**Thème 6 Finance 2022**

Ce document a pour vocation de faciliter les révisions.

**Exercice 1 : diversification du risque et risque incompressible**

On considère $n$ actifs. Les écarts types des rentabilités sont tous égaux à $\sigma$ et les corrélations entre les rentabilités égales à $\rho$. Calculer l'écart-type de la rentabilité d'un portefeuille équipondéré. Étudier comment évolue l'écart-type de la rentabilité en fonction de $n$.

Si on note $\omega_i$ le poids de l'actif $i \in \{1, \dots, n\}$, on a : $\omega_i = \frac{1}{n}$. La formule générale donnant la variance du portefeuille $\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \omega_i \omega_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$ se simplifie en $\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2}{n^2} + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \frac{\rho\sigma^2}{n^2}$. Comme le nombre d'éléments non diagonaux d'une matrice carrée de taille $n$ est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$, on obtient $\sigma_P^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{n-1}{n} \times \rho\sigma^2 = \sigma^2 \times \left(\rho + \frac{1}{n}(1-\rho)\right)$.

On remarque que la contrainte $\sigma_P^2 \geq 0$ implique que $\rho \geq -\frac{1}{n-1}$. Si l'on veut que cette contrainte soit vérifiée pour tout $n$, il faut que $\rho \geq 0$.

Si $\rho = 1$, $\sigma_P = \sigma$ pour tout $n$. L'écart-type de la rentabilité d'un portefeuille équipondéré (avec la structure de dépendance entre les rentabilités telle que dans l'énoncé) est alors constant. Il n'y a aucun bénéfice de diversification.

Si $\rho < 1$, l'écart-type est égal à $\sigma_P = \sigma \times \sqrt{\rho + \frac{1}{n}(1-\rho)}$. Il décroit avec $n$, jusqu'à un niveau égal à $\sigma\sqrt{\rho}$, qui est le niveau de risque incompressible.

Si $\rho = 0$, le risque $\sigma_P$ tend vers zéro quand le nombre d'actifs dans le portefeuille tend vers l'infini.

Un des problèmes de la gestion de portefeuilles est que les coefficients de corrélation tendent à fortement augmenter au moment des crises financières, diminuant les bénéfices de diversification, au moment où on en aurait le plus besoin. Si l'on souhaite être prudent, on peut utiliser des « coefficients de corrélation stressés », par exemple estimés au moment de crises financières. L'approche précédente fait appel à l'analyse de séries temporelles ; on peut aussi avoir une approche « en coupe » (cross-sectional) où l'on va s'intéresser aux évolutions relatives à une date donnée des rentabilités. Voir par exemple :

- Solnik & Roulet (2000). Dispersion as cross-sectional correlation. *Financial Analysts Journal*.
- Goltz, Guobuzaite, & Martellini (2011). Introducing a new form of volatility index: The cross-sectional volatility index. *EDHEC-Risk Institute Publication*.

Dans la réglementation bancaire relative aux exigences en capital (réglementations bâloises), des coefficients de corrélation peuvent être imposés a priori pour éviter que les banques régulées ne les minorent.

Dans la mesure où la corrélation fluctue au cours du temps et est difficile à déterminer de manière univoque, il peut être tentant pour les concepteurs de produits financiers de minorer $\rho$ pour augmenter de manière fictive les bénéfices de diversification. C'est ce qui s'est passé avec les CDO (Colletaralized Debt Obligations) de crédit subprimes au moment de la crise de 2008. Voir par exemple l'article de Crouhy et al (2008).

- Crouhy, Jarrow & Turnbull (2008). The subprime credit crisis of 2007. *The Journal of Derivatives*.

Le développement de la marchéisation des tranches mezzanine dans les opérations de LBO pose aujourd'hui des problèmes similaires et attire l'attention des régulateurs, conseil de stabilité financière

(FSB, Financial Stability Board) ou OFR (Office of Financial Research du Département du Trésor américain). Voir par exemple https://www.kramerlevin.com/en/perspectives-search/fsb-issues-report-on-vulnerability-in-the-leveraged-loan-market.html , https://www.lsta.org/news-resources/systemic-risk-taking-it-to-the-house/ , https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjtwOrH2_LmAhVN5eAKHTNiD_AQFjAAegQIARAC&url=https%3A%2F%2Fwww.financialresearch.gov%2Ffrac%2Ffiles%2FOFR_FRAC-meeting_Leveraged_Lending_CLOs_07_09_2019.pdf&usg=AOvVaw1SmP56dNm6Teq_hTtGlcQO

**Exercice 2 : Choix de portefeuilles avec trois actifs risqués**

Cet exercice fait appel à diverses notions. Certaines présentées dès le début du cours, relatives aux calculs d'espérance et de variance de rentabilités de portefeuille et approfondies à la fin du cours (utilisation du calcul matriciel, méthode du Lagrangien pour déterminer des portefeuilles optimaux).

**1) Calcul de matrice de variance covariance des rentabilités**

On repart des données du TD4 :

| Date | L'Oréal | Société Générale | CAC 40 GR |
|---|---|---|---|
| 03/01/2000 | 55,53 | 22,44 | 8014 |
| 02/01/2001 | 65,18 | 27,24 | 8621 |
| 02/01/2002 | 57,43 | 26,91 | 6547 |
| 02/01/2003 | 55,64 | 25,59 | 4429 |
| 02/01/2004 | 49,58 | 33,04 | 5663 |
| 03/01/2005 | 42,89 | 37,18 | 6318 |
| 02/01/2006 | 48,83 | 54,32 | 8195 |
| 02/01/2007 | 60,24 | 72,64 | 9553 |
| 02/01/2008 | 77,07 | 56,51 | 8530 |
| 02/01/2009 | 52,49 | 23,58 | 5423 |
| 04/01/2010 | 66,27 | 34,77 | 7110 |
| 03/01/2011 | 72,33 | 29,17 | 7923 |
| 02/01/2012 | 70,67 | 12,86 | 6804 |
| 02/01/2013 | 94,91 | 21,71 | 8045 |
| 02/01/2014 | 112,79 | 30,63 | 9301 |
| 02/01/2015 | 125,95 | 26,71 | 9802 |
| 04/01/2016 | 140,51 | 32,13 | 10753 |
| 02/01/2017 | 164,58 | 38,51 | 12005 |
| 02/01/2018 | 175,96 | 37,11 | 13533 |
| 02/01/2019 | 196,44 | 28,69 | 12342 |

Copier cette matrice dans Excel. Construire la matrice des rentabilités, puis la matrice des rentabilités centrées. On notera cette matrice $R$ (elle est composée de $T = 19$ lignes et $n = 3$ colonnes)

**2) Calcul de matrice de corrélation**

Utilisation des fonctions matricielles d'Excel (transpose https://support.office.com/fr-fr/article/transpose-fonction-ed039415-ed8a-4a81-93e9-4b6dfac76027 et produitmat https://support.office.com/fr-fr/article/fonction-produitmat-40593ed7-a3cd-4b6b-b9a3-e4ad3c7245eb ) pour calculer la matrice $(3 \times 3)$, $\frac{1}{T}R^*R$ où $R^*$ est la transposée de la matrice $R$. On peut vérifier que $\frac{1}{T}R^*R$ permet d'obtenir $\widehat{\Omega}$, la matrice de variance covariance (dans l'échantillon) des rentabilités associées aux trois actifs considérés (L'Oréal, Société Générale, CAC40). La fonction à utiliser dans Excel est de la forme =1/19*PRODUITMAT(TRANSPOSE(H3:J21);H3:J21) (et retourne une matrice).

On trouve la matrice $\widehat{\Omega}$ suivante :

| | | |
|---|---|---|
| 0,0266 | 0,0311 | 0,0172 |
| 0,0311 | 0,1112 | 0,0498 |
| 0,0172 | 0,0498 | 0,0379 |

Sur la diagonale, on a les variances des rentabilités des actions L'Oréal, Société Générale et du portefeuille CAC40 GR. Les termes non-diagonaux correspondent aux covariances. La matrice est symétrique.

Calculer maintenant la matrice associée aux rentabilités centrées réduites $\bar{R}$ (on pourra repartir de la matrice précédente, calculer les écarts types et réduire). Utiliser la fonction copier-coller (ou utiliser à nouveau les fonction matricielles) pour calculer la matrice $\frac{1}{T}\bar{R}^*\bar{R}$. On peut vérifier que cette matrice est la matrice de corrélation des rentabilités des trois actifs considérés.

On trouve la matrice de corrélation suivante :

| | | |
|---|---|---|
| 1,0000 | 0,5711 | 0,5422 |
| 0,5711 | 1,0000 | 0,7672 |
| 0,5422 | 0,7672 | 1,0000 |

Remarque : les coefficients de corrélation sont différents de ceux calculés dans le TD4, car on considère ici le CAC40 GR et non le CAC40.

### 3) Calcul de risque d'un portefeuille

On considère maintenant une allocation arbitraire entre les trois actifs $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0.2{,}0{,}5{,}0{,}3)$. Utiliser à nouveau les fonctions matricielles d'Excel pour calculer la variance (puis l'écart-type) de la rentabilité de ce portefeuille.

Il faut calculer $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\widehat{\Omega}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}$. On trouve un écart-type de 23,6% en utilisant la formule suivante, où D29:F29 correspond au vecteur ligne des allocations $(0.2{,}0{,}5{,}0{,}3)$, H24:J26 à la matrice de variance covariance calculée en 2) :

RACINE(PRODUITMAT(PRODUITMAT(D29:F29;H24:J26);TRANSPOSE(D29:F29))).

### 4) Calcul de risque d'un portefeuille

Faire un nouveau calcul avec $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0.4{,}0{,}5{,}0{,}1)$.

On trouve un écart-type du portefeuille de 22,6%.

**5) Composition du portefeuille de variance minimale.**

On notera $c_{ij}$ la covariance entre les actifs $i$ et $j$, $i,j = 1,2,3$. Rappeler l'expression de la variance d'un portefeuille dont l'allocation est $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. On va minimiser la variance de ce portefeuille sous la contrainte $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. Écrire le Lagrangien, puis les conditions du premier ordre.

Le Lagrangien s'écrit sous la forme critère $-\lambda \times$ contrainte (pour une seule contrainte), avec $\lambda$, scalaire (appelé multiplicateur de Lagrange). Le critère s'écrit ici $\omega_1^2\sigma_{11} + \omega_2^2\sigma_{22} + \omega_3^2\sigma_{33} + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12} + 2\omega_1\omega_3\sigma_{13} + 2\omega_2\omega_3\sigma_{23}$. Le Lagrangien s'écrit alors : $\mathcal{L}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = \omega_1^2\sigma_{11} + \omega_2^2\sigma_{22} + \omega_3^2\sigma_{33} + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12} + 2\omega_1\omega_3\sigma_{13} + 2\omega_2\omega_3\sigma_{23} - \lambda \times (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$ (on aurait aussi pu écrire $+\lambda \times (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$, puisque la valeur du multiplicateur de Lagrange est déterminée par la contrainte, cela ne change rien au résultat. Pour trouver les allocations optimales $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, on annule les dérivées de $\mathcal{L}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda)$ par rapport à $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (conditions du premier ordre). On obtient un système de trois équations à trois inconnues $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{11}\omega_1 + \sigma_{12}\omega_2 + \sigma_{13}\omega_3 = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_2} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{21}\omega_1 + \sigma_{22}\omega_2 + \sigma_{23}\omega_3 = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_3} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{31}\omega_1 + \sigma_{32}\omega_2 + \sigma_{33}\omega_3 = \frac{\lambda}{2}$$

qui s'écrit sous forme matricielle : $\widehat{\Omega} \times \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. D'où $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2}\widehat{\Omega}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Utiliser les fonctions matricielles d'Excel pour calculer $\widehat{\Omega}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. En déduire les allocations.

En utilisant les fonctions inversemat https://support.office.com/fr-fr/article/inversemat-inversemat-fonction-11f55086-adde-4c9f-8eb9-59da2d72efc6 et produitmat, On trouve $\widehat{\Omega}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}35\\-13{,}3\\28\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}35\\-13{,}3\\28\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}$ est proportionnel à $\begin{pmatrix}35\\-13{,}3\\28\end{pmatrix}$. Comme $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, il suffit de diviser les termes de $\begin{pmatrix}35\\-13{,}3\\28\end{pmatrix}$ par leur somme $35 - 13{,}3 + 28 = 49{,}7$ donne $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (71\%, -27\%, 56\%)$. On remarque que l'allocation dans l'action Société Générale est négative.

**6) Calculer l'écart-type du portefeuille de variance minimale.**

On peut utiliser la feuille de calcul, ce qui donne un écart-type de 14,2%.

**7) Classement des actifs**

On rappelle que les moyennes des rentabilités simples des actions L'Oréal, Société Générale et du portefeuille CAC40 : $(E_1, E_2, E_3) = (8.23\%, 7.51\%, 4.35\%)$. Compte tenu des écarts types déjà calculés, y a-t-il des titres en dominant d'autres, au sens des préférences moyenne variance ?

Voici le tableau résumant les caractéristiques des trois titres :

| | L'Oréal | Société Générale | CAC 40 GR |
|---|---|---|---|
| espérance | 8,23% | 7,51% | 4,35% |
| écart-type | 16,32% | 33,35% | 19,47% |

Si on s'en tient aux données estimées à partir de notre échantillon, le titre L'Oréal domine à la fois le titre Société Générale et le CAC40. On ne peut pas comparer le titre Société Générale et le portefeuille CAC40 sur la base de l'espérance et de la variance des rentabilités : le titre Société Générale est plus rentable, mais plus risqué dans l'échantillon.

**8) Ratios de Sharpe.**

On se propose de comparer les ratios de Sharpe des trois actifs risqués.

On commence par comparer les ratios de Sharpe du CAC40 et de l'action Société Générale. Montrer géométriquement que si le taux sans risque est inférieur à un seuil que l'on déterminera, alors le ratio de Sharpe du CAC40 est supérieur à celui de la Société Générale (et vice versa). Calculer ce taux sans risque seuil.

Montrer que le ratio de Sharpe de l'action L'Oréal est supérieur à celui du CAC40 ou de l'action Société Générale pour tout niveau du taux sans risque.

On note $r_f$ le taux sans risque. On rappelle que $(E_1, E_2, E_3) = (8.23\%, 7.51\%, 4.35\%)$ où 1, 2 et 3 correspondent respectivement aux actifs L'Oréal, Société Générale et CAC40 GR. On a par ailleurs $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (16.32\%, 33.35\%, 19.47\%)$.

On commence par comparer 2 et 3. 2 est supérieur à 3 si $\frac{E_2 - r_f}{\sigma_2} > \frac{E_3 - r_f}{\sigma_3} \Leftrightarrow (\sigma_2 - \sigma_3) r_f > E_3\sigma_2 - E_2\sigma_3$. Comme $\sigma_2 > \sigma_3$, la condition sur $r_f$ est $r_f > \frac{E_3\sigma_2 - E_2\sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = -0{,}08\%$. On arrive à la conclusion qu'avec les données de l'échantillon, si le taux sans risque est supérieur à - 8 points de base (en gros, si le taux sans risque est positif), alors la Société Générale est préférée au CAC 40, selon le critère du ratio de Sharpe.

Remarque : Comme $E_3\sigma_2 - E_2\sigma_3 = E_3\sigma_2 - E_2\sigma_2 + E_2\sigma_2 - E_2\sigma_3 = \sigma_2(E_3 - E_2) + E_2(\sigma_2 - \sigma_3)$, on peut alors ré-écrire la condition $r_f > \frac{E_3\sigma_2 - E_2\sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3}$ comme $\frac{E_2 - r_f}{\sigma_2} > \frac{E_3 - E_2}{\sigma_3 - \sigma_2}$, c'est-à-dire si le ratio de Sharpe de l'actif 2 est supérieur à la pente du segment de droite reliant les actifs 2 et 3, dans le plan écart-type, espérance des rentabilités. Si on note O, 2 et 3, les points associés à l'actif sans risque, 2 est supérieur à 3 si l'angle orienté $\widehat{3O2}$ est positif (la condition $\frac{E_2 - r_f}{\sigma_2} > \frac{E_3 - E_2}{\sigma_3 - \sigma_2}$ peut également s'interpréter en termes d'angles). Le taux sans risque $r_f$ est associé au point d'intersection entre la droite passant par les points 2 et 3 et l'axe des ordonnées.

Remarque : si le taux sans risque devient supérieur à 7.51%, alors le placement sans risque est préféré aux deux actifs risqués (CAC 40 et Société Générale) : leurs ratios de Sharpe sont négatifs.

Si l'on compare maintenant le titre L'Oréal au CAC40 GR ou à la Société Générale, on peut obtenir le point critique $r_f$ de la même manière. Mais la pente du segment de droite reliant L'Oréal au CAC40 GR ou à l'action Société Générale étant négative, le taux sans risque seuil est supérieur à l'espérance de rentabilité de l'action L'Oréal. On a vu que, dans ce cas, un investisseur ayant des préférences moyenne variance ne détient plus que du placement sans risque. Ainsi pour tout niveau du taux sans risque impliquant une détention non nulle en actif risqué, le ratio de Sharpe de l'action L'Oréal est supérieur à celui de la Société Générale ou du CAC 40 GR (à nouveau à partir des données déterminées par l'échantillon).

**9) Simulation aléatoire d'allocations de portefeuille avec contraintes de positivité et applications**

Si on interdit les ventes à découvert (pas d'allocation négatives), le problème d'optimisation devient plus compliqué puisqu'on rajoute des contraintes du type $\omega_i \geq 0$, $i = 1,2,3$ à la contrainte de budget $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$.

Au lieu de procéder de manière analytique, on va à nouveau utiliser Excel pour générer des allocations aléatoires (qui vont permettre d'explorer l'ensemble des portefeuilles). On utilise un algorithme dû à

Rubinstein et Melamed (1998). On génère trois variables uniformes sur l'ensemble des allocations définis par les contraintes, $U_1, U_2, U_3$ avec la fonction alea() On considère $-\ln(U_1), -\ln(U_2), -\ln(U_3)$. On définit $T$ comme la somme des trois termes précédents : $T = -\ln(U_1) - \ln(U_2) - \ln(U_3)$, puis $\omega_i = \frac{-\ln(U_i)}{T} 0, i = 1,2,3$. Ceci permet de simuler des allocations de portefeuille selon une loi uniforme sur l'ensemble défini par les contraintes ; tous les résultats mathématiques sont admis, mais il en résulte une méthode de simulation simple des allocations. Une autre méthode présentée dans Rubinstein & Kroese (2016) ou Onn & Weissman (2011) consiste à simuler des variables aléatoires uniformes, les ordonner et considérer les écarts entre deux valeurs consécutives. Elle évite d'utiliser la fonction logarithme, mais implique de mettre en œuvre un algorithme de tri.

- Rubinstein, R. Y., & Melamed, B. (1998). *Modern simulation and modeling* (Vol. 7). Wiley.
- Onn & Weissman (2011). Generating uniform random vectors over a simplex with implications to the volume of a certain polytope and to multivariate extremes. Annals of Operations Research.
- Rubinstein & Kroese (2016). *Simulation and the Monte Carlo method* (Vol. 10). John Wiley & Sons.

Remarque : on peut s'interroger sur l'utilité pratique d'un tirage uniforme dans l'ensemble des allocations. Si on n'a pas d'information a priori sur la composition du portefeuille optimal, il faut pouvoir explorer l'ensemble des allocations possibles. Si un outil de simulation concentre ses recherches (la probabilité de chercher dans une région donnée est très supérieure aux autres), on risque de perdre beaucoup de temps avant de trouver l'optimum.

*"I'm searching for my keys."*

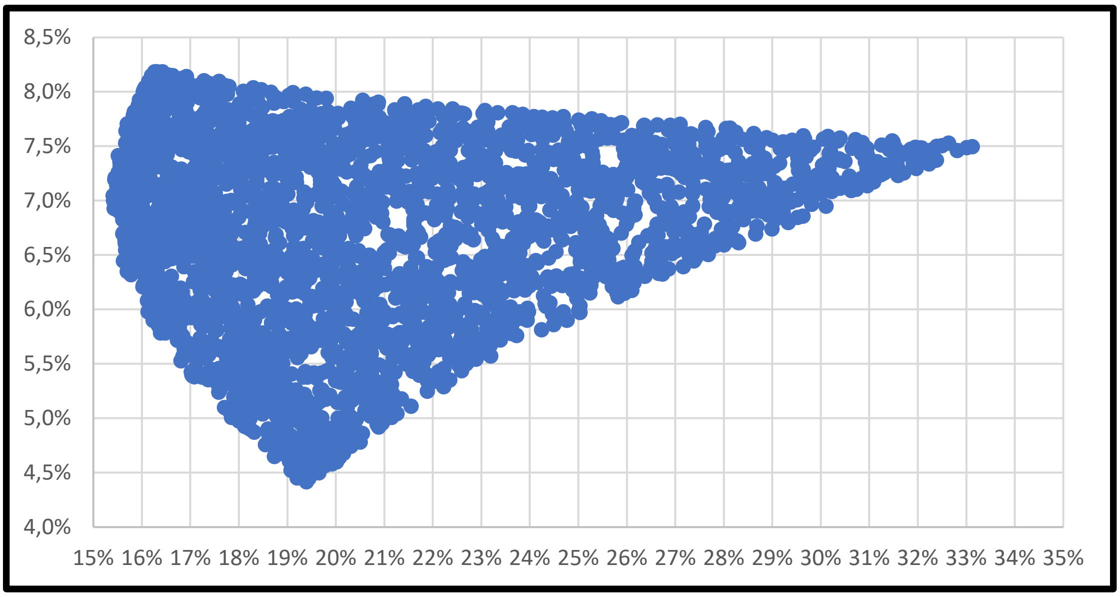
On se retrouve, sans forcément s'en rendre compte, face au problème du « streetlight effect » (David Freedman) ou « drunkard's search principle » (Abraham Kaplan) ou encore du « lampost problem » déjà vu en cours :

- https://en.wikipedia.org/wiki/Streetlight_effect
- https://www.rightattitudes.com/2016/02/26/drunkard-search-streetlight-effect/
- https://fr.slideshare.net/sajidiqbal5437923/the-streetlight-effect?qid=4de735f1-39bf-4545-9aec-4dd9634838d5&v=&b=&from_search=1 )

Pour chaque simulation d'allocation, on peut calculer l'écart-type des rentabilités, en prenant la racine carrée de $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\widehat{\Omega}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}$.

En ce qui concerne les espérances, on rappelle que les moyennes des rentabilités simples des actions L'Oréal, Société Générale et du portefeuille CAC40 : $(E_1, E_2, E_3) = (8.23\%, 7.51\%, 4.35\%)$. Pour chaque allocation, l'espérance de rentabilité du portefeuille est donnée par $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\begin{pmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{pmatrix}$.

Simuler 3000 allocations de portefeuilles, pour chacune calculer écart type et espérance de rentabilité. Représenter l'ensemble des points sur un graphique de la forme suivante :




Ensemble des portefeuilles composés de L'Oréal, Société Générale et CAC40 (écarts types en abscisses, espérances en ordonnées), allocations positives

**10) Portefeuille de variance minimale sous contrainte de positivité des allocations**

Trouver l'allocation associée au portefeuille de variance minimale et calculer l'écart-type associé. Comparer cet écart-type avec celui obtenu précédemment (sans contrainte sur les ventes à découvert).

En utilisant la fonction min d'Excel, on trouve que l'écart-type minimal est d'environ 15,391% (cela peut dépendre de la simulation, on peut utiliser la fonction F9 pour refaire des simulations et obtenir cette valeur (par exemple, en utilisant la fonction equiv). On trouve ainsi $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (69.34\%, 0\%, 30.66\%)$. Le portefeuille de variance minimale sature une des contraintes (il ne contient pas d'action Société Générale, donc uniquement deux actifs). Comme $15{,}391\% > 14{,}2\%$, le minimum de risque (variance) obtenu en interdisant des ventes à découvert est supérieur à celui obtenu sans contraintes. Il est donc nécessaire qu'au moins une contrainte soit saturée. Ceci permet de calculer explicitement la composition du portefeuille de variance minimale, en se ramenant au cas déjà étudié de deux actifs risqués.

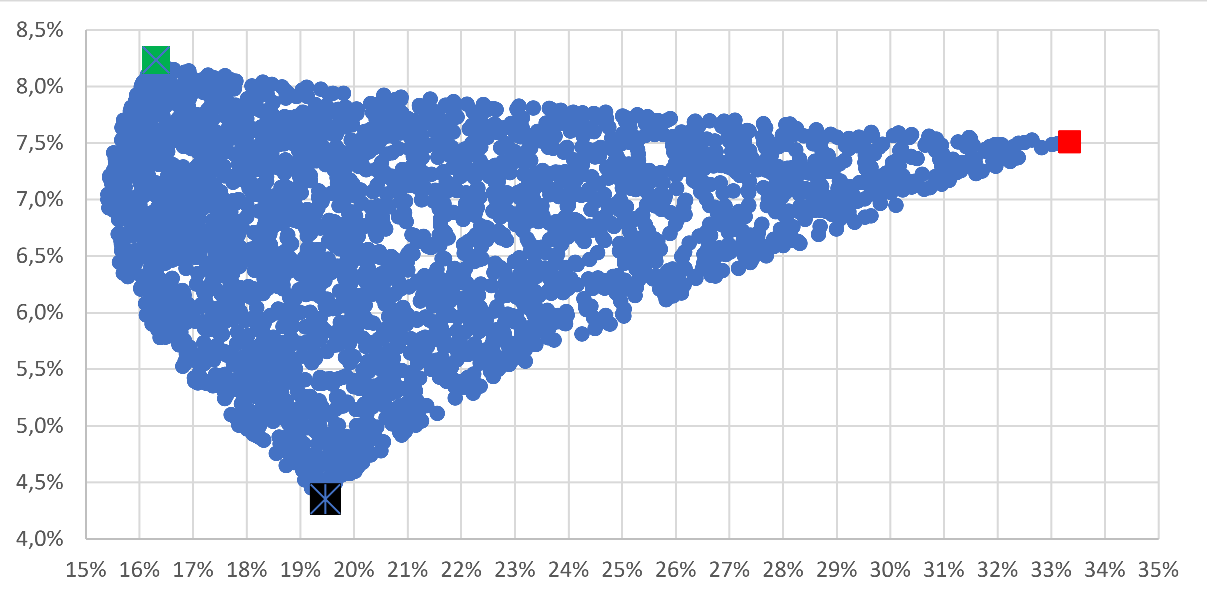
**11) Analyse des portefeuilles extrêmes**

Interpréter les trois points « extrêmes » qui apparaissent sur le graphique précédent.

- Point de risque maximal. On rappelle que la variance du portefeuille est donnée par : $\omega_1^2\sigma_{11} + \omega_2^2\sigma_{22} + \omega_3^2\sigma_{33} + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12} + 2\omega_1\omega_3\sigma_{13} + 2\omega_2\omega_3\sigma_{23}$. $\sigma_{12}$ est la covariance entre les rentabilités des titres 1 (L'Oréal et Société Générale) ; on peut l'écrire comme $\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ avec les notations du cours ($\rho_{12}$ est le coefficient de corrélation entre les rentabilités des titres 1 et 2, $\sigma_1$ et $\sigma_2$, les écarts types des rentabilités de ces titres) ; de même pour $\sigma_{13}$ et $\sigma_{23}$. On retrouve donc la formule de la variance vue en cours, appliquée à trois actifs : $\omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + \omega_3^2\sigma_3^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2\omega_1\omega_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2\omega_2\omega_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \leq \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + \omega_3^2\sigma_3^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2 + 2\omega_1\omega_3\sigma_1\sigma_3 + 2\omega_2\omega_3\sigma_2\sigma_3$. L'inégalité est liée à la positivité de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et parce que les trois coefficients de corrélations sont inférieurs à 1. Le dernier terme est un carré parfait $(\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2 + \omega_3\sigma_3)^2$. Comme chaque écart-type est inférieur au max des trois écarts types, $\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2 + \omega_3\sigma_3 \leq (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \times \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. On en déduit que le portefeuille de risque maximal, quand les allocations sont positives est associé à un investissement de 100% dans l'actif le plus risqué, ici l'action Société Générale.

L'allocation est alors $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0\%, 100\%, 0\%)$. Ce point est représenté en rouge dans le graphique ci-dessous.

- Point d'espérance maximale. Il s'agit du portefeuille d'espérance de rentabilité maximale. L'espérance de rentabilité est $\omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 + \omega_3 E_3 \leq (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \times \max(E_1, E_2, E_3) = \max(E_1, E_2, E_3)$. Ceci correspond à un investissement à 100% dans l'action L'Oréal. L'allocation est alors $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (100\%, 0\%, 0\%)$. L'écart-type de la rentabilité est celui de l'action L'Oréal, soit 16,32%. Ce point est représenté en vert dans le graphique ci-dessous.
- Point d'espérance minimale. Il s'agit du portefeuille d'espérance de rentabilité minimale. L'espérance de rentabilité est $\omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 + \omega_3 E_3 \geq (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \times \min(E_1, E_2, E_3) = \min(E_1, E_2, E_3)$. Ceci correspond à un investissement à 100% dans le CAC40. L'allocation est alors $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0\%, 0\%, 100\%)$. L'écart-type de la rentabilité est celui du CAC40 l'action L'Oréal, soit 19,47%. Ce point est représenté en noir dans le graphique ci-dessous.




Portefeuilles extrémaux (carrés de couleur) composés de L'Oréal, Société Générale et CAC40 (écarts types en abscisses, espérances en ordonnées), allocations positives

On peut vérifier que l'ensemble des représentations des portefeuilles dans le plan (écart-type, espérance) est délimité par les combinaisons convexes de deux des trois actifs considérés au départ. Par exemple, l'ensemble des points est délimité à droite par les combinaisons (à poids positifs) des actions L'Oréal et Société Générale. On remarque en effet que par continuité de l'application qui à $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ associe $(\sigma, E)$, un point intérieur du simplexe est un point intérieur dans l'ensemble des portefeuilles représentés dans le plan écart-type – espérance. Un point sur la frontière du simplexe (avec une des trois allocations nulles) va être sur la frontière de l'image du simplexe. Ceci permet de caractériser de manière analytique les bords de l'ensemble des portefeuilles atteignables dans le plan écart-type espérance.

**Remarque sur l'ensemble des portefeuilles à allocations positives** : On rappelle que l'ensemble des allocations admissibles $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est tel que $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ et $\omega_i \geq 0$, $i = 1,2,3$. On peut vérifier qu'il s'agit d'un triangle dont les sommets sont les trois allocations que l'on vient d'examiner $(100\%, 0\%, 0\%), (0\%, 100\%, 0\%), (0\%, 0\%, 100\%)$. Les distances entre chacun de ces sommets sont égales à $\sqrt{2}$. Il s'agit donc d'un triangle équilatéral. Chacun des côtés de ce triangle combine linéairement deux sommets. On voit alors que seules deux coordonnées sont non nulles, ce qui signifie que les côtés du triangle sont associés à des portefeuilles formés de deux des trois actifs initiaux. Au niveau mathématique, il s'agit du simplexe régulier (ou probabiliste) dans $\mathbb{R}^3$. L'ensemble des allocations vérifiant les contraintes est obtenu par combinaison convexe des trois sommets : $\omega_1(100\%, 0\%, 0\%) + \omega_2(0\%, 100\%, 0\%) + \omega_3(0\%, 0\%, 100\%)$ avec $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ et $\omega_i \geq 0, i = 1,2,3$

On peut aller plus loin en remarquant (avec un peu d'algèbre et de géométrie) que les lieux géométriques où une des trois allocations, disons $\omega_1$, est donnée, sont obtenues en considérant l'intersection avec le triangle, de droites parallèles au côté opposé au sommet $(100\%, 0\%, 0\%)$. Il en résulte que la densité marginale d'un niveau d'allocation donné $x$ est proportionnelle à la longueur du segment, soit $\sqrt{2} \times (1 - x)$ (utiliser le théorème de Thalès). Comme l'intégrale de la densité est égale à 1, on trouve que la densité marginale d'une allocation est égale à $2(1 - x)$. Il est donc plus probable d'observer des petites valeurs des allocations que des grandes. On peut vérifier ceci à partir des simulations et des fonctions statistiques ou de l'utilitaire d'analyse d'Excel).

### 12) Maximisation du ratio de Sharpe (d'après Kim et Lee (2016))

Cette question commence par une formalisation du problème. Elle consiste à travailler à partir des rentabilités et des éléments de la matrice de variance covariance des rentabilités pour obtenir des ratios de Sharpe de portefeuille en présence d'un actif sans risque. Ceci est à connaître pour le partiel de janvier 2020. En revanche, la seconde partie ne fera pas l'objet d'un exercice pour ce partiel et peut être laissée de côté pour les révisions. Elle concerne plus spécifiquement les étudiants des parcours FAM et FMGR et les étudiants intéressés par l'algorithmique et le traitement des données.

L'article de Kim et Lee (2016) considère la maximisation du ratio de Sharpe à partir d'une méthode de simulation.

- Kim & Lee (2016). A uniformly distributed random portfolio. *Quantitative Finance*.


Dans le cas que nous étudions, absence de contraintes sur les ventes à découvert, la méthode du Lagrangien permet d'expliciter la composition du portefeuille tangent. En présence de contraintes, par exemple de positivité des allocations, nous avons vu des méthodes de simulation uniforme dans le simplexe. Il existe aussi des méthodes, les plus couramment utilisées, car on a accès facilement à des algorithmes très performants, de minimisation de la variance sous contraintes linéaires d'égalité ou d'inégalité. Les méthodes de simulation d'allocation sont néanmoins très faciles à implémenter et permettent de traiter certaines situations où les contraintes sur les allocations ne sont pas linéaires.

Nous allons examiner cette approche dans le cas où le nombre d'actifs risqués est $n = 3$. La première partie suit fidèlement l'approche de Kim et Lee (2016). Une seconde partie traite de manière un peu plus générale des problématiques liées à la simulation d'allocations.

Si l'on s'intéresse aux ratios de Sharpe et/ou à la CML, il faut introduire l'actif sans risque. Son taux est noté $r_f$. Les allocations (en pourcentage de la richesse investie) sont notées $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, respectivement pour l'actif sans risque et pour les actifs risqués 1,2 et 3. On notera comme précédemment $E_1, E_2, E_3$, les espérances de rentabilité des actifs risqués. $\bar{E}_i = E_i - r_f, i = 1,2,3$ sont les espérances de rentabilité en excès du taux sans risque.

Écrire l'espérance de rentabilité en excès d'un portefeuille $\bar{E}_P = E_P - r_f$ en fonction de $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$ et de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. En l'absence de contraintes sur les ventes à découvert, quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre l'allocation $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ? En ce qui concerne les valeurs numériques de $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$, on les prendra ici égales à 8,23%, 7,51% et 4,35%.

$$E_P = \omega_0 r_f + \omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 + \omega_3 E_3$$

Comme la somme des allocations en % est égale à 1, $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, $\omega_0 = 1 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$. En reportant dans l'équation donnant $E_P$, on obtient $E_P = r_f + \omega_1(E_1 - r_f) + \omega_2(E_2 - r_f) + \omega_3(E_3 - r_f)$, ce qui donne finalement :

$$\bar{E}_P = \omega_1 \bar{E}_1 + \omega_2 \bar{E}_2 + \omega_3 \bar{E}_3$$

Contrairement au cas où le portefeuille n'est composé que d'actifs risqués, ce qui implique la contrainte $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, et en l'absence de contraintes sur les ventes à découvert ($\omega_1 \geq 0, \ldots$), $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. L'ensemble des allocations dans les actifs risqués $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est, dans notre contexte, $\mathbb{R}^3$.

Écrire l'écart-type de la rentabilité d'un portefeuille $\sigma_P$ en fonction de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et de la matrice de variance covariance $\Omega$. On pourra utiliser les notations matricielles (on notera alors $\omega$ la matrice colonne formée de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$) ou étendues.

Si on note $r_P$, la rentabilité du portefeuille et $r_1, r_2, r_3$, les rentabilités des titres risqués 1, 2, 3, alors

$$r_P = \omega_0 r_f + \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3$$

On rappelle que si $X$ est une variable aléatoire et $a$ une constante, $\sigma(X + a) = \sigma(X)$. Donc $\sigma_P = \sigma(r_P) = \sigma(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3)$. On peut donc utiliser les expressions déjà vues plus haut, puisqu'on ne prend en compte que les actifs risqués pour le calcul de l'écart-type : $\sigma_P^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + \omega_3^2\sigma_3^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2\omega_1\omega_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2\omega_2\omega_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3$ ou sous forme matricielle : $\sigma_P^2 = \omega'\Omega\omega$ où $\omega'$est la matrice transposée de $\omega$ et :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

En écriture matricielle, $\sigma_P = (\omega'\Omega\omega)^{\frac{1}{2}}$. En écriture étendue $\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + \omega_3^2\sigma_3^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2\omega_1\omega_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2\omega_2\omega_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3}$.

Calculer le ratio de Sharpe du portefeuille. Montrer que si on multiplie toutes les allocations dans les actifs risqués par un facteur de proportionnalité $\lambda$, $\lambda > 0$, on ne change pas le ratio de Sharpe. Donner une interprétation financière de cette propriété mathématique.

Le ratio de Sharpe est donné par $\frac{E_P - r_f}{\sigma_P} = \frac{\bar{E}_P}{\sigma_P}$. En remplaçant $\bar{E}_P$ et $\sigma_P$ par leurs expressions, on obtient :

$$\frac{\omega_1 \bar{E}_1 + \omega_2 \bar{E}_2 + \omega_3 \bar{E}_3}{\sqrt{\sigma_P^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + \omega_3^2\sigma_3^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2\omega_1\omega_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2\omega_2\omega_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3}}$$

Si on considère l'allocation $(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \lambda\omega_3)$, le ratio de Sharpe s'écrit :

$$\frac{\lambda\omega_1 \bar{E}_1 + \lambda\omega_2 \bar{E}_2 + \lambda\omega_3 \bar{E}_3}{\sqrt{\sigma_P^2 = \lambda^2\omega_1^2\sigma_1^2 + \lambda^2\omega_2^2\sigma_2^2 + \lambda^2\omega_3^2\sigma_3^2 + 2\lambda^2\omega_1\omega_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2\lambda^2\omega_1\omega_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2\lambda^2\omega_2\omega_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3}}$$

Après factorisation par $\lambda$ au numérateur et au dénominateur, on constate que le ratio de Sharpe est inchangé. Multiplier par un facteur positif les allocations dans les actifs risqués revient à se déplacer sur la demi-droite reliant le point associé à l'actif sans risque au point associé au portefeuille composé uniquement d'actifs risqués. Sur cette demi-droite, tous les portefeuilles ont le même ratio de Sharpe (qui est la pente de la demi-droite).

On va maintenant s'intéresser à la simulation aléatoire d'allocations $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Du fait de la propriété précédente les allocations $(\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$ et $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ où $\varpi_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}}, \varpi_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}}, \varpi_3 = \frac{\omega_3}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}}$, ont le même ratio de Sharpe. Le point de coordonnées $(\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$ est situé sur la sphère unité (de centre l'origine et de rayon 1) puisque $\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_3^2 = 1$ (soit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ avec les notations habituelles pour les coordonnées d'un point dans l'espace). On peut donc se contenter de faire des simulations aléatoires de points sur la sphère unité. C'est un problème classique en mathématiques ou en statistique en dimension 3 (le cas qui nous intéresse ici), 2 (étudié par Von Neumann) ou en dimension quelconque, ce qui est important pour les problèmes pratiques : Le nombre de titres concerné par une allocation de portefeuilles peut être de plusieurs centaines.Le site http://extremelearning.com.au/how-to-generate-uniformly-random-points-on-n-spheres-and-n-balls/ recense une vingtaine d'approches. Masaglia (1972) présente deux méthodes « naïves », l'une utilisant la simulation de variables uniformes dans un cube, l'autre la simulation de variables gaussiennes.

- Marsaglia (1972). Choosing a point from the surface of a sphere. The Annals of Mathematical Statistics.
- Muller (1959). A note on a method for generating points uniformly on n-dimensional spheres. Communications of the ACM.

La première méthode simple commence par une tirage aléatoire uniforme d'un point dans le cube $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$. Ceci revient à simuler trois variables aléatoires uniformes indépendantes dans $[-1,1]$, qui seront les coordonnées $(y_1, y_2, y_3)$ du point dans le cube. Si on utilise la fonction alea d'Excel, $y_1 =$ 2alea()$-1$, $y_2 =$ 2alea()$-1$, , $y_3 =$ 2alea()$-1$. On ne va ensuite conserver que les points à l'intérieur de la sphère inscrite dans le cube (sphère de rayon unitaire et de centre l'origine), d'où le nom de méthode rejet, appliqué à cette méthode : Si $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 > 1$, on oublie la simulation, si $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \leq 1$ (on a fait une tirage aléatoire uniforme dans la boule), on considère $\omega_1 = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}, \omega_2 = \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}, \omega_3 = \frac{y_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$ (on projette le point intérieur sur le bord de la sphère).

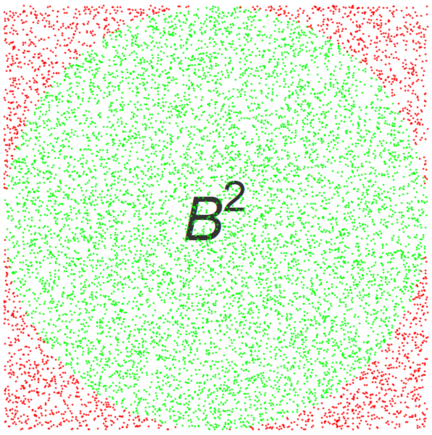



Illustration de la méthode de rejet en dimension 2.

Un des inconvénients de cette méthode de rejet est que l'on n'utilise pas tous les points $(y_1, y_2, y_3)$. Le taux d'acceptation (pourcentage de points non rejetés) est égal au rapport entre le volume de la boule $\frac{4\pi}{3} \approx 4{,}19$ et le volume du cube $2^3 = 8$, soit un taux d'acceptation de 52%. On perd donc environ une simulation sur deux, quand on considère trois actifs. Ce problème s'aggrave, dans des cas pratiques où l'on considère plusieurs centaines d'actifs. Pour $n = 10$ actifs, le volume de la boule est égal à $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ (où la fonction $\Gamma$ peut être vue comme une extension de la fonction factorielle aux nombres réels ou complexes ; pour tout $p \in \mathbb{N}, \Gamma(p+1) = p!$). Donc pour $n = 10$, $\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = 5! = 120$. Le volume de la boule est approximativement de 2,55. Le volume de l'hypercube (ses côtés sont de longueur 2) est quant à lui de $2^n = 1024$. Le taux d'acceptation chute alors à 0,25%. Cette méthode est donc inapplicable pour des problèmes pratiques, le taux d'acceptation convergeant très rapidement vers zéro.

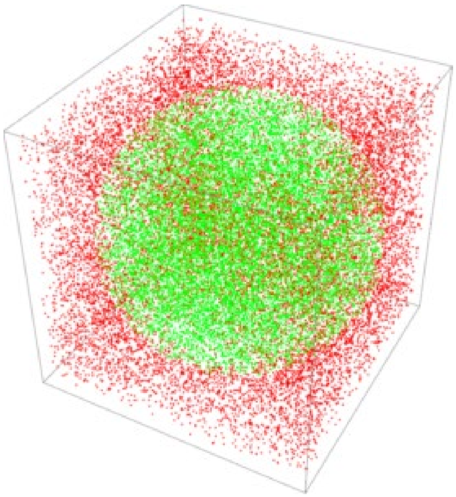


Illustration de la méthode de rejet en dimension 3

On peut bien sûr se demander pourquoi ne pas conserver tous les points de la simulation initiale. Quand on fait un tirage dans un cube (un carré, un cube, un hypercube, voir les transparents), on se rend compte que la probabilité (plus rigoureusement la densité de probabilité) associée à une direction est proportionnelle à la longueur du segment de droite issu de l'origine, passant par ce point et contenu dans le cube. Pour ceci illustrer de manière concrète, considérons deux points du cube de coordonnées (1,0,0) et (1,1,1). Le premier point est associé à un portefeuille constitué uniquement de l'actif 1. Le second point est associé à un portefeuille équipondéré. Le rapport des longueurs est ici de $\sqrt{3}$. Ceci implique que l'on va tirer 73% de fois souvent un portefeuille proche de l'équipondération qu'un portefeuille concentré en un actif. Pour $n = 1000$ actifs, le ratio est de $\sqrt{1000} \approx 32$. On va alors surexplorer les zones associées aux portefeuilles très bien diversifiés, pas forcément là où se trouve le portefeuille tangent.

Une seconde méthode classique (voir Marsiglia (1972), Muller (1959) consiste à simuler trois variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, indépendantes, $X_1, X_2, X_3$, puis à calculer $\varpi_1 = \frac{X_1}{X_1^2+X_2^2+X_3^2}$, $\varpi_2 = \frac{X_2}{X_1^2+X_2^2+X_3^2}$, $\varpi_3 = \frac{X_3}{X_1^2+X_2^2+X_3^2}$ . Cela permet d'obtenir une distribution uniforme sur la sphère ; en effet, la densité de $(X_1, X_2, X_3)$ est égale à $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2}\right)$ et aucune direction particulière sur la sphère n'est privilégiée.

Remarque : la normalisation de $X_1, X_2, X_3$ n'est pas nécessaire puisque le ratio de Sharpe associé à l'allocation $(X_1, X_2, X_3)$ est égal celui associé à $(\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$.

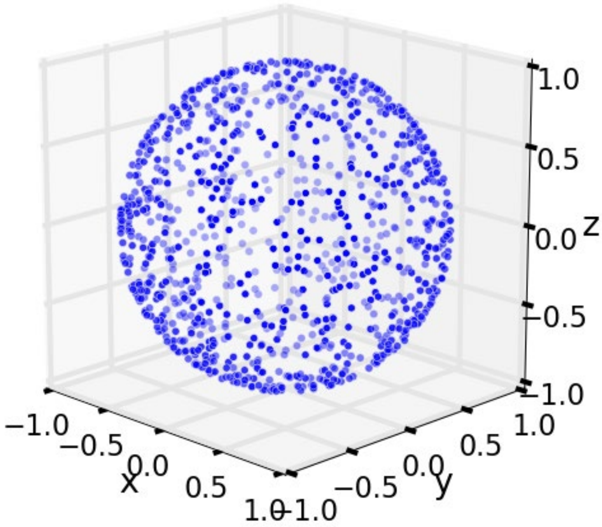
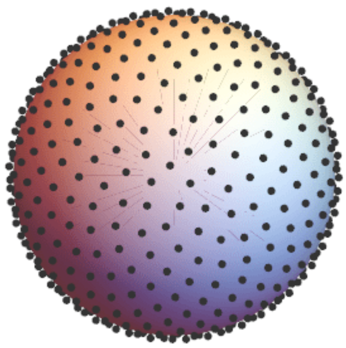



Illustration d'une simulation aléatoire uniforme sur une sphère

La méthode de simulation aléatoire uniforme que nous proposons n'est pas la seule envisageable. On peut par exemple chercher à répartir de manière équirépartie un nombre de points donnés sur une sphère. Il s'agit alors, par exemple, de placer ces points sur la sphère de manière que la plus petite distance entre deux de ces points soit maximale. Ce problème dit de packing est bien connu des mathématiciens. Il n'existe pas de solution exacte, mais de nombreux algorithmes permettant d'obtenir une solution raisonnablement proche de l'optimum (voir par exemple http://extremelearning.com.au/evenly-distributing-points-on-a-sphere/ ou https://bduvenhage.me/geometry/2019/07/31/generating-equidistant-vectors.html

Une méthode simple à implémenter est liée aux « spirales de Fibonacci ». On note $\Phi$ le nombre d'or. $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on va considérer $2n+1$ allocations $(\omega_1^i, \omega_2^i, \omega_3^i)$, $i = -n, -n+1, \dots, n-1, n$, construites à partir de coordonnées sphériques (latitude et longitude) par $\omega_1 = \cos(\mathrm{lat}_i) \times \cos(\mathrm{lon}_i)$, $\omega_2 = \cos(\mathrm{lat}_i) \times \sin(\mathrm{lon}_i)$, $\omega_3 = \sin(\mathrm{lat}_i)$ avec $\mathrm{lat}_i = \sin^{-1}\left(\frac{2i}{2n+1}\right)$, $\mathrm{lon}_i = \frac{2\pi i}{\Phi}$.



Distribution des points placés sur une sphère à partir de la méthode de la spirale de Fibonacci

Pour $n = 500$ (soit 1001 allocations de portefeuilles), le ratio de Sharpe maximal est égal à 0,5093. Il est possible d'obtenir la valeur exacte du ratio de Sharpe maximal. On peut montrer que la composition du portefeuille tangent est proportionnelle à $\Omega^{-1}\bar{E}$, où $\Omega^{-1}$ est l'inverse de la matrice de variance covariance $\Omega$ et $\bar{E}$, la matrice colonne formée des rentabilités en excès du taux sans risque des actifs risqués, $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$. On peut alors vérifier que le ratio de Sharpe optimal, en l'absence de contraintes sur les ventes à découvert est égal à $(\bar{E}'\Omega^{-1}\bar{E})^{\frac{1}{2}} = 0{,}5106$.

Références complémentaires sur la génération d'allocations d'actifs (voir également les références dans les transparents) :

- https://stats.stackexchange.com/questions/294278/how-to-get-a-uniformly-distributed-portfolio-allocation-vector
- https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_distribution#Random_number_generation
- https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_distribution
- https://quant.stackexchange.com/questions/45897/random-portfolios-vs-efficient-frontier

### 13) Méthode alternative de détermination des bêtas à partir du Médaf

On propose maintenant une méthode différente de détermination des bêtas, utilisant les concepts vus lors de la présentation du Médaf. On supposera que le CAC40 GR est le portefeuille « de marché ». On rappelle que les bêtas à un an de la Société Générale et de L'Oréal par rapport au CAC 40, estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires (voir TD4), sont respectivement de 1,59 et de 0,64.

Calculer les bêtas des actions Société Générale et l'action L'Oréal à partir des relations relatives à la SML.

Comme $E_i = r_f + \beta_i \times (E_{CAC} - r_f)$, on peut écrire $\beta_i = \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_{CAC}}$. Dans un TD précédent, on a déjà calculé $\bar{E}_{CAC} = E_{CAC} - r_f = 2{,}26\%$. De même, dans notre échantillon, on trouve $\bar{E}_i = 5{,}41\%$ et $6{,}14\%$, respectivement pour les actions Société Générale et L'Oréal.

Ceci donne un bêta de 2,40 pour la Société Générale et de 2,72 pour L'Oréal. L'avantage de cette méthode est sa simplicité, puisqu'elle n'implique que le calcul de rentabilité moyennes. Par ailleurs, la relation reliant espérance de rentabilité d'un titre et celle de l'indice de référence est exactement vérifiée. On retrouve un certain lien avec l'intuition que le bêta est une sensibilité de la rentabilité d'un titre par rapport à la rentabilité de l'indice de référence. Il est cependant à noter que l'on ne travaille qu'avec des moyennes historiques des rentabilités, il y a donc des fluctuations d'échantillonnage (c'est aussi le cas avec la méthode des moindres carrés ordinaires). Les rentabilités futures peuvent ne pas suivre « la » même loi que les rentabilités passées (problème de stationnarité). Plus généralement, il n'est pas évident que la moyenne historique soit une bonne prédiction de l'espérance de rentabilité (que l'on n'observe pas).

Il est aussi à noter que les bêtas estimés par cette approche sont très différents de ceux obtenus par la méthode des moindres carrés ordinaires, alors même que l'on part du même jeu de données.

### 14) Simulation des rentabilités

NB : Cette problématique ne sera pas abordée lors du partiel de janvier 2023.

On va s'intéresser à la simulation des trois rentabilités selon une distribution normale (multivariée), la matrice de variance covariance étant $\hat{\Omega}$. On commence par simuler $T = 19$ variables gaussiennes « indépendantes » centrées réduites. Utiliser la fonction Alea() https://support.office.com/fr-fr/article/alea-alea-fonction-4cbfa695-8869-4788-8d90-021ea9f5be73 puis la fonction loi.normale.inverse.n https://support.office.com/fr-fr/article/loi-normale-inverse-n-loi-normale-inverse-n-fonction-54b30935-fee7-493c-bedb-2278a9db7e13

> Soit LOI.NORMALE.INVERSE.N(ALEA();0;1)) pour construire $W$ un vecteur colonne gaussien de dimension 19. Utiliser les fonctions matricielles d'Excel pour construire une matrice colonne de dimension 3 égale à $\frac{1}{\sqrt{19}} R^* W$. On peut montrer que ce vecteur aléatoire a bien pour matrice de variance covariance $\hat{\Omega}$.

Une autre approche, intéressante quand le nombre d'actifs est inférieur au nombre de dates d'observation des rentabilités est d'utiliser la décomposition de Cholesky :

http://www.bionicturtle.com/learn/article/cholesky_decomposition

**15) Comparaison entre les matrices de variance covariance obtenue par simulation et $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}$.**

Énoncé à compléter. Cette question ne sera pas abordée lors du partiel de janvier 2023.