les marchés financiers¹⁵⁸.

Au sein des établissements financiers, les opérateurs de marché ont été les pionniers en matière d'utilisation de modèles d'évaluation d'options. Ils sont aujourd'hui aidés par des chercheurs appliqués pour le développement de produits plus sophistiqués (options exotiques par exemple) et de nouvelles méthodologies (modèles multifactoriels, marchés incomplets, coûts de transaction). Les équipes de contrôle des risques, qui valident et audient les modèles utilisés par l'établissement financier, deviennent un troisième pôle de compétence technique.

¹⁵⁷Ceci n'est pas sans conséquences sur l'organisation des établissements financiers.

Ainsi, selon D. Lebegue, D.G. de la BNP, *"Aujourd'hui face à la technicité croissante de l'activité bancaire, il devient indispensable de concevoir deux types d'encadrement : l'encadrement hiérarchique et l'encadrement non hiérarchique."*

(...) Le management non hiérarchique consiste à reconnaître et à récompenser les excellentes capacités techniques d'un collaborateur sur certains domaines vitaux pour l'entreprise. Il en est ainsi, par exemple, pour les gestionnaires de patrimoines ou les intervenants en salle des marchés."

¹⁵⁸Selon Shimko (1996), *"To avoid risk, it is important to have modellers, programmers and users who all work closely together, understand each other's domains well enough to know what constitutes a warning symptom, and have a good strategy for testing a model and its limits."* Les autorités réglementaires insistent également sur les notions de contrôle interne et d'audit des modèles. Selon D. Nouy, Directeur délégué au secrétariat général de la Commission bancaire et président du sous-groupe opérations de hors bilan du Comité de Bâle,

"un contrôle interne de qualité est un gage de la bonne alimentation et de la bonne utilisation des modèles... Le système d'évaluation des risques doit être revu périodiquement par les auditeurs internes de la banque, afin d'en vérifier le fonctionnement, la documentation et l'alimentation, tant en données de positions qu'en formules de calculs et en éléments de valorisation (prix de référence...)"

Les modèles d'évaluation contribuent à améliorer l'efficacité des équipes opérationnelles :

- Tout d'abord ces outils, quand ils sont bien explicités, formalisent un certain savoir et facilitent ainsi l'apprentissage des nouveaux opérateurs de marché et la transmission de la connaissance.
- L'utilisation d'un modèle garantit une certaine homogénéité et une certaine stabilité dans la gestion des risques. Si certains opérateurs de haut niveau peuvent pour une bonne part s'affranchir de savoirs formels pour gérer les risques, l'utilisation de modèles évite aux intervenants moins performants de commettre des erreurs élémentaires de gestion.
- Enfin et surtout, les systèmes et les modèles sont des outils d'assistance qui libèrent les opérateurs d'un certain nombre de tâches fastidieuses et répétitives et leur laissent davantage de temps pour se consacrer à la conception de nouveaux produits, de nouvelles stratégies de gestion des risques ou à la recherche d'opportunités d'arbitrage¹⁵⁹.

5.2 Flexibilité des développements de nouveaux produits.

La démarche commerciale, notamment dans le cas de produits réalisés sur mesure, implique une négociation sur les caractéristiques du produit¹⁶⁰. Introduire des contrats aux caracté-

¹⁵⁹On peut considérer que l'on est loin de l'image illustrée par Bonnet (1867) dans le "*Manuel du Capitaliste ou Tableaux en Forme de Comptes Faits*" :

"On convient généralement que le motif qui empêche la plupart des banquiers et des capitalistes de dresser et de vérifier eux-mêmes leurs comptes d'intérêts, c'est le dégoût et l'ennui que causent ces sortes d'opérations, par le trop grand nombre de calculs qu'elles nécessitent. On confie ordinairement ce soin à des employés ou à des secrétaires, et ceux-ci, quoique familiarisés avec les calculs de la banque, ne sont cependant pas exempts de commettre des erreurs, et de ressentir eux-mêmes la fatigue qu'entraîne un travail aussi fastidieux."

¹⁶⁰D'un point de vue stratégique, certains établissements préfèrent se centrer sur des produits dérivés standard, jouer sur la présence d'économies d'échelle et ne lancer de nouveaux produits dérivés qu'après de longues phases de test et de qualification. C'est par exemple la stratégie annoncée de la Société Générale.

D'autres établissements vont avant tout mettre en avant leur capacité d'innovation, d'imagination et d'adaptation aux besoins de leurs clients quels qu'ils soient, quitte, dans un premier temps, à se contenter de procédés de fabrication plus artisanaux. Dans tous les cas, plus de flexibilité accroît la compétitivité.

ristiques nouvelles implique une mise à niveau des outils de simulation des prix de revient et des systèmes de gestion des risques. La rapidité des adaptations de l'outil de production de nouveaux produits est donc un important facteur de compétitivité pour les établissements financiers.

Les développements informatiques sont de deux ordres : *réalisation ou adaptation de programmes scientifiques* de calcul numérique et surtout *mise à jour des interfaces* avec les autres systèmes de traitement de l'information : interfaces graphiques pour les opérateurs, interfaces avec les bases de données décrivant le portefeuille de contrats, avec les systèmes d'alimentation de données en temps réel, entre les systèmes de front office et de back-office, de middle-office et comptables. Le travail de développement ne comprend pas seulement l'écriture de lignes de codes, mais surtout l'analyse des besoins, la spécification des modèles et la vérification des outils développés.

Ceci conduit les établissements financiers à accorder beaucoup d'importance à la *flexibilité et à la modularité* de leurs outils de gestion des contrats financiers¹⁶¹. Il existe des outils de développement qui permettent de réaliser rapidement et avec un niveau de sécurité suffisant des chaînes de traitement de nouveaux produits. Certains outils permettent la création semi-automatique de chaînes de gestion de nouveaux produits. L'opérateur doit simplement spécifier les caractéristiques du nouveau flux monétaire à l'intérieur d'une famille de produits aux caractéristiques prédéfinies.

6 Aujourd'hui et demain.

Fonds de garantie

Banque d'Angleterre - Novembre 1890

En considération des avances consenties par la Banque d'Angleterre à Messieurs Baring Brothers

¹⁶¹Pour G. Cordesse de la direction de l'organisation et des systèmes d'information de la BNP, "*il est nécessaire de redéfinir en profondeur les méthodes d'approche des développements...l'objectif qui devrait être privilégié en la matière est la réactivité*". La flexibilité est également un gage de sécurité ; Selon Shimko (1996), "*Many of the worst risks centre around implementation.*"

and Co. pour leur permettre de se dégager à échéance de leurs dettes en cours à la date du 15 novembre 1890 ou provenant d'activités initiées en date ou avant le 15 novembre 1890, nous les soussignés, nous engageons en tant que personnes, sociétés ou compagnies (...) à compenser auprès de la Banque d'Angleterre toute perte qui pourrait survenir lorsque la Banque d'Angleterre décidera que la liquidation des biens de Messieurs Baring Brothers and Co. est achevée de manière conforme aux vœux des Gouverneurs. (...) La période maximum de liquidation est de trois ans, commençant le 15 novembre 1890.

Nous avons fait un bilan relativement optimiste de l'évolution de la modélisation financière et du développement de nouveaux contrats d'échange des risques. Une grande partie de la communauté académique partage ce point de vue¹⁶². Néanmoins, la théorie des marchés financiers complets et les outils de gestion financière qui en sont issus ne peuvent être considérés comme un aboutissement¹⁶³.

Les outils théoriques d'évaluation de produits financiers et de couverture des risques reposent sur des hypothèses assez fragiles économiquement. Leur utilisation pratique pose un problème réel aux institutions financières confrontées à des marchés imparfaits. La mise en œuvre de modèles plus réalistes du point de vue économique (meilleure représentation de la variabilité des prix des actifs, prise en compte des coûts de transaction et des contraintes institutionnelles sur les stratégies d'investissement) reste difficile et coûteuse.

La théorie n'explique que partiellement les évolutions institutionnelles (développement de grands intermédiaires, évolution des produits de couverture des risques), la nature et le pourquoi des stratégies financières effectivement menées par les agents économiques :

- La politique de gestion financière et d'utilisation de produits dérivés de nombreuses

¹⁶²Ainsi, Ross (1987) note : *"Despite such gaps, when judged by its ability to explain the empirical data, option pricing theory is the most successful theory not only in finance, but in all of economics."* Pour Fama (1976), *"among the various fields of economics, finance is somewhat unique in terms of the correspondence between theory and evidence."*

¹⁶³Ainsi, Black (1986) remarque : *"In the end, a theory is accepted not because it is confirmed by conventional empirical tests, but because researchers persuade one another that the theory is correct and relevant."* De même, selon Ampère (1887), *L'esprit de prévention porte à repousser tout ce qui n'est pas immédiatement dans les hypothèses avec lesquelles on s'est familiarisé.*

grandes entreprises non financières est plus complexe qu'une simple minimisation des risques ou maximisation de la richesse des actionnaires (Stulz (1996)). Ainsi, les entreprises jouent sur l'évolution des marchés, ce qui semble contraire au principe d'efficience des marchés et d'absence d'opportunités d'arbitrage¹⁶⁴.

- L'utilisation par les grandes entreprises des produits dérivés pour la couverture des risques reste limitée. En ce qui concerne le risque de change, il s'agit souvent de couverture de contrats à l'exportation ou de la trésorerie en devises. Les risques de change stratégiques liés aux structures de coûts de production ne sont pas couverts par des produits financiers, mais par des délocalisations de l'outil de production.
- Les marchés financiers et notamment les marchés de produits dérivés sont fréquemment suspectés d'effets sociaux négatifs, excès de volatilité, rejet de projets rentables à long terme. On peut penser que ces critiques sont en partie alimentées par la faiblesse de l'analyse théorique concernant les interactions entre les intervenants sur les marchés financiers. En fait, le cadre théorique des marchés complets (même en présence d'asymétries d'information) réduit l'interaction entre les intervenants à des réactions par rapport à un système de prix¹⁶⁵.
- Parmi les risques importants subis par les individus, il faut noter les risques liés à l'évolution des prix à la consommation, des prix des actifs immobiliers, les risques liés à certaines grandes catastrophes naturelles (tremblement de terre en Californie). Or, ces risques sont très peu gérés, échangés, transformés via les marchés financiers ¹⁶⁶.

¹⁶⁴Surtout quand on est à la périphérie du marché, donc moins bien informé ; voir Poncet (1996) pour une discussion.

¹⁶⁵Le débat aux États-Unis à propos des taxes sur les transactions financières montre qu'il s'agit tout autant d'élargir l'assiette des recettes budgétaires que d'améliorer le fonctionnement des marchés. Remarquons au passage qu'une taxe assise sur des montants nominaux pourrait très bien favoriser la demande de produits optionnels à montant nominal faible. Par ailleurs, les coûts de transaction sur les marchés de contrats d'échange des taux d'intérêt sont élevés et néanmoins les produits optionnels sont très développés sur ces marchés.

¹⁶⁶voir Gollier (1996) pour une discussion sur les limites de l'assurabilité.

References

- [1] P. ABKEN, D. MADAN, S. RAMAMURTIE, "*Estimation of risk-neutral and statistical densities by Hermite polynomial approximation : with an application to Eurodollar futures options*", **Federal Reserve Bank of Atlanta**, Working paper 96-5, (June 1996).
- [2] A. ADMATI, "*A noisy rational expectations equilibrium for multi-asset securities markets*", **Econometrica**, vol. 53, 629-657, (1985).
- [3] M. AGLIETTA, "*Défaillance des marchés financiers et risque systémique*", **Revue d'Économie Financière**, numéro 37, 113-143, (été 1996).
- [4] Y. AÏT-SAHALIA, A. LO, "*Non parametric estimation of state price densities in financial asset prices*", mimeo **MIT**, (1995).
- [5] Y. AÏT-SAHALIA, "*Testing continuous-time models of the spot interest rate*", **Review of Financial Studies**, 9:2, 385-426, (1996).
- [6] F. AFTALION, P. PONCET, "*Les futures sur taux d'intérêt : le MATIF*", **PUF**, (1991).
- [7] M. ALBOUY, B. HUSSON, "*La recherche en finance et les professionnels*", Actes de la journée "Recherche en Gestion", **FNEGE**, (1996).
- [8] F. ALLEN, D. GALE, "*Financial innovation and risk sharing*", **MIT Press**, Cambridge, (1995).
- [9] A-M. AMPÈRE, "*Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes electro-dynamiques*", **Gauthiers-Villars**, (1887).
- [10] T. ANDERSEN, T. BOLLERSLEV, "*Intraday seasonality and volatility persistence in financial markets*", forthcoming in the **Journal of Empirical Finance**, (1996).
- [11] J-P. ANSEL ET C. STRICKER, "*Lois de martingale, densités et décomposition de Föllmer-Schweizer*", **Annales de l'Institut Henri Poincaré**, 28, 375-392, (1992).
- [12] J-P. ANSEL ET C. STRICKER, "*Unicité et existence de la loi minimale*", **Springer Verlag**, (1993).
- [13] F. ARDITTI, J. KOSE, "*Spanning the state space with options*", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 15, 1-9, (March 1980).
- [14] K. ARROW, "*Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques*", **Cahiers du Séminaire d'Économétrie**, CNRS, 40, 41-48, (1953).
- [15] P. ARTZNER, D. HEATH, "*Approximate completeness with multiple martingale measures*", **Mathematical Finance**, Vol. 5, number 1, 1-11, (1995).

- [16] J.C AUGROS, *Les options sur taux d'intérêt - Dynamique des taux et évaluation*, **Economica**, (1989).
- [17] J.C AUGROS, N. LEBOISNE, *Validation empirique d'un modèle d'évaluation d'obligations convertibles*, **Banque et Marchés**, Numéro 24, 18-28, (1996).
- [18] J.C. AUGROS, P. NAVATTE, *Bourse : les options négociables*, **Vuibert**, (1987).
- [19] M. AVELLANEDA, A. PARÁS, "Dynamic hedging portfolios for derivative securities in the presence of large transaction costs", **Applied Mathematical Finance**, vol. 1, (1994).
- [20] M. AVELLANEDA, A. LEVY, A. PARÁS, "Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities", **Applied Mathematical Finance**, vol. 2, number 6, 73-83, (1995).
- [21] L. BACHELIER, *Théorie de la spéculation*, **Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure**, (1900).
- [22] B. BAHRA, *Probability distributions of future asset prices implied by option prices*, **Bank of England Quarterly Bulletin**, 299-311, (august 1996).
- [23] Q.T. BAILLIE, T. BOLLERSLEV, "Common stochastic trends in a system of exchange rates", **The Journal of Finance**, Vol. 44, number 1, 167-181, (1989).
- [24] I. BAJEUX, R. PORTAIT , "The numeraire portfolio : a new approach to financial theory", Discussion Paper, **ESSEC**, (1994).
- [25] I. BAJEUX-BESNAINOU, J-C. ROCHET, "Dynamic Spanning : are options an appropriate instrument ?" **Mathematical Finance**, volume 6 / 1, 1-16, (1996).
- [26] C. BALL, W. TOROUS, "Bond price dynamics and options", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 18, 517-531, (1983).
- [27] BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS, 64th Annual Report, Basel, (1994).
- [28] R. BANZ, M. MILLER, "Prices for state contingent claims : some estimates and applications", **Journal of Business**, 51, 653-672, (1978).
- [29] S. BARLE, N. CAKICI, "Growing a smiling tree", **RISK Magazine**, vol.8, number 10, (1995).
- [30] J. BARRAQUAND ET D. MARTINEAU, "Numerical valuation of high dimensional multivariate american securities", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, vol. 30, number 3, 383-405, (1995).
- [31] BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, "An internal model-based approach to market risk capital requirements", (Avril 1995).

- [32] BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, "*Planned supplement to the capital accord to incorporate market risks*", (Avril 1995).
- [33] D. BATES, "*The crash of '87 ; Was it expected ? The evidence from options markets*", **The Journal of Finance**, vol. 46, 1009-1044, (1991).
- [34] D. BATES, "*Testing option pricing models*", in G.S Maddala (ed.), **Handbook of Statistics**, vol. 14, forthcoming (1996).
- [35] D. BATES, "*Dollar jump fears, 1984-1982 : distributional abnormalities implicit in currency futures options*", **Journal of International Money and Finance**, vol. 15, number 1, 65-93, (1996).
- [36] B. BENSÂÏD, O. DE BANDT, "*Stop-loss rules as a monitoring device : theory and evidence from the bond futures market*", Working paper, **Banque de France**, (1995).
- [37] B. BENSÂÏD, J.P. LESNE, H. PAGÈS, J. SCHEINKMAN, "*Derivative asset pricing with transaction costs*", **Mathematical Finance**, 2, 63-86, (1992).
- [38] A. BENSOUSSAN, M. CROUHY, D. GALAI, "*Stochastic equity volatility related to the leverage effect*", Les cahiers de recherche, **HEC**, (1994).
- [39] M. BHATTACHARYA, "*Prices changes of related securities : the case of call options on stocks*", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, vol. 22, 1-15, (1987).
- [40] A. BICK, "*On the consistency of the Black-Scholes' model with a general equilibrium framework*", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 22, 253-275, (1987).
- [41] A. BICK, "*On viable diffusion price processes of the market portfolio*", **The Journal of Finance**, vol. 45, 673-690, (1990).
- [42] F. BLACK, M. SCHOLES, "*The pricing of options and corporate liabilities*", **Journal of Political Economy**, 81, 637-654, (1973).
- [43] F. BLACK, "*Noise*", **The Journal of Finance**, vol. 41, number 3, 529-543, (1986).
- [44] F. BLACK, "*Living up to the model*", **RISK Magazine**, (Mars 1990).
- [45] F. BLACK, "*The holes in Black-Scholes*", **RISK Magazine**, (Mars 1988).
- [46] T. BOLLERSLEV, R. CHOU, K. KRONER, "*ARCH modeling in finance : a review of the theory and empirical evidence*", **Journal of Econometrics**, Vol. 52, number 1/2, (1992).
- [47] T. BOLLERSLEV, R. ENGLE, D. NELSON, "*ARCH models*", **Handbook of Econometrics**, vol. 4, (1993).

- [48] P. BOSSAERTS, P. HILLION, “*Local parametric analysis of hedging in discrete time*”, working paper, **Caltech**, (1995).
- [49] J-F BOULIER, *Que valent les options cachées ?*, **Revue d’Économie Financière**, numéro 37, 189-201, (1996).
- [50] J-F BOULIER, C. GOURIÉROUX, *Des mathématiques financières à la finance quantitative*, **Revue d’Économie Financière**, Numéro 32, 167-182, (1995).
- [51] P. BOYLE, M. BROADIE, P. GLASSERMAN, “*Monte Carlo methods for security pricing*”, à paraître dans **Journal of Economic Dynamics and Control**, (1995).
- [52] D. BREEDEN, “*An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities*”, **Journal of Financial Economics** 7, 265-296, (1979).
- [53] D. BREEDEN, R. LITZENBERGER, “*Prices of state contingent claims implicit in option prices*”, **Journal of Business**, 51, 621-651, (1978).
- [54] M. BRENNAN, E. SCHWARTZ , “*Convertible bonds : valuation and optimal strategies for call and conversion*”, **The Journal of Finance**, vol. 32, 1699-1715, (1977).
- [55] M. BRENNAN, E. SCHWARTZ , “*An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency*”, **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, vol. 17, 3, 301-329, (1982).
- [56] S. BROWN, P. DYBVIG, “*The empirical implications of the CIR theory*”, **The Journal of Finance**, vol. 41, 617-632, (1986).
- [57] L. BROZE, O. SCAILLET, J-M. ZAKOÏAN, “*Testing for continuous-time models of the short-term interest rate*”, **Journal of Empirical Finance**, 2, 199-224, (1995).
- [58] L. BRYAN, *La banque éclatée*, **Interéditions**, (1988).
- [59] P. BUCHEN, M. KELLY, “*The maximum entropy distribution of an asset inferred from options prices*”, **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 31, 143-159, (1996).
- [60] J-J. BURGARD, C. CORNUT, O. ROBERT DE MASSY, *La banque en France*, **Presses de la fondation nationale des sciences politiques & Dalloz**, (1995).
- [61] J.Y. CAMPBELL, K. HENTSCHEL, “*No news is good news : an asymmetric model of changing volatility in stoch returns*”, **Journal of Financial Economics**, 10, 407-432, (1991).
- [62] J. CARPENTER, “*Current issues in accounting for derivatives*”, **The Journal of Derivatives**, vol. 3, number 3, 65-71, (1996).

- [63] J-P. CAUDAL, *L'information dans les états financiers*, **Revue Banque**, numéro 569, 30-33, (1996).
- [64] G. CHAMBERLAIN, M. ROTHSCHILD, "Arbitrage, factor structure, and mean-variance analysis on large asset markets", **Econometrica**, 51, 1281-1304, (1983).
- [65] P. CHARLETTY-LEPERS, R. PORTAIT, *Impact des stratégies d'assurance de portefeuille sur la volatilité et la stabilité des marchés financiers*, Conseil scientifique de la COB, (mars 1994).
- [66] M. CHATELAIN ET C. STRICKER, "On componentwise and vector stochastic integration", **Mathematical Finance**, 4, 57-66, (1994).
- [67] F. CHERBONNIER, J.P. LAURENT, *Évaluation de paramètres dans le modèle linéaire gaussien de la structure par terme des taux d'intérêt*, Document de travail, **Compagnie Bancaire**, (1993).
- [68] P-A. CHIAPPORI, M-O. YANELLE, *Le risque bancaire : un aperçu théorique*, **Revue d'Économie Financière**, numéro 37, 97-111, (1996).
- [69] H. CHOE, J. CHRISOS, M. LEVASSEUR, *Les marchés à terme sont-ils déstabilisateurs ?*, **Revue d'Économie Financière**, numero 5/6, (1988).
- [70] E. CLÉMENT, C. GOURIÉROUX, A. MONFORT, "Statistical models of arbitrage valuation, document de travail du **CREST** no 9315, (1993).
- [71] T. CONLEY, L. HANSEN, E. LUTTMER, J. SCHEINKMAN, "Short-term interest rates as subordinated diffusions", working paper, Northwestern University, (1996).
- [72] J. CONRAD, "The price effect of option introduction", **The Journal of Finance**, vol. 34, number 2, 487-498, (1989).
- [73] A. CONZE, R. VISWANATHAN, "Probability measures and numeraire", CEREMADE, Paris, (1991).
- [74] I. COOPER, A. MELLO, "The default risk of swaps", **The Journal of Finance**, vol. 46, number 2, 597-620, (1991).
- [75] G. COURTADON, "The pricing of options on default free bonds", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 17, 75-100, (1982).
- [76] J. COX, J. INGERSOLL, S. ROSS, "A theory of the term structure of interest rates", **Econometrica**, Vol. 53, 2, 385-407, (1985).
- [77] J. COX, C.F. HUANG, "Option pricing theory and its applications" in **Frontiers of Financial Theory**, edited by G. Constantinides et S. Bhattacharya, Rowman and Litterfield, (1989).

- [78] J. COX, C.F. HUANG, “*Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow diffusion processes*”, **Journal of Economic Theory**, 49, 33-83, (1989).
- [79] J. COX, S. ROSS, “*The valuation of options for alternative stochastic processes*”, **Journal of Financial Economics**, 3, 145-166, (1976).
- [80] J. COX, S. ROSS, M. RUBINSTEIN, “*Option pricing : a simplified approach*”, **Journal of Financial Economics**, 7, 229-263, (1979).
- [81] J. COX, M. RUBINSTEIN, “*Options markets*”, **Prentice Hall**, (1985).
- [82] C. CULP, M. MILLER, “*Metallgesellschaft and the economics of synthetic storage*”, **Journal of Applied Corporate Finance**, vol. 7, number 4, 62-76, (1995).
- [83] C. CULP, M. MILLER, “*Hedging in the theory of corporate finance : a reply to our critics*”, **Journal of Applied Corporate Finance**, 8, 151-127, (1995).
- [84] D. CUOCO, “*Optimal policies and equilibrium prices with portfolio cone constraints and stochastic labor income*”, Forthcoming **Journal of Economic Theory**, Working paper, Wharton School, (1995).
- [85] J. CVITANIC, “*Lecture notes : optimal trading under constraints*”, working paper, **Columbia University**, (1996).
- [86] J. CVITANIC, I. KARATZAS, “*Convex duality in constrained portfolio optimization*”, **Annals of Applied Probability**, 2, 767-818, (1992).
- [87] J. CVITANIC, I. KARATZAS, “*Hedging contingent claims with constrained portfolios*”, **Annals of Applied Probability**, 3, 652-681, (1993).
- [88] R.C. DALANG, A. MORTON, A. WILLINGER, “*Equivalent martingale measures and no arbitrage in stochastic securities market models*”, **Stochastics and Stochastic Reports**, 29, 185-201, (1990).
- [89] R-A. DANA, M. JEANBLANC-PICQUÉ, *Marchés financiers en temps continu, valorisation et équilibre*, **Economica**, (1994).
- [90] V. DANESI, V. GENON-CATALOT, J-P. LAURENT, “*Parameter estimation of a two factors Gauss Markov Heath-Jarrow and Morton model*”, document de travail, **Université de Marne La Vallée**, (1995).
- [91] M. DAVIS, “*A general option pricing formula*”, Preprint, **Imperial College**, London, (1994).
- [92] B. DECOMBE, L. GELINEAU, J-P. LAURENT, F. PEHAU-PARCIBOULA, *Marché de la dette publique italienne : cas des obligations à taux variable (CCT's)*, mémoire de l'**Institut des Actuaire Français**, (1992).

- [93] C. DE VRIES, "On the relation between GARCH and stable processes", **Journal of Econometrics**, 48, 313-324, (1991).
- [94] Z. DING, C. GRANGER, R. ENGLE, "a long memory property of stock market returns and a new model", **Journal of Empirical Finance**, 1, 83-106, (1993).
- [95] F. DE JONG, "Time-series and cross-section information in term structure models", working paper, **Tilburg University**, (1995).
- [96] J. DE MUNNIK, P. SCHOTMAN, "Cross sectional versus time series estimation of term structure models : evidence for the Dutch bond market", **Journal of Banking and Finance**, 18, 997-1025, (1994).
- [97] F. DELBAEN, W. SCHACHERMAYER, "Arbitrage and free lunch with bounded risk for unbounded continuous processes", **Mathematical Finance**, Volume 4, number 4, 343-348, (1994a).
- [98] F. DELBAEN, W. SCHACHERMAYER, "A general version of the fundamental theorem of asset pricing", **Mathematische Annalen** 300, 463-520, (1994b).
- [99] F. DELBAEN, W. SCHACHERMAYER, "The variance-optimal martingale measure for continuous processes", prépublication, **Université de Vienne**, à paraître dans **Bernoulli**, (1995).
- [100] G. DEMANGE, G. LAROQUE, "Private information and the design of securities", **Journal of Economic Theory**, vol. 65, number 1, 233-257, (1995).
- [101] G. DEMANGE, J-C. ROCHET, *Méthodes mathématiques de la finance*, **Economica**, (1992).
- [102] E. DERMAN, "Valuing models and modeling value", **The Journal of Portfolio Management**, vol. 22, number 3, 106-114, (1996).
- [103] E. DERMAN, D. ERGENER, I. KANI, "Static options replication", **The Journal of Derivatives**, vol. 2, number 4, 78-95, (1995).
- [104] E. DERMAN, I. KANI, "The volatility smile and its implied tree", Research notes, **Goldman Sachs**, (1993).
- [105] E. DERMAN, I. KANI, "Riding on a smile", **RISK Magazine**, Vol. 7, No. 2, 32-39, (1994).
- [106] E. DERMAN, I. KANI, N. CHRISS, "Implied trinomial trees of the volatility smile", **The Journal of Derivatives**, 7-22, (summer 1996).
- [107] DERIVATIVES POLICY GROUP, "Framework for voluntary oversight", (March 1995).
- [108] D. DIAMOND, R. VERRECHIA, "Information aggregation in a noisy rational expectations economy", **Journal of Financial Economics**, vol. 9, 221-235, (1981).

- [109] F. DIEBOLD, M. NERLOVE, “*The dynamic of exchange rate volatility : a multivariate latent factor ARCH model*”, **Journal of Applied Econometrics**, 4, 1-22, (1989).
- [110] D. DIMARTINO, L. WARD, J. STEVENS, W. SARGISSON, “*Procter and Gamble’s derivatives loss : isolated incident or wake up call ?*” **Derivatives Quarterly**, 10-21, (Spring 1996).
- [111] G. DI MASI, Y. KABANOV, W. RUNGALDIER, “*Mean-variance hedging of options on stocks with Markov volatilities*”, **Theory of Probability and Its Applications**, 39, 221-222, (1994).
- [112] E. DIMSON, P. MARSH, “*Capital requirements for securities firms*”, **The Journal of Finance**, Vol. 50, number 3, 821-851, (1995).
- [113] F. DROST, T. NIJMAN, “*Temporal aggregation of GARCH processes*”, **Econometrica**, 61, 909-918, (1993).
- [114] J. DRÈZE, “*Market allocation under uncertainty*”, **European Economic Review**, 133-165, (Winter 1970-71).
- [115] D. DUFFIE, “*Security markets : stochastic models*“, **Academic Press**, (1988).
- [116] D. DUFFIE, *Modèles dynamiques d’évaluation*, **PUF**, (1994).
- [117] D. DUFFIE, M. HUANG, “*Swap rates and credit quality*”, **The Journal of Finance**, Vol. 51, number 3, 921-949, (1996).
- [118] D. DUFFIE, R. KAN, “*A yield-factor model of interest rates*”, Working paper, **Stanford University**, (1995).
- [119] D. DUFFIE, M. RICHARDSON, “*Mean-variance hedging in continuous time*”, **Annals of Applied Probability**, 1, 1-15, (1991).
- [120] D. DUFFIE, R. RAHI, “*Financial market innovation and security design : an introduction*”, **Journal of Economic Theory**, vol. 65, number 1, 1-42, (1995).
- [121] D. DUFFIE, K. SINGLETON, “*Simulated moments estimation of markov models of asset prices*”, **Econometrica**, 61, 929-952, (1993).
- [122] B. DUMAS, J. FLEMING, R. WHALEY, “*Implied volatility functions : empirical tests*”, Discussion paper **HEC**, (1995).
- [123] B. DUMAS, B. ALLAZ, *Les titres financiers*, **PUF**, (1995).
- [124] B. DUPIRE, “*Pricing and hedging with smiles*”, **Proceedings of French Finance Association Meeting**, La Baule, (1993).

- [125] B. DUPIRE, "Pricing with a smile", **RISK Magazine**, 7, 32-39, (1994).
- [126] I. EKELAND, "Finance et modélisation", Document de travail, **Institut Finance Dauphine**, (1996).
- [127] N. EL KAROUI, M.C. QUENEZ, *Programmation dynamique et évaluation des actifs contingents en marché incomplet*, **C.R.Acad.Sci.Paris**, t.313, Série I, 851-854, (1991).
- [128] N. EL KAROUI, M. JEANBLANC-PIQUÉ, "On the robustness of the Black-Scholes equation", Document de travail, **ENS Cachan**, (1992).
- [129] N. EL KAROUI, M. JEANBLANC-PIQUÉ, "Optimization of consumption with labor income", Working paper, Laboratoire de Probabilités, **Université Pierre et Marie Curie**, (1994).
- [130] R. ENGLE, V. NG, M. ROTHSCHILD, "Asset pricing with a factor ARCH covariance structure : empirical estimates for Treasury Bills", **Journal of Econometrics**, 45, 213-237, (1990).
- [131] B. ESPY, P. TUFANO, J. HEADLEY, "Banc One Corporation : asset and liability management", **Journal of Applied Corporate Finance**, 7, 22-32, (1994).
- [132] E. FAMA, "Efficient capital markets : a review of theory and empirical work", **The Journal of Finance**, vol. 35, 383-417, (1970).
- [133] E. FAMA, M. MILLER, "The theory of finance", **Dryden Press**, (1972).
- [134] E. FAMA, "Foundations of finance", **Basic Books**, (1976).
- [135] S. FIGLEWSKI, "How to lose money in derivatives", **The Journal of Derivatives**, vol. 2, number 2, 75-82, (1994).
- [136] Financial Accounting Standard Board, Statement of Financial Accounting Standards No. 119, "Disclosure about derivatives financial instruments and fair value of financial instruments", Norwalk, CT, (October 1994).
- [137] J. D. FINNERTY, "An overview of corporate securities", **Journal of Applied Corporate Finance** 4, 23-29, (1993).
- [138] D. FITE, P. PFLEIDERER, "Should firms use derivatives to manage risk ?" dans **Risk Management : Problems and Solutions**, (1995).
- [139] H. FÖLLMER, M. SCHWEIZER, "Hedging of contingent claims under incomplete information", Applied Stochastic Analysis, eds M.H. Davis, R.J Elliot, **Stochastics Monographs**, 5, **Gordon et Breach**, Londres, 389-414, (1991).
- [140] P. FONTAINE, *Arbitrage et évaluation internationale des actifs financiers*, **Economica**.

- [141] A. FRACHOT, C. GOURIÉROUX, *Titrisation et remboursements anticipés*, **Economica**, (1995).
- [142] A. FRACHOT, J-P. LESNE, E. RENAULT, "Indirect inference estimation of factor models of the yield curve", working paper, **Université de Cergy-Pontoise**, (1995).
- [143] M. GARMAN, "An algebra for evaluating hedge portfolios", **Journal of Financial Economics**, vol. 3, 403-427, (1976).
- [144] M. GARMAN, "The pricing of supershares", **Journal of Financial Economics**, vol. 6, 3-10, (1978).
- [145] M. GARMAN, "Towards a semigroup pricing theory", **The Journal of Finance**, vol. 40, 847-861, (1985).
- [146] P. GARSUAULT, S. PRIAMI, *La banque : fonctionnement et stratégies*, **Economica**, (1995).
- [147] H. GEMAN, N. EL KAROUI, J.C. ROCHET, "Changes of Numeraire, arbitrage and option prices", **Journal of Applied Probability**, (1996).
- [148] V. GENON-CATALOT, J. JACOD, "On the estimation of the diffusion coefficient for multi-dimensional diffusion processes", **Annales de l'Institut Henri Poincaré**, 29:1, 119-151, (1993).
- [149] R. GESKE, "The valuation of compound options", **Journal of Financial Economics**, 7, 63-81, (1979).
- [150] D. GHOSE, K. KRONER, "The relationship between GARCH and symmetric stable processes : finding the source of fat tails in financial data", **Journal of Empirical Finance**, 2, 225-251, (1995).
- [151] E. GHYSELS, A. HARVEY, E. RENAULT, "Stochastic volatility", in G.S Maddala (ed.), Handbook of statistics, vol. 14, Statistical methods in finance, **North Holland**, forthcoming, (1996).
- [152] G. GIBSON, "The stock exchanges of London, Paris, and New York", **G.P. Putman's Sons**, New York, (1889).
- [153] C. GOLLIER, *Vers une théorie économique des limites de l'assurabilité*, **Revue d'Économie Financière**, numéro 37, 59-79, (1996).
- [154] C. GOURIÉROUX, *Modèles ARCH et applications financières*, **Economica**, (1992).
- [155] C. GOURIÉROUX, E. GHYSELS, J. JASIAK, "Market time and asset price movements : theory and estimation", Discussion Paper, **CIRANO** and **CREST**, (1994).
- [156] C. GOURIÉROUX, J. JASIAK, G. LE FOL, "Intra-day market activity", working paper, **CREST**, (1996).

- [157] C. GOURIÉROUX, J-P. LAURENT, “*Estimation of a dynamic hedge*”, Discussion paper, **CREST**, (1996).
- [158] C. GOURIÉROUX, J-P. LAURENT, H. PHAM, “*Mean-variance hedging and numeraire*”, working paper, **Université de Marne la Vallée**, (1996).
- [159] C. GOURIÉROUX, A. MONFORT, “*Simulation based econometric methods*”, **CORE lecture series**, (1995).
- [160] C. GOURIÉROUX, A. MONFORT, “*Qualitative threshold ARCH models*”, **Journal of Econometrics**, Vol. 52, number 1/2, (1992).
- [161] C. GOURIÉROUX, A. MONFORT, E. RENAULT, “*A general framework for factor models*”, **CREST**, Discussion paper, (1991).
- [162] C. GOURIÉROUX, A. MONFORT, E. RENAULT, “*Indirect inference*”, **Journal of Applied Econometrics**, 8, 85-118, (1993).
- [163] C. GOURIÉROUX, A. MONFORT, C. TENREIRO, “*Kernel M-estimators : non parametric diagnostics for structural models*”, Document de travail n. 9405, **CEPREMAP**, (1994).
- [164] C. GOURIÉROUX, O. SCAILLET, “*Estimation of the term structure from bond data*”, **CREST** Discussion paper n. 9415, (1994).
- [165] GOVERNMENT ACCOUNTING OFFICE, “*Financial Derivatives : actions needed to protect the financial system*”, Washington, DC, (May 1994).
- [166] M. R. GRANITO, “*A simple approach to valuing bond options*, **Advances in bond analysis and portfolio strategies**”, Fabozzi-Garlicki Eds, **Probus**, (1987).
- [167] R. GREEN, R. JARROW, “*Spanning and completeness in markets with contingent claims*”, **Journal of Economic Theory**, 41, 202-210, (1987).
- [168] S. GROSSMAN, “*On the efficiency of competitive stock markets when agents have diverse information*”, **The Journal of Finance**, vol. 31, 573-585, (1976).
- [169] S. GROSSMAN, J. STIGLITZ, “*On the impossibility of informationally efficient markets*”, **American Economic Review**, vol. 70, 393-408, (1980).
- [170] S. GROSSMAN, “*Dynamic asset allocation and the informational efficiency of markets*”, **The Journal of Finance**, vol. 50, N. 3, 773-787, (1995).
- [171] GROUP OF THIRTY, “*Derivatives : Practices and Principles*”, Global Derivatives Study Group, (1993).

- [172] N. HAKANSON, “*The purchasing power fund : a new kind of financial intermediary*”, **Financial Analysts Journal**, 32, 49-59, (1976).
- [173] N. HAKANSON, “*The fantastic world of finance : progress and the free lunch*”, **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 14, 717-776, (1978).
- [174] N. HAKANSON, “*Welfare aspects of options and supershares*”, **The Journal of Finance**, vol. 33, 754-776, (1978).
- [175] J.D. HAMILTON, “*A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle*”, **Econometrica**, 57, 357-384, (1989).
- [176] J. HAMON, B. JACQUILLAT, *Impact de l'introduction d'une classe d'option sur les caractéristiques du support*, dans *Le marché français des actions*, **PUF**, (1992).
- [177] L. HANSEN, J. SCHEINKMAN, “*Back to the future : generating moments implications for continuous-time Markov processes*”, **Econometrica**, 63:4, 767-804, (1995).
- [178] J.M. HARRISON AND D.M KREPS, “*Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets*”, **Journal of Economic Theory**, 20, 348-408, (1979).
- [179] J.M HARRISON, S. PLISKA, “*Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*”, **Stochastic Processes and their Applications**, 11, 215-260, (1981).
- [180] J.M HARRISON, S. PLISKA, “*A stochastic model of continuous trading : complete markets*”, **Stochastic Processes and their Applications**, 15, 313-316, (1983).
- [181] A. HARVEY, E. RUIZ, N. SHEPARD, “*Multivariate stochastic variance models*”, **Review of Economic Studies**, vol. 61, 247-264, (1994).
- [182] F. HAYEK, “*The use of knowledge in society*”, **American Economic Review** 35, 519-530, (1945).
- [183] H. HE, H. LELAND, “*Equilibrium asset price processes*”, **Review of Financial Studies**, vol. 6, number 3, 593-617, (1993).
- [184] H. HE, H. PAGÈS, “*Labor income, borrowing constraints, and equilibrium asset prices : a duality approach*”, **Economic Theory**, 3, 663-696, (1993).
- [185] H. HE, N. PEARSON, “*Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints : the infinite-dimensional case*”, **Journal of Economic Theory**, 54, 259-304, (1991).
- [186] D.C. HEATH, R.A. JARROW, A. MORTON, “*Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation*”, **Econometrica**, 60, 77-105, (1992).

- [187] M. HENRY, R. PAYNE, “*An investigation of long range dependence in intra-day foreign exchange rate volatility*”, working paper, Financial Market Group, **London School of Economics**, (1996).
- [188] R. HEYNEN, A. KEMMA, T. VORST, “*Analysis of the term structure of implied volatility*”, **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 39, 51-56, (1991).
- [189] A. HINDY, “*Elements of quantitative risk management*”, Graduate School of Business, **Stanford University**, (1993).
- [190] H. HODGES, “*Arbitrage bounds on the implied volatility strike and term structures of european-style options*”, **The Journal of Derivatives**, 23-35, (summer 1996).
- [191] C.F. HUANG, R. LITZENBERGER, “*Foundations for financial economics*”, **North-Holland**, (1988).
- [192] J. HULL, “*Options, futures and other derivative securities*”, **Englewood Cliffs**, (1994).
- [193] J. HULL, A. WHITE, “*Pricing interest rate derivative securities*”, **The Review of Financial Studies**, 3, 573-592, (1990).
- [194] J. HULL, A. WHITE, “*One factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities*”, **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 28, (1993).
- [195] J. HULL, A. WHITE, “*The impact of default risk on the prices of options and other derivative securities*”, **Journal of Banking and Finance**, 19, 299-322, (1995).
- [196] J. INGERSOLL, “*A contingent claims valuation of convertible securities*”, **Journal of Financial Economics**, 4, 289-321, (1977).
- [197] J. INGERSOLL, “*Theory of financial decision making*”, **Rowman and Littlefield**, (1987).
- [198] S. JACKA, “*A martingale representation result : application to incomplete financial markets*”, **Mathematical Finance**, 4, 239-251, (1992).
- [199] J. JACKWERTH, M. RUBINSTEIN, “*Implied probability distributions : empirical analysis*”, Haas School of Business, **University of California**, Working paper n. 250, (1995).
- [200] E. JACQUIER, R. JARROW, “*Dynamic evaluation of contingent claim models : an analysis of model error*”, document de travail, **Cornell University**, (1995).
- [201] B. JACQUILLAT, S. DE LAGUICHE, “*A quasi process-free valuation model of floating rate instruments*”, cahier de recherche du CEREG, **Université de Paris IX Dauphine**, (1991).
- [202] B. JACQUILLAT, J-M. LASRY EDS, *Risques et enjeux des marchés dérivés*, **PUF**, (1995).

- [203] C. JAMES, C. SMITH, "*The use of index amortizing swaps by Bank One*", **Journal of Applied Corporate Finance**, vol. 7, number 3, 54-59, (1994).
- [204] R. JARROW, D. LANDO, S. TURNBULL, "*A Markov model for the term structure of credit spreads*", Working paper, Graduate School of Management, Cornell University, forthcoming, **Review of Financial Studies**, (1993).
- [205] R. JARROW, D. MADAN, "*A characterization of complete security markets on a Brownian filtration*", **Mathematical Finance**, 1, 31-43, (1991).
- [206] R. JARROW, A. RUDD, "*Option pricing*", **Irwin**, (1983)
- [207] R. JARROW, S. TURNBULL, "*Pricing derivatives on financial securities subject to default risk*", **The Journal of Finance**, vol.50, number 1, 53-86, (1995).
- [208] N. JEGADEESH, "*Treasury auction bids and the Salomon squeeze*", **The Journal of Finance**, vol. 48, 1403-1419, (1993).
- [209] K. JOHN, "*Efficient funds in a financial market with options : a new irrelevance proposition*", **The Journal of Finance**, volume 26, 685-695, (1981).
- [210] H. JOHNSON, R. STULZ, "*The pricing of options with default risk*", **The Journal of Finance**, vol. 42, 267-280, (1987).
- [211] B. JORDAN, S. JORDAN, "*Salomon Brothers and the may 1991 treasury auction : analysis of a market corner*", **Journal of Banking and Finance**, vol. 20, number 1, 25-40, (1996).
- [212] E. JOUINI, *Produits dérivés, contrôle des risques et réglementation*, **Revue d'Économie Financière**, numéro 37, (1996).
- [213] E. JOUINI, H. KALLAL, "*Martingales and arbitrage in securities markets with transaction costs*", **Journal of Economic Theory**, 66, 178-197, (1995).
- [214] I. KARATZAS, J. LEHOCZKY, S. SHREVE, "*Optimal portfolio and consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon*", **SIAM Journal on Control and Optimization**, 25, 1557-1586, (1987).
- [215] I. KARATZAS, J. LEHOCZKY, S. SHREVE, G. XU, "*Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market*", **SIAM Journal on Control and Optimization**, 29, 702-730, (1991).
- [216] D. KESSLER, Y. ULLMO, *La comptabilisation en valeur de marché dans les banques et les sociétés d'assurance : les éléments du débat*, **Revue d'Économie Financière**, numéro 37, 157-169, (1996).

- [217] C. KINDLEBERGER, *Les mouvements internationaux de capitaux*, **Dunod**, (1990).
- [218] S-C. KOLM, *Les choix financiers et monétaires*, **Dunod**, (1966).
- [219] A. KRAMER, "SEC Settlement with Gibson Greetings sends a strong message to end-users of derivatives", **Derivatives Quarterly**, 7-9, (Spring 1996).
- [220] T. KUHN, *La structure des révolutions scientifiques*, **Flammarion**, (1972).
- [221] D. LAMBERTON, B. LAPEYRE, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, **Ellipses**, (1991).
- [222] J-P. LAURENT, *Évaluation d'emprunts à taux variable*, communication au **Séminaire Bachelier**, (1993).
- [223] J-P. LAURENT, "Calibration and implementation of the extended Vasicek model", Document de travail, **Compagnie Bancaire**, (1995).
- [224] J-P. LAURENT, *Les nouvelles techniques financières et la gestion des crédits*, **Revue d'Économie Financière**, Numéro 32, 149-165, (1995).
- [225] J-P. LAURENT, "Aggregating correlation across products on the balance sheet", **Colloque Asset and Liability Management 95**, (1995).
- [226] J-P. LAURENT, "Accurately modelling statistical dependencies for the pricing and hedging of hybrid derivatives", **Colloque Global Derivatives 96**, Paris, (1996).
- [227] J-P. LAURENT, O. SCAILLET, "Cross price forecast with interest rate options", working paper, **CREST**, (1996).
- [228] M. LEVASSEUR, Y. SIMON, *Marchés de capitaux : options et nouveaux contrats à terme*, **Dalloz**, (1980).
- [229] A. LIOUI, P. PONCET, "Optimal hedging in a dynamic futures market with a nonnegativity constraint on wealth", **Journal of Economic Dynamics and Control**, vol.20, 1101-1113, (1996).
- [230] A. LIOUI, P. NGUYEN, P. PONCET, "Optimal dynamic hedging in incomplete futures markets", **Geneva Papers on Risk and Insurance**, (1996).
- [231] G. LITTLEJOHN, "Risk management in financial institutions in Europe", **FT Financial Publishing**, (1995).
- [232] A. LO, "statistical tests of contingent claims asset-pricing models", **Journal of Financial Economics**, vol. 17, 143-173, (1986).

- [233] J.B. LONG, “*The numeraire portfolio*”, **Journal of Financial Economics**, vol. 26, 26-69, (1990).
- [234] R. LUCAS, “*Asset prices in an exchange economy*”, **Econometrica**, vol. 46, 1429-1445, (1978).
- [235] R. LYONS, “*Tests of the foreign exchange risk premium using the expected second moments implied by option pricing*”, **Journal of International Money and Finance**, 7, 91-108, (1988).
- [236] D. MADAN, F. MILNE, “*Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis*”, **Mathematical Finance**, 4, 223-245, (July 1994).
- [237] D. MADAN, B. SOUBRA, “*Design and marketing of financial products*”, **The Review of Financial Studies**, volume 4, number 2, 361-384, (1991).
- [238] E. MALINVAUD, “*Markets for an exchange economy with individual risks*”, **Econometrica**, 41, 383-410, (1973).
- [239] A. MALZ, “*Option-based estimates of the probability distribution of exchange rates and currency excess returns*”, **Federal Reserve Bank of New York**, document de travail, (1996a).
- [240] A. MALZ, “*Using option prices to estimate realignment probabilities in the European Monetary System : the case of Sterling-Mark*”, Forthcoming, **Journal of International Money and Finance**, (1996b).
- [241] S. MANASTER, R. RENDLEMAN, “*Options prices as predictors of equilibrium stock prices*”, **The Journal of Finance**, vol. 37, 1043-1057, (1982).
- [242] B. MANDELBROT, “*Forecasts of future prices, unbiased markets, and martingale models*”, **Journal of Business**, vol. 39, 242-255, (1966).
- [243] J. MATTHEWS, “*Struggle and survival on Wall Street : the economics of competition among securities firms*”, **Oxford University Press**, New-York, (1994).
- [244] A. MELINO, “*Estimation of continuous-time models in finance*, in C.A. Sims (ed.), *Advances in Econometrics*, **Cambridge University Press**, (1994).
- [245] A. MELINO, S. TURNBULL, “*Misspecification and the pricing and hedging of long-term foreign currency options*”, **Journal of International Money and Finance**, vol. 14, number 3, 373-393, (1995).
- [246] A. MELLO, J.E. PARSONS, “*Maturity structure of a hedge matters : lessons from the Metallgesellschaft debacle*”, **Journal of Applied Corporate Finance**, 8, 106-120, (1995).
- [247] R. MERTON, “*Theory of rational option pricing*”, **Bell Journal of Economics and Management Science**, 4, 141-183, (1973).
- [248] R. MERTON, “*An intertemporal capital asset pricing model*”, **Econometrica** 41, 867-888, (1973).

- [249] R. MERTON, “*On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates*”, **The Journal of Finance**, vol. 29, 449-470, (1974).
- [250] R. MERTON, “*Continuous-time finance*”, **Blackwell**, (1990).
- [251] R. MERTON, “*Financial innovation and the management and regulation of financial institutions*”, **Journal of Banking and Finance**, 19, 461-481, (1995).
- [252] F. MODIGLIANI, M. MILLER, “*The cost of capital, corporate finance and the theory of corporation finance*”, **American Economic Review**, 48, 261-297, (1958).
- [253] A. MONFORT, “*A reappraisal of misspecified econometric models*”, Document de travail no. 9545 du **CREST**, (1995).
- [254] S. MOUY, E. NALBANTIAN, *Des critères de responsabilité en évolution*, **Revue Banque**, numéro 569, 26-29, (1996).
- [255] S. MÜLLER, “*On complete securities markets and the martingale property on securities prices*”, **Economic Letters**, 31, 37-41, (1989).
- [256] D. NACHMAN, “*Spanning and completeness with options*”, **Review of Financial Studies**, 1, 311-328, (1989).
- [257] D. NANCE, C. SMITH, C. SMITHSON, “*On the determinants of corporate hedging*”, **The Journal of Finance**, vol. 48, No. 1, 267-284, (1993).
- [258] D.B. NELSON, “*Filtering and forecasting with misspecified ARCH models*”, **Journal of Econometrics**, 52, 61-90, (1992).
- [259] D. NOUY, *Renforcer la couverture des risques de marché*, **Revue Banque**, numéro 569, 18-22, (1996).
- [260] **Option Finance** 416, “*La Seita relance la polémique sur les produits dérivés*”, 9-10, (1996).
- [261] H. PAGÈS, “*Optimal consumption and portfolio policies when markets are incomplete*”, **MIT** mimeo, (1987).
- [262] S. PASKOV, J. TRAUB, “*Faster valuation of financial derivatives*”, **Journal of Portfolio Management**, vol. 22, number 1, 113-120, (1995).
- [263] V. PATILEA, M-P. RAVOTEUR, E. RENAULT, “*Multivariate time series analysis of option prices*”, document de travail, **GREMAQ**, (1996).
- [264] A. PELSSER, T. VORST, “*The binomial model and the Greeks*”, **The Journal of Derivatives**, vol. 1, number 3, 45-49, (1994).

- [265] H. PHAM, N. TOUZI, "Equilibrium state prices in a stochastic volatility model", **Mathematical Finance**, Vol. 6, number 2, 215-236, (1996).
- [266] H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, **Flammarion**, Paris, (1902).
- [267] P. PONCET, R. PORTAIT, S. HAYAT, *Mathématiques financières : évaluation des actifs et analyse du risque*, **Daloz Gestion**, 2ième édition, (1996).
- [268] P. PONCET, *Évolution de la recherche en Finance*, communication présentée lors de la journée "recherche en gestion", FNGE, (1996).
- [269] F. QUITTARD-PINON, *Marchés de capitaux et théorie financière*, **Economica**, (1993).
- [270] E. RENAULT, "Econometric models of option pricing errors", in *Advances in Economics and Econometrics*, D. Kreps et K. Wallis (eds), **Cambridge University Press**, (1996).
- [271] S. RICHARD, R. ROLL, "Prepayments on fixed-rate backed securities", **Journal of Portfolio Management**, 73-82, (Spring 1989).
- [272] S. ROSS, "The arbitrage theory of capital asset pricing", **Journal of Economic Theory**, 13, 341-360, (1976).
- [273] S. ROSS, "Options and efficiency", **Quarterly Journal of Economics**, 90, 75-89, (1976).
- [274] S. ROSS, "A simple approach to the valuation of risky streams", **Journal of Business**, 51, 371-393, (1978).
- [275] S. ROSS, "Finance", in *The New Palgrave Dictionary of Economics*, W.W. Norton, New-York, (1987).
- [276] M. RUBINSTEIN, "Implied binomial trees", **The Journal of Finance**, 49, 771-818, (1994).
- [277] P. SAMUELSON, "Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly", **Industrial Management Review**, vol. 6, 41-49, (1965).
- [278] M. SCHOLES, "The future of futures", dans **Risk Management : Problems and Solutions**, (1995).
- [279] C.M. SCHRAND, H. UNAL, "Coordinated risk management : on and off-balance sheet hedging and thrift conversion", working paper, **The Wharton School, University of Pennsylvania**, (1995).
- [280] M. SCHWEIZER, "Mean-variance hedging for general claims", **Annals of Applied Probability**, 2, 171-179, (1992).
- [281] M. SCHWEIZER, "Approximating random variables by stochastic integrals", **Annals of Probability**, 22, 1536-1575, (1994).

- [282] M. SCHWEIZER, "Approximation pricing and the variance optimal measure", Document de travail, Université de Berlin, à paraître dans **Annals of Probability**, (1995).
- [283] W. SCHACHERMAYER, "Martingale measures for discrete time processes with infinite horizon", **Mathematical Finance**, 4, 25-55, (1994).
- [284] W. SHARPE, "Nuclear Financial Economics" dans **Risk Management : Problems and Solutions**, (1995).
- [285] R. SHILLER, "Stock prices and social dynamics", **Brookings papers on economic activity**, 2, 457-498, (1984).
- [286] D. SHIMKO, "Bounds of probability", **RISK Magazine**, 6, 33-37, (1993).
- [287] D. SHIMKO, "Model risk", **RISK Magazine**, 9, (Mai 1996).
- [288] Y. SIMON, *Bourses de commerce et marchés à terme de marchandises*, troisième édition, **Daloz**, (1986).
- [289] Y. SIMON, *Techniques financières internationales*, cinquième édition, **Economica**, (1993).
- [290] C.W. SMITH, "Corporate risk management : theory and practice", **The Journal of Derivatives**, vol.2, no. 4, 21-31, (1995).
- [291] C.W. SMITH, R.M. STULZ, "The determinants of firms' hedging policies", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 20, 391-405, (1985).
- [292] H. SONER, S. SHREVE, J. CVITANIC, "There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs", **Annals of Applied Probability**, 5, 327-355, (1995).
- [293] H. STOLL, "Lost Barings : a tale in three parts concluding with a lesson", **The Journal of Derivatives**, vol.3, number 1, 109-115, (1995).
- [294] R. STULZ, "Rethinking risk management", **conférence AFFI**, Genève, (1996).
- [295] S. TAYLOR, "Modelling financial time series", **Wiley**, (1986).
- [296] P-Y. THORAVAL, *Modélisation interne et risques informatiques*, **Revue Banque**, numéro 571, 34-37, (1996).
- [297] P-Y THORAVAL, *La surveillance prudentielle des risques de marché supportés par les établissements de crédit*, **Revue d'Économie Financière**, numéro 37, 221-237, (1996).
- [298] J. TILLEY, "Valuing american options in a path simulation model", **Transactions of the Society of Actuaries**, vol. 45, 83-104, (1993).

- [299] H. VARIAN, “ *The arbitrage principle in financial economics*”, **Economic Perspective**, vol.1, number 2, 55-72, (1987), Traduit en français dans **Annales d’Économie et de Statistique**, 10, (1988).
- [300] O. VASICEK, “ *An equilibrium characterization of the term structure*”, **Journal of Financial Economics** 5, 177-188, (1977).