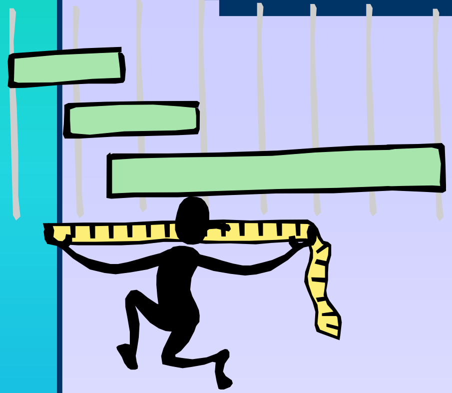
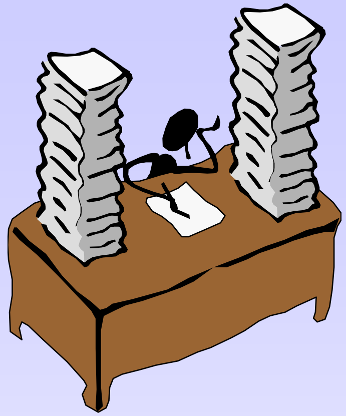
De la mesure à l’analyse des risques





Séminaire ISFA - B&W Deloitte

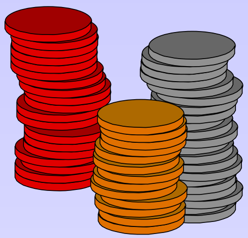
Jean-Paul LAURENT

Professeur à l'ISFA, Université Claude Bernard Lyon 1

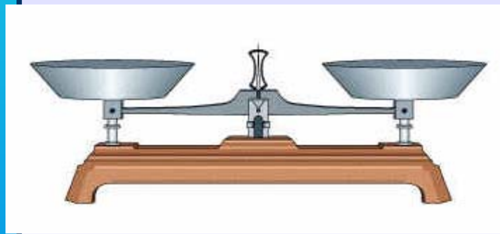
laurent.jeanpaul@free.fr

http://laurent.jeanpaul.free.fr/

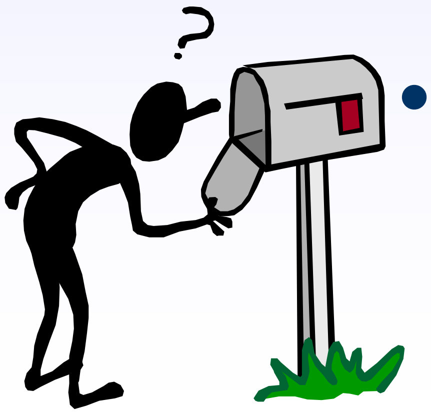
De la mesure à l'analyse des risques



- **Intégrer la mesure des risques dans la gestion financière**



- **La VaR : un benchmark pour la mesure des risques**
  - **Modélisation probabiliste des risques : la nature dans tous ses états**
  - **VaR, définitions et principales propriétés**
  - **De la mesure à l'analyse des risques**
  - **Le risque de modèle**

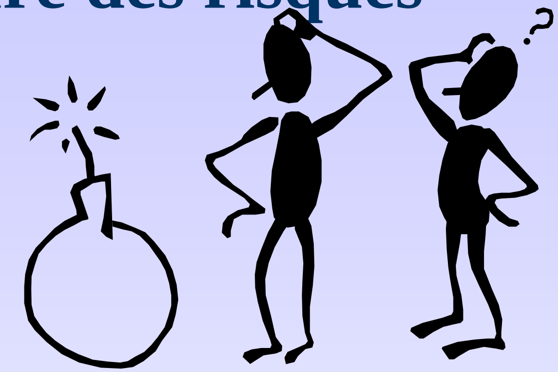


- **L'extension du domaine de la VaR**
  - **Approches en valeur de marché**
  - **Simulations du bilan et du compte de résultat**

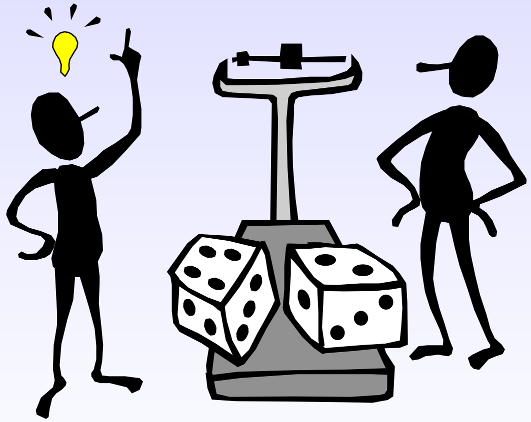
Intégrer la mesure des risques dans la gestion financière

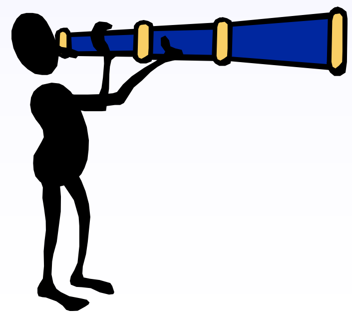
- **Un processus de mesure des risques**

  - **Étapes préalables**



  - **Étapes de modélisation**

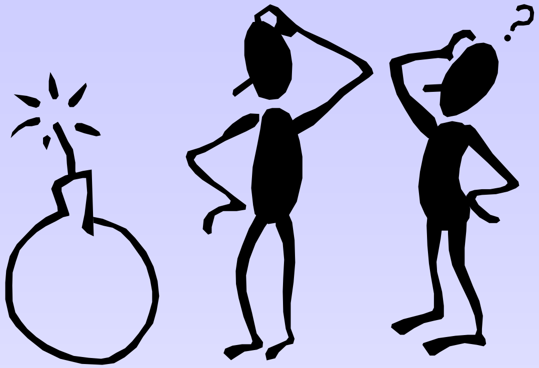




  - **Étapes d'analyse et de pilotage du risque**

Intégrer la mesure des risques dans la gestion financière

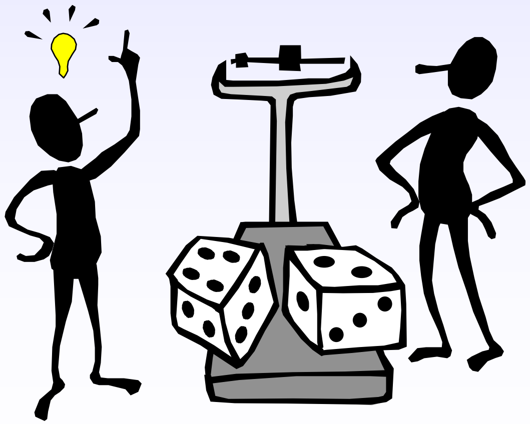
- **Étapes préalables**
  - **Analyse économique des risques encourus**



    - risques de marché,
    - de taux d'intérêt,
    - d'assurance :
      - **occurrence des sinistres, fluctuations des taux de mortalité,**
    - concurrence :
      - **revalorisation et rachat des contrats, chargements.**
    - risques réglementaires
    - …
  - **Détermination du champ d'application de la mesure des risques**
  - **Collecte des données**

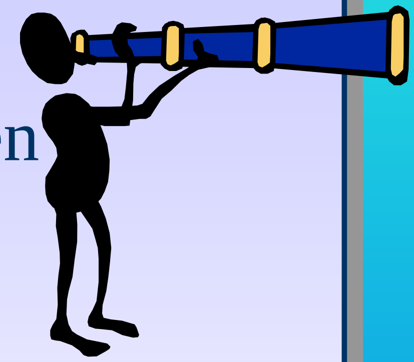
Intégrer la mesure des risques dans la gestion financière

- **Étapes de modélisation**
  - **Modélisation probabiliste des facteurs de risque**
  - **Liaison entre facteurs de risque et valeur du portefeuille**
    - agrégation, fonctions d'endommagement
  - **Évaluation de la loi de probabilité des portefeuilles**
  - **Évaluation de la robustesse des modèles**
    - back-testing
    - agrégation des risques
    - stress-testing

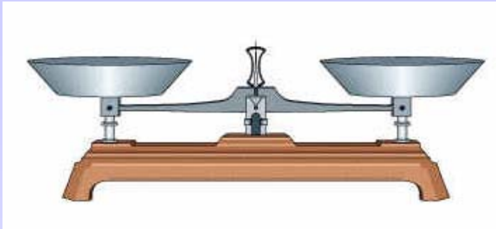


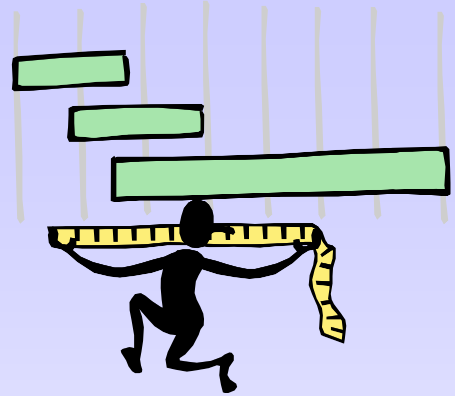
Intégrer la mesure des risques dans la gestion financière

- **Étapes d'analyse, de synthèse et de pilotage du risque**
  - **Calcul d'indicateurs prospectifs de risque, production d'outputs**
    - ➢probabilités de ruine, sensibilités, fonds propres en risque
  - **Analyse du risque ex-ante :**
    - ➢Typologie de scénarios, identification des scénarios risqués, contributions des différents portefeuilles au risque total.
  - **Pilotage du risque : couverture financière, réassurance, autres modalités de gestion des risques**
  - **Suivi du risque et de la rentabilité des différents portefeuilles**
    - ➢Mise à jour des limites de risque, modification de la tarification



La VaR : un benchmark pour la mesure des risques





- **Mesures de risque**
  - **sans modèles probabilistes**
    - ➢Sensibilité du portefeuille de contrats d’une compagnie d’assurance vie par rapport à une modification des taux zéro-coupons.
    - ➢Concentration du portefeuille de risques, expositions nominales
  - **Avec modèles probabilistes**
    - ➢Quantiles sur les distributions des pertes

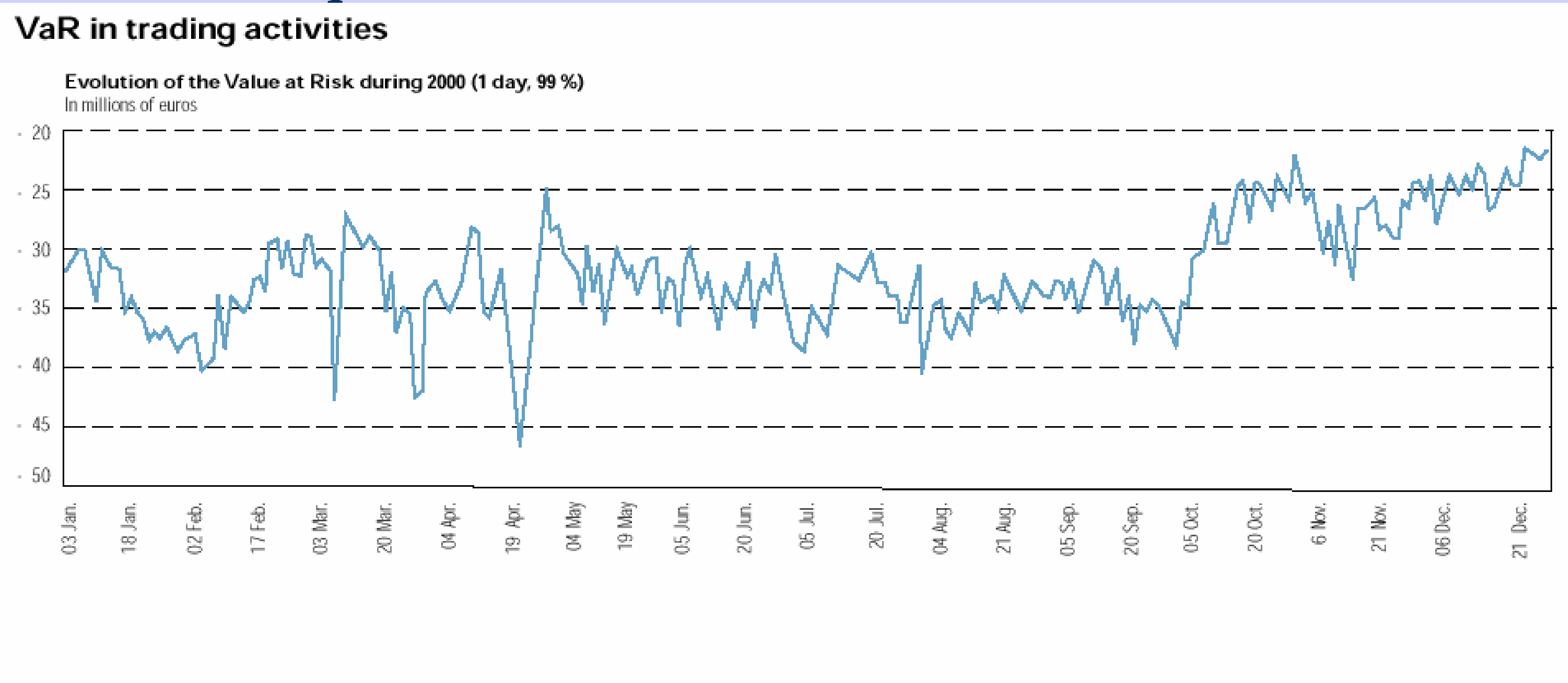
La VaR : un benchmark pour la mesure des risques

- **Le champ des risques couverts :**
  - **à l'origine, risques de marché**
  - **Une mesure synthétique du risque : « 4:15 report »**

  - **Documentation très complète :**
    - ➢Des sites portails : *Gloriamundi*,…
    - ➢Plusieurs dizaines de présentations en ligne sur la VaR
  - **Contrôle externe (a priori et a posteriori) par les autorités réglementaires.**

La VaR : un benchmark pour la mesure des risques

- Un suivi quotidien : Société Générale



- Information publique
- Confidentialité des transactions préservée

La VaR : un benchmark pour la mesure des risques

- **Définition de la VaR**

- cas statique : deux périodes t et $t+h$.
- $(\Omega, \mathcal{A})$: espace probabilisable
  - Ω : l'ensemble des états de la nature
  - $\mathcal{A}$ l'information disponible
- P_θ famille de mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$
  - θ : paramètre.
- Portefeuille de risque : une variable aléatoire X
  - $\left\{ \begin{array}{lll} \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \rightarrow & X(\omega) \end{array} \right.$
- Loi de probabilité du portefeuille $P_{X,\theta}(B) = P_\theta(X \in B)$ où $B \in \mathcal{B}$.
- Fonction de répartition $F_\theta(x) = P_\theta(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$
- Fonction quantile $\alpha \rightarrow F^{-}(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$.
- Si le portefeuille est constitué de I actifs financiers de prix $p_{i,t+h}$ à la date $t+h$
- Valeur du portefeuille : $X_{t+h}(a) = \sum_{i=1}^{I} a_i p_{i,t+h} = a' p_{t+h}$
- $P_\theta\left(X_{t+h}(a) - X_t(a) + VaR_t(a,\alpha) < 0\right) = \alpha$

La VaR : un benchmark pour la mesure des risques

- **Intégration de risques de crédit, d'assurances**

- $X_t = a'p_t - \sum_{j=1}^{J} b_j \left(\sum_{k=1}^{N_j(t)} Z_{j,k} - p_j \right)$
  - b_j montant assuré pour le contrat j
  - $N_j(t)$ nombre de sinistres à la date t pour le contrat j
  - $Z_{j,k}$ montant du sinistre k pour le contrat j
  - p_j prime d'assurance
- Les actifs financiers eux-mêmes peuvent être modélisés par des processus à sauts :
  - Duffie, Pan *Analytical Value-At-Risk with Jumps and Credit Risk*, 1999, Stanford University.
- Options financières : $(p_{j,t+h} - K_j)^+$.
- Prise en compte de collatéral : $(a'p_t - p_{i,t})^+$,
  - où $p_{i,t}$ est le prix de l'actif servant de garantie.
- Réassurance : $-\min\left(b_j \left(\sum_{k=1}^{N_j(t)} Z_{j,k} - p_j \right), K \right)$

La VaR : un benchmark pour la mesure des risques

- **Prise en compte du caractère dynamique**

- loi de probabilité conditionnelle $(\Omega, \mathbb{F}, P)$: espace probabilisé filtré.
  - $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{R}^+$, filtration représentant l'évolution de l'information.
  - $P(. \mid \mathcal{F}_t)$ loi de probabilité conditionnelle.
- VaR conditionnelle

$$P_\theta\left(-a' y_{t+h} > VaR_t(a, \alpha) \mid \mathcal{F}_t\right) = \alpha$$

- horizons multiples et stratégies financières

$$X_{t+h} = X_t + \sum_{l=0}^{h-1} a_{t+l} \Delta S_{t+l} - d_{t+l}.$$

  - où a_t est la quantité détenue dans les actifs à la date $t+l$,
  - ΔS_{t+l} la variation des prix des actifs,
  - d_{t+l} le montant (net) de fonds propres versés (dividendes - apports en capital).
  - Les paiement peuvent faire intervenir les trajectoires des prix des actifs (options cachées).

La VaR : un benchmark pour la mesure des risques

- **Quelques propriétés**
  - La VaR est positivement homogène de degré un:
  - $\lambda \geqslant 0 \Rightarrow VaR_t(\lambda a, \alpha) = \lambda \times VaR_t(a, \alpha)$
  - La VaR n'est **pas toujours** sous-additive:
  - $VaR_t(a+b, \alpha) \leq VaR_t(a, \alpha) + VaR_t(b, \alpha)$?
- **Exemples :**

1. les prix des actifs suivent une loi (conditionnellement à $\mathcal{F}_t$ normale
   - $y_{t+1} \sim N(\mu_t, \Omega_t)$
   - $VaR_t(a, \alpha) = -a'\mu_t + (a'\Omega_t a)^{1/2} z_{1-\alpha}$
   - $z_{1-\alpha}$ quantile de niveau $1-\alpha$ de la loi normale.
2. loi gaussienne conditionnellement à un facteur d'hétérogénéité latent :
3. $y_{t+1} \mid u \sim N(0, \Omega_t(u))$
4. u est le facteur d'hétérogénéité de loi Π
   - mélange de lois gaussiennes
   - modèles à volatilité stochastique

Dans les deux cas précédents, la sous-additivité est conservée.

$$VaR_{\alpha\%} = \theta_{\alpha\%} \times \sqrt{Varianc}$$

De la mesure à l’analyse des risques

- **L’analyse du risque par sous-portefeuille**
  - **Deutsche bank**

Group value-at-risk

in € m.	Total value-at-risk[1] 2000	Total value-at-risk[1] 1999	Interest rate risk 2000	Interest rate risk 1999	Equity price risk 2000	Equity price risk 1999	Commodity price risk 2000	Commodity price risk 1999	Foreign exchange risk[2] 2000	Foreign exchange risk[2] 1999
Year-end value-at-risk	37.7	61.3	35.2	58.0	12.3	17.8	2.9	1.4	5.0	8.0
Minimum value-at-risk	30.9	33.8	25.8	31.0	10.8	9.0	1.3	0.6	3.5	2.7
Maximum value-at-risk	65.5	61.3	62.6	58.0	42.2	27.4	6.8	3.8	11.8	19.9
Average value-at-risk	43.6	47.8	38.3	44.5	18.7	14.5	3.5	1.9	7.5	8.6

[1] one day holding period; confidence level 99 %
[2] without items excluded pursuant to § 5 (1) sentence 2 Principle I

  - **Contribution d’un sous-portefeuille *a** au risque du portefeuille global *a***
    - ➢ VaR(a)-VaR(a-a^*)

De la mesure à l'analyse des risques

- **La mesure des sensibilités de la VaR par rapport à la composition du portefeuille:**

- Sensibilités de la VaR

$$\frac{\partial VaR_t(a,\alpha)}{\partial a} = -E_t[y_{t+1} | a'y_{t+1} = -VaR_t(a,\alpha)].$$

- Dérivées secondes

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 VaR_t(a,\alpha)}{\partial a \partial a'} &= \frac{\partial \log g_{a,t}}{\partial z}(-VaR_t(a,\alpha))V_t[y_{t+1}|a'y_{t+1} = -VaR_t(a,\alpha)] \\ &- \left\{\frac{\partial}{\partial z} V_t[y_{t+1}|a'y_{t+1} = -z]\right\}_{z=VaR_t(a,\alpha)},\end{aligned}$$

  – où $g_{a,t}$ est la densité conditionnelle de $a'y_{t+1}$

- $a'\dfrac{\partial VaR_t(a,\alpha)}{\partial a} = VaR_t(a,\alpha)$ (Euler)

- contribution au risque de l'actif i: $a_i \times \dfrac{\partial VaR_t(a,\alpha)}{\partial a_i}$

De la mesure à l’analyse des risques

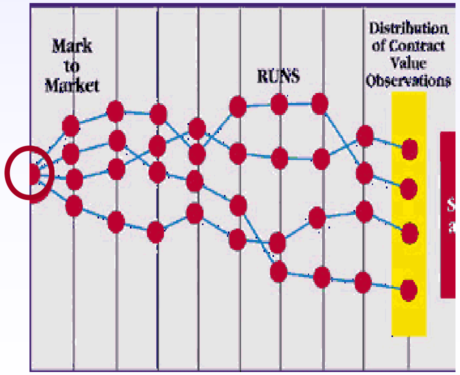
- **Typologie des scénarios : d’où vient le risque ?**
  - **équipe modèle financiers, BNP Paribas**
  - **Simulations financières pour l’analyse des risques**

Bilan

Conditions de marché

Moteur de simulations

Stockage des scénarios



De la mesure à l'analyse des risques

- **Typologie des scénarios : d'où vient le risque ?**
  - **Une exploration du risque.**

objectif:

mieux connaître les différents scénarios risqués

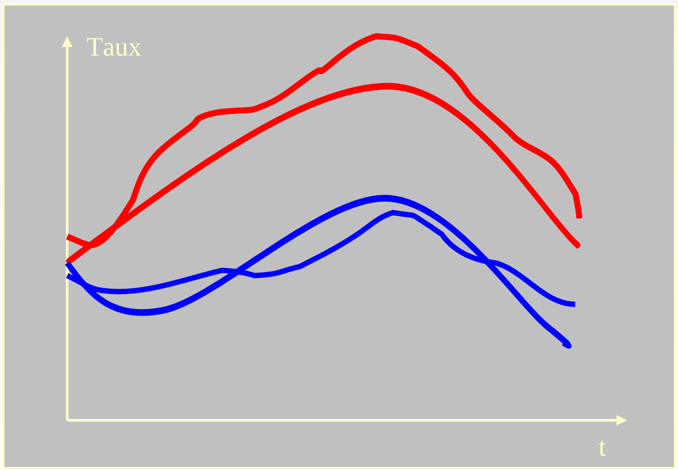
volume important d'information

TYPOLOGIE

- Utilisée couramment
- Techniques statistiques éprouvées

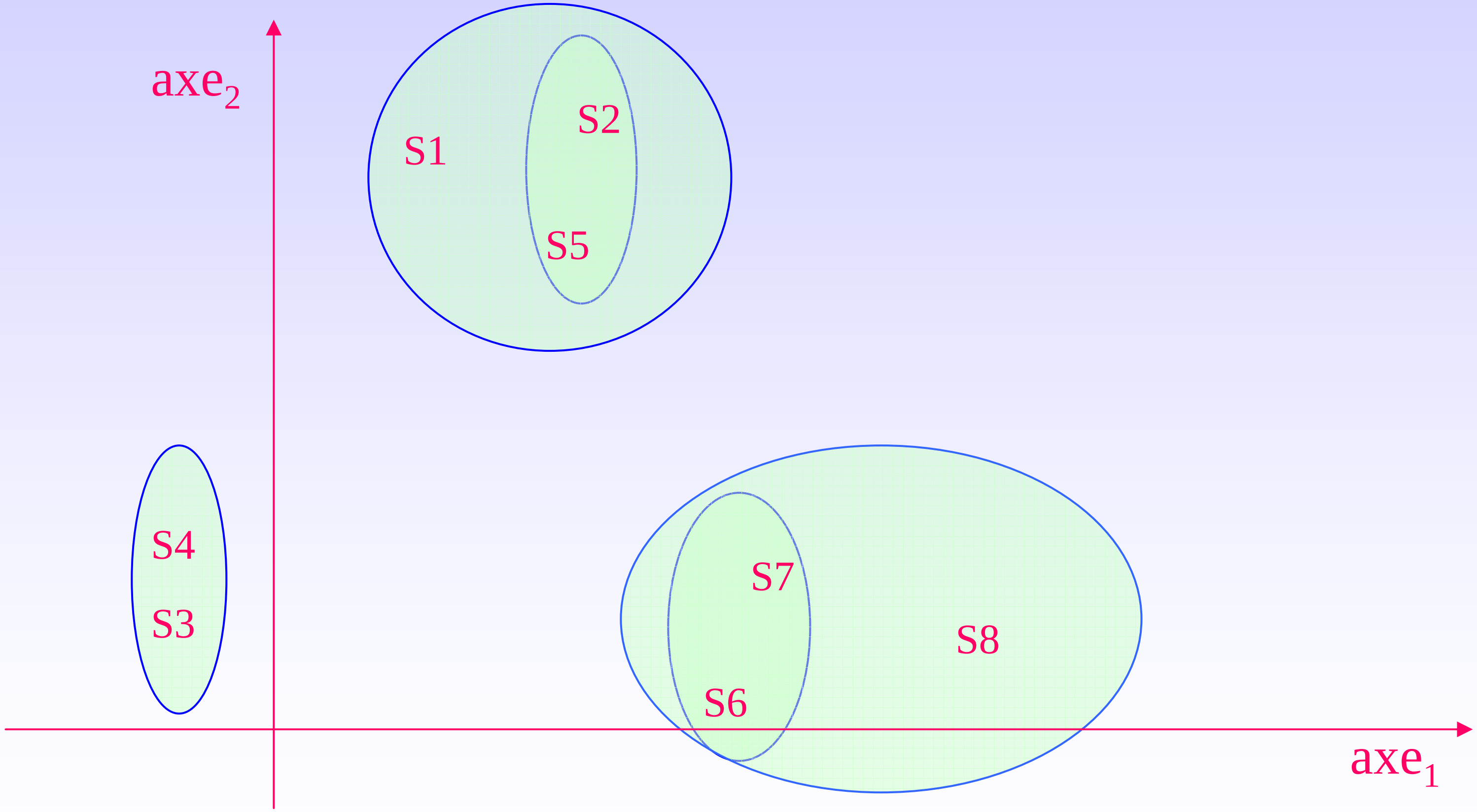
De la mesure à l’analyse des risques

- **Typologie des scénarios : d’où vient le risque ?**
  - **Une enquête policière pour identifier les scénarios suspects**
  - **Analyse des risques de taux d’intérêt :**
    - ➢Une trajectoire des taux d’intérêt est une succession de 60 valeurs du taux 10 ans (une par trimestre pendant 15 ans)
- **La typologie permet de regrouper des trajectoires similaires.**
- **On ne conserve que les trajectoires qui entraînent une perte supérieure à la VaR**



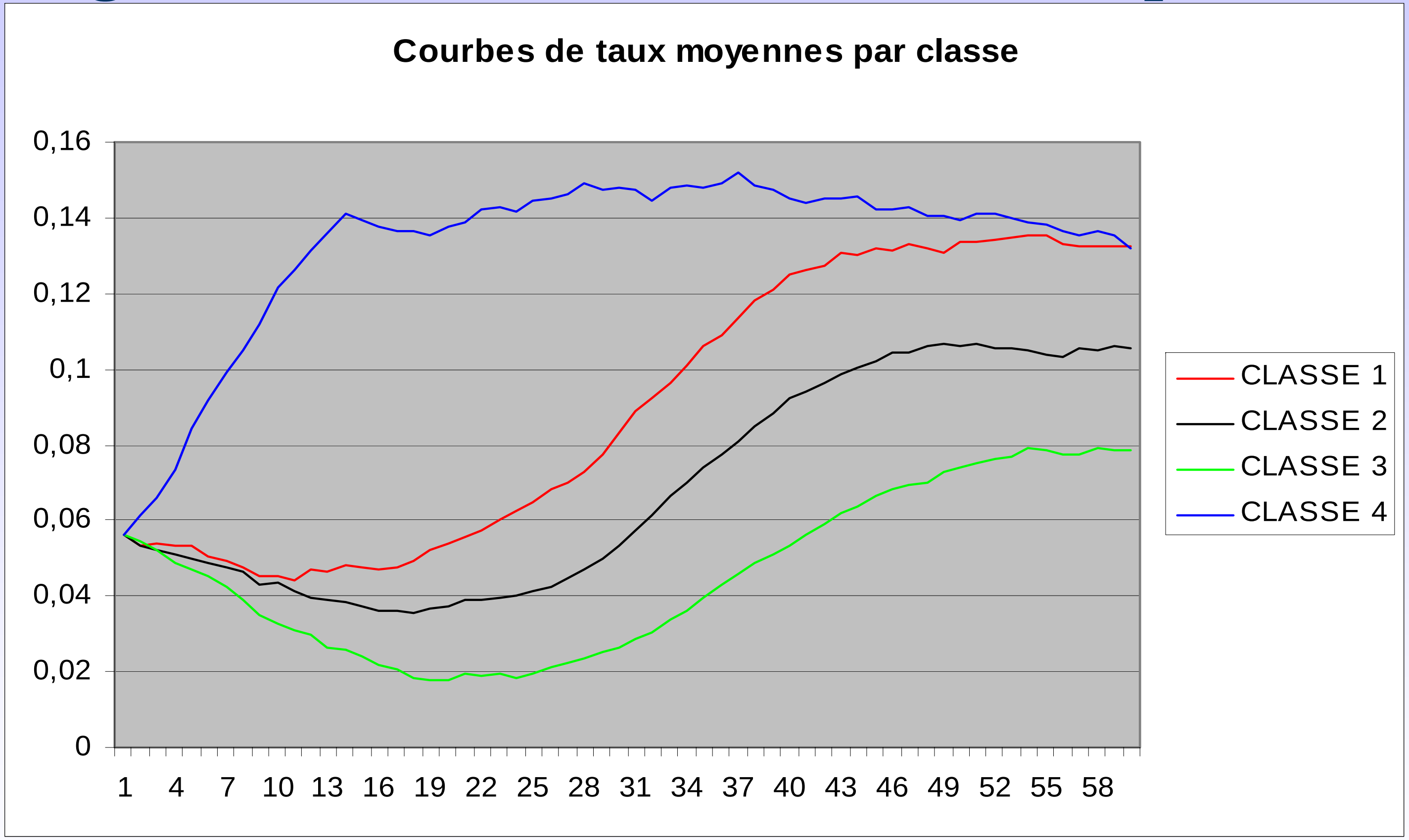
De la mesure à l'analyse des risques

- **Typologie des scénarios : d'où vient le risque ?**
  - **Classification ascendante hiérarchique**



De la mesure à l'analyse des risques

- **Typologie des scénarios : d'où vient le risque ?**



  - **Représentation du barycentre des principales classes de scénarios risqués**

De la mesure à l'analyse des risques

- **L'identification des scénarios risqués**
  - **permet de déterminer des stratégies de couverture des risques**

- **La typologie des scénarios**
  - **Facilite le dialogue entre statisticiens et gérants du risque**
- **On peut modifier les probabilités des différentes classes**
  - **Modification des probabilités des différentes classes**
    - ➢ en fonction des anticipations des gérants du risque
  - **Utilisation d'un critère entropie**
    - ➢ le modèle probabiliste obtenu prend en compte les anticipations des experts
    - ➢ est le plus proche possible du modèle statistique initial

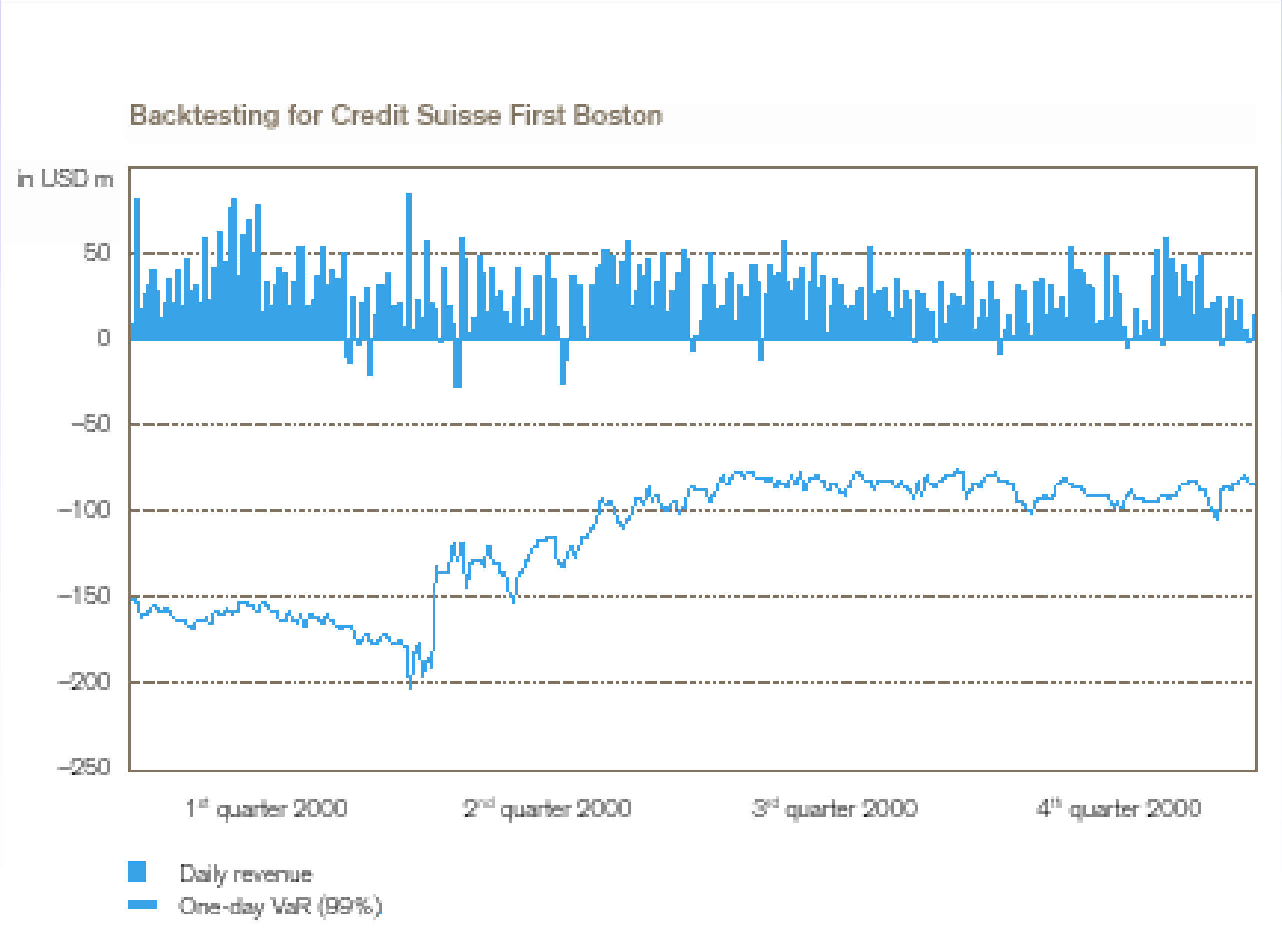
Le risque de modèle

- ***« any model is only a representation of the real world »***
  - ➢ présentation de credit risk +, Credit Suisse
- **incertitude**
  - ➢sur les paramètres
  - ➢sur la spécification du modèle probabiliste
  - – ***« A Discussion of Parameter and Model Uncertainty in Insurance »*, Andrew J.G. Cairns, Department of Actuarial Mathematics and Statistics, Heriot-Watt University,**
- **Quelle est la qualité de la mesure des risques ?**
  - – ***« Back-testing »***
  - – **Agrégation des risques**
  - – ***« Stress testing »***

Le risque de modèle

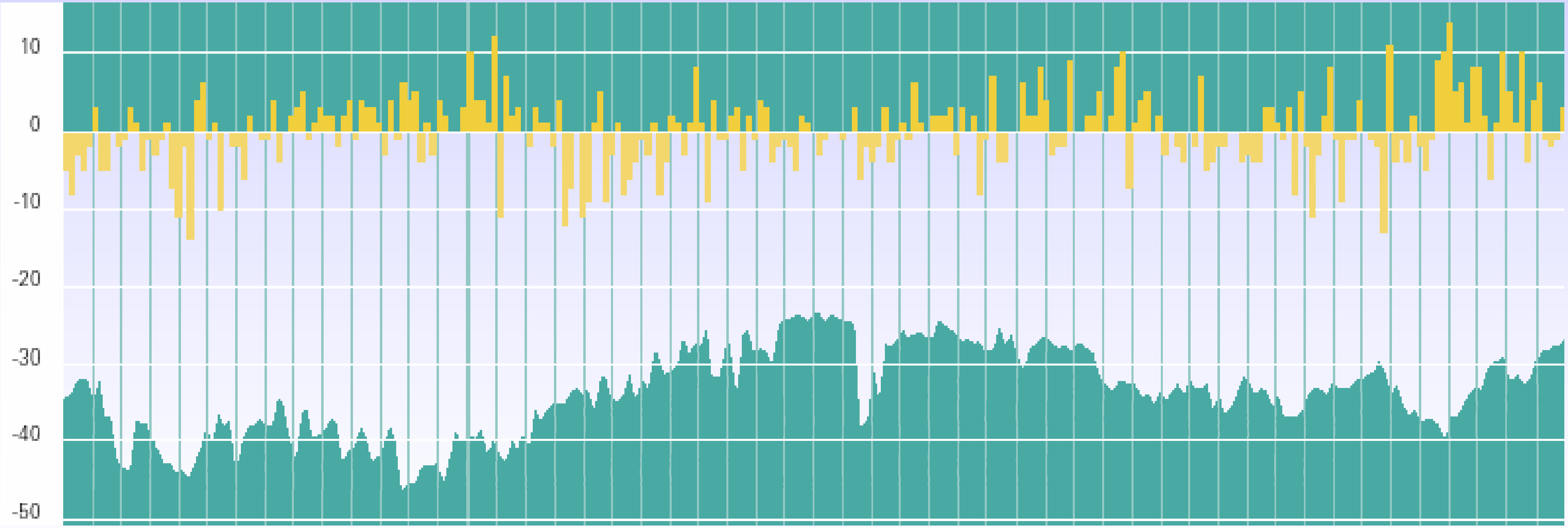
Le risque de modèle : « back-testing »

- **Credit Suisse (2000)**
  - **Les pertes sont rares et toujours très inférieures à la VaR**



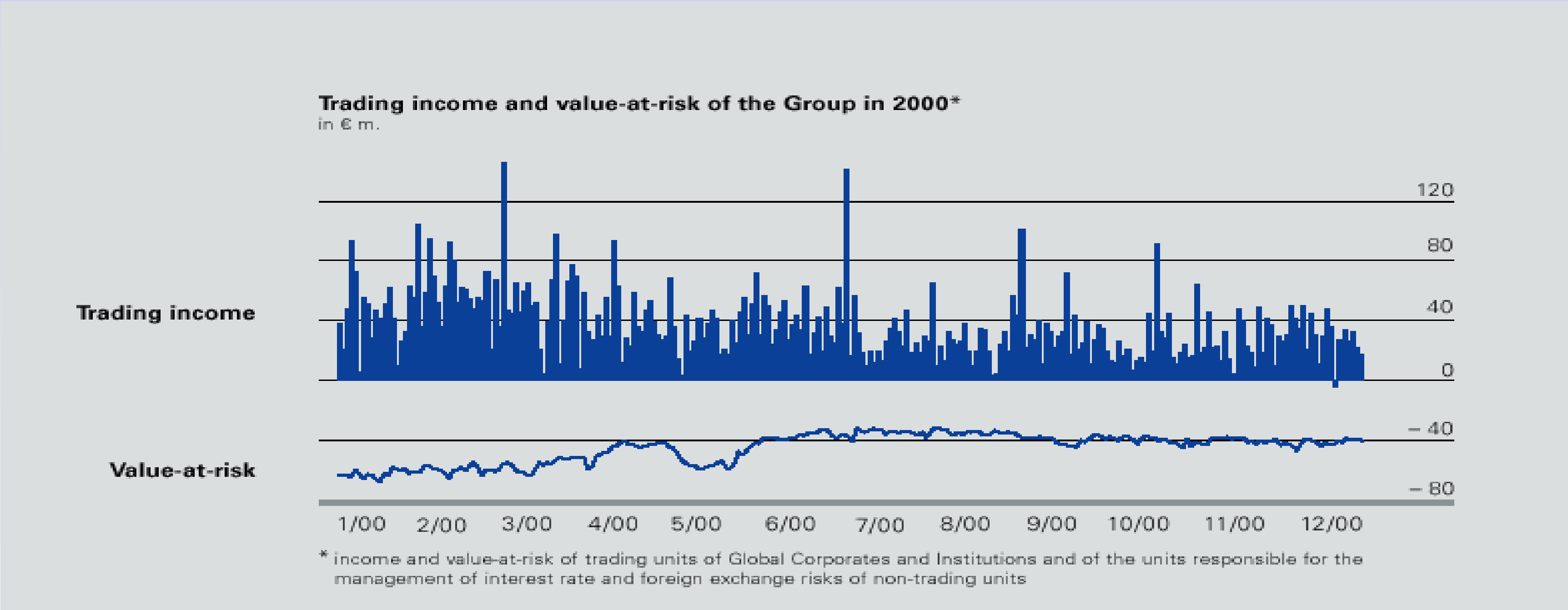
Le risque de modèle : « back testing »

- **Abn amro (2000)**
  - **Profits vs VaR (en millions d'Euros)**
  - **Sur estimation de la VaR**



Le risque de modèle : « back testing »

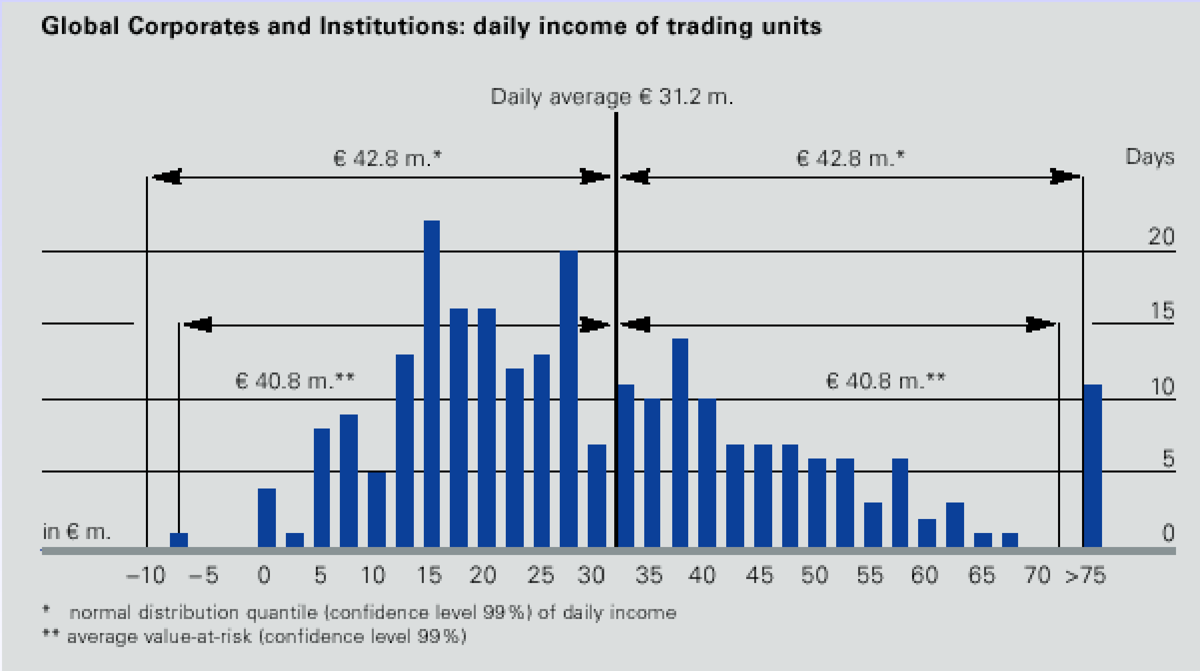
- **Deutsche Bank**



  - **Les résultats quotidiens sont tous les jours positifs !**
  - **La distribution des gains/pertes ex-post est très différente de la distribution ex-ante**
  - **Incorpore le risque business (marges commerciales) et l'expertise (information non contenue dans les prix) des traders**

Le risque de modèle : « back testing »

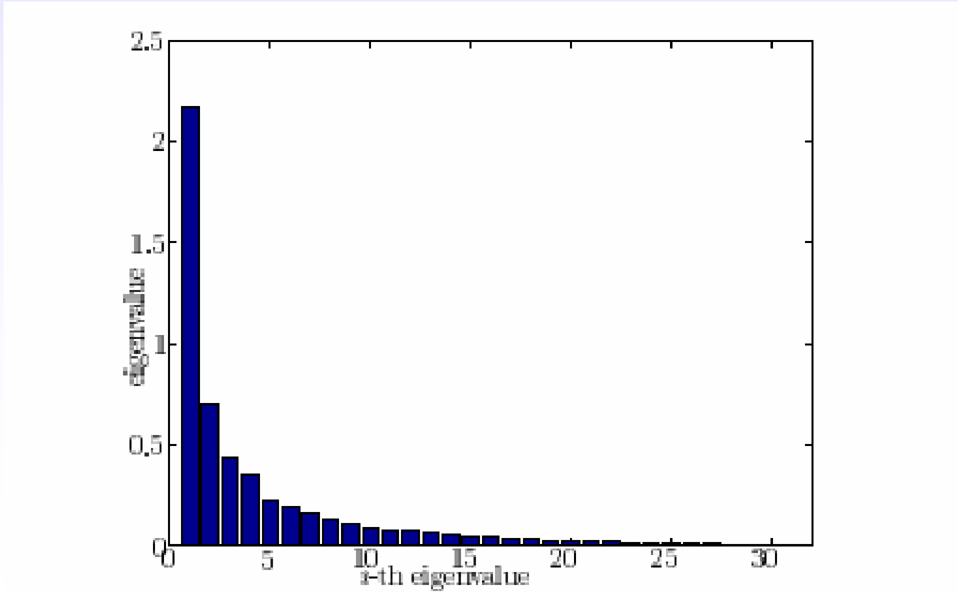
- **Ici, la différence entre les deux distributions se manifeste par une différence entre les moyennes**



- **Quant à la normalité…**

Le risque de modèle : l'agrégation des risques

- **Aspects spatiaux**
  - **La grande dimension du risque pose problème**
    - même dans un univers gaussien
    - valeurs propres de la matrice de variance/covariance de 32 indices (source *Riskmetrics*)
    - Certains portefeuilles ont une variance apparente très faible.
    - LTCM
    - « *Relative value* »

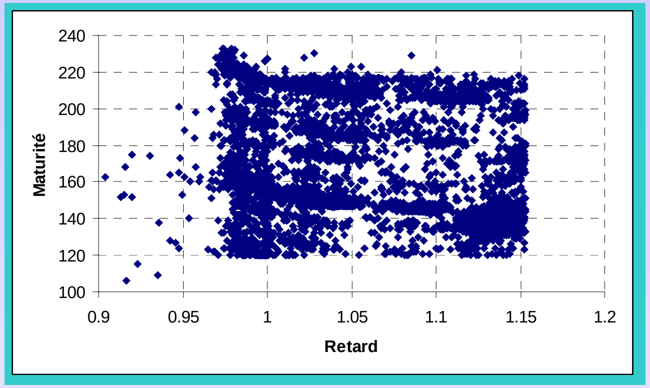


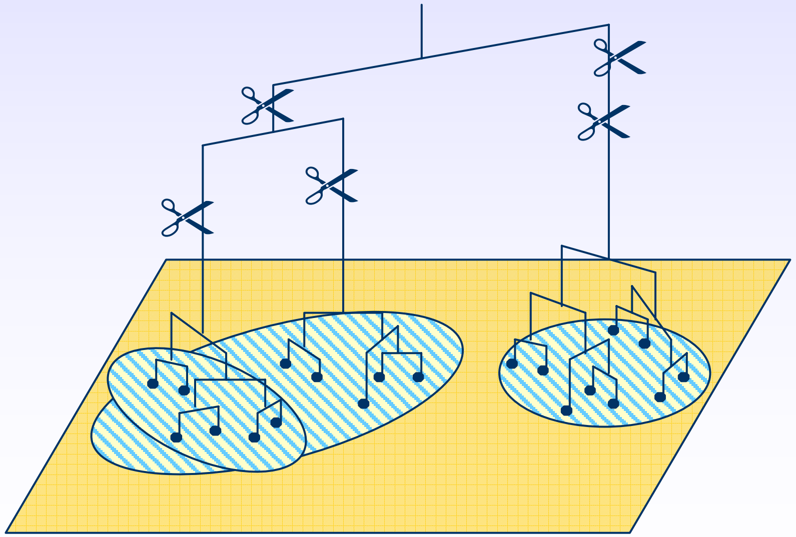
Le risque de modèle : l'agrégation des risques

Au départ :
un grand nombre de créances

Regroupement
des créances
de même profil
de risque

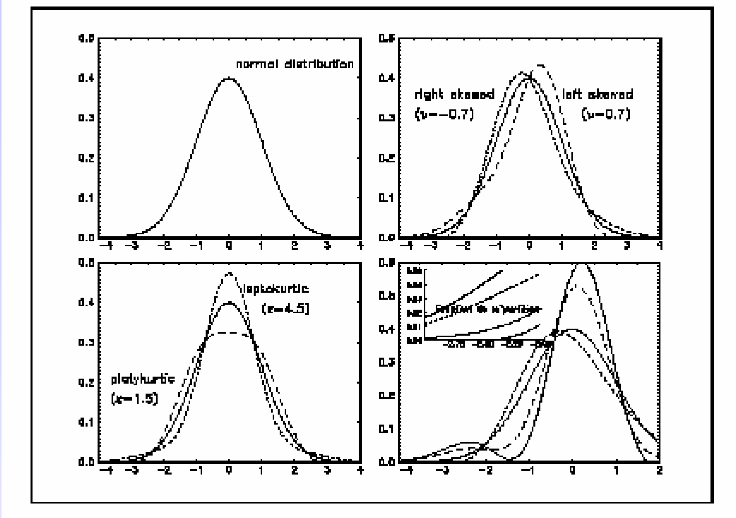
A l'arrivée :
quelques créances synthétiques que l'on peut
couvrir avec des instruments financiers



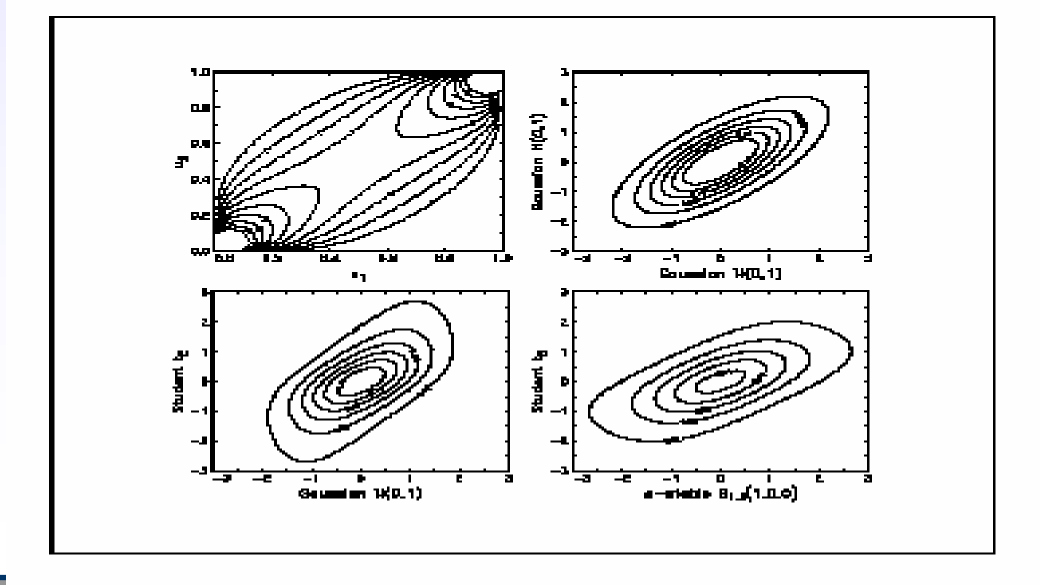


Le risque de modèle : l’agrégation des risques

- **distributions marginales non gaussiennes**



- **Et surtout distributions jointes non gaussiennes**
  - *Copulas for Finance A Reading Guide and Some Applications*, Bouyé et al, Document GRO, Crédit Lyonnais



  - **courbes d’iso-densité**

Le risque de modèle : « stress testing »

- **Mesures cohérentes de risque : définition, caractérisation**

- ρ application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ est une **mesure cohérente de risque** si :

  1. $\forall X \in \mathcal{L}_0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\rho(X+\lambda) = \rho(X) - \lambda$ (translations)
  2. $\forall X, Y \in \mathcal{L}_0$, $\rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$ (sous-additivité).
  3. $\forall X \in \mathcal{L}_0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ (positive homogénéité)
  4. $\forall X, Y \in \mathcal{L}_0$, $X \leqslant Y \Rightarrow \rho(Y) \leqslant \rho(X)$ (monotonicité).
  5. $\forall X \in \mathcal{L}_0$, $X \leqslant 0 \Rightarrow \rho(X) \geqslant 0$ (positivité)

- Caractérisation des mesures de risque

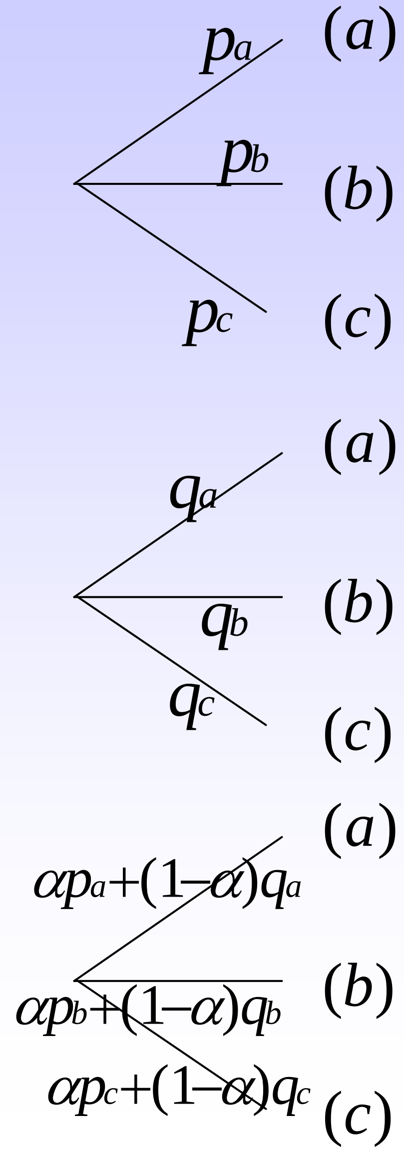
- $\mathbb{P}$ désigne un ensemble de mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$

- Toute mesure cohérente de risque est de la forme :

$$\rho_{\mathbb{P}}(X) = \sup\{E^P[-X], P \in \mathbb{P}\}.$$

Le risque de modèle : « stress testing »

- **Mesures cohérentes de risque et stress testing**
  - **Probabilité : « scénario généralisé »**
  - **Mesure cohérente de risque :**
  - **Recherche d'un « *worst case scenerio* »**
- **Introduction de nouvelles probabilités :**
  - **modification des paramètres de corrélation**
  - $p_a(\theta), p_b(\theta), p_c(\theta)$ θ **: corrélation**
  - **Scénarios déterministes : mesures de dirac**
    - ➢ Par exemple, $p_a = 0, p_b = 0, p_c = 1$
  - **Mélanges de probabilité : sur-modèles.**
    - ➢ $\alpha P + (1-\alpha) Q$ est encore une probabilité



L'extension du domaine de la VaR

- **Le risque de liquidité**
  - **erreur de mesure sur le prix simulé**
  - **Coûts de transaction :**
    - ➢modélisation de la loi des prix sachant les volumes
      - **Microstructure des marchés**
    - ➢On peut simuler les écarts entre prix de vente et d'achat
    - ➢Les pentes des courbes d'offre et de demande
  - **Le risque de liquidité peut rentrer dans le formalisme de la VaR**
- **Le risque opérationnel et le risque de crédit des banques commerciales vont également entrer dans le champ de la VAR**
  - **Une nouvelle révolution pour les institutions financières**

L'extension du domaine de la VaR

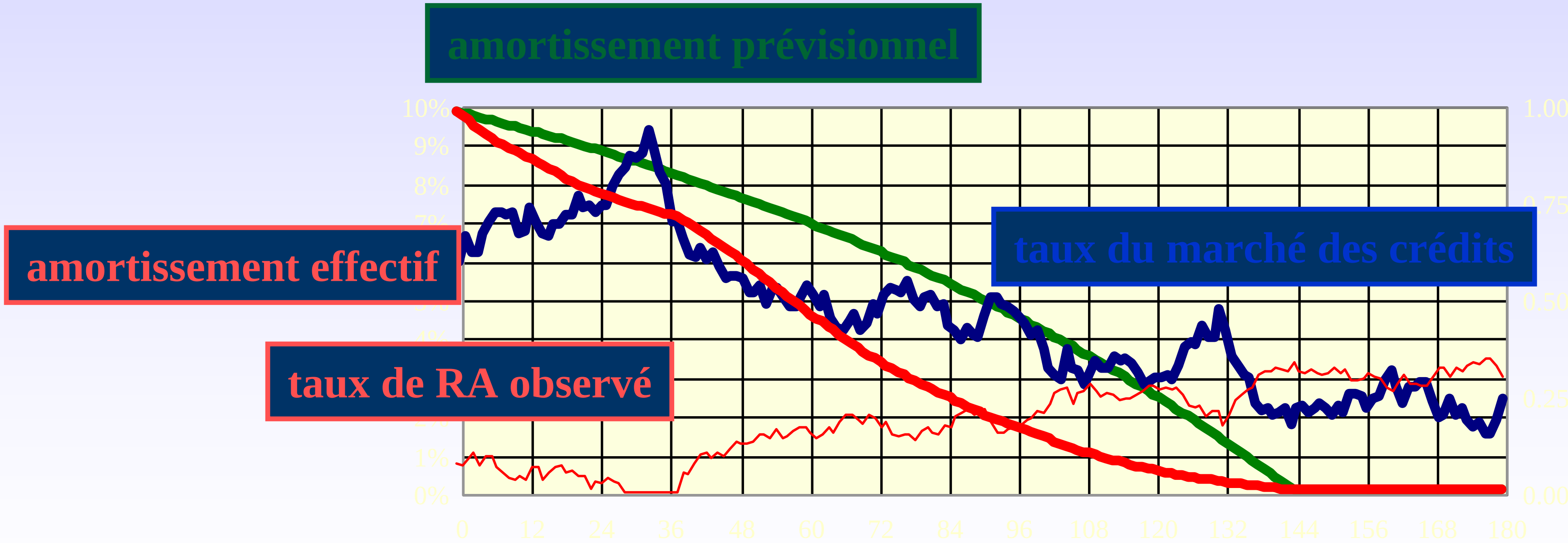
- **VaR pour le risque de crédit (« *Internal Ratings Based Approach* »)**
  - **VaR linéaire pour des portefeuilles infiniment « granulaires »**

$$A_b = \frac{LGD_b^2 \cdot (PD_b \cdot (1 - PD_b) - 0.033 \cdot F_b^2) + 0.25 \cdot PD_b \cdot LGD_b \cdot (1 - LGD_b)}{LGD_{AG}^2 \cdot (PD_{AG} \cdot (1 - PD_{AG}) - 0.033 \cdot F_{AG}^2) + 0.25 \cdot PD_{AG} \cdot LGD_{AG} \cdot (1 - LGD_{AG})}.$$

  - **Risques de crédit conditionnellement indépendants**
    - ➢Utilisation de modèles à facteurs
  - **lois de probabilité à partir des fonctions caractéristiques**
  - **Le traitement comptable des crédits n'est pas un obstacle**
  - **Intégration du risque de crédit et de taux d'intérêt possible**
    - ➢Sujet fondamental pour les banques de marché (swaps)
    - ➢Les probabilités de défaut dépendent des taux d'intérêt

L'extension du domaine de la VaR

- **Risques de taux d'intérêt et risques « business »**
  - **Nécessite une modélisation des comportements**
    - ➢Rachat, remboursement anticipé
  - **des politiques de tarification**
    - ➢chargements, revalorisation des contrats, marges commerciales.



- **Il faut prendre en compte les effets de la concurrence**
  - **Comment intégrer les spécificités de chaque institution ?**

Le risque est quelque chose de très complexe