Thème 7 Finance 2022 (révisions)

Exercice 1 : Risque d'un portefeuille avec deux actifs de même risque

Cet exercice permet de s'assurer que les éléments les plus simples du cours ont été assimilés.

On considère 2 actifs. Les écarts types des rentabilités sont tous égaux à σ $(\sigma > 0)$ et le coefficient de corrélation entre les rentabilités est égal à à ρ.

a) Calculer en fonction de ρ et de σ, la covariance des rentabilités entre deux actifs
b) On considère $n = 2$ actifs. On notera ω_1 et ω_2 la proportion de la richesse investie dans chacun des actifs. Écrire la variance de la rentabilité du portefeuille en fonction de ρ, de σ et des allocations ω_1 et ω_2. On cherchera à simplifier l'expression de la variance en mettant σ^2 en facteur.
c) On considère maintenant que le portefeuille est équipondéré (toujours dans le cas $n = 2$ actifs). Donner les valeurs de ω_1 et ω_2.
d) Donner la variance du portefeuille équipondéré ((toujours dans le cas $n = 2$ actifs).
e) Sachant que la variance de la rentabilité d'un portefeuille est positive ou nulle, déterminer une valeur minimale du coefficient de corrélation ρ.
f) Quelle est la variance de la rentabilité du portefeuille équipondéré quand ρ est égal à la valeur calculée précédemment.
g) On note E_1 et E_2 les espérances de rentabilité des deux actifs. Quelle est l'espérance de rentabilité du portefeuille équipondéré quand ρ est égal à la valeur calculée précédemment.
h) On reste dans le même cadre que dans les questions f) et g). On suppose en outre que les ventes à découvert sont interdites : $\omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0$. Représenter graphiquement, dans le plan écart-type, espérance des rentabilités l'ensemble des portefeuilles formés des actifs 1 et 2.
i) On reste dans le même cadre que dans la question précédente. Représenter la frontière efficiente des actifs risqués.

Exercice 2 : trois actifs et covariances identiques entre les rentabilités

Cet exercice est en lien avec ceux vu lors des révisions en amphithéâtre. Il fait également appel à la méthode du Lagrangien, avec une contrainte et trois actifs risqués. Il comporte deux parties, la première partie revient sur la composition du portefeuille de variance minimale. La seconde partie concerne la détermination du portefeuille tangent. Elle n'est pas plus difficile du point de vue des calculs que la première partie, mais est néanmoins un peu plus abstraite et calculatoire. Il est utile, mais non nécessaire d'avoir des connaissances préalables en optimisation.

On considère trois actifs risqués. Les écarts types des rentabilités sont tous égaux à σ $(\sigma > 0)$ et les coefficients de corrélation entre les rentabilités sont tous est égaux à ρ. Les poids de la richesse investie dans les trois actifs seront notés $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$. Dans cet exercice, il n'y a pas de contrainte sur le signe des ω (les ventes à découvert sont autorisées).

a) Écrire la variance de la rentabilité d'un portefeuille équipondéré en fonction de ρ et de σ. On cherchera à simplifier l'expression de la variance en mettant σ^2 en facteur.
b) Sachant que la variance de la rentabilité du portefeuille équipondéré est positive ou nulle, montrer que le coefficient de corrélation doit au moins être égale à une valeur minimale que l'on déterminera.
c) Quelle est alors la variance du portefeuille équipondéré ?
d) On va chercher la composition du portefeuille minimisant la variance. Le lagrangien s'écrit comme la variance moins le multiplicateur de Lagrange (que l'on notera $\lambda \in \mathbb{R}$) fois la contrainte sur les allocations $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. Écrire le lagrangien, puis les trois conditions

du premier ordre (les dérivées du lagrangien par rapport aux allocations sont nulles), en factorisant la dérivée de la variance par σ^2.

e) Simplifier les trois conditions du premier ordre en utilisant $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, pour se ramener à trois équations, chacune à une seule inconnue.

f) Conclure sur la composition du portefeuille de variance minimale.

g) On va maintenant s'intéresser à la composition du portefeuille tangent. Ceci implique de considérer un actif sans risque de taux de rentabilité déterministe r_f. Il faut également considérer E_1, E_2, E_3, les rentabilités espérées des trois actifs risqués. On notera $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$ les rentabilités espérées en excès du taux sans risque : $\bar{E}_1 = E_1 - r_f$, $\bar{E}_2 = E_2 - r_f$, $\bar{E}_3 = E_3 - r_f$. Pour déterminer le portefeuille tangent, on utilisera la propriété que c'est le portefeuille formé d'actifs risqués qui minimise la variance de l'espérance de rentabilité sous contrainte d'espérance. Plus précisément, on notera $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$, les pourcentages de la richesse investis respectivement dans l'actif sans risque et dans les actifs risqués 1, 2 et 3. La contrainte de budget s'écrit alors $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ (on remarquera que $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 - \omega_0$ et non plus $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, comme dans le cas où on ne considère que des actifs risqués.

   Écrire l'espérance de rentabilité en excès du taux sans risque du portefeuille (que l'on notera $\bar{E}_P = E_P - r_f$, en fonction de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et de $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$.

h) Reprendre l'approche du d) et écrire le Lagrangien correspondant à la minimisation de la variance sous contrainte d'espérance.

i) Écrire les conditions du premier ordre (dérivées du Lagrangien par rapport aux allocations $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ égales à zéro) :

j) Le portefeuille tangent n'est composé que d'actif risqué, donc $\omega_0 = 0$. Il en résulte que pour le portefeuille tangent, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. En utilisant cette propriété, simplifier la condition $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1} = 0$, pour ne plus faire apparaître les termes ω_2 et ω_3. Faire de même pour les deux autres conditions du premier ordre.

k) Additionner les trois conditions du premier ordre établies à la question précédente et utiliser la contrainte de budget $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ pour déterminer le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte sur l'espérance de rentabilité du portefeuille tangent.

l) En déduire les allocations associées au portefeuille tangent.

En reportant l'expression du multiplicateur de Lagrange (question k)) dans les équations obtenues en répondant à la question j) :