

Thème 6 Finance 2022

Exercice 1 : diversification du risque et risque incompressible

On considère n actifs. Les écarts types des rentabilités sont tous égaux à σ et les corrélations entre les rentabilités égales à ρ . Calculer l'écart-type de la rentabilité d'un portefeuille équipondéré. Étudier comment évolue l'écart-type de la rentabilité en fonction de n .

Exercice 2 : Choix de portefeuilles avec trois actifs risqués

1) Calcul de matrice de variance covariance des rentabilités

On repart des données du Thème 4 :

| Date | L'Oréal | Société Générale | CAC 40 GR |
|------------|---------|------------------|-----------|
| 03/01/2000 | 55,53 | 22,44 | 8014 |
| 02/01/2001 | 65,18 | 27,24 | 8621 |
| 02/01/2002 | 57,43 | 26,91 | 6547 |
| 02/01/2003 | 55,64 | 25,59 | 4429 |
| 02/01/2004 | 49,58 | 33,04 | 5663 |
| 03/01/2005 | 42,89 | 37,18 | 6318 |
| 02/01/2006 | 48,83 | 54,32 | 8195 |
| 02/01/2007 | 60,24 | 72,64 | 9553 |
| 02/01/2008 | 77,07 | 56,51 | 8530 |
| 02/01/2009 | 52,49 | 23,58 | 5423 |
| 04/01/2010 | 66,27 | 34,77 | 7110 |
| 03/01/2011 | 72,33 | 29,17 | 7923 |
| 02/01/2012 | 70,67 | 12,86 | 6804 |
| 02/01/2013 | 94,91 | 21,71 | 8045 |
| 02/01/2014 | 112,79 | 30,63 | 9301 |
| 02/01/2015 | 125,95 | 26,71 | 9802 |
| 04/01/2016 | 140,51 | 32,13 | 10753 |
| 02/01/2017 | 164,58 | 38,51 | 12005 |
| 02/01/2018 | 175,96 | 37,11 | 13533 |
| 02/01/2019 | 196,44 | 28,69 | 12342 |

Copier cette matrice dans Excel. Construire la matrice des rentabilités, puis la matrice des rentabilités centrées. On notera cette matrice R (elle est composée de $T = 19$ lignes et $n = 3$ colonnes)

2) Calcul de matrice de corrélation

Utilisation des fonctions matricielles d'Excel (transpose <https://support.office.com/fr-fr/article/transpose-fonction-ed039415-ed8a-4a81-93e9-4b6dfac76027> et produitmat <https://support.office.com/fr-fr/article/fonction-produitmat-40593ed7-a3cd-4b6b-b9a3-e4ad3c7245eb>) pour calculer la matrice (3×3) , $\frac{1}{T} R^* R$ où R^* est la transposée de la matrice R . On peut vérifier que $\frac{1}{T} R^* R$ permet d'obtenir $\hat{\Omega}$, la matrice de variance covariance (dans l'échantillon) des

rentabilités associées aux trois actifs considérés (L'Oréal, Société Générale, CAC40). La fonction à utiliser dans Excel est de la forme =1/19*PRODUITMAT(TRANSPOSE(H3:J21);H3:J21) (et retourne une matrice).

Calculer maintenant la matrice associée aux rentabilités centrées réduites \bar{R} (on pourra repartir de la matrice précédente, calculer les écarts types et réduire). Utiliser la fonction copier-coller (ou utiliser à nouveau les fonction matricielles) pour calculer la matrice $\frac{1}{T}\bar{R}^*\bar{R}$. On peut vérifier que cette matrice est la matrice de corrélation des rentabilités des trois actifs considérés.

3) Calcul de risque d'un portefeuille

On considère maintenant une allocation arbitraire entre les trois actifs $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0.2, 0.5, 0.3)$. Utiliser à nouveau les fonctions matricielles d'Excel pour calculer la variance (puis l'écart-type) de la rentabilité de ce portefeuille.

4) Calcul de risque d'un portefeuille

Faire un nouveau calcul avec $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0.4, 0.5, 0.1)$.

5) Composition du portefeuille de variance minimale.

On notera c_{ij} la covariance entre les actifs i et j , $i, j = 1, 2, 3$. Rappeler l'expression de la variance d'un portefeuille dont l'allocation est $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. On va minimiser la variance de ce portefeuille sous la contrainte $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. Écrire le Lagrangien, puis les conditions du premier ordre.

Utiliser les fonctions matricielles d'Excel pour calculer $\hat{\Omega}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire les allocations.

6) Calculer l'écart-type du portefeuille de variance minimale.

7) Classement des actifs

On rappelle que les moyennes des rentabilités simples des actions L'Oréal, Société Générale et du portefeuille CAC40 : $(E_1, E_2, E_3) = (8.23\%, 7.51\%, 4.35\%)$. Compte tenu des écarts types déjà calculés, y a-t-il des titres en dominant d'autres, au sens des préférences moyenne variance ?

8) Ratios de Sharpe.

On se propose de comparer les ratios de Sharpe des trois actifs risqués.

On commence par comparer les ratios de Sharpe du CAC40 et de l'action Société Générale. Montrer géométriquement que si le taux sans risque est inférieur à un seuil que l'on déterminera, alors le ratio de Sharpe du CAC40 est supérieur à celui de la Société Générale (et vice versa). Calculer ce taux sans risque seuil.

Montrer que le ratio de Sharpe de l'action L'Oréal est supérieur à celui du CAC40 ou de l'action Société Générale pour tout niveau du taux sans risque.

9) Simulation aléatoire d'allocations de portefeuille avec contraintes de positivité et applications

Si on interdit les ventes à découvert (pas d'allocation négatives), le problème d'optimisation devient plus compliqué puisqu'on rajoute des contraintes du type $\omega_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$ à la contrainte de budget $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$.

Au lieu de procéder de manière analytique, on va à nouveau utiliser Excel pour générer des allocations aléatoires (qui vont permettre d'explorer l'ensemble des portefeuilles). On utilise un algorithme dû à Rubinstein et Melamed (1998). On génère trois variables uniformes sur l'ensemble des allocations définis par les contraintes, U_1, U_2, U_3 avec la fonction alea() On considère $-\ln(U_1), -\ln(U_2), -\ln(U_3)$. On définit T comme la somme des trois termes précédents : $T = -\ln(U_1) - \ln(U_2) - \ln(U_3)$, puis $\omega_i = \frac{-\ln(U_i)}{T}$, $i = 1, 2, 3$. Ceci permet de simuler des allocations de portefeuille selon une loi uniforme

sur l'ensemble défini par les contraintes ; tous les résultats mathématiques sont admis, mais il en résulte une méthode de simulation simple des allocations. Une autre méthode présentée dans Rubinstein & Kroese (2016) ou Onn & Weissman (2011) consiste à simuler des variables aléatoires uniformes, les ordonner et considérer les écarts entre deux valeurs consécutives. Elle évite d'utiliser la fonction logarithme, mais implique de mettre en œuvre un algorithme de tri.

- Rubinstein, R. Y., & Melamed, B. (1998). *Modern simulation and modeling* (Vol. 7). Wiley.
- Onn & Weissman (2011). Generating uniform random vectors over a simplex with implications to the volume of a certain polytope and to multivariate extremes. *Annals of Operations Research*.
- Rubinstein & Kroese (2016). *Simulation and the Monte Carlo method* (Vol. 10). John Wiley & Sons.

Remarque : on peut s'interroger sur l'utilité pratique d'un tirage uniforme dans l'ensemble des allocations. Si on n'a pas d'information a priori sur la composition du portefeuille optimal, il faut pouvoir explorer l'ensemble des allocations possibles. Si un outil de simulation concentre ses recherches (la probabilité de chercher dans une région donnée est très supérieure aux autres), on risque de perdre beaucoup de temps avant de trouver l'optimum.



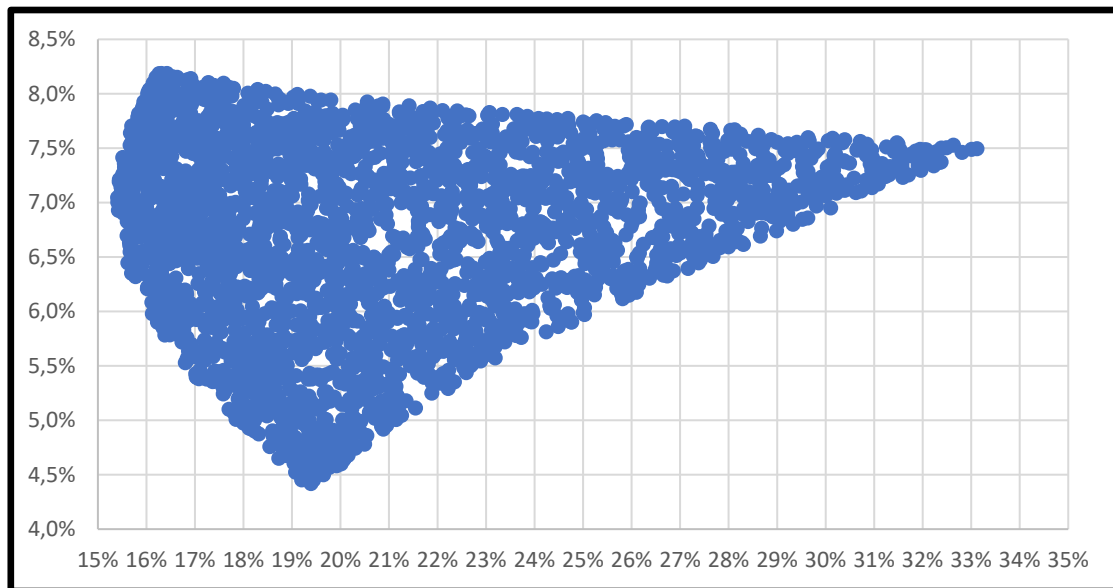
On se retrouve, sans forcément s'en rendre compte, face au problème du « streetlight effect » (David Freedman) ou « drunkard's search principle » (Abraham Kaplan) ou encore du « lampost problem » déjà vu en cours :

- https://en.wikipedia.org/wiki/Streetlight_effect
- <https://www.rightattitudes.com/2016/02/26/drun-kard-search-streetlight-effect/>
- https://fr.slideshare.net/sajidiqbal5437923/the-streetlight-effect?qid=4de735f1-39bf-4545-9aec-4dd9634838d5&v=&b=&from_search=1

Pour chaque simulation d'allocation, on peut calculer l'écart-type des rentabilités, en prenant la racine carrée de $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \hat{\Omega} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$.

En ce qui concerne les espérances, on rappelle que les moyennes des rentabilités simples des actions L'Oréal, Société Générale et du portefeuille CAC40 : $(E_1, E_2, E_3) = (8.23\%, 7.51\%, 4.35\%)$. Pour chaque allocation, l'espérance de rentabilité du portefeuille est donnée par $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$.

Simuler 3000 allocations de portefeuilles, pour chacune calculer écart type et espérance de rentabilité. Représenter l'ensemble des points sur un graphique de la forme suivante :



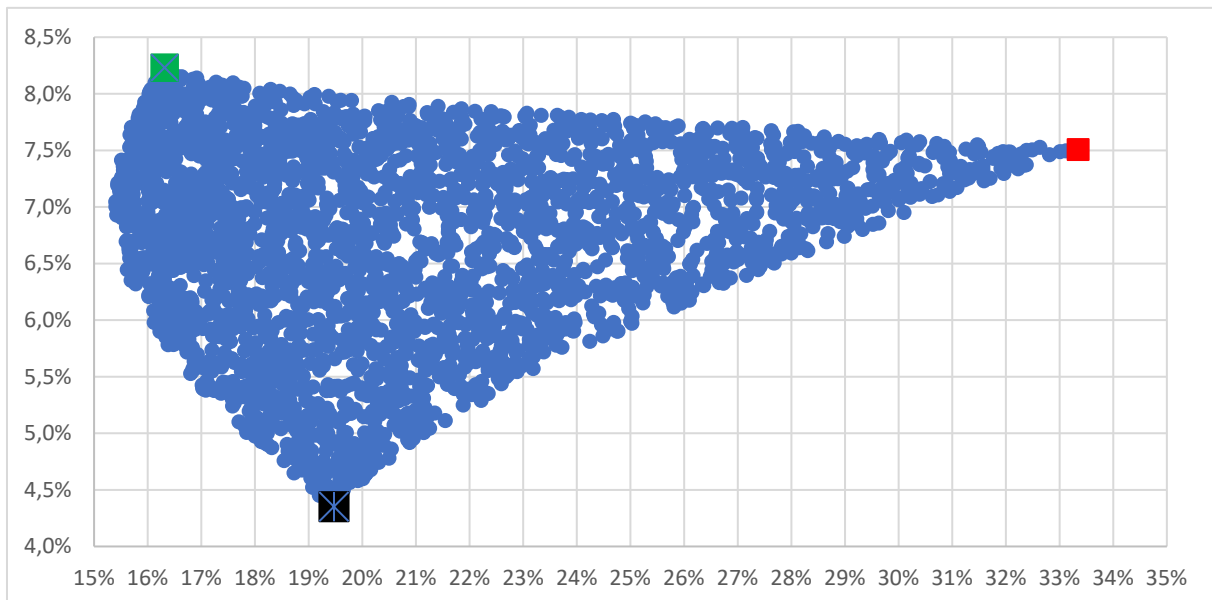
Ensemble des portefeuilles composés de L'Oréal, Société Générale et CAC40 (écarts types en abscisses, espérances en ordonnées), allocations positives

10) Portefeuille de variance minimale sous contrainte de positivité des allocations

Trouver l'allocation associée au portefeuille de variance minimale et calculer l'écart-type associé. Comparer cet écart-type avec celui obtenu précédemment (sans contrainte sur les ventes à découvert).

11) Analyse des portefeuilles extrêmes

Interpréter les trois points « extrêmes » qui apparaissent sur le graphique précédent.



Portefeuilles extrémaux (carrés de couleur) composés de L'Oréal, Société Générale et CAC40 (écarts types en abscisses, espérances en ordonnées), allocations positives

12) Maximisation du ratio de Sharpe (d'après Kim et Lee (2016))

L'article de Kim et Lee (2016) considère la maximisation du ratio de Sharpe à partir d'une méthode de simulation.

- Kim & Lee (2016). A uniformly distributed random portfolio. *Quantitative Finance*.



Dans le cas que nous étudions, absence de contraintes sur les ventes à découvert, la méthode du Lagrangien permet d'explicitier la composition du portefeuille tangent. En présence de contraintes, par exemple de positivité des allocations, nous avons vu des méthodes de simulation uniforme dans le simplexe. Il existe aussi des méthodes, les plus couramment utilisées, car on a accès facilement à des algorithmes très performants, de minimisation de la variance sous contraintes linéaires d'égalité ou d'inégalité. Les méthodes de simulation d'allocation sont néanmoins très faciles à implémenter et permettent de traiter certaines situations où les contraintes sur les allocations ne sont pas linéaires.

Nous allons examiner cette approche dans le cas où le nombre d'actifs risqués est $n = 3$. La première partie suit fidèlement l'approche de Kim et Lee (2016). Une seconde partie traite de manière un peu plus générale des problématiques liées à la simulation d'allocations.

Si l'on s'intéresse aux ratios de Sharpe et/ou à la CML, il faut introduire l'actif sans risque. Son taux est noté r_f . Les allocations (en pourcentage de la richesse investie) sont notées $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, respectivement pour l'actif sans risque et pour les actifs risqués 1,2 et 3. On notera comme précédemment E_1, E_2, E_3 , les espérances de rentabilité des actifs risqués. $\bar{E}_i = E_i - r_f, i = 1,2,3$ sont les espérances de rentabilité en excès du taux sans risque.

Écrire l'espérance de rentabilité en excès d'un portefeuille $\bar{E}_P = E_P - r_f$ en fonction de $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$ et de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. En l'absence de contraintes sur les ventes à découvert, quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre l'allocation $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$? En ce qui concerne les valeurs numériques de $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$, on les prendra ici égales à 8,23%, 7,51% et 4,35%.

Écrire l'écart-type de la rentabilité d'un portefeuille σ_P en fonction de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et de la matrice de variance covariance Ω . On pourra utiliser les notations matricielles (on notera alors ω la matrice colonne formée de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$) ou étendues.

Calculer le ratio de Sharpe du portefeuille. Montrer que si on multiplie toutes les allocations dans les actifs risqués par un facteur de proportionnalité $\lambda, \lambda > 0$, on ne change pas le ratio de Sharpe. Donner une interprétation financière de cette propriété mathématique.

On va maintenant s'intéresser à la simulation aléatoire d'allocations $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Du fait de la propriété précédente les allocations $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)$ et $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ où $\bar{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}}, \bar{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}}, \bar{\omega}_3 = \frac{\omega_3}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}}$, ont le même ratio de Sharpe. Le point de coordonnées $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)$ est situé sur la sphère unité (de centre l'origine et de rayon 1) puisque $\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2 + \bar{\omega}_3^2 = 1$ (soit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ avec les notations habituelles pour les coordonnées d'un point dans l'espace). On peut donc se contenter de faire des simulations aléatoires de points sur la sphère unité. C'est un problème classique en mathématiques ou en statistique en dimension 3 (le cas qui nous intéresse ici), 2 (étudié par Von Neumann) ou en dimension quelconque, ce qui est important pour les problèmes pratiques : Le nombre de titres concerné par une allocation de portefeuilles peut être de plusieurs centaines. Le site <http://extremelearning.com.au/how-to-generate-uniformly-random-points-on-n-spheres-and-n-balls/> recense une vingtaine d'approches. Masaglia (1972) présente deux méthodes, l'une utilisant la simulation de variables uniformes dans un cube, l'autre la simulation de variables gaussiennes.

- Marsaglia (1972). Choosing a point from the surface of a sphere. The Annals of Mathematical Statistics.
- Muller (1959). A note on a method for generating points uniformly on n-dimensional spheres. Communications of the ACM.

La première méthode commence par un tirage aléatoire uniforme d'un point dans le cube $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$. Ceci revient à simuler trois variables aléatoires uniformes indépendantes dans $[-1,1]$, qui seront les coordonnées (y_1, y_2, y_3) du point dans le cube. Si on utilise la fonction alea d'Excel, $y_1 = 2\text{alea}() - 1$, $y_2 = 2\text{alea}() - 1$, $y_3 = 2\text{alea}() - 1$. On ne va ensuite conserver que les points à l'intérieur de la sphère inscrite dans le cube (sphère de rayon unitaire et de centre l'origine), d'où le nom de méthode rejet, appliqué à cette méthode : Si $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 > 1$, on oublie la simulation, si $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \leq 1$ (on a fait un tirage aléatoire uniforme dans la boule), on considère $\omega_1 = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$, $\omega_2 = \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$, $\omega_3 = \frac{y_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$ (on projette le point intérieur sur le bord de la sphère).

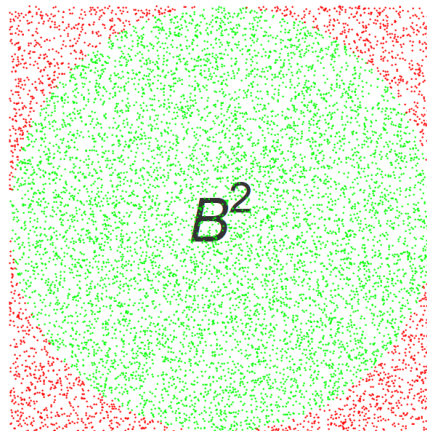


Illustration de la méthode de rejet en dimension 2.

Un des inconvénients de cette méthode de rejet est que l'on n'utilise pas tous les points (y_1, y_2, y_3) . Le taux d'acceptation (pourcentage de points non rejetés) est égal au rapport entre le volume de la boule $\frac{4\pi}{3} \approx 4,19$ et le volume du cube $2^3 = 8$, soit un taux d'acceptation de 52%. On perd donc environ une simulation sur deux, quand on considère trois actifs. Ce problème s'aggrave, dans des cas pratiques où l'on considère plusieurs centaines d'actifs. Pour $n = 10$ actifs, le volume de la boule est égal à $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$ (où la fonction Γ peut être vue comme une extension de la fonction factorielle aux nombres réels ou complexes ; pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\Gamma(p + 1) = p!$). Donc pour $n = 10$, $\Gamma(\frac{n}{2} + 1) = 5! = 120$. Le volume de la boule est approximativement de 2,55. Le volume de l'hypercube (ses côtés sont de longueur 2) est quant à lui de $2^n = 1024$. Le taux d'acceptation chute alors à 0,25%. Cette méthode est donc inapplicable pour des problèmes pratiques, le taux d'acceptation convergeant très rapidement vers zéro.

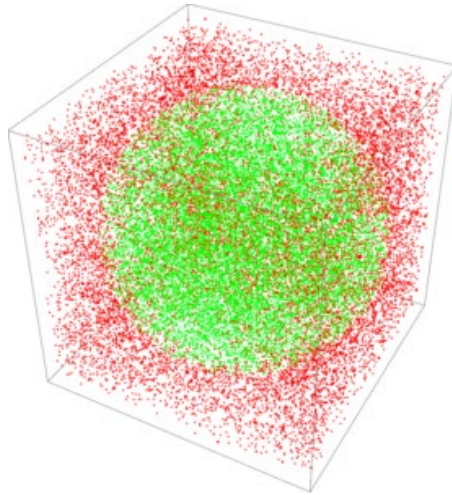


Illustration de la méthode de rejet en dimension 3

On peut bien sûr se demander pourquoi ne pas conserver tous les points de la simulation initiale. Quand on fait un tirage dans un cube (un carré, un cube, un hypercube, voir les transparents), on se rend compte que la probabilité (plus rigoureusement la densité de probabilité) associée à une direction est proportionnelle à la longueur du segment de droite issu de l'origine, passant par ce point et contenu dans le cube. Pour ceci illustrer de manière concrète, considérons deux points du cube de coordonnées $(1,0,0)$ et $(1,1,1)$. Le premier point est associé à un portefeuille constitué uniquement de l'actif 1. Le second point est associé à un portefeuille équilibré. Le rapport des longueurs est ici de $\sqrt{3}$. Ceci implique que l'on va tirer 73% de fois souvent un portefeuille proche de l'équipondération qu'un portefeuille concentré en un actif. Pour $n = 1000$ actifs, le ratio est de $\sqrt{1000} \approx 32$. On va alors surexplorer les zones associées aux portefeuilles très bien diversifiés, pas forcément là où se trouve le portefeuille tangent.

Une seconde méthode (voir Marsiglia (1972), Muller (1959)) consiste à simuler trois variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, indépendantes, X_1, X_2, X_3 , puis à calculer $\bar{\omega}_1 = \frac{X_1}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$, $\bar{\omega}_2 = \frac{X_2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$, $\bar{\omega}_3 = \frac{X_3}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$. Cela permet d'obtenir une distribution uniforme sur la sphère ; en effet, la densité de (X_1, X_2, X_3) est égale à $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2}\right)$ et aucune direction particulière sur la sphère n'est privilégiée. Pour simuler des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, utiliser la fonction Alea, puis la fonction loi.normale.inverse.n (=LOI.NORMAL.INVERSE.N(ALEA();0;1))

Remarque : la normalisation de X_1, X_2, X_3 n'est pas nécessaire puisque le ratio de Sharpe associé à l'allocation (X_1, X_2, X_3) est égal celui associé à $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)$.

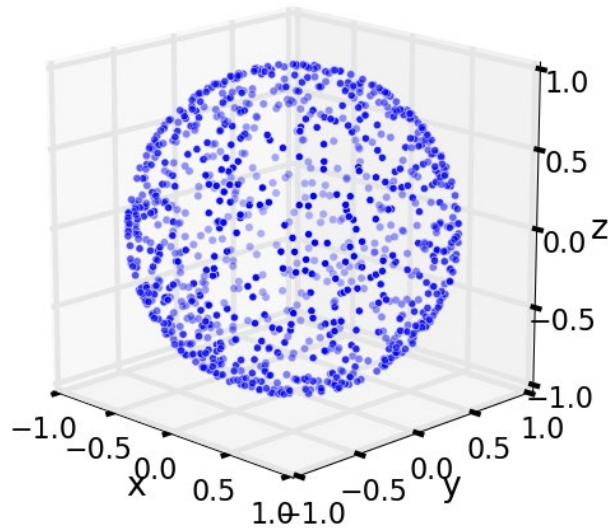
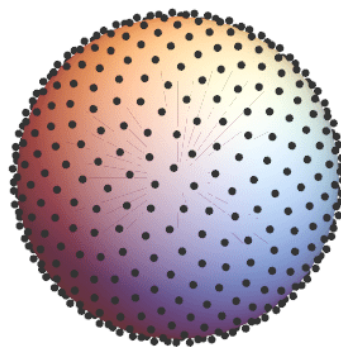


Illustration d'une simulation aléatoire uniforme sur une sphère

La méthode de simulation aléatoire uniforme que nous proposons n'est pas la seule envisageable. On peut par exemple chercher à répartir de manière équirépartie un nombre de points donnés sur une sphère. Il s'agit alors, par exemple, de placer ces points sur la sphère de manière que la plus petite distance entre deux de ces points soit maximale. Ce problème dit de packing est bien connu des mathématiciens. Il n'existe pas de solution exacte, mais de nombreux algorithmes permettant d'obtenir une solution raisonnablement proche de l'optimum (voir par exemple <http://extremelearning.com.au/evenly-distributing-points-on-a-sphere/> ou <https://bduvenhage.me/geometry/2019/07/31/generating-equidistant-vectors.html>)

Une méthode simple à implémenter est liée aux « spirales de Fibonacci ». On note Φ le nombre d'or. $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on va considérer $2n + 1$ allocations $(\omega_1^i, \omega_2^i, \omega_3^i)$, $i = -n, -n + 1, \dots, n - 1, n$, construites à partir de coordonnées sphériques (latitude et longitude) par $\omega_1 = \cos(\text{lat}_i) \times \cos(\text{lon}_i)$, $\omega_2 = \cos(\text{lat}_i) \times \sin(\text{lon}_i)$, $\omega_3 = \sin(\text{lat}_i)$ avec $\text{lat}_i = \sin^{-1}\left(\frac{2i}{2n+1}\right)$, $\text{lon}_i = \frac{2\pi i}{\Phi}$.



Distribution des points placés sur une sphère à partir de la méthode de la spirale de Fibonacci

Pour $n = 500$ (soit 1001 allocations de portefeuilles), le ratio de Sharpe maximal est égal à 0,5093. Il est possible d'obtenir la valeur exacte du ratio de Sharpe maximal. On peut montrer que la composition du portefeuille tangent est proportionnelle à $\Omega^{-1}\bar{E}$, où Ω^{-1} est l'inverse de la matrice de variance covariance Ω et \bar{E} , la matrice colonne formée des rentabilités en excès du taux sans risque des actifs

risqués, $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$. On peut alors vérifier que le ratio de Sharpe optimal, en l'absence de contraintes sur les ventes à découvert est égal à $(\bar{E}'\Omega^{-1}\bar{E})^{\frac{1}{2}} = 0,5106$.

Références complémentaires sur la génération d'allocations d'actifs (voir également les références dans les transparents) :

- <https://stats.stackexchange.com/questions/294278/how-to-get-a-uniformly-distributed-portfolio-allocation-vector>
- https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_distribution#Random_number_generation
- https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_distribution
- <https://quant.stackexchange.com/questions/45897/random-portfolios-vs-efficient-frontier>

13) Méthode alternative de détermination des bêtas à partir du Médaf

On propose maintenant une méthode différente de détermination des bêtas, utilisant les concepts vus lors de la présentation du Médaf. On supposera que le CAC40 GR est le portefeuille « de marché ». On rappelle que les bêtas à un an de la Société Générale et de L'Oréal par rapport au CAC 40, estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires (voir TD4), sont respectivement de 1,59 et de 0,64.

Calculer les bêtas des actions Société Générale et l'action L'Oréal à partir des relations relatives à la SML.

14) Simulation des rentabilités

On va s'intéresser à la simulation des trois rentabilités selon une distribution normale (multivariée), la matrice de variance covariance étant $\hat{\Omega}$. On commence par simuler $T = 19$ variables gaussiennes « indépendantes » centrées réduites. Utiliser la fonction Alea() <https://support.office.com/fr-fr/article/alea-alea-fonction-4cbfa695-8869-4788-8d90-021ea9f5be73> puis la fonction loi.normale.inverse.n <https://support.office.com/fr-fr/article/loi-normale-inverse-n-loi-normale-inverse-n-fonction-54b30935-fee7-493c-bedb-2278a9db7e13>

Soit $LOI.NORMALE.INVERSE.N(ALEA();0;1)$ pour construire W un vecteur colonne gaussien de dimension 19. Utiliser les fonctions matricielles d'Excel pour construire une matrice colonne de dimension 3 égale à $\frac{1}{\sqrt{19}}R*W$. On peut montrer que ce vecteur aléatoire a bien pour matrice de variance covariance $\hat{\Omega}$.

Une autre approche, intéressante quand le nombre d'actifs est inférieur au nombre de dates d'observation des rentabilités est d'utiliser la décomposition de Cholesky :

http://www.bionicturtle.com/learn/article/cholesky_decomposition

15) Comparaison entre les matrices de variance covariance obtenue par simulation et $\hat{\Omega}$.

Énoncé à compléter. Cette question ne sera pas abordée lors du partiel de janvier 2021.