Exercices complémentaires corrigés sur les choix de portefeuilles

Exercice 1 : Risque d'un portefeuille avec deux actifs de même risque

Cet exercice est assez facile ; il permet de s'assurer que les éléments les plus simples du cours ont été assimilés.

On considère 2 actifs. Les écarts types des rentabilités sont tous égaux à σ $(\sigma > 0)$ et le coefficient de corrélation entre les rentabilités est égal à à ρ.

a) Calculer en fonction de ρ et de σ, la covariance des rentabilités entre deux actifs

$\rho\sigma^2$.

b) On considère $n = 2$ actifs. On notera ω_1 et ω_2 la proportion de la richesse investie dans chacun des actifs. Écrire la variance de la rentabilité du portefeuille en fonction de ρ, de σ et des allocations ω_1 et ω_2. On cherchera à simplifier l'expression de la variance en mettant σ^2 en facteur.

$(\omega_1^2 + 2\rho\omega_1\omega_2 + \omega_2^2) \times \sigma^2$.

c) On considère maintenant que le portefeuille est équipondéré (toujours dans le cas $n = 2$ actifs). Donner les valeurs de ω_1 et ω_2.

$\omega_1 = \omega_2$ et $\omega_1 + \omega_2 = 1 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$.

d) Donner la variance du portefeuille équipondéré ((toujours dans le cas $n = 2$ actifs).

$\frac{1+\rho}{2} \times \sigma^2$.

e) Sachant que la variance de la rentabilité d'un portefeuille est positive ou nulle, déterminer une valeur minimale du coefficient de corrélation ρ.

$\frac{1+\rho}{2} \times \sigma^2 \geq 0 \Leftrightarrow \rho \geq -1$.

f) Quelle est la variance de la rentabilité du portefeuille équipondéré quand ρ est égal à la valeur calculée précédemment.

La variance du portefeuille équipondéré est alors nulle.

g) On note E_1 et E_2 les espérances de rentabilité des deux actifs. Quelle est l'espérance de rentabilité du portefeuille équipondéré quand ρ est égal à la valeur calculée précédemment.

$E = \frac{E_1+E_2}{2}$.

h) On reste dans le même cadre que dans les questions f) et g). On suppose en outre que les ventes à découvert sont interdites : $\omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0$. Représenter graphiquement, dans le plan écart-type, espérance des rentabilités l'ensemble des portefeuilles formés des actifs 1 et 2.

Voir les transparents.

i) On reste dans le même cadre que dans la question précédente. Représenter la frontière efficiente des actifs risqués.

Voir les transparents.

Exercice 2 : trois actifs et covariances identiques entre les rentabilités

Cet exercice est en lien avec ceux vu lors des révisions en amphithéâtre. Il fait également appel à la méthode du Lagrangien, avec une contrainte et trois actifs risqués. Il comporte deux parties, la première partie revient sur la composition du portefeuille de variance minimale. La seconde partie concerne la détermination du portefeuille tangent. Elle n'est pas plus difficile du point de vue des calculs que la première partie, mais est néanmoins un peu plus abstraite et calculatoire. Il est utile, mais non nécessaire d'avoir des connaissances préalables en optimisation.

On considère trois actifs risqués. Les écarts types des rentabilités sont tous égaux à σ ($\sigma > 0$) et les coefficients de corrélation entre les rentabilités sont tous est égaux à ρ. Les poids de la richesse investie dans les trois actifs seront notés $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$. Dans cet exercice, il n'y a pas de contrainte sur le signe des ω (les ventes à découvert sont autorisées).

a) Écrire la variance de la rentabilité d'un portefeuille équipondéré en fonction de ρ et de σ. On cherchera à simplifier l'expression de la variance en mettant σ^2 en facteur.

On utilise la formule donnant la variance de la rentabilité d'un portefeuille σ_P^2, en remarquant que les covariances entre les rentabilités de deux actifs différents sont égale à $\rho\sigma^2$: $\sigma_P^2 = \omega_1^2\sigma^2 + \omega_2^2\sigma^2 + \omega_3^2\sigma^2 + 2\omega_1\omega_2\rho\sigma^2 + 2\omega_1\omega_3\rho\sigma^2 + 2\omega_2\omega_3\rho\sigma^2$ où ω_i, $i = 1,2,3$ sont les allocations dans les actifs 1,2,3.

L'équipondération s'écrit $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ et comme $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{3}$.

Ceci donne $\sigma_P^2 = \frac{\sigma^2}{3} \times (1 + 2\rho)$.

b) Sachant que la variance de la rentabilité du portefeuille équipondéré est positive ou nulle, montrer que le coefficient de corrélation doit au moins être égale à une valeur minimale que l'on déterminera.

$\frac{\sigma^2}{3} \times (1 + 2\rho) \geq 0 \Leftrightarrow \rho \geq -\frac{1}{2}$. Le coefficient de corrélation ne peut être inférieur à $-\frac{1}{2}$.

c) Quelle est alors la variance du portefeuille équipondéré ?

$\rho = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sigma^2}{3} \times (1 + 2\rho) = 0$. Le portefeuille équipondéré est alors de variance nulle (c'est un portefeuille sans risque).

d) On va chercher la composition du portefeuille minimisant la variance. Le lagrangien s'écrit comme la variance moins le multiplicateur de Lagrange (que l'on notera $\lambda \in \mathbb{R}$) fois la contrainte sur les allocations $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. Écrire le lagrangien, puis les trois conditions du premier ordre (les dérivées du lagrangien par rapport aux allocations sont nulles), en factorisant la dérivée de la variance par σ^2.

$\mathcal{L} = \sigma_P^2 - \lambda(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1)$.

$\mathcal{L} = \omega_1^2\sigma^2 + \omega_2^2\sigma^2 + \omega_3^2\sigma^2 + 2\omega_1\omega_2\rho\sigma^2 + 2\omega_1\omega_3\rho\sigma^2 + 2\omega_2\omega_3\rho\sigma^2 - \lambda(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1)$.

Les conditions du premier ordre s'écrirent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1} = 0 \Leftrightarrow 2\sigma^2 \times (\omega_1 + \rho\omega_2 + \rho\omega_2) = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_2} = 0 \Leftrightarrow 2\sigma^2 \times (\rho\omega_1 + \omega_2 + \rho\omega_2) = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_3} = 0 \Leftrightarrow 2\sigma^2 \times (\rho\omega_1 + \rho\omega_2 + \omega_3) = \lambda$$

e) Simplifier les trois conditions du premier ordre en utilisant $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, pour se ramener à trois équations, chacune à une seule inconnue.

Prenons la première équation $2\sigma^2(\omega_1 + \rho\omega_2 + \rho\omega_2) = \lambda$ et écrivons $\omega_1 = (1-\rho)\omega_1 + \rho\omega_1$. Ceci permet d'écrire $\omega_1 + \rho\omega_2 + \rho\omega_2 = (1-\rho)\omega_1 + \rho\omega_1 + \rho\omega_2 + \rho\omega_2 = (1-\rho)\omega_1 + \rho(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = (1-\rho)\omega_1 + \rho$

$$2\sigma^2(\omega_1 + \rho\omega_2 + \rho\omega_2) = \lambda \Leftrightarrow 2\sigma^2((1-\rho)\omega_1 + \rho) = \lambda$$

Les équations permettant d'obtenir ω_2 et ω_3 sont identiques à la précédente.

f) Conclure sur la composition du portefeuille de variance minimale.

Les équations permettant d'obtenir ω_i, $i = 1,2,3, 2\sigma^2\big((1-\rho)\omega_i + \rho\big) = \lambda$ sont identiques. D'où $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ et comme $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{3}$. Le portefeuille de variance minimale, pour la matrice de variance covariance plus haut est équipondéré.

Remarque : ce résultat est vrai quel que soit le nombre d'actifs. On a utilisé la méthode du lagrangien pour établir l'équipondération, mais le critère à optimiser et la contrainte de budget (somme des allocations égale à 1) étant invariantes par permutation, il devait en être de même pour l'optimum.

Remarque : la composition du portefeuille de variance minimale ne dépend pas des espérances de rentabilité des actifs risqués.

g) On va maintenant s'intéresser à la composition du portefeuille tangent. Ceci implique de considérer un actif sans risque de taux de rentabilité déterministe r_f. Il faut également considérer E_1, E_2, E_3, les rentabilités espérées des trois actifs risqués. On notera $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$ les rentabilités espérées en excès du taux sans risque : $\bar{E}_1 = E_1 - r_f, \bar{E}_2 = E_2 - r_f, \bar{E}_3 = E_3 - r_f$. Pour déterminer le portefeuille tangent, on utilisera la propriété que c'est le portefeuille formé d'actifs risqués qui minimise la variance de l'espérance de rentabilité sous contrainte d'espérance. Plus précisément, on notera $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$, les pourcentages de la richesse investis respectivement dans l'actif sans risque et dans les actifs risqués 1, 2 et 3. La contrainte de budget s'écrit alors $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ (on remarquera que $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 - \omega_0$ et non plus $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, comme dans le cas où on ne considère que des actifs risqués.

Écrire l'espérance de rentabilité en excès du taux sans risque du portefeuille (que l'on notera $\bar{E}_P = E_P - r_f$, en fonction de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et de $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$.

L'espérance de rentabilité du portefeuille est égale à $\omega_0 r_f + \omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 + \omega_3 E_3$. Comme $\omega_0 = 1 - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$, on obtient $E_P = r_f + \omega_1\big(E_1 - r_f\big) + \omega_2\big(E_2 - r_f\big) + \omega_3\big(E_2 - r_f\big)$, soit :

$$\bar{E}_P = \omega_1\bar{E}_1 + \omega_2\bar{E}_2 + \omega_3\bar{E}_3$$

h) Reprendre l'approche du d) et écrire le Lagrangien correspondant à la minimisation de la variance sous contrainte d'espérance.

$$\mathcal{L} = \sigma_P^2 - \lambda(\omega_1\bar{E}_1 + \omega_2\bar{E}_2 + \omega_3\bar{E}_3 - \bar{E}_P)$$

Remarque : on a écrit le Lagrangien associé à la minimisation de la variance de la rentabilité d'un portefeuille, composé d'actif sans risque et d'actifs risqués, sous contrainte que l'espérance de rentabilité est égale à $\bar{E}_P$. En faisant varier $\bar{E}_P$, on va obtenir la CML. Ce n'est pas notre objectif ici, mais un intermédiaire dans le calcul du portefeuille tangent.

i) Écrire les conditions du premier ordre (dérivées du Lagrangien par rapport aux allocations $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ égales à zéro) :

Les conditions du premier ordre s'écrirent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1} = 0 \Leftrightarrow 2\sigma^2 \times (\omega_1 + \rho\omega_2 + \rho\omega_2) - \lambda \bar{E}_1 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_2} = 0 \Leftrightarrow 2\sigma^2 \times (\rho\omega_1 + \omega_2 + \rho\omega_2) - \lambda \bar{E}_2 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_3} = 0 \Leftrightarrow 2\sigma^2 \times (\rho\omega_1 + \rho\omega_2 + \omega_3) - \lambda \bar{E}_3 = 0$$

j) Le portefeuille tangent n'est composé que d'actif risqué, donc $\omega_0 = 0$. Il en résulte que pour le portefeuille tangent, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. En utilisant cette propriété, simplifier la condition $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1} = 0$, pour ne plus faire apparaître les termes ω_2 et ω_3. Faire de même pour les deux autres conditions du premier ordre.

On peut écrire $\omega_1 + \rho\omega_2 + \rho\omega_2 = (1-\rho)\omega_1 + \rho\omega_1 + \rho\omega_2 + \rho\omega_2 = (1-\rho)\omega_1 + \rho$. La condition $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1} = 0$, s'écrit $(1-\rho)\omega_1 + \rho = \frac{\lambda}{2\sigma^2} \times \bar{E}_1$. Au total, on peut écrire les conditions du premier ordre comme :

$$(1-\rho)\omega_1 + \rho = \frac{\lambda}{2\sigma^2} \times \bar{E}_1$$
$$(1-\rho)\omega_2 + \rho = \frac{\lambda}{2\sigma^2} \times \bar{E}_2$$
$$(1-\rho)\omega_3 + \rho = \frac{\lambda}{2\sigma^2} \times \bar{E}_3.$$

Remarque : on ne connaît pas a priori, l'espérance de rentabilité du portefeuille tangent. Mais on sait que c'est un portefeuille situé sur la CML et composé uniquement d'actifs risqués. C'est cette condition que l'utilise ici et dans la question suivante.

k) Additionner les trois conditions du premier ordre établies à la question précédente et utiliser la contrainte de budget $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ pour déterminer le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte sur l'espérance de rentabilité du portefeuille tangent.

$$(1-\rho) \times (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + 3\rho = \frac{\lambda}{2\sigma^2} \times (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3)$$
$$\frac{\lambda}{2\sigma^2} = \frac{1 + 2\rho}{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}$$

Remarque : le cas $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3$ doit être traité différemment.

l) En déduire les allocations associées au portefeuille tangent.

En reportant l'expression du multiplicateur de Lagrange (question k)) dans les équations obtenues en répondant à la question j) :

$$\omega_i = \frac{1}{1-\rho} \times \left(-\rho + (1+2\rho) \times \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3} \right), i = 1,2,3$$

Remarque : en l'absence de contrainte de vente à découvert et pour cette structure simple de la matrice de variance covariance des rentabilités, il est possible d'expliciter la composition du portefeuille tangent.

Remarques techniques :

Quoique qu'impliquant un certain nombre de calculs, chaque étape de la détermination du portefeuille tangent est assez simple. On trouve assez facilement sur le net plusieurs méthodes de détermination du portefeuille tangent :

La première méthode est assez proche de celle que nous présentons, jusqu'à l'étape i). Mais ensuite, on détermine les allocations optimales sur la CML en fonction de l'espérance de rentabilité $\bar{E}_P$. On détermine ensuite l'espérance de rentabilité du portefeuille tangent à partir de la contrainte $\omega_0 = 0$. C'est cette espérance de rentabilité qui permet d'obtenir la composition du portefeuille tangent : Voir transparents 6, 7, 8 de :

https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=2ahUKEwitqbWN5PHmAhUB1RoKHRdVBzQQFjAAegQIAhAC&url=http%3A%2F%2Friped.utcc.ac.th%2Ftee%2Fwp-content%2Fuploads%2Fsites%2F3%2F2017%2F09%2F4-Sample-Calculation-of-the-Efficient-Frontier.pdf&usg=AOvVaw0bQ07yA-QN-IbfdP9LSRvr

Elle est plus complexe que celle présentée dans l'exercice.

La méthode présentée peut être généralisée pour une matrice de variance covariance Ω quelconque. Les conditions du premier ordre s'écrivent, en notation matricielle : $2\Omega\,\omega = \lambda\bar{E}$, où ω est le vecteur des allocations dans les actifs risqués et $\bar{E}$ le vecteur des rentabilités en excès du taux sans risque de ces actifs risqués, soit $\omega = \frac{\lambda}{2}\Omega^{-1}\bar{E}$. La contrainte $\omega_0 = 0$ peut aussi s'écrire $e'\omega = 1$ où e' est le transposé du vecteur unité. Ceci donne $\frac{\lambda}{2}e'\Omega^{-1}\bar{E} = 1$ et le résultat (classique) relatif à la composition du portefeuille tangent :

$$\omega = \frac{\Omega^{-1}\bar{E}}{e'\Omega^{-1}\bar{E}}$$

Une autre méthode (plus compliquée également que celle que nous venons de présenter, mais donnant le même résultat) consiste à maximiser le ratio de Sharpe $\frac{\omega\bar{E}}{(\omega'\Omega\omega)^{1/2}}$ sous la contrainte $e'\omega = 1$. Voir par exemple transparents 38 et suivantes de https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=13&ved=2ahUKEwitqbWN5PHmAhUB1RoKHRdVBzQQFjAMegQIBRAC&url=https%3A%2F%2Ffaculty.washington.edu%2Fezivot%2Fecon424%2FportfolioTheoryMatrix-BEAMER.pdf&usg=AOvVaw3WXikFeWrvXCN7JsXFcw4d On retrouve (heureusement) le même résultat. La contrainte $e'\omega = 1$ peut n'être introduite qu'a posteriori, ce qui simplifie le problème d'optimisation, puisque le ratio de Sharpe $\frac{\omega\bar{E}}{(\omega'\Omega\omega)^{1/2}}$ reste invariant par homothétie sur les allocations (voir par exemple, Elton, Gruber et Padberg (1976)

Les analyses des choix de portefeuilles par des méthodes n'impliquant l'inversion de la matrice de variance covariance ont été développées par Elton, Gruber et Padberg dans les années 1970. Ces techniques ont un double intérêt. Elles permettent d'expliciter les allocations optimales et donc de mieux comprendre les interactions entre risque (variance et coefficients de corrélation) et rentabilités espérées. D'autre part, l'ajout de contraintes diminue le nombre de paramètres à estimer. Les matrices de variance covariance sont bien conditionnées, ce qui est lié à une meilleure performance out of sample des portefeuilles ainsi déterminés.

Voir les références suivantes :

- Elton & Gruber (1973). Estimating the dependence structure of share prices--implications for portfolio selection. The Journal of Finance.
- Elton, Gruber & Padberg (1976). Simple criteria for optimal portfolio selection. The Journal of Finance.
- Kwan (1984). Portfolio analysis using single index, multi-index, and constant correlation models: A unified treatment. The Journal of Finance.