

Risque de modèle et options multi sous-jacents

Groupe de Travail ENSAE

PHILIPPE DUMONT & CHRISTOPHE LUNVEN*
Encadrant : Rama Cont (CMAP, Ecole Polytechnique)

Juin 2005

Résumé

Dans ce document, nous développons une méthodologie inspirée du cadre analytique de [Cont (2004)] pour étudier et mesurer le risque de modèle présent dans les options multi sous-jacents, tels que les options sur panier, les options best-of ou encore les options rainbow.

Nous détaillons deux procédures qui permettent de construire des modèles de corrélation risque-neutres à l'aide de plusieurs sources d'information, en particulier grâce aux historiques de rendements observés. Une fois cette famille de modèles spécifiée, nous présentons une méthode qui permet de calculer explicitement des mesures du risque de modèle.

Nous discutons également des approches alternatives proposées dans la littérature et précisons les motivations qui nous ont conduits à adopter une démarche statistique. Les développements théoriques sont illustrés par diverses applications numériques.

*Nous remercions Rama Cont pour avoir accepté d'encadrer notre mémoire. Par ses conseils avisés et son professionnalisme, il a su nous guider tout au long de l'année dans ce projet. Nous remercions également Romuald Elie pour sa disponibilité et pour son soutien sans faille. Merci aussi à Paul Doukhan pour les longues séances de travail en commun qui nous ont guidées au début du projet, ainsi qu'à Christian Gouriéroux et à Alain Monfort pour leur écoute et leurs conseils. Nos remerciements vont aussi à Nizar Touzi grâce à qui nous avons pu avancer plus rapidement et dont les recommandations sont toujours les bienvenues. Enfin, nous tenons à remercier particulièrement Peter Laurence pour nous avoir accordé quelques heures de travail en commun, qui ont été plus que profitables.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Options multi sous-jacents et risque de corrélation	4
2.1	Définitions	4
2.2	Les produits de corrélation	5
2.3	Une première approche du risque de corrélation	6
3	Risque de modèle et formulation du problème	8
3.1	L'approche de [Cont (2004)]	8
3.2	Formulation du problème	10
4	Liens avec la littérature	11
4.1	Une approche par optimisation convexe	11
4.2	Calibration, contrôle optimal stochastique et équation de HJB	15
4.3	Conclusion d'étape	16
5	Spécification de modèles pour la corrélation	17
5.1	Motivations pour une approche statistique	17
5.2	La démarche	18
5.3	Paramétrisation du modèle de Black Scholes multivarié	19
5.4	Paramétrisation d'un modèle à sauts multivarié	20
6	Scénarios de stress sur les corrélations	21
6.1	La méthode	21
6.2	Applications numériques : modèle de Black Scholes	21
6.3	Applications numériques : modèle à sauts	25
6.4	Discussion	27
7	Perturbation des valeurs propres de la matrice de corrélation	28
7.1	Modèle statistique et loi des valeurs propres de R	28
7.2	Applications numériques : modèle de Black Scholes	30
7.3	Discussion	33
8	Conclusion	33
A	Notations	34
B	Compléments mathématiques	35
B.1	Robustesse de la formule de Black Scholes	35
B.2	Reconstruction de la densité risque-neutre	37
B.3	Loi asymptotique de \hat{R} et de ses valeurs propres	38
B.4	Evaluation dans les modèles à sauts multivariés	44
C	L'approche Hobson, Laurence et Wang	45
C.1	Continuum de strikes	45
C.2	Nombre fini de strikes	47
D	Une méthode pour stresser une matrice de corrélation	48

1 Introduction

L'évaluation et la couverture de flux aléatoires sur les marchés financiers ont donné lieu à de nombreux travaux théoriques et pratiques. La finance quantitative s'est développée autour de modèles stochastiques complexes qui modélisent de plus en plus finement la réalité qu'ils essaient d'appréhender. Dans le même temps, les différents systèmes financiers ont profondément évolué. Certains instruments financiers qui, hier encore, étaient considérés comme "sophistiqués", sont aujourd'hui devenus des actifs de base liquides, dont le prix est déterminé par la loi de l'offre et de la demande. C'est notamment le cas de certaines options vanilles, calls et puts, qui sont fréquemment utilisées pour évaluer et couvrir d'autres produits plus complexes.

Ainsi, seule la valorisation des produits dits "exotiques" nécessite la construction d'un *modèle* mathématique et la spécification de ses paramètres. Tout serait simple si ces paramètres pouvaient être déterminés de manière unique, sans incertitude, mais ce n'est pas le cas. Plus précisément, concernant les produits qui versent un flux fonction du prix de plusieurs actifs risqués, on doit généralement spécifier des paramètres de *volatilité* et de *corrélation* qui sont inobservables. Nous allons voir que le *risque de modèle* qui en résulte peut constituer une part importante du prix de l'option et, à ce titre, mérite une étude approfondie.

Malgré son importance pratique, ce problème est relativement peu abordé par la littérature théorique. La gestion du risque de corrélation s'est donc développée directement au sein des institutions financières, de manière très décentralisée, en toute confidentialité. Cette absence de travaux académiques unifiés sur le risque de modèle lié aux produits de corrélation a motivé notre projet. L'approche que nous développons dans ce document s'inspire du cadre analytique général développé par [Cont (2004)], qui fonde sur le plan théorique le problème du risque de modèle et qui propose des mesures de risque calculables qui peuvent s'interpréter financièrement.

Dans le cas multivarié, le choix d'un modèle risque-neutre multi sous-jacents \mathbb{Q} qui calibre les prix d'options vanilles et avec lequel on valorise les produits exotiques est souvent un problème complexe. L'incertitude sur les paramètres de corrélation se répercute en incertitude sur les prix et sur les stratégies de couverture, conduisant à un risque de modèle important. Pour autant, on a généralement une idée de la famille $\overline{\mathcal{Q}}$ des modèles risque-neutres qu'il faut utiliser pour évaluer tel ou tel produit, parce qu'on observe par exemple une certaine forme pour les nappes de volatilité ou parce qu'on a une vue sur le marché. Le problème vient du fait que l'ensemble $\overline{\mathcal{Q}}$ est "grand" et que l'on ne peut raisonnablement pas comparer le prix de l'option dans chaque modèle $\mathbb{Q} \in \overline{\mathcal{Q}}$. Partant des informations disponibles sur le marché et de nos anticipations, on a donc besoin d'une procédure efficace qui permette d'extraire de $\overline{\mathcal{Q}}$ une nouvelle famille de modèles \mathcal{Q} qui (1) reste représentative du risque de modèle sur $\overline{\mathcal{Q}}$ et (2) qui soit suffisamment "petite" pour qu'on puisse comparer le prix de l'option dans chaque modèle $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$.

En particulier, dans notre approche, c'est l'information statistique apportée par les rendements observés qui va nous permettre de faire cette sélection et de calculer explicitement une mesure du risque de modèle.

Dans la section 2, nous présentons les options multi sous-jacents et les risques particuliers qui leurs sont associés. Cette première approche des produits de corrélation sera également l'occasion de justifier plus précisément l'intérêt du sujet et l'importance des enjeux. Dans la section 3, nous établirons le cadre analytique dans lequel on se place, à savoir celui de [Cont (2004)], pour formuler clairement le problème qu'on veut résoudre.

Dans la mesure où notre problématique est relativement récente et originale, nous

avons exploré plusieurs pistes avant de nous focaliser sur l'approche statistique. Nous proposons donc dans la section 4 un tour d'horizon critique de ces différentes voies et montrons dans la section 5 les raisons pour lesquelles une approche statistique s'impose naturellement. Dans la section 5, nous précisons également les fondements analytiques communs des différentes méthodes que nous proposons pour mesurer le risque de modèle. Les méthodes et applications numériques sont quant à elles présentées dans les sections 6 et 7.

L'annexe A explicite les notations et conventions d'écriture adoptées dans le rapport.

2 Options multi sous-jacents et risque de corrélation

2.1 Définitions

Il existe différentes façons de mesurer la dépendance entre plusieurs actifs risqués S^1, \dots, S^n , définis comme des processus sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$. La plus utilisée est sans doute la *corrélation linéaire* entre rendements que nous notons :

$$\text{Corr} \left(\ln \frac{S_T^i}{S_0^i}, \ln \frac{S_T^j}{S_0^j} \right) = \frac{\text{Cov} \left(\ln \frac{S_T^i}{S_0^i}, \ln \frac{S_T^j}{S_0^j} \right)}{\sqrt{\text{Var} \left(\ln \frac{S_T^i}{S_0^i} \right)} \sqrt{\text{Var} \left(\ln \frac{S_T^j}{S_0^j} \right)}}, T > 0$$

Cette quantité toujours comprise entre -1 et 1 mesure les relations de dépendance linéaire entre les actifs. Elle est à distinguer de la *covariation quadratique*, qui est une variable aléatoire et qui vaut¹

$$\frac{[S^i, S^j]_T}{\sqrt{[S^i]_T} \sqrt{[S^j]_T}}$$

Cette quantité mesure la covariation qui va se réaliser sur la période $[0, T]$ et peut être très différente de la corrélation linéaire². Par exemple, si on considère un modèle de diffusion du type

$$dS_t = \text{diag}(S_t) \sigma_t dW_t$$

avec σ_t une matrice de taille n , la matrice de covariance des rendements est définie par $\Sigma_t := \sigma_t \sigma_t^T$ et la matrice de corrélation s'exprime sous la forme $R := \text{ddiag}(\Sigma)^{-1/2} \Sigma \text{ddiag}(\Sigma)^{-1/2}$. Si on note ρ_t^{ij} le coefficient de corrélation linéaire entre les rendements de S^i et S^j , terme général de la matrice R , et σ_t^i la volatilité instantanée de S^i , racine du terme diagonal de Σ , la covariation quadratique entre S^i et S^j vaut :

$$\frac{\int_0^T \rho_t^{ij} \sigma_t^i \sigma_t^j S_t^i S_t^j dt}{\sqrt{\int_0^T (\sigma_t^i S_t^i)^2 dt} \sqrt{\int_0^T (\sigma_t^j S_t^j)^2 dt}}$$

Quand on évalue une option multi sous-jacents, c'est la forme de la covariation quadratique qui est importante. Par exemple, on peut montrer que le P&L du portefeuille de couverture en delta de l'option $C(t, S_t)$ s'écrit sous la forme³ :

$$P\&L_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^T (\hat{\rho}_t^{ij} \hat{\sigma}_t^i \hat{\sigma}_t^j - \rho_t^{ij} \sigma_t^i \sigma_t^j) S_t^i S_t^j \frac{\partial^2 C}{\partial S^i \partial S^j}(t, S_t) dt \quad (1)$$

où $\hat{\sigma}^i$ et $\hat{\rho}^{ij}$ sont les paramètres de volatilité et de corrélation utilisés par le trader qui gère l'option.

¹On note de manière standard $[\cdot]$ la variation quadratique du processus. Cf. [Cont Tankov (2004)] ou [Protter (2004)].

²On trouvera dans [Rebonato (2004)] une discussion détaillée de cette question.

³Ce résultat est montré en annexe B.1

La forme de la covariation quadratique dépend du modèle utilisé pour évaluer et couvrir l'option. Elle dépend en particulier de plusieurs paramètres inobservables comme par exemple les corrélations entre browniens ou, si on considère un modèle à sauts, des corrélations entre taille des sauts, de leur moyenne À cause de cette incertitude sur les paramètres, le risque de mauvaise spécification du modèle est important. L'observation des rendements historiques permet toutefois de construire une estimation de la matrice de corrélation, qui nous apporte des informations sur la structure de dépendance entre actifs et que nous utiliserons pour mesurer ce risque de mauvaise spécification.

On peut remarquer sur la formule (1) que la matrice des dérivées secondes du prix de l'option par rapport aux sous-jacents joue un rôle important sur le P&L. En particulier, les signes des termes hors diagonale de cette matrice, appelés gammas croisés, nous donnent des informations sur la façon de gérer l'option au vu des corrélations. Nous reviendrons sur ce point tout au long du document.

Afin d'alléger les notations, nous appellerons simplement "corrélation" la corrélation linéaire dans le reste du rapport.

2.2 Les produits de corrélation

Dans ce mémoire, nous nous focaliserons sur l'étude des options multi sous-jacents, qui sont simplement des produits dont le prix dans un certain modèle dépend des corrélations entre actifs risqués. Il existe une très large gamme de produits de corrélation, et il serait illusoire d'espérer en faire une liste exhaustive. Nous présentons donc ici les payoffs les plus courants. En notant (S_t^1, \dots, S_t^n) les prix à la date t de n actifs risqués, on a :

- *L'option d'échange*⁴ de prix d'exercice K et d'échéance T , qui a pour payoff $(S_T^i - S_T^j)^+$ pour $i \neq j$. C'est le produit de corrélation le plus simple qu'on puisse imaginer.
- *L'option sur panier*⁵ de prix d'exercice K et d'échéance T , qui a pour payoff $(\sum_{i=1}^n \omega_i S_T^i - K)^+$ où $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ sont des poids fixés.
- *L'option asiatique sur panier*⁶ de prix d'exercice K et d'échéance T , qui a pour payoff $(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \omega^j S_{t_j} - K)^+$, avec $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$ des dates de constatation données, aussi appelées dates de fixing.
- *L'option best-of*, qui a pour payoff $(\max(S_T^1, \dots, S_T^n) - K)^+$. Ces options ont été largement étudiées sur le plan théorique par [Stulz (1982), Johnson (1987)] et sur le plan numérique par [Boyle Tse (1990)].
- *L'option worst-of*, qui a pour payoff $(\min(S_T^1, \dots, S_T^n) - K)^+$
- *L'option rainbow*, qui a pour payoff $(\alpha_1 P_T^{(1)} + \dots + \alpha_m P_T^{(m)} - K)^+$ où les P^j sont des paniers d'actifs :

$$P_t^j := \sum_{i=1}^n \omega_j^i S_t^i, j = 1, \dots, m$$

⁴Aussi appelée option Margrabe.

⁵Aussi appelée option Basket.

⁶A moyenne arithmétique et constatations discrètes.

et où on a noté $(P_T^{(1)}, \dots, P_T^{(m)})$ les statistiques d'ordre telles que $P_T^{(1)} \geq P_T^{(2)} \geq \dots \geq P_T^{(m)}$. En d'autres termes, on classe à échéance les actifs sous-jacents par ordre décroissant de rendement et on paye un call sur une combinaison linéaire de ces rendements triés.

Le marché des produits de corrélation s'est développé de manière considérable en quelques années. En effet, les options multi sous-jacents offrent une grande diversité de payoffs et, à ce titre, permettent souvent de satisfaire les exigences des investisseurs en la matière. En outre, les institutions financières voient souvent la corrélation comme un "facteur" supplémentaire susceptible de faire baisser le prix du produit et donc d'offrir des bonnes indexations à leurs clients. C'est typiquement le cas du call sur panier qui, si les actifs sous-jacents sont choisis avec précaution, peut être significativement moins cher qu'un call vanille.

2.3 Une première approche du risque de corrélation

Les produits multi sous-jacents ont des caractéristiques intéressantes, qui en font des instruments privilégiés dans la plupart des salles de marché. En particulier, on dit qu'ils sont sensibles au *risque de corrélation*, que nous allons présenter dans cette section. En effet, le prix de ces options peut dépendre de la corrélation entre actifs d'une manière non triviale. Par exemple, on montre dans les graphes 1 et 2 de possibles relations entre le coefficient de corrélation des rendements ρ et le prix d'une option rainbow dans un modèle type Black Scholes multivarié :

$$\begin{cases} dS_t^i = \sigma_i S_t^i dZ_t^i \\ \langle Z_t^i, Z_t^j \rangle = (\mathbb{1}_{\{i=j\}} + \rho \mathbb{1}_{\{i \neq j\}})t \end{cases}$$

La matrice de corrélation est donc de la forme⁷

$$R = \rho \mathbf{1}\mathbf{1}' + (1 - \rho)I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \rho \\ & \ddots & \\ \rho & & 1 \end{pmatrix}$$

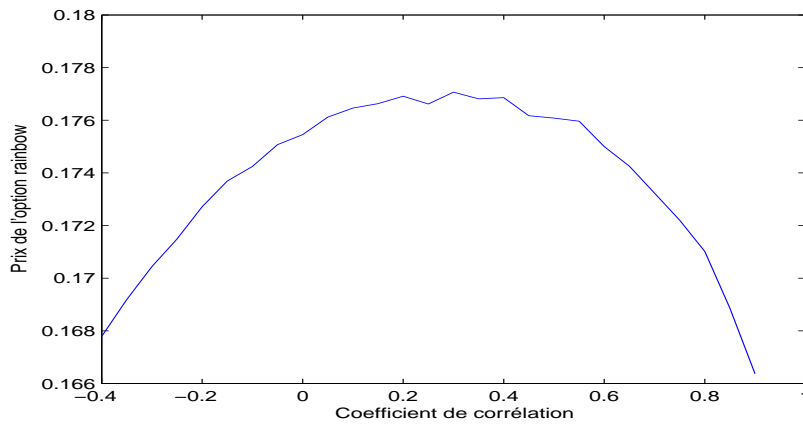


FIG. 1 – Prix d'une option rainbow sur trois actifs, en fonction du coefficient de corrélation ρ

⁷Pour que cette matrice soit définie positive, il faut que $\rho > -\frac{1}{n-1}$.

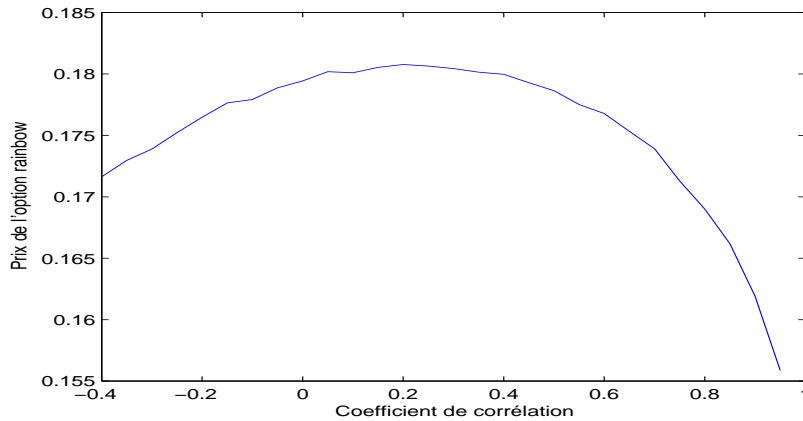


FIG. 2 – Prix d’une option rainbow sur trois actifs, en fonction du coefficient de corrélation ρ

La première simulation, dont on voit le résultat sur le graphe 1, porte sur une rainbow de trois paniers à la monnaie, dont le payoff est :

$$\max(0.65 \max(S_T^1, S_T^2, S_T^3) + 0.35 \min(S_T^1, S_T^2, S_T^3) - 1, 0)$$

La deuxième simulation, dont on voit le résultat sur le graphe 2, porte sur une rainbow de trois paniers à la monnaie, dont le payoff est :

$$\max(\max(0.5S_T^1 + 0.5S_T^2, 0.5S_T^1 + 0.5S_T^3, 0.5S_T^2 + 0.5S_T^3) - 1, 0)$$

avec $S_0 = \mathbf{1}$, $T = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.35$.

Cette relation complexe entre structure de corrélation et prix de non-arbitrage justifie l’intérêt pratique du sujet, à savoir : quels sont les risques si les paramètres de corrélation du modèle sont mal spécifiés ?

De plus, contrairement au risque de volatilité qui peut généralement être réduit par une couverture en vega, il n’existe pas beaucoup d’instruments pour se couvrir contre une déformation de la structure de corrélation. Les traders qui gèrent ces options multi sous-jacents sont donc souvent amenés à prendre des paris directionnels sur les évolutions futures de la corrélation, ce qui rend complexe l’ingénierie relative à ces produits. Il existe plusieurs façons de limiter ce risque, mais généralement aucun moyen de l’annuler. Par exemple, si le trader a accès à un instrument liquide de corrélation (disons un call sur indice), il peut essayer de se couvrir contre une partie du risque de corrélation. En général, il choisit de se couvrir contre les variations le long de la direction qui engendre le plus de dispersion et qui est déterminée grâce à une Analyse en Composantes Principales⁸. Il peut ainsi réduire son exposition au risque, mais il ne peut généralement pas l’annuler complètement, même à l’ordre 1. Une autre pratique courante pour limiter le risque de corrélation consiste à sur-évaluer l’option, i.e. à mettre en place une provision, pour tenir compte du problème de couverture. Pour ce faire, on peut utiliser par exemple la propriété de robustesse de la formule de Black Scholes, que nous rappelons en annexe B.1, et qui nécessite la connaissance de tous les gammas croisés de l’option (ou au moins de leurs signes). Typiquement, on sait que les gammas croisés d’une option best-of sont toujours négatifs [Johnson (1987)], on peut

⁸On rappelle que le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre d’une matrice de corrélation engendre le sous-espace vectoriel de dimension 1 qui supporte la plus grande part d’inertie du nuage.

dans ce cas identifier facilement la structure de corrélation la plus défavorable. Mais ces grecques peuvent aussi être particulièrement difficiles à estimer pour certaines options exotiques, même numériquement [Glasserman (2004)]. En particulier, il existe des options rainbow dont les gammas croisés changent de signe au cours du temps, comme l'illustrent les graphes 1 ou 2, dans ce cas, la gestion du risque de corrélation n'est pas claire.

Notons que ces problèmes, peu étudiés sur le plan théoriques, sont de première importance dans les institutions financières. Conscients de la complexité du problème, les ingénieurs financiers les plus avisés ont imaginé des produits multi sous-jacents peu sensibles à la corrélation, comme par exemple des options sur médiane, de payoff

$$\left(S_T^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} - K \right)^+$$

avec n impair et $S_T^{(1)} \geq \dots \geq S_T^{(n)}$ les statistiques d'ordre.

La morale de ce paragraphe, c'est qu'il n'est pas toujours simple de contrôler tous les risques présents dans les produits de corrélation et qu'il est important de mettre en œuvre des procédures efficaces pour les comprendre et les mesurer. L'objectif de ce document est de proposer de telles procédures.

3 Risque de modèle et formulation du problème

Pour étudier le risque de modèle, il faut un cadre analytique. Or la construction d'un tel cadre n'est pas un exercice facile. En particulier, on aimerait qu'il soit à la fois abstrait, pour être le plus "générique" possible et concret, pour être propice aux applications et à l'implémentation.

Dans ce document, nous avons choisi d'utiliser celui développé dans [Cont (2004)].

3.1 L'approche de [Cont (2004)]

On considère un marché financier sur lequel sont échangés n actifs risqués (S^1, \dots, S^n) et un actif non risqué S^0 . Le prix à une date $t \in [0, T]$ de l'actif i est noté S_t^i , pour $i = 0, \dots, n$. Pour simplifier les notations, on raisonne sur des quantités actualisées. La valeur de l'actif non risqué S^0 est donc normalisée à 1, i.e. $S_t^0 := 1 \forall t \in [0, T]$.

On modélise l'aléa sur ce marché au moyen d'un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$, où Ω représente l'ensemble des scénarios de marché et \mathcal{F}_t l'information disponible à la date t .

On s'intéresse à une option de prix C_t à la date t et de payoff $X \in \mathcal{F}_T$ à échéance T . La théorie générale de l'arbitrage nous dit que le prix à la date t de cette option est⁹ :

$$C_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{F}_t)$$

où \mathbb{Q} est une probabilité risque-neutre, i.e. une probabilité sous laquelle la valeur actualisée des portefeuilles de couverture est une martingale.

On suppose également qu'il existe sur le marché p instruments financiers de payoffs $\{H_i\}_{i=1, \dots, p}$ dont on observe les prix courants, notés $\{C_i^*\}_{i=1, \dots, p}$. Typiquement, on peut penser à un ensemble de calls européens, avec différents prix d'exercice et différentes maturités.

On notera $\mathcal{I} := \{1, \dots, p\}$ et $\mathcal{H} := \{H_1, \dots, H_p\}$ l'ensemble de ces instruments de référence, aussi appelés instruments benchmarks.

⁹Cf. [Björk (2004)] ou [Musiela Rutkowski (2004)].

On considère un ensemble $\mathcal{Q} = \{\mathbb{Q}_1, \dots, \mathbb{Q}_n, \dots\}$ de probabilités risque-neutres. \mathcal{Q} est un ensemble qui peut être infini (pourvu qu'il ait un nombre fini de points extrémaux) et pour tout $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ la valeur actualisée de chaque actif risqué est une \mathbb{Q} martingale. Dans ce document, on appellera *risque de modèle* l'incertitude quant au choix de la probabilité $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ pour évaluer l'option.

[Cont (2004)] propose alors deux méthodes pour mesurer ce risque de modèle. La première nécessite la calibration des prix aux instruments benchmarks : on mesure le risque de modèle du produit X par

$$\Phi(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) := \bar{\pi}(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) - \underline{\pi}(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) \quad (2)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\pi}(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] \\ \text{s.c. } \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_i] = C_i^*, \forall i \in \mathcal{I}, H_i \in \mathcal{H} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \underline{\pi}(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) := \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] \\ \text{s.c. } \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_i] = C_i^*, \forall i \in \mathcal{I}, H_i \in \mathcal{H} \end{cases} \quad (4)$$

On peut montrer que l'application $X \mapsto \bar{\pi}(-X, \mathcal{Q}, \mathcal{H})$ est une mesure cohérente de risque, au sens de [Artzner *et al.* (1999)]. A l'aide de ces bornes, on peut calculer une provision ou une marge au titre du risque de modèle. Par exemple si l'option X est valorisée dans un modèle particulier qui calibre au prix des instruments benchmarks, disons \mathbb{Q}_1 , la marge représente $\bar{\pi}(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[X] \leq \Phi(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H})$. $\Phi(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H})$ représente donc une borne supérieure pour cette provision.

La deuxième mesure proposée dans [Cont (2004)], qui ne nécessite pas la calibration aux prix des instruments benchmarks, est une mesure *convexe* du risque de modèle :

$$\Psi(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) := \pi^*(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) - \pi_*(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) \quad (5)$$

avec

$$\pi^*(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] - \|C^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H]\|] \quad (6)$$

$$\pi_*(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) := \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] + \|C^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H]\|] \quad (7)$$

Le terme de pénalisation, qui peut s'interpréter comme une mesure de la capacité du modèle à calibrer les prix observés, peut être choisi dans une classe assez large de normes. Nous en retiendrons plus spécifiquement deux :

$$\|C^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H]\|_1 := \sum_{i \in \mathcal{I}} |C_i^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_i]|$$

$$\|C^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H]\|_\infty := \sup_{i \in \mathcal{I}} |C_i^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_i]|$$

Lorsqu'il n'existe pas de modèle $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ qui calibre les prix observés, on est amené à définir la quantité

$$\varepsilon_0 := \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \|C^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H]\|$$

et pour $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, on mesure le risque de modèle avec :

$$\Psi^\varepsilon(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) := \pi^*(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) - \pi_*(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) + 2\varepsilon \quad (8)$$

Φ et Ψ (ou Ψ^ε) sont des mesures du risque de modèle qui satisfont plusieurs axiomes fondamentaux qui ont une réelle interprétation financière [Cont (2004)].

Dans ce document, nous mesurerons le risque de modèle présent dans les instruments de corrélation avec Φ la mesure qui calibre ou Ψ^ε la mesure qui pénalise, en fonction des différentes problématiques.

3.2 Formulation du problème

Dans tous les cas, on voit que pour mesurer le risque de modèle, il faut spécifier un triplet $(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H})$. L'objectif de ce mémoire est de mener à bien ce calcul lorsque X est le payoff d'un produit de corrélation et pour des ensembles \mathcal{Q} et \mathcal{H} bien choisis.

On peut donc décomposer notre problème en deux étapes :

Etape 1 : Il faut choisir le couple $(\mathcal{Q}, \mathcal{H})$

Etape 2 : Il faut résoudre le programme d'optimisation

Ces deux étapes ne sont pas indépendantes. Au contraire, les problèmes qui se posent dans l'une vont affecter l'autre et *vice versa*. C'est de cette interdépendance dont nous allons discuter, de manière volontairement informelle, dans le reste de la section.

Remarquons déjà que la principale difficulté de la première étape réside dans le choix de l'ensemble des modèles d'évaluation \mathcal{Q} . En effet, le payoff X et les instruments benchmarks \mathcal{H} sont des données du problème, sur lesquelles on a *a priori* aucune liberté. Nous détaillerons donc, dans les sections 6 et 7, deux techniques qui permettent de construire des familles de modèles \mathcal{Q} pertinentes.

Par ailleurs, nous verrons dans la section 4.1 que certaines méthodes de calcul du risque de modèle imposent des contraintes sur \mathcal{H} et qu'il faut parfois abandonner une partie de l'information apportée par le marché si on veut pouvoir mener l'étape 2. Dès lors, on voit que la mise en œuvre pratique des calculs, i.e. la deuxième étape, peut avoir des conséquences sur le choix de $(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H})$, i.e. sur la première étape. Cette relation causale n'est pas souhaitable, nous insistons sur le fait que les techniques que nous proposons n'ont pas ce problème.

On va maintenant s'intéresser au rôle joué par l'ensemble \mathcal{Q} dans le choix de la mesure de risque, i.e. dans le choix entre la mesure Φ qui calibre et la mesure pénalisée Ψ . En particulier, nous allons essayer de montrer intuitivement que si on n'impose aucune contrainte sur \mathcal{Q} , on sera amené à utiliser plutôt la mesure Φ au détriment de la mesure Ψ .

Notons que le calcul de Φ est un problème *a priori* très différent du calcul de Ψ . Dans le premier cas, le prix des instruments benchmarks impose des contraintes sur l'espace dans lequel on cherche l'optimum. On résout classiquement ce type de programme en deux étapes :

1. On calibre le modèle. À l'issue de cette étape de calibration, on sait caractériser l'ensemble des candidats à l'optimum, qui est en général beaucoup plus petit que l'ensemble sur lequel on cherchait l'optimum au départ et que l'on sait "parcourir".
2. On cherche le supremum (resp. l'infimum) parmi les candidats potentiels.

Comme (2) est un programme linéaire, on a à notre disposition tous les outils de l'optimisation convexe pour le résoudre. En particulier, il y a un nombre fini d'instruments benchmarks et on peut raisonnablement espérer résoudre explicitement le programme par dualité.

En revanche, l'information apportée par les prix de marché observés n'aide pas au calcul de Ψ . En effet, on optimise dans ce cas sur \mathcal{Q} tout entier et intuitivement, si on veut calculer Ψ , on a besoin d'une méthode pour se "déplacer" astucieusement dans \mathcal{Q} afin de trouver l'optimum. Dès lors, on voit que plus \mathcal{Q} sera grand, plus le calcul de Ψ sera complexe.

Introduisons maintenant quelques notations pour formaliser les idées intuitives exprimées jusqu'ici et que nous utiliserons tout au long du rapport.

On définit \mathcal{P} l'ensemble des lois de probabilité des processus à valeurs dans \mathbb{R}_+^n et \mathcal{R} l'ensemble de toutes les mesures de probabilité risque-neutres. On a évidemment $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ et pour tout $\mathbb{Q} \in \mathcal{R}$, la valeur actualisée des actifs risqués sera une martingale. Avec ces définitions, on a $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ et *a priori*, si on veut laisser \mathcal{Q} le plus libre possible, on va choisir $\mathcal{Q} = \mathcal{R}$. Dans cette section, nous avons essayé de justifier intuitivement que le choix de la mesure Φ s'impose naturellement dans le cas où $\mathcal{Q} = \mathcal{R}$.

D'autre part, il est important de remarquer que pour un payoff X donné, on aimerait bien résoudre notre problème pour des ensembles \mathcal{Q} et \mathcal{H} les plus “grands” possibles. En effet, si on considère un ensemble \mathcal{Q} trop restreint, on va probablement délaissier des modèles potentiellement importants. De la même manière, si on a besoin d'imposer des contraintes sur l'ensemble \mathcal{H} des instruments benchmarks pour faire les calculs, on risque de perdre de l'information. Typiquement, si on impose que \mathcal{H} contienne un et un seul call par sous-jacent et qu'il y en a plusieurs sur le marché, alors on ne saura plus lesquels choisir et on va devoir abandonner une partie de l'information qu'ils auraient pu apporter. C'est le cas avec une des méthodes de calcul proposées dans la littérature, que nous étudions dans la section 4.1.

4 Liens avec la littérature

On peut trouver dans la littérature différentes approches pour calculer la mesure de risque de modèle Φ sur des ensembles de modèles \mathcal{Q} particuliers.

Avant d'aboutir à une méthode statistique, nous avons exploré ces différentes pistes. Dans cette section, nous les présentons pour montrer leurs faiblesses et pour justifier de fait la démarche qui nous a conduits vers une approche statistique.

La partie 4.1 développe une approche directe par optimisation convexe, inspirée d'une série d'articles dont le plus récent est [Hobson *et al.* (2004a)]. Nous y présentons une méthode de calcul de Φ quand on n'impose aucune contrainte sur l'ensemble des modèles, i.e. quand $\mathcal{Q} = \mathcal{R}$. Dans la partie 4.2, nous étudions aussi le problème du calcul de Φ en spécifiant une autre famille particulière de modèles risque-neutres.

4.1 Une approche par optimisation convexe

Dans une récente série de travaux, plusieurs auteurs ont développé une approche *model independent* pour résoudre “directement” les programmes (3) et (4) quand le payoff X est celui d'une option sur panier et pour différentes typologies d'ensembles \mathcal{H} [D'Aspremont El Ghaoui (2002), Laurence Wang (2003a), Laurence Wang (2003b), Hobson *et al.* (2004a)]. Dans les sections qui suivent, nous présentons l'idée qui est à la base de cette méthode de résolution, à savoir l'approche par dualité, ainsi que la mise en œuvre pratique des calculs pour des ensembles d'instruments benchmarks \mathcal{H} particuliers.

L'idée

Rappelons le problème initial :

$$\Phi(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) := \bar{\pi}(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) - \underline{\pi}(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H})$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\pi}(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] \\ \text{s.c. } \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_i] = C_i^*, \forall i \in \mathcal{I}, H_i \in \mathcal{H} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\pi}(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) := \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] \\ \text{s.c. } \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_i] = C_i^*, \forall i \in \mathcal{I}, H_i \in \mathcal{H} \end{cases}$$

On va se concentrer sur le cas du sup $\bar{\pi}$, le cas de $\underline{\pi}$ pouvant se traiter de manière similaire. On peut réécrire le programme de manière équivalente sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{\pi}(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H}) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] \\ \text{s.c.} \begin{cases} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_i] = C_i^*, \forall i \in \mathcal{I}, H_i \in \mathcal{H} \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T | \mathcal{F}_u] = S_u, \forall T > 0, \forall u \in [0, T] \end{cases} \end{cases}$$

C'est un programme d'optimisation linéaire en dimension infinie, avec une infinité de contraintes.

La résolution de ce programme se heurte donc à une difficulté de taille, qui vient de la propriété de martingale qui impose un continuum de contraintes. Il se trouve que dans certains cas, on peut s'affranchir de cette propriété.

En fait, tout dépend de X et de la manière dont X est lié à la trajectoire des actifs sous-jacents S . En effet, supposons que X et les H_i ne dépendent que de la valeur terminale S_T :

$$X := h(S_T) \quad H_i := \psi_i(S_T), i = 1, \dots, p \quad (9)$$

et considérons le programme suivant, qui ne fait intervenir que les dates 0 et T :

$$\begin{cases} \bar{v} := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[h(S_T)] \\ \text{s.c.} \begin{cases} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\psi_i(S_T)] = C_i^*, \forall i = 1, \dots, p \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T] = S_0 \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

Comme le prix de l'option ne dépend pas de la trajectoire mais uniquement de la valeur terminale, il est équivalent d'imposer la contrainte sur le forward et la propriété de martingale. Sous les hypothèses (9), on a donc $\bar{v} = \bar{\pi}(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H})$ et on va voir qu'on peut dans ce cas résoudre le programme par dualité.

Dérivation informelle du programme dual

Nous allons montrer dans cette section comment trouver le dual de (10) de manière heuristique.

Pour cela, on écrit le Lagrangien du problème (10) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbb{Q}, \gamma, \eta) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) + \sum_{j=1}^p \gamma_j [C_j^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_j)] + \sum_{i=1}^n \eta_i [S_0^i - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(S_T^i)] \\ &= \sum_{j=1}^p \gamma_j C_j^* + \eta' S_0 + \int \left(h(s) - \sum_{j=1}^p \gamma_j \psi_j(s) - \eta' s \right) \mathbb{Q}(S_T \in ds) \end{aligned}$$

On cherche un point selle du Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\mathbb{Q}^*, \gamma^*, \eta^*) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} \inf_{\gamma, \eta} \mathcal{L}(\mathbb{Q}, \gamma, \eta)$$

Comme le problème est linéaire, on peut inverser les opérateurs sup et inf :

$$\mathcal{L}(\mathbb{Q}^*, \gamma^*, \eta^*) = \inf_{\gamma, \eta} \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} \mathcal{L}(\mathbb{Q}, \gamma, \eta)$$

Considérons le programme

$$\sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} \sum_{j=1}^p \gamma_j C_j^* + \eta' S_0 + \int \left(h(s) - \sum_{j=1}^p \gamma_j \psi_j(s) - \eta' s \right) \mathbb{Q}(S_T \in ds)$$

Intuitivement, on remarque que si le terme $h(s) - \sum_{j=1}^p \gamma_j \psi_j(s) - \eta' s$ est strictement positif, alors le critère explose et le programme n'a pas de solution. De manière heuristique, on en déduit que le dual du programme de maximisation est :

$$\begin{cases} \inf_{\gamma, \eta} \sum_{j=1}^p \gamma_j C_j^* + \eta' S_0 \\ \text{s.c. } h(s) - \sum_{j=1}^p \gamma_j \psi_j(s) - \eta' s \leq 0, \forall s \in \mathbb{R}_+^n \end{cases} \quad (11)$$

On remarque au passage que la solution de ce programme est également le portefeuille de couverture $(\gamma, \eta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ le moins cher qui sur-réplique le payoff de l'option. De manière équivalente, on trouve que le dual du programme de minimisation est

$$\begin{cases} \sup_{\gamma, \eta} \sum_{j=1}^p \gamma_j C_j^* + \eta' S_0 \\ \text{s.c. } h(s) - \sum_{j=1}^p \gamma_j \psi_j(s) - \eta' s \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}_+^n \end{cases} \quad (12)$$

Il existe ensuite des théorèmes qui permettent, d'une part, de justifier formellement le passage du primal au dual et, d'autre part, que la solution du dual est aussi solution du primal.

Dans les sections qui suivent, nous allons présenter différentes procédures proposées dans la littérature pour résoudre (11) ou (12) pour des ensembles \mathcal{H} particuliers et dans le cas d'une option sur panier :

$$X = h(S_T) := \left(\sum_{i=1}^n \omega_i S_T^i - K \right)^+$$

Une méthode quand on limite le nombre d'options par sous-jacent

Considérons le cas de l'option sur panier à n sous-jacents, lorsque \mathcal{H} contient exactement un call vanille sur chaque actif :

$$X = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i S_T^i - K \right)^+$$

$$\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_n\}, H_i = (S_T^i - K_i)^+, i = 1, \dots, n$$

[D'Aspremont El Ghaoui (2002)] et [Laurence Wang (2003a), Laurence Wang (2003b)] ont montré que dans ce cas, on peut résoudre explicitement le programme dual et que le résultat obtenu est également solution du programme primal (il n'y a pas de "saut de dualité").

Les bornes obtenues peuvent être calculées analytiquement, ce qui facilite grandement la mise en œuvre pratique de cette méthode. On notera également que la borne inférieure présente une particularité dans la mesure où elle ne dépend pas des instruments benchmarks.

Pour illustrer la mise en œuvre concrète de l'algorithme, nous avons repris l'exemple de l'article [D'Aspremont El Ghaoui (2002)] qui porte sur une option sur panier de 5 actifs, de maturité 5 an, qui paye

$$\max(\omega' S_T - K_0, 0)$$

avec $K_0 = 0.4$ et

$$\begin{aligned} \omega &= (0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2)' \\ (S_0^1, S_0^2, S_0^3, S_0^4, S_0^5) &= (0.7 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.4) \end{aligned}$$

Les instruments benchmarks sont des calls à la monnaie, de prix d'exercice

$$(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5) = (0.7 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.4)$$

et de prix

$$(C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*, C_5^*) = (0.161 \ 0.143 \ 0.093 \ 0.070 \ 0.047)$$

la matrice de covariance qu'on utilise pour évaluer l'option est :

$$\Sigma = \frac{11}{100} \begin{pmatrix} 0.64 & 0.59 & 0.32 & 0.12 & 0.06 \\ 0.59 & 1 & 0.67 & 0.28 & 0.13 \\ 0.32 & 0.67 & 0.64 & 0.29 & 0.14 \\ 0.12 & 0.28 & 0.29 & 0.36 & 0.11 \\ 0.06 & 0.13 & 0.14 & 0.11 & 0.16 \end{pmatrix}$$

Tous calculs effectués, nous obtenons les bornes suivantes pour le prix :

$$\bar{v} = 0.1828 \quad \text{et} \quad \underline{v} = 0$$

Le prix de cette option calculé par la méthode de Monte Carlo dans un modèle de Black Scholes avec la matrice de covariance Σ est 12.22%, pour un écart type de 3.4446×10^{-4} . Le risque de modèle mesuré par Φ représente donc 149.59% du prix de l'option.

On constate sur cet exemple que la fourchette est beaucoup trop large, ce qui est représentatif des problèmes posés par cette approche. La première question qui nous vient naturellement à l'esprit est celle du choix des instruments benchmarks. Imaginons qu'on dispose sur le marché de p calls, avec $p > n$. Lesquels choisir ? ceux qui sont à la monnaie, dans la monnaie ? pourquoi ?

La réponse à cette question n'est pas évidente et les auteurs ne l'abordent pas directement. Toutefois, dans la mesure où la borne inférieure ne dépend pas des instruments de marché, [Laurence Wang (2003a), Laurence Wang (2003b)] proposent d'affiner le plus possible la borne supérieure en essayant les C_p^n possibilités et en retenant celle qui donne la fourchette la plus petite. Mais d'une certaine manière, on voit bien qu'en appliquant cette méthode, on occulte une partie de l'information dont on dispose sur le marché. En particulier, en utilisant n calls, on ne fixe les volatilités que sur une partie du smile (par exemple à la monnaie). On ne se débarrasse donc pas totalement du risque de volatilité avec cette approche.

Une méthode générale

[Hobson *et al.* (2004a)] proposent une procédure plus générale pour déterminer la borne supérieure, sans imposer de contraintes sur l'ensemble des instruments benchmarks. Elle permet en effet d'incorporer autant de calls vanilles qu'on le souhaite pour contraindre les volatilités. Le prix à payer pour cette avancée est double. D'une part, l'algorithme est beaucoup plus complexe et le calcul de la borne supérieure n'est pas direct. D'autre part, seule la borne supérieure peut être calculée par cette méthode, pas la borne inférieure.

Afin de ne pas alourdir les notations, nous présentons en détail la méthode dans l'annexe C et discutons seulement ici des principaux résultats.

Cette méthode se rapproche de la méthodologie de la section précédente dans le sens où l'on cherche à donner un majorant du prix de l'option basket en fonction de prix de calls observés. Pour résoudre leur programme de minimisation sous contrainte, [D'Aspremont El Ghaoui (2002)] et [Laurence Wang (2003a), Laurence Wang (2003b)] choisissent de retenir un seul prix de call sur chaque sous-jacent du panier, sans préciser quel strike retenir. Ici, la méthode mise en œuvre par [Hobson *et al.* (2004a)]

utilise l'information apportée par tous les calls vanilles disponibles et peut donc sembler plus générale. En fait, les applications numériques montrent que le portefeuille de couverture statique qui permet de répliquer la borne supérieure est constitué au maximum de *deux calls vanilles* sur chaque sous-jacent, voire même *d'un seul* dans certains cas. De plus, cette méthode présente l'avantage majeur de donner le strike des calls en question, contrairement aux autres approches présentées précédemment et constitue donc une réelle avancée. Elle reste néanmoins une piste de recherche trop récente et insuffisamment aboutie pour apporter des éléments de réponse conséquents à notre problématique. En particulier, le calcul de la borne inférieure soulève des problèmes particulièrement difficiles à résoudre et qui sont actuellement en cours d'étude [Hobson *et al.* (2004b)].

4.2 Calibration, contrôle optimal stochastique et équation de HJB

Quand on doit résoudre un problème d'optimisation dynamique type (3) sans contrainte, on a tendance à se tourner naturellement vers le contrôle optimal stochastique et l'équation de HJB. On peut donc s'interroger sur la possibilité (ou non) d'incorporer des contraintes sur le contrôle dans ce cadre analytique.

Plus généralement, nous étudions dans cette section le problème du calcul de la mesure qui calibre aux prix des instruments benchmarks quand on spécifie des classes particulières de modèles, comme par exemple l'ensemble des diffusions de la forme

$$dS_t = \text{diag}(S_t)\sigma dW_t$$

avec $\Sigma := \sigma\sigma'$ la matrice de covariance sur laquelle on impose des bornes. Nous discutons également du cas où on considère l'ensemble des modèles équivalents à un *prior* donné.

Le cas sans contrainte

Pour fixer les idées, commençons par rappeler les résultats obtenus par [Avellaneda *et al.* (1995)] dans le cas non contraint $\mathcal{H} = \emptyset$ du modèle à volatilité incertaine. On considère le cas d'un payoff *path-independent* $X = h(S_T)$ et on fait l'hypothèse qu'une probabilité risque-neutre $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ est déterminée de manière unique par un processus (matriciel) de covariance instantanée $(\theta_t)_t$ qui est inobservable :

$$dS_t = \text{diag}(S_t)\theta_t dW_t$$

On suppose juste que $(\theta_t)_t$ est dans un certain ensemble Θ pas nécessairement borné. On définit ensuite la fonction valeur du problème :

$$v(t, s) := \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}[h(S_T^{t,s})]$$

On sait alors que v est solution de HJB :

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + \inf_{\hat{\theta} \in \hat{\Theta}} [-\mathcal{L}^{\hat{\theta}} v] = 0$$

avec $\mathcal{L}^{\hat{\theta}}$ le générateur infinitésimal de la diffusion contrôlée par le contrôle constant $\hat{\theta}$:

$$\mathcal{L}^{\hat{\theta}} v(t, s) = \frac{1}{2} \text{tr} \left[\text{diag}(s) \hat{\theta} \hat{\theta}' \text{diag}(s) D_s^2 v(t, s) \right]$$

En fonction des valeurs que peut prendre le contrôle, on sait plus ou moins bien caractériser la fonction valeur. Par exemple, si $\hat{\Theta}$ est borné, le problème est régulier¹⁰

¹⁰C'est à dire le Hamiltonien du problème est borné.

et la fonction valeur solution de l'EDP de Black Scholes Barenblatt qui fait intervenir le signe des gammas croisés de l'option¹¹. Par contre, si $\hat{\Theta} = \mathbb{R}_+^n$, le problème est singulier et la fonction valeur v est égale à l'enveloppe concave du payoff h .

Le cas avec contraintes

Se pose maintenant la question d'une extension de ces résultats au cas "avec contrainte" qui nous intéresse, i.e. au cas $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

Il existe de nombreux travaux qui s'intéressent au problème (complexe) de la calibration et il n'est pas question ici de le traiter en détail¹². Nous mentionnerons simplement une approche intéressante développée par [Avellaneda Paras (1996)], et qui propose une extension du modèle à volatilité incertaine [Avellaneda *et al.* (1995)] dans laquelle on cherche à couvrir "au mieux" le pire scénario de marché possible à l'aide d'un portefeuille de couverture statique. Contrairement à l'approche de [Cont (2004)] cette méthode a toutefois l'inconvénient majeur de n'avoir aucune interprétation simple en termes de mesures de risque. Elle donne simplement le coût de surréplication de l'option. D'autre part, l'extension de cette analyse au cadre multidimensionnel soulève des problèmes redoutables, puisqu'elle repose essentiellement sur la résolution numérique d'EDP en grande dimension.

Pour faire une analogie avec la technique de Monte Carlo Pondéré [Avellaneda *et al.* (2001)], on pourrait également mesurer le risque de modèle en cherchant des vecteurs de probabilités $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^m$ et $\underline{p} \in \mathbb{R}_+^m$ tels que

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \arg \max_p \sum_{i=1}^p p_i X^{(i)} \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m p_i H_k^{(i)} = C_k^*, \forall k \\ \sum_{i=1}^m p_i = 1, p > 0 \end{cases} \\ \underline{p} &= \arg \min_p \sum_{i=1}^p p_i X^{(i)} \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m p_i H_k^{(i)} = C_k^*, \forall k \\ \sum_{i=1}^m p_i = 1, p > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

avec les $(X^{(i)})_i$ (resp. les $(H_k^{(i)})_i$) des réalisations du payoff X (resp. du payoff des instruments benchmarks H_k) sous une probabilité risque-neutre privilégiée \mathbb{Q}_0 appelée *prior*. Le problème, c'est que l'ensemble \mathcal{Q} serait dans ce cas l'ensemble des probabilités équivalentes¹³ à \mathbb{Q}_0 et on perdrait la propriété de martingale, donc le caractère risque-neutre de la probabilité calibrée. Cette spécification très large de modèles d'évaluation ne convient donc pas non plus.

4.3 Conclusion d'étape

Dans la section 4.1, nous avons vu les problèmes soulevés par le calcul de la mesure Φ qui calibre les prix aux instruments benchmarks lorsqu'on choisit de considérer l'ensemble des modèles risque-neutres, i.e. lorsque $\mathcal{Q} = \mathcal{R}$. En effet, les bornes d'arbitrage qui sont obtenues sont extrêmement larges et, de surcroît, seul le cas de l'option sur panier est traité pour l'instant dans la littérature. Or les options sur panier sont des produits à convexité positive¹⁴ et donc monotones dans la corrélation, contrairement

¹¹Dans le cas unidimensionnel, la volatilité σ du sous-jacent varie entre deux bornes σ^{sup} et σ^{inf} et la stratégie de couverture dans le modèle à volatilité incertaine consiste à suivre la stratégie du delta de Black Scholes avec $\sigma = \sigma^{sup}$ si le gamma est positif et $\sigma = \sigma^{inf}$ si le gamma est négatif.

¹²Cf. [Cont Tankov (2004)] pour un tour d'horizon très complet de la question.

¹³En fait, c'est un peu plus compliqué que cela parce que pour pouvoir faire du Monte Carlo, l'espace d'état Ω a été discrétisé en un nombre fini d'états et qu'il y a seulement équivalence des probabilités discrètes sur cet espace discrétisé. On a en réalité peu de chances d'avoir l'équivalence entre \mathbb{Q}_0 et la loi limite, mais c'est un autre problème, cf. [Nguyen (2003)] pour plus de détails.

¹⁴C'est à dire que tous les gammas croisés et diagonaux de l'option sur panier sont strictement positifs.

à d'autres structures plus complexes (type rainbow). En particulier, on connaît l'impact d'une déformation de la structure de corrélation sur le P&L et on sait comment provisionner ce risque. Ce ne sont donc pas les produits qui nous intéressent le plus.

La section 4.2 développe des approches alternatives liées aux questions de calibration et qui spécifient une famille de modèles particulière pour \mathcal{Q} . Nous avons vu que même dans ce cas, le calcul de la mesure calibrée Φ soulève des problèmes complexes qui n'ont pas de solution directe. De plus, il n'existe à ce jour aucune technique de calibration multi-dimensionnelle qui permette de retrouver à la fois le prix des options vanilles et celui des options exotiques¹⁵. Or on aimerait bien pouvoir incorporer dans les instruments benchmarks des produits exotiques et en particulier des instruments de corrélation.

Ces méthodes, qui correspondent à des spécifications "extrêmes" de l'ensemble des modèles \mathcal{Q} , ne permettent pas de satisfaire toutes nos attentes. Nous proposons donc dans les sections qui suivent une démarche méthodologique qui permet de construire des ensembles de modèles plus adaptés et d'en déduire des mesures "raisonnables" du risque de modèle.

5 Spécification de modèles pour la corrélation : une approche statistique

Dans la partie 4, nous avons présenté des techniques qui permettent de calculer la mesure calibrée Φ pour différentes spécifications de l'ensemble des modèles \mathcal{Q} . Nous avons notamment vu que les spécifications proposées dans la littérature présentent des inconvénients parfois importants et qu'il faut développer une autre procédure pour déterminer les modèles de corrélation. Dans cette section, nous présentons deux nouvelles méthodes qui permettent de construire des familles de modèles \mathcal{Q} pertinentes et d'en tirer une mesure du risque de modèle. Nous avons choisi de fonder notre approche sur le calcul de la mesure pénalisée Ψ et de transférer le problème d'optimisation sur un autre espace qu'on va pouvoir discrétiser.

5.1 Motivations pour une approche statistique

Au risque de se répéter, rappelons que les paramètres de corrélation sont *inobservables*. Pourtant, des produits basés sur ces valeurs sont échangés tous les jours, sur la base d'un prix donné le plus souvent par un modèle. Il a donc fallu à un moment ou à un autre déterminer une procédure pour spécifier ces paramètres.

La démarche standard se décompose généralement en deux étapes :

1. On essaie "d'extraire" du marché le plus d'information possible sur les paramètres. Typiquement, quand une banque lance une option sur panier d'actions liquides¹⁶, elle a souvent accès au prix de plusieurs calls vanilles sur chacune des actions, ce qui "fixe", de manière exogène, les volatilités sur une partie du smile (par exemple à la monnaie).
2. On estime sur données historiques tout ce qu'on n'a pas pu déterminer de façon implicite.

En règle générale, seules les volatilités peuvent être déterminées de manière implicite. Les corrélations sont donc, en pratique, presque toujours calculées à partir des données

¹⁵A l'exception notable de la méthode de Monte Carlo Pondéré [Avellaneda *et al.* (2001)] qui soulève néanmoins d'autres problèmes.

¹⁶Des actions du CAC40 par exemple.

historiques¹⁷.

Les séries de rendements historiques sont donc couramment utilisées quand on évalue des options multi sous-jacents et c'est pour cette raison que nous avons choisi d'adopter une démarche statistique, proche de la réalité financière.

5.2 La démarche

La démarche que nous proposons pour construire l'ensemble \mathcal{Q} est représentée schématiquement par le diagramme 3 :

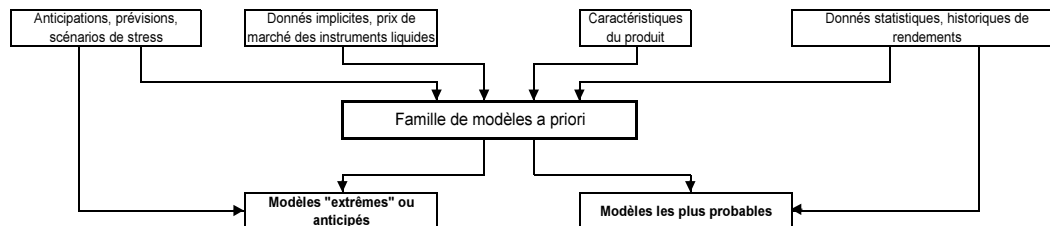


FIG. 3 – Diagramme de la méthode

Quand on veut évaluer et couvrir en pratique un produit de corrélation, on a généralement une idée de la famille de modèles risque-neutres la plus adaptée au produit et aux sous-jacents. Par exemple, s'il y a de forts skews à court terme sur les nappes de volatilité des actifs, on va être tenté par un modèle à saut capable de reproduire ces formes observées de nappes de volatilité. De la même manière, on peut avoir une vue sur l'évolution future du marché et croire à la validité de telle ou telle dynamique pour les sous-jacents. Ainsi, nous ferons l'hypothèse réaliste que l'investisseur se donne au départ une famille de modèles risque-neutres $\overline{\mathcal{Q}}$ au sein de laquelle il choisira la loi avec laquelle il va évaluer et couvrir l'option. Comme les paramètres de corrélation sont inobservables, le choix de cette probabilité d'évaluation est entaché d'incertitude. Il y a un risque de modèle qu'il faut contrôler. Nous supposons également que la famille $\overline{\mathcal{Q}}$ est trop "grande" pour qu'on puisse comparer les prix de l'option dans tous les modèles $\mathbb{Q} \in \overline{\mathcal{Q}}$.

L'idée commune aux méthodes que nous proposons consiste à paramétrer la famille de modèles $\overline{\mathcal{Q}}$ par un couple $(R, \theta) \in \mathcal{M}_S^+(n, n) \times \Theta$, où R représente la matrice de corrélation des rendements et θ les autres paramètres inobservables du modèle. Par exemple, dans un modèle type Black Scholes, nous verrons que θ est simplement le vecteur des volatilités (section 5.3). De la même manière, dans un modèle à sauts, θ représente tous les paramètres hors corrélation qui permettent d'identifier la loi de Levy, comme les volatilités, la loi des sauts... Nous y reviendrons dans la section 5.4. Il est important de remarquer que le paramètre θ contient des éléments qu'on peut généralement identifier de manière implicite grâce au marché. Par exemple, dans le cas du modèle de Black Scholes, on peut calibrer les volatilités sur les prix de calls vanille liquides à la monnaie. De la même manière, on peut calibrer la loi des sauts d'un processus de Levy à l'aide d'une méthode type [Cont Tankov (2002)].

Ainsi, on peut paramétrer les modèles de la famille $\overline{\mathcal{Q}}$ par un couple (R, θ) avec R qui est "libre" et θ qui est calibré sur le marché donc fixé *a priori*. Pour les produits multi sous-jacents, le risque de modèle est essentiellement lié à cette liberté sur la matrice de corrélation R et on peut assimiler l'incertitude sur le modèle de pricing à l'incertitude

¹⁷A noter qu'il existe un grand nombre de produits pour lesquels on n'a même pas d'information de marché sur les volatilités. C'est typiquement le cas des structures basées sur des fonds alternatifs, très peu liquides, pour lesquels un marché de la volatilité n'est pas disponible.

sur le choix R .

Nous noterons J la bijection qui permet de passer de l'ensemble $\overline{\mathcal{Q}}$ à l'ensemble $\mathcal{M}_S^+(n, n) \times \Theta$ et J^{-1} sa réciproque. Nous précisons la forme de cette application sur des exemples dans les sections 5.3 et 5.4. On note également θ_0 la valeur calibrée des paramètres inobservables hors corrélation. L'idée consiste à construire l'ensemble $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathcal{Q}}$ comme l'image par J^{-1} de l'ensemble $\mathcal{S} \times \{\theta_0\}$, avec $\mathcal{S} \in \mathcal{M}_S^+(n, n)$ un ensemble de matrices de corrélation bien choisi.

Dans la première méthode, section 6, on construit \mathcal{S} à partir de scénarios de stress ou à partir d'anticipations sur la structure de corrélation. Dans la seconde, section 7, on construit \mathcal{S} comme l'ensemble des modèles de corrélation les plus probables, grâce aux rendements historiques observés.

Chaque méthode permet d'obtenir une nouvelle famille de modèles de risque-neutres \mathcal{Q} paramétrée par des matrices symétriques. Le problème de recherche d'un optimum dans \mathcal{Q} peut donc être "transféré" dans un espace de matrices que nous allons discrétiser, ce qui nous permettra de calculer explicitement la mesure convexe du risque de modèle Ψ (ou Ψ^ε).

5.3 Paramétrisation du modèle de Black Scholes multivarié

Dans le modèle de Black Scholes multivarié, une probabilité risque-neutre est identifiée de manière unique par une matrice de covariance. Pour fixer les notations, on définit l'ensemble $\mathcal{R}^{BS} := \{\mathbb{Q}_1, \dots, \mathbb{Q}_k, \dots\} \subset \mathcal{R}$ des mesures de probabilités risque-neutres qui soient telles que, sous un élément $\mathbb{Q}_k \in \mathcal{R}^{BS}$, on ait

$$\mathbb{Q}_k : dS_t = \text{diag}(S_t)\sigma_k dW_t \quad (13)$$

avec $S := (S^1, \dots, S^n)'$, $W := (W^1, \dots, W^n)'$ un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q}_k , et σ_k une matrice inversible de taille n , indépendante de t .

On note également Σ_k la matrice de covariance des rendements sous \mathbb{Q}_k et R_k la matrice de corrélation.

Si les volatilités sont fixées de manière exogène, alors on identifie une probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}_k \in \mathcal{R}^{BS}$ au couple $(R_k, \nu) \in \mathcal{M}_S^+(n, n) \times \mathbb{R}_+^n$, avec ν_i la norme euclidienne¹⁸ de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice σ_k .

On a donc mis en évidence la bijection J entre les ensembles \mathcal{R}^{BS} et $\mathcal{M}_S^+(n, n) \times \mathbb{R}_+^n$ qui nous permet de passer de l'un à l'autre sans ambiguïté :

$$\begin{array}{ccc} J : \mathcal{R}^{BS} & \rightarrow & \mathcal{M}_S^+(n, n) \times \mathbb{R}_+^n \\ \mathbb{Q} & \mapsto & (R, \nu) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} J^{-1} : \mathcal{M}_S^+(n, n) \times \mathbb{R}_+^n & \rightarrow & \mathcal{R}^{BS} \\ (R, \nu) & \mapsto & \mathbb{Q} \end{array}$$

On peut donc "transférer" le problème de recherche d'un \mathbb{Q} optimal dans \mathcal{R}^{BS} à celui de la recherche d'un couple (R, ν) optimal dans $\mathcal{M}_S^+(n, n) \times \mathbb{R}_+^n$, ce qui justifie l'écriture :

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{R}^{BS}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] &= \inf_{(R, \nu) \in \mathcal{M}_S^+(n, n) \times \mathbb{R}_+^n} \mathbb{E}^{(R, \nu)}[X] \\ \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{R}^{BS}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] &= \sup_{(R, \nu) \in \mathcal{M}_S^+(n, n) \times \mathbb{R}_+^n} \mathbb{E}^{(R, \nu)}[X] \end{aligned}$$

où on a abusivement noté $\mathbb{E}^{(R, \nu)}(\cdot)$ l'opérateur $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\cdot)$ pour l'unique probabilité $\mathbb{Q} = J^{-1}((R, \nu))$.

Si les volatilités ν sont fixées à une certaine valeur ν_0 , par exemple les volatilités implicites à la monnaie, alors on définit $\mathcal{Q} = \{\mathbb{Q} \in \overline{\mathcal{Q}} : J(\mathbb{Q}) \in \mathcal{S} \times \{\nu_0\}\}$, avec \mathcal{S} l'ensemble

¹⁸On a aussi $\text{diag}(\nu) = \text{ddiag}(\Sigma)^{1/2}$.

de matrices déterminé à partir de scénarios de stress, section 6, ou à partir des rendements historiques observés, section 7.

Le modèle de Black Scholes multivarié est donc un cas limite dans lequel la matrice de covariance Σ définit à elle seule une probabilité risque-neutre. Le problème, c'est qu'il ne calibre pas les smiles ou les skews observés en pratique sur les marchés de calls vanilles. Il faudra donc étudier une autre famille de modèles plus à même de reproduire ces formes observées de nappe de volatilité : les modèles à sauts.

5.4 Paramétrisation d'un modèle à sauts multivarié

On considère maintenant la famille de modèles à sauts $\mathcal{R}^{\mathcal{J}} \subset \mathcal{R}$ telle que, sous un élément $\mathbb{Q} \in \mathcal{R}^{\mathcal{J}}$, on ait, pour $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} S_t^i = S_0^i \exp \left(\gamma_i t + \sigma_i W_t^i + \sum_{j=1}^{N_t} U_j^i \right) \\ N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t) \\ \langle W^i, W^j \rangle_t = \rho_{ij} t \\ (U_j^1, \dots, U_j^n)' \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, C) \end{cases} \quad (14)$$

$(N_t)_t$ est un processus de Poisson, identique pour tous les actifs. Dans ce modèle multivarié, les instants de saut sont donc les mêmes pour tous les actifs et on peut interpréter un saut négatif comme une sorte de krach boursier.

Un simple calcul d'espérance montre que le modèle est risque-neutre si

$$\gamma_i = -\frac{\sigma_i^2}{2} - \lambda(e^{\mu_i + \frac{1}{2}C_{ii}} - 1)$$

L'évaluation dans ce type de modèle se fait généralement en conditionnant par rapport au facteur N_t , cf. annexe B.4.

Par application de la formule d'Itô et pour $0 \leq s \leq t$, définissons le rendement géométrique¹⁹ :

$$\ln \left(\frac{S_t^i}{S_s^i} \right) = \left(\gamma_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) (t - s) + \sigma_i (W_t^i - W_s^i) + \sum_{j=1}^{N_{t-s}} U_j^i$$

Les moments des rendements sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\ln \left(\frac{S_t^i}{S_s^i} \right) \right] &= \left(\gamma_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) (t - s) + \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{N_{t-s}} U_j^i \right] \\ &= \left(\gamma_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) (t - s) + \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N_{t-s} = n) \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n U_j^i \right] \\ &= \left(\gamma_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) (t - s) + \mu_i \lambda (t - s) \end{aligned}$$

¹⁹On rappelle que le processus de poisson composé est un processus de Levy et donc qu'il est à accroissements indépendants et stationnaires, cf. [Cont Tankov (2004)] proposition 3.3. En particulier, on a

$$\sum_{j=1}^{N_t} U_j^i - \sum_{j=1}^{N_s} U_j^i \stackrel{loi}{=} \sum_{j=1}^{N_{t-s}} U_j^i$$

$$\begin{aligned}
\text{Cov} \left[\ln \left(\frac{S_t^i}{S_s^i} \right), \ln \left(\frac{S_t^j}{S_s^j} \right) \right] &= \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j (t-s) + \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N_{t-s} = n) \text{Cov} \left(\sum_{k=1}^n U_k^i, \sum_{\ell=1}^n U_\ell^j \right) \\
&= \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j (t-s) + (C_{ij} + \mu_i \mu_j) \sum_{n \geq 0} n \mathbb{P}(N_{t-s} = n) \\
&= \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j (t-s) + (C_{ij} + \mu_i \mu_j) \lambda (t-s) \\
\forall 0 \leq s < t \leq T, \text{Corr} \left[\ln \left(\frac{S_t^i}{S_s^i} \right), \ln \left(\frac{S_t^j}{S_s^j} \right) \right] &= \frac{\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j + (C_{ij} + \mu_i \mu_j) \lambda}{\sqrt{\sigma_i^2 + (C_{ii} + \mu_i^2) \lambda} \sqrt{\sigma_j^2 + (C_{jj} + \mu_j^2) \lambda}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Une probabilité risque-neutre $\mathbb{Q} \in \mathcal{R}^{\mathcal{J}}$ est donc paramétrée par exemple par le quintuplet $(R, \sigma, \lambda, \mu, C)$. Le prix à payer pour passer d'un modèle de Black Scholes multivarié à un modèle qui calibre les smiles est donc assez élevé puisqu'il faut spécifier beaucoup plus de paramètres. En particulier, quand on observe une estimation de la matrice de corrélation des rendements, on ne sait pas *a priori* quelle part de la corrélation est à attribuer aux corrélations instantanées des browniens ρ_{ij} et quelle part est à attribuer aux sauts.

On remarque également que si les sauts ne sont pas centrés, alors les rendements dans ce modèle peuvent être corrélés *même si les browniens et les sauts sont décorrélés*.

6 Scénarios de stress sur les corrélations

6.1 La méthode

Si on a une idée de l'évolution possible de la structure de corrélation dans le futur, la méthode que nous présentons dans cette section permet d'associer à cette anticipation une mesure explicite du risque de modèle. Plus précisément, supposons que la probabilité avec laquelle on est d'accord pour valoriser le produit X soit identifiée par une matrice de corrélation R_0 et un vecteur de paramètres²⁰ θ_0 donnés. On se donne également une matrice de corrélation R_1 qui représente une autre structure de corrélation susceptible de se réaliser. On peut penser à R_1 comme une matrice dont les composantes sont déterminées par exemple grâce à des scénarios de stress. Cette incertitude sur les corrélations qui vont effectivement se réaliser sur les trajectoires futures va affecter le prix d'une manière *a priori* non triviale. Pour mesurer ce risque, nous proposons de définir l'ensemble \mathcal{S} introduit dans la section 5.2 par

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_S^+(n, n) : \exists \alpha \in [0, 1], A = \alpha R_1 + (1 - \alpha) R_0\}$$

Comme R_0 et R_1 sont des matrices de corrélation définies positives, on est certain que \mathcal{S} ne contient que des matrices de corrélation définies positives et donc que chaque point de \mathcal{S} associé au vecteur de paramètre θ_0 identifie de manière unique une probabilité risque-neutre. On peut ensuite discrétiser la combinaison convexe en un nombre fini de points et chercher le supremum puis l'infimum du critère pénalisé Ψ^ε parmi ces points.

6.2 Applications numériques : modèle de Black Scholes

Nous avons implémenté l'algorithme pour mesurer le risque de modèle présent dans une option rainbow de maturité 1 an sur trois actifs de payoff

$$\max(0.65 \max(S_T^1, S_T^2, S_T^3) + 0.35 \min(S_T^1, S_T^2, S_T^3) - K, 0)$$

On a normalisé $S_0 = \mathbf{1}$, $K = 1$ et on a choisi un taux sans risque constant à 3%. On voit les smiles de volatilité (simulés) pour chaque sous-jacent sur le graphe 4.

²⁰Les volatilités à la monnaie, les intensités de saut ...

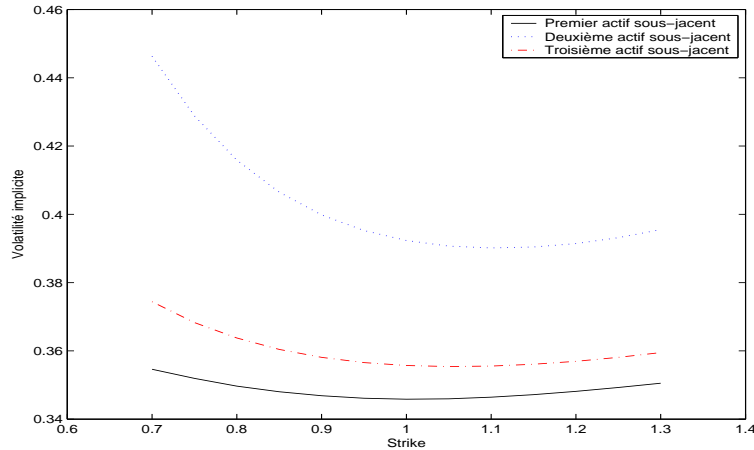


FIG. 4 – Smiles de volatilité implicite pour chaque actif sous-jacent

Les volatilités sont fixées sur les volatilités implicites à la monnaie de valeurs (35% 39% 36%)'. L'utilisation de la mesure pénalisée Ψ a pour avantage d'être utilisable pour un grand nombre d'instruments benchmarks. En particulier, elle présente un plus indéniable quand on observe le prix d'instruments de corrélation. Pour illustrer cette force de notre méthode, nous avons également considéré le cas où on ajoute aux calls vanilles un call sur panier à la monnaie, équipondéré dans les trois actifs, de prix 12.06%. Il est important de remarquer que s'il n'y a que les calls vanilles dans \mathcal{H} , les termes de pénalisation sont *les mêmes* pour tous les modèles $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, mais que ce n'est évidemment pas le cas si on ajoute le call sur panier.

Les trajectoires historiques (simulées) des trois actifs risqués sont représentées dans le graphe 5

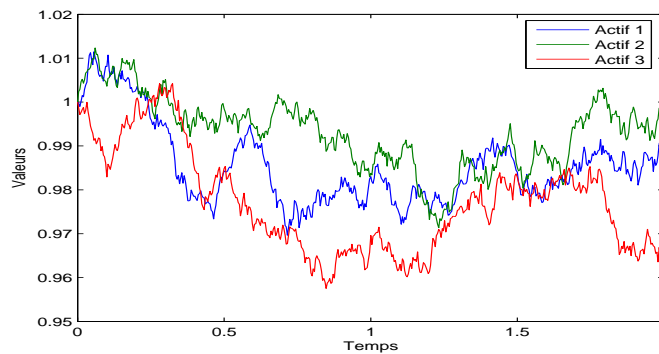


FIG. 5 – Trajectoires historiques sur deux ans des actifs risqués

La matrice de corrélation privilégiée R_0 est calculée sur les rendements historiques observés et vaut :

$$R_0 = \begin{pmatrix} 100\% & 20.30\% & 16.69\% \\ 20.30\% & 100\% & 17.51\% \\ 16.69\% & 17.51\% & 100\% \end{pmatrix}$$

Le prix de l'option rainbow calculé avec cette matrice de corrélation historique R_0

vaut²¹ 18.41%.

Nous avons utilisé deux scénarios de stress identifiés par des matrices R_1 et R_2 . La première fait monter toutes les corrélations alors que le deuxième les fait toutes baisser²² :

$$R_1 = \begin{pmatrix} 100\% & 60\% & 60\% \\ 60\% & 100\% & 60\% \\ 60\% & 60\% & 100\% \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 100\% & -20\% & -20\% \\ -20\% & 100\% & -20\% \\ -20\% & -20\% & 100\% \end{pmatrix}$$

Aux matrices de stress R_1 et R_2 correspondent respectivement des distributions risque-neutres \mathbb{Q}_1 et \mathbb{Q}_2 sur les trajectoires qui vont se réaliser.

Résultats avec les calls vanilles

Quand l'ensemble des instruments benchmarks est uniquement constitué de calls vanilles, les termes de pénalisation sont les mêmes pour tous les modèles de corrélation. Dans ce cas, pour calculer la mesure de risque pénalisée Ψ^ε , il suffit de faire la différence entre le prix dans le modèle qui donne le prix le plus élevé et le prix dans le modèle qui donne le prix le moins élevé.

Le tableau 1 regroupe les résultats que nous avons obtenus quand on pénalise uniquement avec des calls vanilles²³ :

	Modèle \mathbb{Q}_1	Modèle \mathbb{Q}_2
Ratio du risque de modèle	1.20%	2.25%
Structure de corrélation au maximum	$\begin{pmatrix} 100\% & 30.23\% & 27.51\% \\ 30.23\% & 100\% & 28.13\% \\ 27.51\% & 28.13\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & 20.30\% & 16.69\% \\ 20.30\% & 100\% & 17.51\% \\ 16.69\% & 17.51\% & 100\% \end{pmatrix}$
Structure de corrélation au minimum	$\begin{pmatrix} 100\% & 60\% & 60\% \\ 60\% & 100\% & 60\% \\ 60\% & 60\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & -20\% & -20\% \\ -20\% & 100\% & -20\% \\ -20\% & -20\% & 100\% \end{pmatrix}$

TAB. 1 – Risque de modèle de l'option rainbow pour les modèles de type Black Scholes

On peut lire sur la première ligne le *ratio de risque de modèle*²⁴, égal au rapport entre la mesure pénalisée Ψ^{ε_0} et le prix de l'option avec la matrice de corrélation historique R_0 dans le modèle de Black Scholes.

Les deux autres lignes donnent les structures de corrélation pour lesquelles on a un optimum, i.e. les modèles de corrélation qui réalisent le supremum ou l'infimum dans les programmes (6) et (7).

On peut tirer plusieurs enseignements de ce tableau. D'une part, on constate que le risque de modèle peut représenter jusqu'à 2.25% du prix de vente de l'option et ne doit donc pas être négligé. D'autre part, on remarque que les structures de corrélation pour lesquelles les optima sont atteints ne sont pas toujours triviales. Lorsque les deux

²¹Tous les prix sont exprimés en pourcentage (sous-entendu du nominal).

²²Les matrices utilisées sont déterminées de manière arbitraire pour illustrer la méthode. Il existe néanmoins des façons de stresser une matrice de corrélation. Par exemple, nous présentons dans l'annexe D une méthode proposée par [RiskMetrics (1997)].

²³Les simulations sont menées par la méthode de Monte Carlo avec 2 000 000 de simulations. Le pas de discrétisation de la combinaison convexe est 0.05, ce qui fait un total de 21 modèles différents pour la corrélation.

²⁴Model Risk Ratio

extrema sont atteints sur les bords, le produit présente une convexité de signe constant (il est “gamma positif” ou “gamma négatif”). Quand ce n’est pas le cas, comme par exemple avec \mathbb{Q}_1 , le prix de l’option n’est pas une fonction monotone de la corrélation et on ne sait pas toujours comment il faut gérer l’option. Ainsi, si on mesure à tort le risque de modèle en faisant simplement la différence entre les prix avec les matrices R_0 et R_1 , on obtiendrait 1.02% et on sous-estime le risque, car le prix maximum est atteint pour une valeur plus élevée que celle donnée par le modèle “historique” \mathbb{Q}_0 .

Si on croît à la possible réalisation d’un des scénarios de stress, notre méthode permet donc d’en déduire une mesure précise de risque de modèle, qu’on peut par exemple provisionner pour mieux se couvrir.

Résultats avec les calls vanilles et le call sur panier

Quand on ajoute le call sur panier à l’ensemble \mathcal{H} des instruments benchmarks, les termes de pénalisation deviennent différents dans chaque modèle de corrélation $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$. Nous comparons dans les tableaux 2 et 3 les ratios de risque de modèle obtenus quand le critère Ψ^ε est pénalisé avec la norme L^1 et avec la norme L^∞ .

Ratio du risque de modèle		Modèle \mathbb{Q}_1	Modèle \mathbb{Q}_2
		0%	0%
Structure de corrélation à l’optimum	de	$\begin{pmatrix} 100\% & 32.21\% & 29.68\% \\ 32.21\% & 100\% & 30.26\% \\ 29.68\% & 30.26\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & 20.30\% & 16.69\% \\ 20.30\% & 100\% & 17.51\% \\ 16.69\% & 17.51\% & 100\% \end{pmatrix}$

TAB. 2 – Risque de modèle de l’option rainbow pour les modèles de type Black Scholes, avec call sur panier, pénalisation en norme L^1

Ratio du risque de modèle		Modèle \mathbb{Q}_1	Modèle \mathbb{Q}_2
		1.20%	2.25%
Structure de corrélation au maximum	de	$\begin{pmatrix} 100\% & 30.23\% & 27.51\% \\ 30.23\% & 100\% & 28.13\% \\ 27.51\% & 28.13\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & 20.30\% & 16.69\% \\ 20.30\% & 100\% & 17.51\% \\ 16.69\% & 17.51\% & 100\% \end{pmatrix}$
Structure de corrélation au minimum	de	$\begin{pmatrix} 100\% & 60\% & 60\% \\ 60\% & 100\% & 60\% \\ 60\% & 60\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & -20\% & -20\% \\ -20\% & 100\% & -20\% \\ -20\% & -20\% & 100\% \end{pmatrix}$

TAB. 3 – Risque de modèle de l’option rainbow pour les modèles de type Black Scholes, avec call sur panier, pénalisation en norme L^∞

On remarque que l’ajout du call sur panier à l’ensemble des instruments benchmarks réduit à zéro le ratio du risque de modèle quand on pénalise le critère avec la norme L^1 . On retrouve bien le résultat présenté dans [Cont (2004)], qui dit qu’un plus grand nombre d’instruments benchmarks permet de diminuer le risque de modèle. Cette propriété est conforme à l’intuition car le portefeuille de couverture statique qui pourrait être construit avec plus d’instruments va couvrir un plus grand nombre d’états et par

conséquent réduire l'erreur de pricing²⁵.

On constate en revanche que les résultats ne changent pas quand on pénalise le critère avec la norme L^∞ . En effet, le produit le moins bien calibré par tous les modèles reste un des calls vanilles (celui qui est dans la monnaie pour le deuxième actif à cause du skew très prononcé) et donc l'ajout du call sur panier ne change pas la pénalisation. Cet exemple illustre donc bien l'importance du choix de la norme avec laquelle on pénalise le critère.

6.3 Applications numériques : modèle à sauts

Pour illustrer la méthode, nous avons également considéré la famille de modèle à sauts de la section 5.4. L'intensité de saut λ est fixée à 1.1, la moyenne des sauts pour chaque actif à -0.1 et l'écart-type à 0.2. La volatilité sur la partie brownienne, notée σ_i dans la section 5.4 est égale à 0.3 pour tous les actifs.

Nous comparons les ratios de risque de modèle pour différentes configurations de corrélation entre taille des sauts.

Pas de corrélation entre taille des sauts

Dans un premier temps, on considère qu'il n'y a pas de corrélation entre taille des sauts. Avec les notations de la section 5.4, on a une matrice de covariance C de la forme $C = 0.04 I_n$.

Si on utilise la matrice de corrélation historique R_0 pour évaluer l'option, les corrélations entre parties browniennes sont déterminées de manière unique par la formule (15). Avec ces paramètres, le prix de l'option dans le modèle à sauts calculé par la méthode de Monte Carlo avec 250000 simulations vaut 18.57%.

Le tableau 4 présente les résultats de la simulation quand on pénalise uniquement avec les calls vanilles :

		Modèle Q_1	Modèle Q_2
Ratio du risque de modèle		2.78%	1.07%
Structure de corrélation au maximum	de	$\begin{pmatrix} 100\% & 26.26\% & 23.18\% \\ 26.23\% & 100\% & 23.88\% \\ 23.18\% & 23.88\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & 20.30\% & 16.69\% \\ 20.30\% & 100\% & 17.51\% \\ 16.69\% & 17.51\% & 100\% \end{pmatrix}$
Structure de corrélation au minimum	de	$\begin{pmatrix} 100\% & 60\% & 60\% \\ 60\% & 100\% & 60\% \\ 60\% & 60\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & -20\% & -20\% \\ -20\% & 100\% & -20\% \\ -20\% & -20\% & 100\% \end{pmatrix}$

TAB. 4 – Risque de modèle de l'option rainbow pour les modèles à sauts

Comme dans le modèle de Black Scholes, on constate que le premier scénario de stress illustre l'effet de convexité ; cet exemple montre encore que le prix de l'option n'est pas monotone dans la corrélation. On remarque également que le ratio du risque de modèle associé est beaucoup plus élevé que dans le cas Black Scholes. En effet, non seulement les extrema ne sont pas atteints sur les bords du domaine, i.e. le produit présente une convexité qui change de signe, mais surtout, cette convexité est plus forte. Dans le modèle à sauts, le prix de l'option est donc relativement plus sensible au premier

²⁵Cf. [Cont Tankov (2004)] section 10.6 pour une illustration particulièrement claire de cet effet.

scénario de stress.

Si on ajoute le call sur panier à l'ensemble des instruments benchmarks, on obtient les résultats des tableaux 6 et 5.

		Modèle Q_1	Modèle Q_2
Ratio du risque de modèle		0%	0%
Structure de corrélation à l'optimum	de	$\begin{pmatrix} 100\% & 36.18\% & 34.01\% \\ 36.18\% & 100\% & 34.51\% \\ 34.01\% & 34.51\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & 20.30\% & 16.69\% \\ 20.30\% & 100\% & 17.51\% \\ 16.69\% & 17.51\% & 100\% \end{pmatrix}$

TAB. 5 – Risque de modèle de l'option rainbow pour les modèles à sauts, avec call sur panier, pénalisation en norme L^1

		Modèle Q_1	Modèle Q_2
Ratio du risque de modèle		2.78%	0.16%
Structure de corrélation au maximum	de	$\begin{pmatrix} 100\% & 26.26\% & 23.18\% \\ 26.23\% & 100\% & 23.88\% \\ 23.18\% & 23.88\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & 16.27\% & 13.02\% \\ 16.27\% & 100\% & 13.76\% \\ 13.02\% & 13.76\% & 100\% \end{pmatrix}$
Structure de corrélation au minimum	de	$\begin{pmatrix} 100\% & 60\% & 60\% \\ 60\% & 100\% & 60\% \\ 60\% & 60\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & 20.30\% & 16.69\% \\ 20.30\% & 100\% & 17.51\% \\ 16.69\% & 17.51\% & 100\% \end{pmatrix}$

TAB. 6 – Risque de modèle de l'option rainbow pour les modèles à sauts, avec call sur panier, pénalisation en norme L^∞

On constate encore une fois que l'ajout du call sur panier aux instruments benchmarks réduit le ratio du risque de modèle. Néanmoins, la dépendance dans la corrélation est différente dans ce modèle à saut et dans le modèle de Black Scholes. Plus précisément, on constate que les termes de pénalisation en norme L^∞ du call sur panier "l'emportent" sur les termes de pénalisation des calls vanilles. On trouve dans ce cas un ratio du risque de modèle qui est différent selon les instruments benchmarks considérés, quand on pénalise le critère avec la norme L^∞ . Le modèle à saut évalue moins bien l'option sur panier que le modèle de Black Scholes.

Corrélation des tailles de sauts

On considère maintenant une matrice de covariance des sauts de la forme

$$C = 0.04(1.02 I_n - 0.2 \mathbf{1}\mathbf{1}')$$

i.e. tous les sauts sont corrélés à -20%. Les autres paramètres de la loi sont les mêmes que dans la section précédente. Le prix de l'option dans ce modèle, calculé par la méthode de Monte Carlo avec 250000 simulations, est égal à 18.49%. Les calculs de mesure de risque sont reproduits dans les tableaux 7 à 9 :

	Modèle Q_1	Modèle Q_2
Ratio du risque de modèle	3.78%	1.48%
Structure de corrélation au maximum	$\begin{pmatrix} 100\% & 20.30\% & 16.69\% \\ 20.30\% & 100\% & 17.51\% \\ 16.69\% & 17.51\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & 18.29\% & 14.85\% \\ 18.29\% & 100\% & 15.64\% \\ 14.85\% & 15.64\% & 100\% \end{pmatrix}$
Structure de corrélation au minimum	$\begin{pmatrix} 100\% & 60\% & 60\% \\ 60\% & 100\% & 60\% \\ 60\% & 60\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & -20\% & -20\% \\ -20\% & 100\% & -20\% \\ -20\% & -20\% & 100\% \end{pmatrix}$

TAB. 7 – Risque de modèle de l’option rainbow pour les modèles à sauts

	Modèle Q_1	Modèle Q_2
Ratio du risque de modèle	0%	0%
Structure de corrélation à l’optimum	$\begin{pmatrix} 100\% & 44.12\% & 42.67\% \\ 44.12\% & 100\% & 43\% \\ 42.67\% & 43\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & 20.30\% & 16.69\% \\ 20.30\% & 100\% & 17.51\% \\ 16.69\% & 17.51\% & 100\% \end{pmatrix}$

TAB. 8 – Risque de modèle de l’option rainbow pour les modèles à sauts, avec call sur panier, pénalisation en norme L^1

	Modèle Q_1	Modèle Q_2
Ratio du risque de modèle	3.78%	0.21%
Structure de corrélation au maximum	$\begin{pmatrix} 100\% & 20.30\% & 16.69\% \\ 20.30\% & 100\% & 17.51\% \\ 16.69\% & 17.51\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & 18.29\% & 14.85\% \\ 18.29\% & 100\% & 15.64\% \\ 14.85\% & 15.64\% & 100\% \end{pmatrix}$
Structure de corrélation au minimum	$\begin{pmatrix} 100\% & 60\% & 60\% \\ 60\% & 100\% & 60\% \\ 60\% & 60\% & 100\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100\% & 20.30\% & 16.69\% \\ 20.30\% & 100\% & 17.51\% \\ 16.69\% & 17.51\% & 100\% \end{pmatrix}$

TAB. 9 – Risque de modèle de l’option rainbow pour les modèles à sauts, avec call sur panier, pénalisation en norme L^∞

Les résultats obtenus ici sont assez proches de ceux de la section précédente. Les ratios du risque de modèle ont toutefois tendance à augmenter car le modèle spécifié calibre moins bien les instruments benchmarks.

6.4 Discussion

Quand on a des conjectures sur les structures de corrélation susceptibles de se réaliser sur le marché et qu’on ne sait pas laquelle va vraiment se réaliser, la méthode que nous venons de présenter permet d’en déduire une mesure du risque de modèle. Si

on anticipe plusieurs matrices de corrélation R_1, R_2, \dots , i.e. plusieurs distributions “extrêmes” $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \dots$ sur les trajectoires, on peut calculer Ψ^ε sur toutes les combinaisons convexes des matrices prises deux à deux.

Toutefois, pour mettre en œuvre efficacement cette procédure, il faut avoir des anticipations et ce n’est pas toujours le cas. Nous avons donc développé dans la section suivante une autre méthode qui permet de construire une famille de modèles de corrélation les plus probables à partir des historiques de rendements.

7 Perturbation des valeurs propres de la matrice de corrélation

Encore une fois, l’évaluation d’une option multi sous-jacents nécessite souvent l’estimation sur données historiques de la matrice R et parfois de la matrice Σ . Or sous des hypothèses d’échantillonnage, on peut calculer des intervalles de confiance pour les valeurs propres de ces matrices. Ainsi, on peut définir l’ensemble \mathcal{S} de la section 5.2 comme l’ensemble des matrices symétriques définies positives qui ont des valeurs propres dans l’intervalle de confiance et discrétiser cet ensemble en une grille de points parmi lesquels on recherche les extrema du critère pénalisé Ψ^ε .

Par exemple, si on croit que la loi des rendements est engendrée par un processus à sauts type (14), alors grâce aux historiques de rendements, on va pouvoir caractériser, au sein de cette famille, les modèles d’évaluation les plus probables.

La méthode se décompose donc en deux étapes distinctes :

Etape 1 : Détermination de la région de confiance à partir des données historiques dans un cadre paramétrique ou non.

Etape 2 : Choix de la famille de modèles qui a engendré les données et calcul de Ψ^ε en conséquence.

En outre, l’analyse statistique des données historiques permet de choisir la famille de modèles risque-neutres $\overline{\mathcal{Q}}$. Par exemple, si on constate que les rendements ont des queues épaisses et un skew coté négatif, on aura tendance à préférer des modèles à sauts plutôt que des modèles log-normaux type Black Scholes.

Ainsi, même si on n’a pas d’anticipations sur les corrélations, on va pouvoir grâce à cette méthode calculer des mesures du risque de modèle.

7.1 Modèle statistique et loi des valeurs propres de R

Pour pouvoir parler de statistique, il faut construire un modèle statistique pour les observations. Ici, les données sont simplement les rendements des actifs risqués sous-jacents (séries temporelles) qui servent à calculer des estimateurs des matrices de covariance ou de corrélation.

On considère le modèle statistique non paramétrique :

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), G)^{\otimes m}$$

où G représente la loi, inconnue, des observations qu’on note $Y_1, \dots, Y_m \in \mathbb{R}^n$ et qui sont définies $\forall k = 1, \dots, m, \forall i = 1, \dots, n$ par²⁶ :

$$Y_k^i := \frac{\ln(S_{t_k}^i) - \ln(S_{t_{k-1}}^i)}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}$$

²⁶A noter que pour avoir un modèle statistique iid, il faut que les observations soient *indépendantes*. Modéliser S par un processus de Levy est une condition suffisante pour avoir cette propriété.

Notons $\mu \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\Sigma \in \mathcal{M}_S^+(n, n)$) la moyenne (resp. la matrice de covariance) des observations.

Des estimateurs sans biais de μ et Σ sont donnés par :

$$\hat{\mu} := \bar{Y} := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_j$$

$$\hat{\Sigma} := \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})(Y_j - \bar{Y})'$$

La matrice de corrélation R est définie par :

$$R := \text{ddiag}(\Sigma)^{-1/2} \Sigma \text{ddiag}(\Sigma)^{-1/2}$$

On note \hat{R} son estimateur sans biais. Comme R et \hat{R} sont des matrices symétriques définies positives, elles sont diagonalisables dans une base orthonormale :

$$R =: P\Lambda P' \quad \hat{R} =: \hat{P}\hat{\Lambda}\hat{P}'$$

avec $\Lambda =: \text{diag}(\lambda)$ et $\hat{\Lambda} =: \text{diag}(\hat{\lambda})$. Notre objectif est de trouver un intervalle de confiance pour λ .

En toute généralité, dans ce modèle non-paramétrique, on peut caractériser la loi des valeurs propres de \hat{R} grâce à la technique du bootstrap. Ici, comme la loi des observations est inconnue, il faut faire du bootstrap non-paramétrique [Davidson Hinkley (1997)].

On construit donc L échantillons de taille m en tirant uniformément dans les observations. Chaque échantillon est noté $(Y_1^{(\ell)}, \dots, Y_m^{(\ell)})$, $\ell = 1, \dots, L$. Les valeurs propres de \hat{R} triées par ordre décroissant²⁷ sont reliées aux observations par une certaine fonction continue ψ :

$$\hat{\lambda}^{(\ell)} = \psi(Y_1^{(\ell)}, \dots, Y_m^{(\ell)}), \ell = 1, \dots, L$$

La fonction de répartition empirique des $\hat{\lambda}^{(\ell)}$ converge presque sûrement et dans L^2 vers la fonction de répartition théorique de λ (conséquence du théorème de Glivenko Cantelli) :

$$F(x) := \mathbb{Q}(\lambda \leq x), x \in \mathbb{R}^n$$

$$\hat{F}(x) := \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \mathbb{1}_{\{\hat{\lambda}^{(\ell)} \leq x\}} \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{p.s.} F(x), x \in \mathbb{R}^n$$

On peut donc assez facilement caractériser la loi des valeurs propres de \hat{R} , grâce à la fonction de répartition empirique \hat{F} .

Pour ce qui est des intervalles de confiance, on remarque que le vecteur λ est dans le sous espace de dimension $n-1$:

$$\lambda \in B := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = n, x_1 > x_2 > \dots > x_n > 0 \right\}$$

Ce sous-espace contient notamment le vecteur $\bar{\lambda} := (1/L) \sum_{\ell=1}^L \hat{\lambda}^{(\ell)}$. Nous allons mettre un intervalle de confiance pour λ autour de $\bar{\lambda}$.

Pour $\eta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$, définissons l'ensemble :

$$E(\eta, a) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in B, \|x - a\|^2 \leq \eta^2\}$$

²⁷On rappelle que les valeurs propres sont identifiées à une permutation près.

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\hat{\lambda} \in E(\eta, a)) &= \mathbb{Q}\left(\sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i = n, \hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots, \hat{\lambda}_n > 0, \sum_{i=1}^n (\hat{\lambda}_i - a_i)^2 \leq \eta^2\right) \\ &= \int_{E(\eta, a)} d\hat{F} \\ &\xrightarrow[L \rightarrow \infty]{p.s.} \int_{E(\eta, a)} dF = \mathbb{Q}(\lambda \in E(\eta, a)) \end{aligned}$$

et pour un seuil de confiance α donné petit, on va chercher η de sorte que

$$\mathbb{Q}(\hat{\lambda} \in E(\eta, \bar{\lambda})) = 1 - \alpha$$

Pour trouver η en pratique, on remarque que :

$$\frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \mathbb{1}_{\{\hat{\lambda}^{(\ell)} \in E(\eta, \bar{\lambda})\}} \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\hat{\lambda} \in E(\eta, \bar{\lambda})\}}) = \mathbb{Q}(\hat{\lambda} \in E(\eta, \bar{\lambda}))$$

Cette méthode permet de trouver un intervalle de confiance sphérique autour de $\bar{\lambda}$ qu'il faut maintenant discrétiser. Pour cela, on passe en coordonnées polaires dans \mathbb{R}^{n-1} (car $E(\eta, \bar{\lambda}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$), puis on discrétise le rayon et les multiples angles.

7.2 Applications numériques : modèle de Black Scholes

Pour illustrer la méthode, nous avons repris l'exemple de l'option Rainbow de la section 6.2 avec les mêmes paramètres. On rappelle que la matrice de corrélation estimée sur deux ans d'historiques (500 valeurs) est :

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 100\% & 20.30\% & 16.69\% \\ 20.30\% & 100\% & 17.51\% \\ 16.69\% & 17.51\% & 100\% \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres et vecteurs propres sont :

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0.80 \end{pmatrix} \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} 0.58 & 0.47 & 0.66 \\ 0.59 & 0.31 & -0.74 \\ 0.55 & -0.83 & 0.10 \end{pmatrix}$$

Le prix de l'option Rainbow avec les volatilités implicites à la monnaie et la corrélation historique \hat{R} est 18.42% (500000 simulations).

Nous comparons deux jeux d'instruments benchmarks différents. Dans le premier, nous considérons uniquement les calls vanilles. Dans le deuxième, nous considérons les calls vanilles et les options sur panier utilisées dans la section 6.2.

Rendements historiques et bootstrap

Nous avons simulé 50000 échantillons par la méthode du bootstrap non paramétrique, ce qui donne 50000 matrices de corrélation simulées et autant de vecteurs de valeurs propres. Dans les graphes 6 à 8, nous montrons les lois marginales empiriques obtenues :

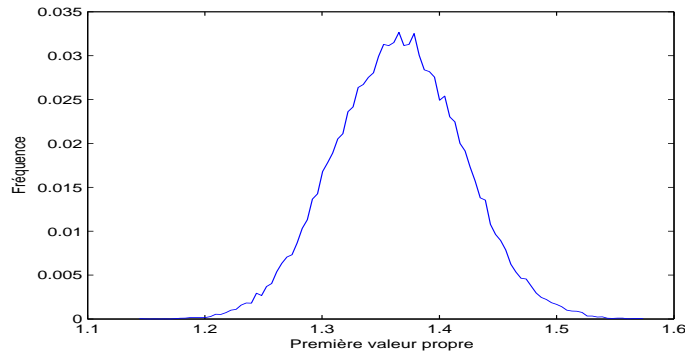


FIG. 6 – Densité marginale empirique de la première valeur propre

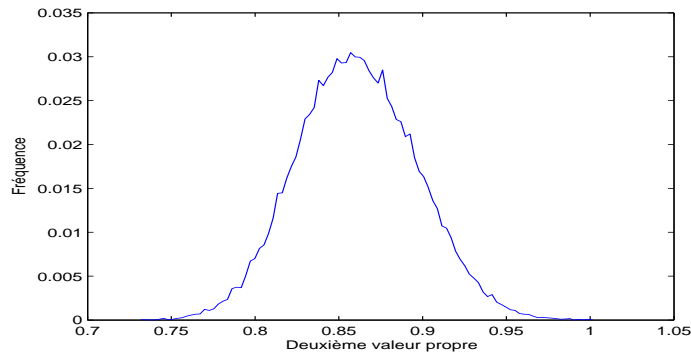


FIG. 7 – Densité marginale empirique de la deuxième valeur propre

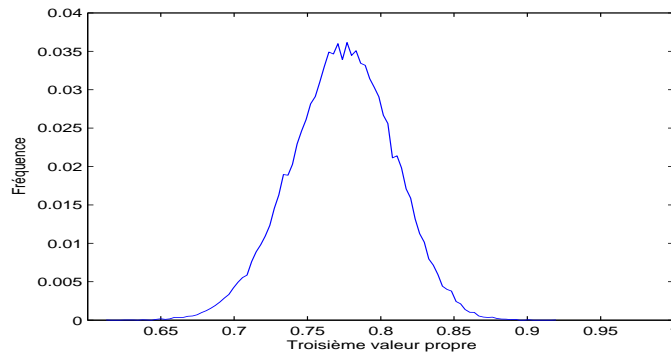


FIG. 8 – Densité marginale empirique de la troisième valeur propre

Le vecteur moyen des valeurs propres estimées est $\bar{\lambda} = (1.37 \ 0.86 \ 0.77)'$. Nous trouvons que 99.9% des valeurs propres sont dans le disque $E(\bar{\lambda}, \eta) \subset \mathbb{R}^2$ avec $\eta = 0.14$. Ce disque a été discrétisé en 2500 points, soit 50 pas de discrétisation sur chaque axe polaire (50 sur le rayon et 50 sur l'angle). Il y a donc 2500 modèles pour la corrélation.

Résultats avec les calls vanilles

On montre dans le tableau 10 les résultats numériques obtenus avec les deux critères de pénalisation présentés dans la section 3.1 :

	Première pénalisation $\ \cdot\ _1$	Deuxième pénalisation $\ \cdot\ _\infty$
ε_0	4.55	0.18
Max	-4.37	0.01
Min	4.74	0.36
MRR	0.92%	0.92%

TAB. 10 – Risque de modèle de l’option rainbow

Le risque de modèle mesuré par Ψ^{ε_0} rapporté au prix de l’option avec corrélation historique, noté MRR²⁸ dans le tableau, est évidemment le même avec les deux critères de pénalisation, puisque nos instruments benchmarks sont ici uniquement des calls vanille et que les volatilités sont fixées. On constate quand même qu’il représente environ 0.9% du prix de l’option, i.e. qu’au seuil de confiance $\alpha = 99.9\%$, les structures de corrélation susceptibles de se réaliser peuvent affecter le prix à hauteur de 0.9%. Notons que le supremum du programme est atteint pour la valeur propre $(1.37 \ 0.76 \ 0.87)'$, ce qui correspond à la structure de corrélation :

$$\text{Corr} \left(\frac{S_T^1}{S_0^1}, \frac{S_T^2}{S_0^2} \right) = 15.5\% \quad \text{Corr} \left(\frac{S_T^1}{S_0^1}, \frac{S_T^3}{S_0^3} \right) = 20.3\% \quad \text{Corr} \left(\frac{S_T^2}{S_0^2}, \frac{S_T^3}{S_0^3} \right) = 19\%$$

De même, l’infimum du programme est atteint pour la valeur propre $(1.31 \ 0.97 \ 0.72)'$, correspondant à la structure de corrélation :

$$\text{Corr} \left(\frac{S_T^1}{S_0^1}, \frac{S_T^2}{S_0^2} \right) = 23.8\% \quad \text{Corr} \left(\frac{S_T^1}{S_0^1}, \frac{S_T^3}{S_0^3} \right) = 9.3\% \quad \text{Corr} \left(\frac{S_T^2}{S_0^2}, \frac{S_T^3}{S_0^3} \right) = 12.8\%$$

Les structures de corrélation pour lesquelles sont atteints les optima ne sont pas triviales et on voit bien sur cet exemple que la somme qu’il faudrait provisionner au titre du risque de modèle n’est pas négligeable.

Résultats avec les calls vanille et le call sur panier

Si on ajoute le call sur panier à l’ensemble des instruments benchmarks, les termes de pénalisation ne sont plus indépendants du modèle de corrélation. Les résultats sont regroupés dans le tableau 11 :

	Première pénalisation $\ \cdot\ _1$	Deuxième pénalisation $\ \cdot\ _\infty$
ε_0	4.56	0.18
Max	-4.37	0.01
Min	4.74	0.36
MRR	0.15%	0.92%

TAB. 11 – Risque de modèle de l’option rainbow

On constate que l’ajout d’instruments de corrélation dans \mathcal{H} réduit significativement le ratio de risque de modèle quand on pénalise avec la norme L^1 . On retrouve encore une fois le résultat de [Cont (2004)] déjà rencontré dans la section 6.2.

²⁸Model Risk Ratio

Le supremum du programme pénalisé par la norme L^1 est atteint pour le vecteur de valeurs propres $(1.48 \ 0.80 \ 0.72)'$, qui correspond à la structure de corrélation :

$$\text{Corr} \left(\frac{S_T^1}{S_0^1}, \frac{S_T^2}{S_0^2} \right) = 27.3\% \quad \text{Corr} \left(\frac{S_T^1}{S_0^1}, \frac{S_T^3}{S_0^3} \right) = 21.24\% \quad \text{Corr} \left(\frac{S_T^2}{S_0^2}, \frac{S_T^3}{S_0^3} \right) = 22.65\%$$

L'infimum est atteint au point $(1.48 \ 0.81 \ 0.71)'$, correspondant à la structure de corrélation :

$$\text{Corr} \left(\frac{S_T^1}{S_0^1}, \frac{S_T^2}{S_0^2} \right) = 28.31\% \quad \text{Corr} \left(\frac{S_T^1}{S_0^1}, \frac{S_T^3}{S_0^3} \right) = 20.87\% \quad \text{Corr} \left(\frac{S_T^2}{S_0^2}, \frac{S_T^3}{S_0^3} \right) = 22.62\%$$

On constate en revanche que le MRR calculé avec la pénalisation L^∞ reste le même. Les extrema sont atteints exactement aux mêmes points parce que le produit de corrélation qui a été ajouté est bien calibré par tous les modèles $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$.

7.3 Discussion

La méthode que nous avons présentée dans cette partie permet de construire un ensemble \mathcal{Q} de modèles pour la corrélation qui sont les plus probables pour un seuil de confiance donné et d'en tirer une mesure du risque de modèle. Cette approche par les valeurs propres peut s'interpréter au regard des résultats généraux de l'analyse en composante principale²⁹. En effet, on sait que la direction propre associée à la plus grande valeur propre engendre le sous-espace vectoriel qui porte la plus grande part d'inertie du nuage. Donc si on veut bien prendre en compte le risque de dispersion sur les rendements, on a intérêt à perturber le plus possible la plus grande valeur propre. Ainsi, la méthode que nous proposons met un intervalle de confiance sphérique autour des valeurs propres, ce qui donne des résultats corrects, mais on peut imaginer d'autres formes paramétriques qui laissent plus de liberté sur la première valeur propre (par exemple des intervalles "emboîtés").

8 Conclusion

Quand on doit valoriser ou couvrir un produit multi sous-jacents, la spécification d'un modèle pour la corrélation est un problème complexe, susceptible d'engendrer un risque de modèle important. Dans ce document, nous proposons deux procédures complémentaires qui permettent de comprendre et de mesurer ce risque. Les techniques que nous présentons sont développées autour du cadre analytique de [Cont (2004)] et profitent de ce fait de ses fondements théoriques et financiers.

Avec la première méthode, nous construisons un ensemble de modèles "extrêmes" pour la corrélation, à partir de matrices de corrélation stressées ou plus simplement à partir d'anticipations. Le calcul explicite d'une mesure du risque qui en découle est direct et simple à implémenter. La deuxième méthode permet de construire la famille des modèles les plus probables pour la corrélation, au sens où ce sont ceux qui ont le plus de chance de reproduire la structure de corrélation qui va se réaliser. Là encore, la mesure du risque qui est associée à cet ensemble de modèles se calcule explicitement.

Avec ce document, nous espérons contribuer à la recherche sur le risque de modèle présent dans les instruments de corrélation, problème dont l'importance pratique ne fait aujourd'hui plus aucun doute et qui mérite certainement plus de travaux académiques.

²⁹Cf. [Saporta (1990)] par exemple.

A Notations

La clarté d'un exposé passe souvent par la clarté des notations. Dans ce document, nous utilisons un grand nombre de symboles et de conventions d'écriture que nous détaillons dans cette annexe.

On note $:=$ une définition et on met les $:$ du coté de l'objet qui est défini.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne, on note x' sa transposée qui est un vecteur ligne. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x \cdot y$ le produit scalaire euclidien

$$x \cdot y := x' y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

La norme euclidienne est notée $|x|$:

$$|x| := \sqrt{x \cdot x}$$

On note également I_n la matrice identité de \mathbb{R}^n , ou simplement I s'il n'y a pas d'ambiguïté et $\mathbf{1}$ le vecteur qui a toutes ses composantes égales à 1.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note

$$\text{diag}(x) := \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}(n, p)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, ainsi que $\mathcal{M}_S^+(n, n)$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille n .

Pour une matrice carrée A de taille n et de terme général A_{ij} , on note

$$\text{diag}(A) := (A_{11}, \dots, A_{nn})' \in \mathbb{R}^n$$

On définit également l'application

$$\text{ddiag} := \text{diag} \circ \text{diag}$$

qui, à une matrice carrée A de terme général A_{ij} fait correspondre la matrice carrée B de terme général B_{ij} qui vaut $B_{ii} = A_{ii}, \forall i$ et $B_{ij} = 0, i \neq j$.

Avec des notations standard, Σ représente en général une matrice de covariance et R la matrice de corrélation associée.

Dans tout le rapport, nous utilisons les lettres Φ , Ψ et Ψ^ε pour désigner les mesures de risque de modèle définies dans la section 3.1. De la même manière, on note \mathcal{Q} un ensemble de modèles risque-neutres et \mathcal{H} un ensemble d'instruments benchmarks.

On note \mathcal{P} l'ensemble des lois de probabilité des processus à valeur dans \mathbb{R}_+^n et $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ l'ensemble de toutes les mesures de probabilité risque-neutres. On a également l'ensemble $\mathcal{R}^{BS} \subset \mathcal{R}$ des modèles type Black Scholes multivarié, défini section 5.3 et $\mathcal{R}^J \subset \mathcal{R}$ un ensemble des modèles à sauts défini dans la section 5.4.

La lettre grecque θ désigne de manière générique un paramètre.

B Compléments mathématiques

B.1 Robustesse de la formule de Black Scholes

Cas univarié

Nous rappelons dans cette section la formule du P&L d'un portefeuille couvert en delta dans un modèle type Black Scholes, parfois appelée formule de robustesse. Notre objectif n'étant pas d'établir ce résultat en toute rigueur, nous serons volontairement informels. Le lecteur souhaitant approfondir la question pourra se reporter à [Rebonato (2004)] ou [El Karoui *et al.* (1998)].

On considère un call vanille de prix $C(t, S_t, T, K; (\theta_t)_t)$ où $(\theta_t)_t$ est un processus qui représente les paramètres inobservables qui affectent le prix³⁰. Notons $C^{BS}(t, S_t, K, T, \sigma)$ le prix d'un call vanille dans le modèle de Black Scholes, donné par la formule de Black Scholes. La volatilité implicite $\Sigma(t, S_t, K, T)$ est définie par la relation

$$C(t, S_t, T, K; (\theta_t)_t) = C^{BS}(t, S_t, K, T, \Sigma(t, S_t, K, T))$$

On suppose que la volatilité qui va se réaliser sur la trajectoire future est un processus inobservable $(\sigma_t)_t$:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

La question qu'on se pose est la suivante : comment varie le P&L de la position couverte en delta si la volatilité de pricing et de gestion est mal spécifiée ?

On sait que la fonction $C^{BS}(\cdot, \cdot, K, T, \sigma)$ est solution de l'EDP de Black Scholes :

$$\frac{\partial C^{BS}}{\partial t} + rs \frac{\partial C^{BS}}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial s^2} = rC^{BS}, (t, s) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$$

Par ailleurs, la formule d'Itô nous assure que :

$$\begin{aligned} dC(t, S_t, T, K; (\theta_t)_t) &= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial s} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} d\langle S \rangle_t \\ &= dC^{BS}(t, S_t, T, K, \Sigma(t, S_t, K, T)) \\ &= \left[\frac{\partial C^{BS}}{\partial t} + \frac{\partial C^{BS}}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \right] dt \\ &\quad + \left[\frac{\partial C^{BS}}{\partial s} + \frac{\partial C^{BS}}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \right] dS_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \Sigma \partial s} \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \right] d\langle S \rangle_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial s \partial \Sigma} + \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \Sigma^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial s} + \frac{\partial C^{BS}}{\partial \Sigma} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial s^2} \right] d\langle S \rangle_t \\ &= \frac{1}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial s^2} [\sigma_t^2 - \Sigma^2(t, S_t, K, T)] dt + \left[\frac{\partial C^{BS}}{\partial \Sigma} \right] \frac{\partial \Sigma}{\partial t} dt \\ &\quad + \left[\frac{\partial C^{BS}}{\partial s} + \frac{\partial C^{BS}}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \right] \sigma_t S_t dW_t + rS_t \frac{\partial C^{BS}}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial s} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \Sigma \partial s} + \left(\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial s \partial \Sigma} + \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \Sigma^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \right) \right] \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial s} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial C^{BS}}{\partial \Sigma} \right] \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial s^2} dt + rC^{BS} dt \end{aligned}$$

³⁰Pour fixer les idées, on peut penser à des intensités de saut ou des paramètres de corrélation entre facteurs

Soit V_t le portefeuille de couverture en delta. On a $V_0 = C(0, S_0, K, T; (\theta_t)_t) = C^{BS}(0, S_0, K, T, \Sigma(0, S_0, K, T))$ et

$$dV_t = \frac{\partial C^{BS}}{\partial s} dS_t + r(C^{BS} - \frac{\partial C^{BS}}{\partial s} S_t) dt$$

En faisant la différence, on trouve :

$$\begin{aligned} P\&L_T &:= V_T - C_T \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T S_t^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial s^2} [\Sigma^2(t, S_t, K, T) - \sigma_t^2] dt \\ &\quad - \int_0^T \left[\frac{\partial C^{BS}}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \right] \sigma_t S_t dW_t - \int_0^T r S_t \frac{\partial C^{BS}}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial s} dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \left[\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \Sigma \partial s} + \left(\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial s \partial \Sigma} + \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \Sigma^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \right) \right] \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial s} dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \left[\frac{\partial C^{BS}}{\partial \Sigma} \right] \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial s^2} dt - \int_0^T \left[\frac{\partial C^{BS}}{\partial \Sigma} \right] \frac{\partial \Sigma}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Si la surface de volatilité ne dépend pas de (t, S_t) , alors la formule se simplifie en

$$P\&L_T = \frac{1}{2} \int_0^T S_t^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial s^2} [\Sigma^2(t, S_t, K, T) - \sigma_t^2] dt$$

ce qui signifie que si le produit est gamma positif, en sur-évaluant la volatilité de gestion on s'assure un P&L positif à échéance.

Cas multivarié

Considérons maintenant un marché constitué de n actifs risqués (S^1, \dots, S^n) et d'un actif sans risque S^0 . L'aléa est modélisé par un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ et on considère une option path-independant de prix C_t à la date $t \in [0, T]$ et de payoff $C_T = h(S_T)$ à échéance T . On s'intéresse au P&L du portefeuille long de cet option et couvert en delta. Nous noterons $\tilde{\Sigma}(T, K)$ la matrice de "covariance implicite", supposée indépendante de (t, S_t) pour simplifier.

On note Σ_t la covariance (inobservable) qui va se réaliser sur la période $[0, T]$:

$$dS_t = \text{diag}(S_t)(r\mathbf{1}dt + \sigma_t dW_t)$$

avec W un mouvement brownien standard dans \mathbb{R}^n et σ_t une matrice bornée telle que $\Sigma_t = \sigma_t \sigma_t'$.

Par un raisonnement similaire à celui de la section précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} P\&L_T &:= V_T - C_T \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \text{tr} \left[\text{diag}(S_t)(\tilde{\Sigma}(t, S_t) - \Sigma_t) \text{diag}(S_t) \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial S'}(t, S_t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^T S_t^i S_t^j \left[\frac{\tilde{\sigma}^i \cdot \tilde{\sigma}^j}{|\tilde{\sigma}^i| |\tilde{\sigma}^j|} |\tilde{\sigma}^i| |\tilde{\sigma}^j|(t, S_t) - \frac{\sigma_t^i \cdot \sigma_t^j}{|\sigma_t^i| |\sigma_t^j|} |\sigma_t^i| |\sigma_t^j| \right] \frac{\partial^2 C}{\partial S^i \partial S^j}(t, S_t) dt \end{aligned}$$

avec σ_t^k la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice σ_t et $\tilde{\sigma}^k(t, S_t)$ la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $\tilde{\sigma}(t, S_t)$. Cette formule est d'une grande importance pratique. Elle nous dit que si on se couvre en delta et que matrice de covariance est mal spécifiée, alors le gain (ou la perte) qui en résulte dépend des gammas croisés. Par exemple, on sait que les gammas croisés "hors diagonale" d'un call best of sont strictement négatifs et que les gammas "diagonaux" sont strictement positifs. Pour s'assurer un P&L positif dans ce cas, il suffit donc de majorer les volatilités et de minorer les corrélations.

B.2 Reconstruction de la densité risque-neutre

Un résultat connu de l'évaluation robuste des options nous dit que si on observe des prix de calls pour différents strikes sur un actif donné, alors on peut en déduire des informations sur la probabilité risque-neutre implicite du marché [Breedon Litzenberger (1978)]. Nous rappelons ce résultats dans cette annexe.

Le cas d'un continuum de calls

Nous suivons essentiellement la présentation de [Musiel Rutkowski (2004)]. Soit S un actif risqué, de prix S_t à la date $t \in [0, T]$. On considère un marché financier où l'application $t \mapsto S_t$ est positive et où le taux sans risque $r \geq 0$ est constant. Le prix de non arbitrage d'un call vanille sur S de strike K et d'échéance T est :

$$c(K, T) := e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+] = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} (s - K)^+ F(ds, T)$$

avec

$$F(x, T) := \mathbb{Q}(S_T \leq x), x \in \mathbb{R}$$

L'application $c(\cdot, T) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, positive et convexe (par arbitrage). Elle est donc localement intégrable et par conséquent définit une distribution μ , qui est une mesure positive sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour toute fonction continue h à support compact, on peut donc écrire

$$\langle \mu | h \rangle := \int_{\mathbb{R}} h(s) c(s, T) ds$$

La dérivée de μ au sens des distributions, que nous noterons μ' , vérifie

$$\langle \mu' | h \rangle = -\langle \mu | h' \rangle$$

Sous nos hypothèses, l'application $c(\cdot, T)$ a de bonnes propriétés et on a :

$$\begin{aligned} \langle \mu | h' \rangle &= \int_{\mathbb{R}} h'(s) c(s, T) ds \\ &= [h(s) c(s, T)]_{s=-\infty}^{s=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} h(s) c'_K(s, T) ds \\ &= - \int_{\mathbb{R}} h(s) c'_K(s, T) ds \\ &= -\langle \mu' | h \rangle \end{aligned}$$

on a donc :

$$\langle \mu' | h \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(s) c'_K(s, T) ds$$

et de la même manière, on trouve :

$$\langle \mu'' | h \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(s) c''_{KK}(s, T) ds$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le principal résultat :

Lemme B.1

Pour toute fonction mesurable $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} g(s) F(ds, T) = e^{rT} \int_{\mathbb{R}} g(s) c''_{KK}(s, T) ds$$

et pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, en prenant $g(s) = \mathbb{1}_A(s)$, on a :

$$\mathbb{Q}(S_T \in A) = e^{rT} \mu''(A) = e^{rT} c''_{KK}(A, T)$$

Nous ne détaillons pas la preuve, qui est dans [Musiel Rutkowski (2004)].

Le cas d'un nombre fini de calls

Si on observe maintenant un nombre fini de calls, on ne peut plus dériver la fonction de prix pour retrouver le densité risque-neutre. Il faut dans ce cas interpoler entre les points ou éventuellement lisser. Nous renvoyons à [Rebonato (2004)] chapitre 7 pour un exposé très complet sur la question.

B.3 Loi asymptotique de \hat{R} et de ses valeurs propres

Dans cette annexe, nous présentons des résultats statistiques que nous avons obtenus. Il s'agit de déterminer la loi asymptotique des valeurs propres d'une matrice de corrélation dans le cas où les observations du modèle statistique sont gaussiennes iid et d'en déduire une formule fermée pour un intervalle de confiance elliptique.

On se place dans le cadre d'un modèle statistique paramétrique gaussien

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{N}(\mu, \Sigma))_{\mu, \Sigma}^{\otimes p}$$

Les p observations iid sont notées (X_1, \dots, X_p) :

$$\forall i = 1, \dots, p, X_i \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

L'estimateur $\hat{\Sigma}$ de Σ est :

$$\hat{\Sigma} := \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^p (X_j - \bar{X})(X_j - \bar{X})'$$

On a le résultat suivant :

$$\sqrt{p}(\hat{\Sigma} - \Sigma) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{loi} Z$$

Avec Z une matrice de variables aléatoires gaussiennes, dont les moments sont :

$$\mathbb{E}[Z_{ij}] = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, p$$

$$\mathbb{E}[Z_{ij}Z_{k\ell}] = \Sigma_{ik}\Sigma_{j\ell} + \Sigma_{i\ell}\Sigma_{jk}, \quad \forall i, j, k, \ell = 1, \dots, p$$

On notera $[Z_1, \dots, Z_n]$ les n colonnes de la matrice Z et $[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n]$ les n colonnes de la matrice Σ . Les moments peuvent donc se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_i Z_j'] &= \begin{pmatrix} \mathbb{E}[Z_{1i}Z_{1j}] & \cdots & \mathbb{E}[Z_{1i}Z_{nj}] \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{E}[Z_{ni}Z_{1j}] & \cdots & \mathbb{E}[Z_{ni}Z_{nj}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{E}[Z_{1i}Z_{j1}] & \cdots & \mathbb{E}[Z_{1i}Z_{jn}] \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{E}[Z_{ni}Z_{j1}] & \cdots & \mathbb{E}[Z_{ni}Z_{jn}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{1j}\Sigma_{i1} + \Sigma_{11}\Sigma_{ij} & \cdots & \Sigma_{1j}\Sigma_{in} + \Sigma_{1n}\Sigma_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ \Sigma_{nj}\Sigma_{i1} + \Sigma_{n1}\Sigma_{ij} & \cdots & \Sigma_{nj}\Sigma_{in} + \Sigma_{nn}\Sigma_{ij} \end{pmatrix} \\ &= \Sigma_i \Sigma_j' + \Sigma_{ij} \Sigma \end{aligned}$$

La matrice de corrélation R s'écrit sous la forme :

$$R := \text{ddiag}(\Sigma)^{-1/2} \Sigma \text{ddiag}(\Sigma)^{-1/2}$$

et on note comme d'habitude son estimateur :

$$\hat{R} := \text{ddiag}(\hat{\Sigma})^{-1/2} \hat{\Sigma} \text{ddiag}(\hat{\Sigma})^{-1/2}$$

Posons $Q := \text{ddiag}(\Sigma)^{-1/2}$ et $\hat{Q} := \text{ddiag}(\hat{\Sigma})^{-1/2}$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \hat{R} - R &= \hat{Q}\hat{\Sigma}\hat{Q} - Q\Sigma Q \\ &= (\hat{Q} - Q)\hat{\Sigma}\hat{Q} + Q(\hat{\Sigma} - \Sigma)\hat{Q} + Q\Sigma(\hat{Q} - Q) \end{aligned}$$

On connaît déjà la loi asymptotique de $\sqrt{p}(\hat{\Sigma} - \Sigma)$, qu'on a noté Z . Reste à déterminer la loi asymptotique de $\sqrt{p}(\hat{Q} - Q)$. Comme Q est une fonction de Σ , on va pouvoir déterminer cette loi grâce à la delta méthode.

Précisément, notons $g(\cdot)$ l'application qui à une matrice carré A fait correspondre $g(A) := \text{ddiag}(A)^{-1/2}$:

$$g(A) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{A_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sqrt{A_{nn}} \end{pmatrix}$$

Avec cette fonction, on a :

$$\sqrt{p}(\hat{Q} - Q) = \sqrt{p}(g(\hat{\Sigma}) - g(\Sigma))$$

La delta méthode nous dit alors que :

$$\sqrt{p}(\hat{Q} - Q) = \sqrt{p}(g(\hat{\Sigma}) - g(\Sigma)) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{\text{loi}} U$$

où U est une matrice de variable aléatoire gaussienne, dont les colonnes sont notées $[U_1, \dots, U_n]$ et qui a pour moments :

$$\mathbb{E}[U_{ij}] = 0, \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$\mathbb{E}[U_i U_j'] = \text{Jac}_{g_i}(\Sigma) \mathbb{E}[Z_i Z_j'] \text{Jac}'_{g_j}(\Sigma)$$

avec g_i la i -ème colonne de la matrice g et Jac_{g_i} la jacobienne de g_i . Calculons la jacobienne de g_i . On a :

$$\begin{aligned} g(A) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{A_{nn}}} \end{pmatrix} \\ g_i(A) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{A_{ii}}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \\ \text{Jac}_{g_i}(A) &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -\frac{1}{2}A_{ii}^{-3/2} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On trouve donc au final :

$$\mathbb{E}[U_{ik} U_{j\ell}] = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[Z_{ii} Z_{jj}]}{4\Sigma_{ii}^{3/2} \Sigma_{jj}^{3/2}} & \text{si } k = i \text{ et } \ell = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $\mathbb{E}[Z_{ii}Z_{jj}] = 2\Sigma_{ij}$, on a :

$$\mathbb{E}[U_{ik}U_{j\ell}] = \begin{cases} \frac{\Sigma_{ij}^2}{2\Sigma_{ii}^{3/2}\Sigma_{jj}^{3/2}} & \text{si } k = i \text{ et } \ell = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme \hat{Q} et $\hat{\Sigma}$ sont des estimateurs convergents de Q et Σ , la loi asymptotique de la matrice de corrélation est donnée par le théorème de Slutsky :

$$\sqrt{p}(\hat{R} - R) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{loi} U\Sigma Q + QZQ + Q\Sigma U \stackrel{loi}{=} QZQ + 2Q\Sigma U$$

Pour caractériser complètement la loi de \hat{R} , on a besoin de déterminer la covariance asymptotique entre Z et U . Pour cela, on a besoin de trouver la loi limite π telle que :

$$\sqrt{p} \left(\begin{pmatrix} \hat{\Sigma} \\ g(\hat{\Sigma}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Sigma \\ g(\Sigma) \end{pmatrix} \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{loi} \pi$$

Notons h l'application qui à Σ fait correspondre $h(\Sigma) := (\Sigma, g(\Sigma))'$ et $h_i \in \mathbb{R}^{2n}$ la i ème colonne de h . La jacobienne de h_i vaut :

$$Jac_{h_i}(A) = \left(\frac{I_n}{Jac_{g_i}(\Sigma)} \right) \in \mathcal{M}(2n, n)$$

La delta méthode nous permet d'affirmer :

$$\sqrt{p}(h(\hat{\Sigma}) - h(\Sigma)) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{loi} \pi$$

avec π une matrice de gaussiennes centrées, dont on note $[\pi_1, \dots, \pi_n]$ les colonnes et dont les moments sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\pi_i \pi_j'] &= Jac_{h_i}(\Sigma) \mathbb{E}[Z_i Z_j'] Jac_{h_j}'(\Sigma) \\ &= \left(\frac{\mathbb{E}[Z_i Z_j']}{Jac_{g_i}(\Sigma) \mathbb{E}[Z_i Z_j']} \mid \frac{\mathbb{E}[Z_i Z_j'] Jac_{g_j}'(\Sigma)}{Jac_{g_i}(\Sigma) \mathbb{E}[Z_i Z_j'] Jac_{g_j}'(\Sigma)} \right) \end{aligned}$$

On en déduit la covariance asymptotique entre Z et U :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_i Z_j'] &= Jac_{g_i}(\Sigma) \mathbb{E}[Z_i Z_j'] \\ \mathbb{E}[Z_i U_j'] &= \mathbb{E}[Z_i Z_j'] Jac_{g_j}'(\Sigma) \\ &= (\Sigma_i \Sigma_j' + \Sigma_{ij} \Sigma) Jac_{g_j}'(\Sigma) \\ &= -\Sigma_{jj}^{-3/2} \Sigma_{ij} [0, \dots, 0, \Sigma_j, 0, \dots, 0] \in \mathcal{M}(n, n) \end{aligned}$$

Ce qui caractérise complètement la loi asymptotique de \hat{R} .

Notons ν cette loi :

$$\sqrt{p}(\hat{R} - R) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{loi} \nu$$

$$\nu \stackrel{loi}{=} QZQ + 2Q\Sigma U$$

ν est une matrice de variables aléatoires gaussiennes centrées, dont les moments (composés) se calculent.

Vérifions d'abord que la diagonale est conservée :

$$QZQ = \left(\frac{Z_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}} \sqrt{\Sigma_{jj}}} \right)_{i,j}$$

$$\Sigma U = [\Sigma U_1, \dots, \Sigma U_n] \in \mathcal{M}_S^+(n, n)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\nu_{ii}) &= \frac{2\Sigma_{ii}^2}{\Sigma_{ii}^2} + \frac{4}{\Sigma_{ii}} \text{Var} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n \Sigma_{ik} U_{ki}}_{=\Sigma_{ii} U_{ii} \text{ p.s.}} \right) + 2 \text{Cov} \left(\frac{Z_{ii}}{\Sigma_{ii}}, \frac{2}{\sqrt{\Sigma_{ii}}} \Sigma_{ii} U_{ii} \right) \\ &= 2 + 2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $i = 1, \dots, n$, on a bien $R_{ii} = \hat{R}_{ii} = 1$ presque sûrement quand $p \rightarrow \infty$.
Pour $i \neq j$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\nu_{ij}) &= \frac{\Sigma_{ii} \Sigma_{jj} + \Sigma_{ij}^2}{\Sigma_{ii} \Sigma_{jj}} + \frac{4}{\Sigma_{ii}} \text{Var} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n \Sigma_{ik} U_{kj}}_{=0 \text{ p.s.}} \right) + 2 \text{Cov} \left(\frac{Z_{ij}}{\Sigma_{ij}}, \frac{2}{\sqrt{\Sigma_{ii}}} \sum_{k=1}^n \Sigma_{ik} U_{kj} \right) \\ &= \frac{\Sigma_{ii} \Sigma_{jj} + \Sigma_{ij}^2}{\Sigma_{ii} \Sigma_{jj}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\nu_{ii}, \nu_{jj}) &= \text{Cov} \left(\frac{Z_{ii}}{\Sigma_{ii}}, \frac{Z_{jj}}{\Sigma_{jj}} \right) \\ &\quad + \text{Cov} \left(\frac{2}{\sqrt{\Sigma_{ii}}} \sum_{k=1}^n \Sigma_{ik} U_{ki}, \frac{2}{\sqrt{\Sigma_{jj}}} \sum_{k=1}^n \Sigma_{jk} U_{kj} \right) \\ &\quad + \text{Cov} \left(\frac{Z_{ii}}{\Sigma_{ii}}, \frac{2}{\sqrt{\Sigma_{jj}}} \sum_{k=1}^n \Sigma_{jk} U_{kj} \right) \\ &\quad + \text{Cov} \left(\frac{Z_{jj}}{\Sigma_{jj}}, \frac{2}{\sqrt{\Sigma_{ii}}} \sum_{k=1}^n \Sigma_{ik} U_{ki} \right) \\ &= 2 + \frac{4}{\sqrt{\Sigma_{ii}} \sqrt{\Sigma_{jj}}} \text{Cov}(\Sigma_{ii} U_{ii}, \Sigma_{jj} U_{jj}) \\ &\quad + \frac{2}{\Sigma_{ii} \sqrt{\Sigma_{jj}}} \text{Cov}(Z_{ii}, \Sigma_{jj} U_{jj}) + \frac{2}{\Sigma_{jj} \sqrt{\Sigma_{ii}}} \text{Cov}(Z_{jj}, \Sigma_{ii} U_{ii}) \\ &= 2 \frac{\Sigma_{ij}^2}{\Sigma_{ii} \Sigma_{jj}} + \frac{2 \Sigma_{ij}^2}{\Sigma_{ii} \Sigma_{jj}} - \frac{2 \sqrt{\Sigma_{jj}}}{\Sigma_{ii}} \Sigma_{jj}^{-3/2} \Sigma_{ij}^2 - \frac{2 \sqrt{\Sigma_{ii}}}{\Sigma_{jj}} \Sigma_{ii}^{-3/2} \Sigma_{ij}^2 \\ &= 4 \frac{\Sigma_{ij}^2}{\Sigma_{ii} \Sigma_{jj}} - 4 \frac{\Sigma_{ij}^2}{\Sigma_{ii} \Sigma_{jj}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour $i \neq j$ et $k \neq \ell$ on a :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\nu_{ij}, \nu_{k\ell}) &= \text{Cov}\left(\frac{Z_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}}\sqrt{\Sigma_{jj}}}, \frac{Z_{k\ell}}{\sqrt{\Sigma_{kk}}\sqrt{\Sigma_{\ell\ell}}}\right) \\
&+ \text{Cov}\left(\frac{2}{\sqrt{\Sigma_{ii}}} \sum_{s=1}^n \Sigma_{is} U_{sj}, \frac{2}{\sqrt{\Sigma_{kk}}} \sum_{s=1}^n \Sigma_{ks} U_{s\ell}\right) \\
&+ \text{Cov}\left(\frac{Z_{ij}}{\Sigma_{ij}}, \frac{2}{\sqrt{\Sigma_{kk}}} \sum_{s=1}^n \Sigma_{ks} U_{s\ell}\right) \\
&+ \text{Cov}\left(\frac{Z_{k\ell}}{\Sigma_{k\ell}}, \frac{2}{\sqrt{\Sigma_{ii}}} \sum_{s=1}^n \Sigma_{is} U_{sj}\right) \\
&= \text{Cov}\left(\frac{Z_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}}\sqrt{\Sigma_{jj}}}, \frac{Z_{k\ell}}{\sqrt{\Sigma_{kk}}\sqrt{\Sigma_{\ell\ell}}}\right) \\
&= \frac{\Sigma_{ik}\Sigma_{j\ell} + \Sigma_{il}\Sigma_{jk}}{\sqrt{\Sigma_{ii}}\sqrt{\Sigma_{jj}}\sqrt{\Sigma_{kk}}\sqrt{\Sigma_{\ell\ell}}}
\end{aligned}$$

Enfin, pour $k \neq \ell$, on a :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\nu_{ii}, \nu_{k\ell}) &= \text{Cov}\left(\frac{Z_{ii}}{\Sigma_{ii}}, \frac{Z_{k\ell}}{\sqrt{\Sigma_{kk}}\sqrt{\Sigma_{\ell\ell}}}\right) \\
&+ \text{Cov}\left(\frac{Z_{k\ell}}{\sqrt{\Sigma_{kk}}\sqrt{\Sigma_{\ell\ell}}}, \frac{2}{\sqrt{\Sigma_{ii}}} \sum_{s=1}^n \Sigma_{is} U_{si}\right) \\
&= 2 \frac{\Sigma_{ik}\Sigma_{i\ell}}{\Sigma_{ii}\sqrt{\Sigma_{kk}}\sqrt{\Sigma_{\ell\ell}}} + \frac{2\sqrt{\Sigma_{ii}}}{\sqrt{\Sigma_{kk}}\sqrt{\Sigma_{\ell\ell}}} \text{Cov}(Z_{k\ell}, U_{ii})
\end{aligned}$$

Or

$$\text{Cov}(Z_{k\ell}, U_{ii}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq \ell \\ -\Sigma_{ii}^{-3/2} \Sigma_{li} \Sigma_{k\ell} & \text{si } i = \ell \end{cases}$$

On en déduit que pour $k \neq \ell$:

$$\text{Cov}(\nu_{ii}, \nu_{k\ell}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = \ell \\ 2 \frac{\Sigma_{ik}\Sigma_{i\ell}}{\Sigma_{ii}\sqrt{\Sigma_{kk}}\sqrt{\Sigma_{\ell\ell}}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que la propriété de symétrie est conservée. En effet, pour $i \neq j$, on a :

$$\begin{aligned}
\text{Corr}(\nu_{ij}, \nu_{ji}) &= \frac{\text{Cov}(\nu_{ij}, \nu_{ji})}{\sqrt{\text{Var}(\nu_{ij})}\sqrt{\text{Var}(\nu_{ji})}} \\
&= \frac{\frac{\Sigma_{ij}\Sigma_{ji} + \Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}{\frac{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj} + \Sigma_{ij}^2}{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer la loi des valeurs propres et des vecteurs propres de \hat{R} .

On trouve dans [Murihead (1982)] un théorème qui donne de manière abstraite la loi à distance finie des valeurs propres d'une matrice symétrique que nous citons :

Théorème B.1 (Murihead 82)

Soit $A \in \mathcal{M}_S^+(n, n)$ une matrice symétrique définie positive de densité $f(A)$. Soit

$l_1 > \dots > l_n > 0$ les valeurs propres de A rangées par ordre décroissant. Alors la densité jointe du vecteur (l_1, \dots, l_n) est donnée par :

$$\frac{\pi^{n^2/2}}{\Gamma_n(\frac{1}{2}n)} \prod_{i < j}^n \int_{O(n)} f(HLH')(dH)$$

avec $L := \text{diag}(l_1, \dots, l_n)$, $O(n)$ l'ensemble des matrices orthonormales de taille n et où $\Gamma_n(\cdot)$ représente la fonction gamma multivariée définie par :

$$\Gamma_n(a) := \int_{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{S}}^+(n,n)} \exp(\text{tr}(-A)) \det A^{a-(n-1)/2} (dA)$$

sur l'ensemble $\text{re}(a) > \frac{1}{2}(n-1)$.

Dans le cas où la matrice A suit une loi de Wishart, l'intégrale admet une représentation en série entière comme polynôme *zonal*³¹ et on sait caractériser explicitement la loi à distance finie. Dans le cas d'une matrice de corrélation, c'est beaucoup plus difficile parce que R ne suit pas une loi de Wishart en raison de la contrainte sur la trace. Il faut donc adopter une approche asymptotique.

Pour commencer, on diagonalise \hat{R} et R , qui sont symétriques, dans une base orthonormale :

$$\hat{R} =: \hat{P}\hat{\Lambda}\hat{P}' \quad R =: PAP'$$

On note $L := \sqrt{p}(\hat{P} - P)$ et $D := \sqrt{p}(\hat{\Lambda} - \Lambda)$.

Notons également $T := P'\hat{R}P$. Comme T est symétrique, on peut toujours trouver une unique matrice orthonormale Y telle que

$$T =: Y\hat{\Lambda}Y' \quad (16)$$

Notons $G := \sqrt{p}(T - \Lambda)$ et $W := \sqrt{p}(Y - I)$. Avec ces notations, on peut réécrire (16) sous la forme :

$$\Lambda + \frac{1}{\sqrt{p}}G = \left(I + \frac{1}{\sqrt{p}}W\right) \left(\Lambda + \frac{1}{\sqrt{p}}L\right) \left(I + \frac{1}{\sqrt{p}}W\right)'$$

En réécrivant cette équation, on a :

$$G = W\Lambda + D + \Lambda W' + \frac{1}{\sqrt{p}}(WD + W\Lambda W' + DW') + \frac{1}{p}WDW' \quad (17)$$

D'autre part, on déduit de l'égalité $YY' = I$ que :

$$0 = W + W' + \frac{1}{\sqrt{p}}WW' \quad (18)$$

Si on néglige les termes en $1/\sqrt{p}$ et en $1/p$ dans les équations (17) et (18), on a le système³² :

$$G = W\Lambda + D + \Lambda W' \quad (19)$$

$$0 = W + W' \quad (20)$$

En remplaçant (20) dans (19), on a :

$$D_{ii} = G_{ii}, \forall i = 1, \dots, n$$

³¹Zonal polynomials en anglais, cf. [Murihead (1982)] chapitre 7.

³²Cette approche heuristique peut être justifiée formellement, cf. [Anderson (1984)] section 13.5.

$$W_{ij} = \frac{G_{ij}}{\Lambda_{jj} - \Lambda_{ii}} = \frac{G_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i}, \forall i \neq j$$

Or

$$G = \sqrt{p}(T - \Lambda) = \sqrt{p}(P' \hat{R}P - P'RP) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{loi} P' \nu P$$

On a donc asymptotiquement

$$D_{ii} \stackrel{loi}{=} G_{ii}, \forall i = 1, \dots, n \quad (21)$$

$$W_{ij} \stackrel{loi}{=} \frac{G_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i}, \forall i \neq j \quad (22)$$

Notons $\tilde{\nu} := P' \nu P$. On déduit de (21) la loi asymptotique de $D = \sqrt{p}(\hat{\Lambda} - \Lambda)$. Pour la loi asymptotique des vecteurs propres, par le théorème de Slutsky et en utilisant le fait que $Y = P' \hat{P}$, on a asymptotiquement :

$$L = \sqrt{p}(\hat{P} - P) \stackrel{loi}{=} P \sqrt{p}(Y - I) = PW$$

Calculons explicitement la loi des valeurs propres. On a :

$$\tilde{\nu}_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n P'_{ik} \nu_{k\ell} P_{\ell j}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\nu_{k\ell}, \nu_{su}) &= \frac{\Sigma_{ks} \Sigma_{\ell u} + \Sigma_{ku} \Sigma_{s\ell}}{\sqrt{\Sigma_{kk}} \sqrt{\Sigma_{\ell\ell}} \sqrt{\Sigma_{ss}} \sqrt{\Sigma_{uu}}} \mathbb{1}_{\{k \neq \ell, s \neq u\}} \\ &\quad + 2 \frac{\Sigma_{ks} \Sigma_{ku}}{\Sigma_{kk} \Sigma_{su}} \mathbb{1}_{\{k=\ell, s \neq u\}} \\ &\quad + 2 \frac{\Sigma_{sk} \Sigma_{s\ell}}{\Sigma_{ss} \Sigma_{k\ell}} \mathbb{1}_{\{k \neq \ell, s=u\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{\nu}_{ii}, \tilde{\nu}_{jj}) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{u=1}^n \text{Cov}(P'_{ik} \nu_{k\ell} P_{\ell i}, P'_{js} \nu_{su} P_{uj}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{u=1}^n P'_{ik} P'_{js} \text{Cov}(\nu_{k\ell}, \nu_{su}) P_{\ell i} P_{uj} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{u=1}^n P_{ki} P_{\ell i} \text{Cov}(\nu_{k\ell}, \nu_{su}) P_{sj} P_{uj} \end{aligned}$$

B.4 Evaluation dans les modèles à sauts multivariés

Dans cette section, nous ajoutons quelques précisions sur l'évaluation d'options multi sous-jacents avec le modèle à sauts (14), que nous rappelons ici :

$$\begin{cases} S_t^i = S_0^i \exp\left(\gamma_i t + \sigma_i W_t^i + \sum_{j=1}^{N_t} Y_j^i\right) \\ N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t) \\ \langle W^i, W^j \rangle_t = \rho_{ij} t \\ (Y_j^1, \dots, Y_j^n)'_j \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, C) \end{cases}$$

Considérons le problème d'évaluation du produit de payoff $X = h(S_T^1, \dots, S_T^n)$ sous une probabilité risque-neutre \mathbb{Q} . En notant $\tau := T - t$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \pi_t(X) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[h(S_T^1, \dots, S_T^n) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{Q}(N_\tau = k) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[h \left(\dots, S_t^i e^{\gamma_i \tau + \sigma_i W_\tau^i + \sum_{j=1}^k Y_j^i}, \dots \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r\tau} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[h \left(\dots, S_t^i e^{(\gamma_i - r + \frac{\sigma_i^2}{2})\tau + km_i} e^{(r - \frac{\sigma_i^2}{2})\tau + \tilde{\sigma}_i \sqrt{\tau} U_i}, \dots \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (23)$$

avec $\tilde{\sigma}_i^2 := \sigma_i^2 + \frac{kC_{ii}}{\tau}$ et $(U_i)_i$ un vecteur de gaussien centré réduit de corrélation :

$$\text{Corr}(U_i, U_j) = \text{Cov}(U_i, U_j) = \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij} + \frac{nC_{ij}}{\tau}}{\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j}, i \neq j$$

Il faut remarquer que l'espérance dans (23) est simplement un prix de Black Scholes et donc se calcule très simplement par formule fermée dans le cas où $h(\cdot)$ est le payoff d'un call vanille.

Plus généralement, si on sait évaluer le produit $h(\cdot)$ dans un modèle de Black Scholes multivarié, on sait aussi l'évaluer dans notre modèle à sauts multivarié, pourvu qu'on somme sur un nombre suffisant de termes.

C L'approche Hobson, Laurence et Wang

Les auteurs généralisent la problématique développée par [D'Aspremont El Ghaoui (2002)] et [Laurence Wang (2003a), Laurence Wang (2003b)]. Ils proposent de déterminer une borne supérieure pour le prix $\bar{\pi}(X, \mathcal{Q}, \mathcal{H})$ d'une option sur panier où \mathcal{H} est un ensemble d'instruments benchmarks. L'information de marché prise en compte pour résoudre le problème ne se résume pas à un seul prix de call sur chaque actif mais à une infinité de calls de maturité M sur chaque sous-jacent du panier pour un continuum de strikes. L'information de marché est ici bien plus riche, néanmoins ce cas semble être quelque peu excessif. En pratique, nous disposons plutôt d'un nombre fini de calls sur chaque sous-jacents. Ce cas plus réaliste est étudié dans un deuxième temps par les auteurs et reste basé sur l'étude qu'ils ont mené en prenant une infinité d'instruments benchmarks.

C.1 Continuum de strikes

Dans un premier temps, on suppose que l'on dispose d'un continuum d'instruments benchmarks sur chaque sous-jacent. On note l'ensemble :

$$\Lambda = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N : \forall i \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}$$

Par inégalité de convexité, on peut remarquer que pour tout N -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Lambda$ le payoff est borné par :

$$\left(\sum_i \omega_i X_M^{(i)} - K \right)^+ \leq \sum_i \omega_i \left(X_M^{(i)} - \frac{\lambda_i K}{\omega_i} \right)^+$$

On borne donc le payoff d'une option basket par la moyenne pondéré de payoffs de calls de strikes $\lambda_i K / \omega_i$. Ainsi, par un raisonnement de non arbitrage, on peut en déduire une relation entre le prix de l'option basket et les prix de calls :

$$\pi(K) \leq \sum_i \omega_i H^{(i)}\left(\frac{\lambda_i K}{\omega_i}\right) \quad (24)$$

Par ailleurs, la relation est valable pour tout N -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Lambda$, par passage à l'infimum dans (24), nous obtenons alors :

$$\pi(K) \leq \inf_{\lambda \in \Lambda} \sum_i \omega_i H^{(i)}\left(\frac{\lambda_i K}{\omega_i}\right)$$

En remarquant que l'ensemble Λ est compact et que le membre de droite est une fonction continue du strike, il existe $\lambda^* \in \Lambda$ tel que :

$$\bar{\pi}(K) = \sum_i \omega_i H^{(i)}\left(\frac{\lambda_i^* K}{\omega_i}\right)$$

De fait, on met ici en évidence une stratégie de surréplication contenant N titres et consistant à acheter pour le sous jacent i , ω_i call de strike $\lambda_i^* K / \omega_i$. $\bar{\pi}(K)$ est la plus petite borne supérieure du prix, indépendante du modèle choisi pour évaluer l'option sur panier.

caractérisation des λ_i

Pour trouver les λ_i , il faut résoudre le problème de minimisation sous contraintes :

$$\begin{cases} \inf_{\lambda \in \Lambda} \sum_i \omega_i H^{(i)}\left(\frac{\lambda_i K}{\omega_i}\right) \\ \text{s.c. } \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \end{cases} \quad (25)$$

On peut écrire le Lagrangien associé au problème :

$$L(\lambda, \phi) = \sum_i \omega_i H^{(i)}\left(\frac{\lambda_i K}{\omega_i}\right) + \phi \left(\sum_i \lambda_i - 1 \right) \quad (26)$$

Si l'on considère, dans un premier temps, que $H^{(i)}$ est positive et que $\partial H^{(i)} / \partial k$ est continue et strictement croissante, on peut exprimer sous forme simple le résultat du problème de minimisation. Pour ϕ fixé, on a :

$$K \frac{\partial H^{(i)}}{\partial k} \Big|_{\lambda_i(\phi) K / \omega_i} = -\phi$$

Par ailleurs l'écriture du prix de l'option comme espérance conditionnelle sous probabilité risque neutre du payoff terminal permet d'écrire la relation entre le prix de l'option et la fonction de survie du payoff : $\partial H^{(i)} / \partial k = -\beta \mathbb{P}(X_M^{(i)} > k)$, avec β un facteur d'actualisation. On rappelle ce résultat en toute généralité dans l'annexe B.2. De là on peut écrire :

$$\mathbb{P}\left(X_M^{(i)} > \frac{\lambda_i K}{\omega_i}\right) = \frac{\phi}{\beta K} \iff \lambda_i(\phi) = \frac{\omega_i}{K} (G^{(i)})^{-1} \left(1 - \frac{\phi}{\beta K}\right)$$

Si l'on note $H(\phi) = \sum_i \lambda_i(\phi)$, on peut alors choisir le multiplicateur de Lagrange ϕ^* tel que $H(\phi^*) = 0$. On a alors déterminé l'expression de λ^* solution du problème (25) :

$$\mathbb{P}\left(X_M^{(i)} > \frac{\lambda_i^* K}{\omega_i}\right) = G^{(i)}\left(\frac{\lambda_i^* K}{\omega_i}\right) = 1 - \frac{\phi^*}{\beta K}$$

On peut maintenant élargir le cas étudié précédemment en considérant que $\partial H^{(i)}/\partial k$ peut ne pas être continue ou strictement croissante. Dans ce cas pour ϕ fixé, la relation (26) est modifiée et le problème de minimisation (25) implique que :

$$K \left| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial k} \right|_{(\lambda_i(\phi)K/\omega_i)^+} \leq \phi \leq K \left| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial k} \right|_{\lambda_i(\phi)K/\omega_i^-}$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(X_M^{(i)} < \frac{\lambda_i^* K}{\omega_i}\right) \leq 1 - \frac{\phi}{\beta K} \leq \mathbb{P}\left(X_M^{(i)} \leq \frac{\lambda_i^* K}{\omega_i}\right)$$

Si l'on note λ_i^- et λ_i^+ définis par :

$$\begin{cases} \lambda_i^-(\phi) = \frac{\omega_i}{K} (G^{(i)})^{-1} \left(1 - \frac{\phi}{\beta K}\right) \\ \lambda_i^+(\phi) = \frac{\omega_i}{K} (G^{(i)})^{-1} \left(\left(1 - \frac{\phi}{\beta K}\right)^+\right) \end{cases} \quad (27)$$

Dans ce cas pour ϕ fixé si on choisit λ_i dans l'intervalle $[\lambda_i(\phi)^-, \lambda_i(\phi)^+]$, on atteint un minimum de L . On souhaite alors déterminer ϕ^* assurant que la contrainte $\sum_i \lambda_i = 1$ est satisfaite. Pour cela, si on définit $H^-(\phi) = \sum_i \lambda_i^-(\phi) - 1$ (resp. $H^+(\phi) = \sum_i \lambda_i^+(\phi) - 1$) il suffit de prendre $\phi^* = \inf\{\phi : H^-(\phi) \leq 0\}$. On a alors $H^-(\phi^*) \leq 0 \leq H^+(\phi^*)$ et on peut trouver λ_i^* tel que $\sum_i \lambda_i^* = 1$ et qui minimise L avec $\lambda_i^-(\phi^*) \leq \lambda_i^* \leq \lambda_i^+(\phi^*)$.

C.2 Nombre fini de strikes

L'approche précédente correspond au cas idéal où pour chaque sous jacent i le call de strike $\lambda_i^* K/\omega_i$ est échangé sur le marché. C'est rarement, voire jamais, le cas en pratique. Il convient donc de s'intéresser au cas où l'on ne dispose pas pour chaque call d'un continuum de strikes mais d'un nombre fini de strikes. Nous allons voir ici comment "palier" à ce manque d'information de marché pour pouvoir déterminer un majorant du prix de l'option basket et une stratégie de surréplication de l'option.

Nous disposons donc ici d'un nombre fini ($J^{(i)}$) de calls sur chaque sous jacent i ($i \in \{1 \dots N\}$) de strikes $k_j^{(i)}$ ($j \in \{1 \dots J^{(i)}\}$) échangés sur le marché. Les auteurs proposent alors de prolonger $H^{(i)}(K)$ définie uniquement aux points $k_j^{(i)}$ pour $j \in \{1 \dots J^{(i)}\}$ en \bar{H}^K définie par interpolation linéaire entre les points où H est définie. \bar{H} est alors la plus grande fonction convexe décroissante compatible avec les prix de calls observés.

On considère alors deux cas pour déterminer un majorant du prix de l'option basket en fonction de l'information de marché disponible. Nous avons vu précédemment dans le cas où l'on dispose pour chaque sous jacent d'un continuum de strikes que la borne supérieure se détermine en choisissant pour chaque sous jacent i le call de strike $\lambda_i^* K/\omega_i$. Le problème ici est que l'on ne dispose que d'un nombre fini de calls. Il se peut que l'on ne dispose pas pour le sous jacent i du call de strike $\lambda_i^* K/\omega_i$. On distingue alors deux cas :

- Si l'on dispose pour chaque sous jacent du call de strike $\lambda_i^* K/\omega_i$, la stratégie de surréplication précédente peut à nouveau être mise en œuvre. On note $k_{j^{(i)}}^{(i)}$ le strike échangé sur le marché tel que $k_{j^{(i)}}^{(i)} = \lambda_i^* K/\omega_i$. La borne supérieure vaut alors :

$$\sum_i \omega_i \bar{H}_i(k_{j(i)}^{(i)}) \quad (28)$$

- Si on ne dispose pour tous les sous jacents du call de strike $\lambda_i^* K / \omega_i$, on note I le sous ensemble d'indices de $\{1 \dots N\}$ tel que si $j \in I$ alors le call de strike $\lambda_j^* K / \omega_j$ est échangé. On note I^c son complémentaire (non vide) dans $\{1 \dots N\}$ ainsi que $j(i)$ l'indice tel que $\lambda_i^+(\phi^*) = \omega_i k_{j(i)}^{(i)} / K$ (resp. $\lambda_i^-(\phi^*) = \omega_i k_{j(i)-1}^{(i)} / K$). On note alors :

$$\theta_i^* = \frac{\lambda_i^* - \lambda_i^-(\phi^*)}{\lambda_i^+(\phi^*) - \lambda_i^-(\phi^*)} = \frac{K \lambda_i^* / \omega_i - k_{j(i)-1}^{(i)}}{k_{j(i)}^{(i)} - k_{j(i)-1}^{(i)}}$$

La borne supérieure s'écrit alors, si $\sum_i \omega_i k_{j(i)}^{(i)} > K$:

$$\sum_{i \in I} \omega_i H^{(i)}(k_{j(i)}^{(i)}) + \sum_{i \in I^c} \omega_i \left\{ (1 - \theta_i^*) H^{(i)}(k_{j(i)-1}^{(i)}) + \theta_i^* H^{(i)}(k_{j(i)}^{(i)}) \right\} \quad (29)$$

Si $\sum_i \omega_i k_{j(i)}^{(i)} \leq K$ la borne est donnée par l'équation (28).

D Une méthode pour stresser une matrice de corrélation

Pour mettre en œuvre la méthode de la section 6, il faut déterminer une matrice de stress sur les corrélations. [RiskMetrics (1997)] a développé une technique de stress, dont nous exposons le principe dans cette annexe.

Au départ, on a la matrice de corrélation R_0 issu de la matrice de covariance Σ_0 :

$$R_0 := \text{ddiag}(\Sigma_0)^{-1/2} \Sigma_0 \text{ddiag}(\Sigma_0)^{-1/2}$$

On définit un sous-ensemble $I \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal m et, pour un nombre $\theta \in [0, 1]$, la matrice A de terme général

$$A_{ij} := \begin{cases} 1 - \theta + \frac{\theta}{m} & \text{si } i = j \text{ et } i \in I \\ 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \notin I \\ \frac{\theta}{m} & \text{si } i \neq j \text{ et } i \in I \text{ et } j \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre ensuite que la matrice

$$C := AR_0A'$$

est nécessairement définie positive si R_0 l'est et on peut poser

$$R_1 = \text{diag}((\sqrt{C_{11}}, \dots, \sqrt{C_{nn}})')^{-1} C \text{diag}((\sqrt{C_{11}}, \dots, \sqrt{C_{nn}})')^{-1}$$

Avec cette méthode, on choisit le paramètre θ en fonction du résultat qu'on veut obtenir, i.e. on cherche le θ qui soit tel que la matrice de corrélation stressée R_1 ait la forme qu'on veut.

Références

- [Anderson (1984)] T. W. ANDERSON, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, Wiley, second edition (1984).
- [Artzner *et al.* (1999)] PHILIPPE ARTZNER, FREDDY DELBAEN, JEAN-MARC EBER & DAVID HEATH “Coherent Measures of Risk.” *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3 (July 1999), 203-228.
- [D’Aspremont El Ghaoui (2002)] ALEXANDRE D’ASPREMONT & LAURENT EL GHAOUI, “Static Arbitrage Bounds on Basket Option Prices.” Working paper, Princeton University (Dec., 2002).
- [Avellaneda (1998)] MARCO AVELLANEDA “Minimum-Entropy Calibration of Asset-Pricing Models.” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 1, No. 4 (1998), 447-472.
- [Avellaneda *et al.* (1995)] MARCO AVELLANEDA, ARNON LEVY & ANTONIO PARÁS “Pricing and Hedging Derivatives Securities in Markets with Uncertain Volatilities.” *Applied Mathematical Finance*, Vol. 2 (1995), 73-88.
- [Avellaneda Paras (1996)] MARCO AVELLANEDA & ANTONIO PARAS, “Managing the Volatility Risk of Portfolios of Derivative Securities : the Lagrangian Uncertain Volatility Model.” *Applied Mathematical Finance*, Vol. 3 (1996), 21-52.
- [Avellaneda *et al.* (1997)] MARCO AVELLANEDA, CRAIG FRIEDMAN, RICHARD HOLMES & DOMINICK SAMPERI “Calibrating Volatility Surfaces via Relative-Entropy Minimization.” *Applied Mathematical Finance*, Vol. 4, No. 1 (1997), 37-64.
- [Avellaneda *et al.* (2001)] MARCO AVELLANEDA, ROBERT BUFF, CRAIG FRIEDMAN, NICOLAS GRANDCHAMP, LUKASZ KRUK & JOSHUA NEWMAN “Weighted Monte Carlo : A New Technique for Calibrating Asset-Pricing Models.” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 4, No. 1 (2001), 91-119.
- [Bai (1999)] Z. D. BAI “Methodologies in Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices, a review.” *Satistica Sinica*, Vol. 9, (1999), 611-677.
- [Björk (2004)] TOMAS BJÖRK, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, New York, second edition (2004).
- [Boyle Tse (1990)] PHELIM P. BOYLE & Y. K. TSE, “An Algorithm for Computing Values of Options on the Maximum or Minimum of Several Assets.” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, No. 2 (Jun., 1990), 215-227.
- [Breedden Litzenberger (1978)] DOUGLAS T. BREEDEN & ROBERT H. LITZENBERGER, “Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices.” *Journal of Business*, Vol. 51, No. 4 (Oct., 1978), 621-651.
- [Cont (2004)] RAMA CONT, “Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments.” *Finance Concepts Working Paper*, FC-04-02 (Jun., 2004).
- [Cont Tankov (2002)] RAMA CONT & PETER TANKOV, “Calibration of jump-diffusion option-pricing models : a robust non-parametric approach.” *Rapport interne 490*, CMAP, Ecole Polytechnique (Sep., 2002).
- [Cont Tankov (2004)] RAMA CONT & PETER TANKOV, *Financial Modelling with Jumps Processes*, Chapman Hall / CRC, (2004).
- [Davidson Hinkley (1997)] A. C. DAVIDSON & D.V. HINKLEY, *Bootstrap Methods and their Applications*, Cambridge University Press (1997).
- [El Karoui *et al.* (1998)] NICOLE EL KAROUI, MONIQUE JEANBLANC-PICQUÉ & STEVEN E. SHREVE, “Robustness of the Black and Scholes Formula.” *Mathematical Finance*, Vol. 8, No. 2 (April 1998), 93-126.
- [Glasserman (2004)] PAUL GLASSERMAN, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer Verlag, New York, (2004).

- [Hobson (1998)] DAVID G. HOBSON, “Robust Hedging of the Lookback Option.” *Finance and Stochastics*, Vol. 2, (1998), 329-347.
- [Hobson *et al.* (2004a)] DAVID G. HOBSON, PETER LAURENCE & TAI-HO WANG, “Static-Arbitrage Upper Bounds for the Prices of Basket Options.” Working Paper, (Jun., 2004).
- [Hobson *et al.* (2004b)] DAVID G. HOBSON, PETER LAURENCE & TAI-HO WANG, “Static-Arbitrage optimal sub-replicating strategies for Basket Options.” Working Paper, (Oct., 2004).
- [Johnson (1987)] HERB JOHNSON, “Options on the Maximum or the Minimum of Several Assets.” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, No. 3 (Sep., 1987), 277-283.
- [Joshi (2003)] MARK S. JOSHI, *The Concepts and Practice of Mathematical Finance*, Cambridge University Press, (2003).
- [Laurence Wang (2003a)] PETER LAURENCE & TAI-HO WANG, “What’s a basket worth?” *Risk Magazine*, (Feb., 2003).
- [Laurence Wang (2003b)] PETER LAURENCE & TAI-HO WANG, “Sharp Upper and Lower Bounds for Basket Options.” preprint (2003).
- [Murihead (1982)] ROBB J. MURIHEAD, *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, Wiley (1982).
- [Musielà Rutkowski (2004)] MAREK MUSIELA & MAREK RUTKOWSKI, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer Verlag, New York, second edition (2004).
- [Nguyen (2003)] LAURENT NGUYEN, *Calibration de Modèles Financiers par Minimisation d’Entropie Relative et Modèles avec Sauts*, Thèse, ENPC (dec. 2003).
- [Protter (2004)] PHILIP E. PROTTER, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer Verlag, New York, second edition (2004).
- [Rebonato (2004)] RICCARDO REBONATO, *Volatility and Correlation : The Perfect Hedger and the Fox*, Wiley, Chichester, second edition (2004).
- [RiskMetrics (1997)] RiskMetrics® Monitor, J.P. Morgan / Reuters, Fourth Quarter 1997, New York.
- [Saporta (1990)] GILBERT SAPORTA, *Probabilités, Analyse des Données et Statistique*, Technip, Paris (1990).
- [Stulz (1982)] RENÉ M. STULZ, “Options on the Minimum or the Maximum of two Risky Assets.” *Journal of Financial Economics*, Vol. 10, (Feb., 1982), 161-187.
- [Wilmott (2000)] PAUL WILMOTT, *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, Chichester, UK (2000).