Thème 3 : Finance 2023 (traiter les exercices 1 à 4 et pour l'exercice 3, les questions 1) à 9)).

Exercice 1 : information, conditionnement, paris boursiers

On considère un marché boursier où, en l'absence d'information, les hausses et baisses sont indépendantes et équiprobables.

On fournit à quatre investisseurs l'information suivante : parmi les cinq séances boursières de la semaine à venir, il y aura deux hausses et trois baisses.

1) Quelle est la probabilité que la première hausse ait lieu le lundi, le mardi, le mercredi, le jeudi et le vendredi ?
2) Sanity check : vérifier que la somme des probabilités est égale à 1
3) Trouver les gains associés à chacun des quatre premiers jours pour construire un jeu équitable (espérances de gain identiques).

Exercice 2 : Indépendance, conditionnement, information

Cet exercice a plusieurs objectifs :

- Améliorer la compréhension des événements (dans la suite de l'analyse de l'erreur de conjonction ou « problème de Linda » analysé par Kahneman, ainsi que la transposition formelle des énoncés impliquant le futur).
- Manipuler les probabilités conditionnelles.
- Discuter de la valeur d'une information.
- De manière subsidiaire, sur le plan théorique :
  - Préliminaire à l'analyse de Blackwell sur les structures d'information et leur caractérisation.
  - Aperçu du « problème des futurs contingents » d'Aristote, central pour la compréhension de la contingence et de la vérité des énoncés impliquant le futur.

Les suites de hausses (H) et de baisses (B) de cours sont associées à des marches aléatoires.

On considère les 3 prochains mouvements et les événements :

- A : « Le prochain mouvement du marché sera une hausse ».
- B : « Il y aura deux hausses parmi les trois prochains mouvements ».
- C : « Il y aura au moins deux hausses parmi les trois prochains mouvements du marché ».
- D : « Le nombre de hausses ne sera pas égal à deux ».
- E : « Il n'y aura pas deux hausses parmi les deux derniers mouvements du marché ».
- F : « Si le premier mouvement est une hausse, il ne sera pas suivi par une baisse ou une hausse au cours des deux périodes suivantes ».
- G : « Si le premier mouvement est une hausse, il n'est suivi ni d'une hausse, ni d'une baisse ».

1) Expliciter ces événements et calculer leur probabilité.
2) Calculer les probabilités conditionnelles $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(A|D)$, $P(A|E)$, $P(A|F)$, $P(A|G)$.
3) Classer de manière intuitive la quantité d'information apportée par B, C, D, E, F, G en vue d'un pari sur le prochain mouvement du marché.
4) On suppose qu'il existe des paris (contrats contingents) sur le prochain mouvement du marché. Un contrat contingent à la hausse paye 1 si hausse et 0 sinon. Un contrat contingent à la baisse paye 0 si hausse et 1 sinon. Montrer que l'on peut construire un placement sans risque à l'aide des deux contrats précédents.

5) On note P_H la prime du contrat contingent à la hausse et P_B celle du contrat contingent à la baisse. On suppose qu'il existe un placement sans risque de taux d'intérêt nul. Relier P_H et P_B.
6) On suppose que l'on ne peut traiter qu'à la prochaine date. Quel prix seriez-vous prêt à payer pour connaître l'information E ?
7) On suppose que l'on ne peut traiter qu'à la prochaine date et qu'il existe un marché de prêts et d'emprunts sans risque au taux d'intérêt nul. Discuter de la valeur de l'information G.
8) On étudie des contrats C_p qui payent 1 avec probabilité p (et 0 sinon).
- On suppose que deux contrats associés aux mêmes probabilités de gain ont la même valeur (absence d'illusion stochastique).
- On suppose qu'il existe un marché des paris et on note P_p la prime associée au contrat C_p.
- Par exemple, la prime $P_H = P_{1/2}$ est associée au contrat $C_{1/2}$. P_H peut être égal à $\frac{1}{2}$, mais ce n'est pas nécessaire. Il existe fréquemment des primes de risque sur marchés. De manière plus générale, il n'est pas nécessaire de supposer que $P_p = p$.

On considère le contrat suivant : à la première étape, on a une probabilité $\frac{1}{3}$ d'obtenir 0. Dans le cas contraire (avec probabilité $\frac{2}{3}$) on rejoue une seconde fois et on a une probabilité $\frac{3}{4}$ d'obtenir 1 et $\frac{1}{4}$ d'obtenir 0. Ce type de contrat s'appelle une loterie composée et se représente sous facilement sous la forme d'un arbre. On note ce contrat $C_{2/3\otimes 3/4}$. Montrer que les contrats $C_{2/3\otimes 3/4}$, $C_{3/4\otimes 2/3}$ et $C_{1/2}$ sont associés aux mêmes distributions de perte.

9) On suppose qu'il existe des marchés de paris. Montrer que $P_{1/2} = P_{3/4} \times P_{2/3}$.
10) Montrer que $p < 1 \Rightarrow P_h < 1$ (il n'y pas d'intervalle de temps entre le paiement de la prime du pari et le paiement du résultat du pari).
11) Montrer que $P_{2/3} < P_{3/4}$.

Exercice 3 : actif risqué et actif sans risque, achat de titres à crédit (traiter les questions 1 à 9)

On considère deux placements, l'un est risqué, l'espérance du taux de rentabilité (aléatoire) r est notée E_r, l'écart-type σ_r. L'autre placement est sans risque, le taux de rentabilité correspondant est noté r_f. On supposera que $E_r > r_f$ et $\sigma_r > 0$. On va considérer des portefeuilles constitués à la date initiale (disons 0) de ces deux actifs. Le portefeuille est liquidé à une date future donnée, disons 1. Il n'y a pas de versement de dividendes entre ces deux dates. Les taux de rentabilité sont ici simples, c'est-à-dire taux d'accroissement de la valeur du portefeuille entre les dates 0 et 1.

1) Quel est l'écart-type du taux de rentabilité du placement sans risque ?
2) On note ω le poids du placement risqué dans un portefeuille constitué de l'actif sans risque et de l'actif risqué. Quel est le poids du placement non risqué ?
3) Écrire l'espérance du taux de rentabilité du portefeuille (on la notera E) constitué du placement risqué et du placement non risqué en fonction de ω.
4) Écrire l'écart-type du taux de rentabilité du portefeuille (on le notera σ) constitué du placement risqué et du placement non risqué en fonction de ω. On supposera $\omega \geq 0$.
5) Déduire des deux questions précédentes une relation entre l'espérance de rentabilité du portefeuille E et son écart-type σ.
6) Quelle est l'espérance de rentabilité du portefeuille quand $\sigma = 0$? quand $\sigma = \sigma_r$? A quelles valeurs de ω, cela correspond-il ?
7) On suppose que l'investisseur peut acheter des titres risqués à crédit à une banque. Ceci permet d'augmenter le niveau du risque du portefeuille, en achetant plus de titres risqués que

si l'investisseur ne pouvait compter que sur ses propres deniers. On suppose que le taux du crédit est égal à r_f, le taux sans risque et que la banque demande un dépôt de garantie égal à dont le taux est $h = 20\%$ du montant des titres achetés. Le dépôt de garantie est rémunéré au taux sans risque r_f. Quel est $\omega_{\max}$, le montant maximal de titres risqués qui peut être acheté (exprimé en pourcentage de la richesse initiale disponible) ?

8) Écrire la rentabilité de ce portefeuille en fonction de ω (en supposant $\omega \leq \omega_{\max}$), de r_f et r. Que peut-on en déduire à propos de la relation entre les espérances et écarts-types de la rentabilité, ainsi que sur la relation entre espérance de rentabilité E et risque (mesuré par l'écart-type σ) ?
9) Perte maximale de la banque quand la valeur des titres risqués devient nulle.

- On précise qu'outre le dépôt de garantie, la banque peut se saisir de tous les placements (sans risque) que l'investisseur aurait effectué à partir de sa mise de fonds initiale, mais pas au-delà (clause de responsabilité limitée de l'investisseur).
- On suppose en outre que tous les achats d'actifs risqués sont effectués à travers le service d'achat à crédit proposé par la banque.

Si la valeur des titres risqués était nulle demain, quelle serait la perte de la banque ayant fourni le service d'achat de titres à crédit, en cas de défaut de l'investisseur en fonction de ω $(1 \leq \omega \leq \omega_{\max})$?

10) Compte tenu du risque de non-remboursement du crédit, la banque propose un taux de crédit r_C supérieur à r_f. Si le taux du crédit r_c était supérieur à E_r, que pourrait-on dire de l'espérance de gain net sur une opération d'achat de titres à crédit ? Dans la suite de l'exercice, on supposera $r_f < r_C < E_r$.
11) Montrer que si $\omega \leq 1$, il est plus avantageux pour l'investisseur ne pas recourir à la possibilité d'acheter à crédit.
12) Pour $\omega > 1$, écrire la rentabilité du portefeuille, puis son espérance et son écart-type en fonction de ω et des autres données du problème.
13) Pour $\omega > 1$, donner la relation entre l'espérance de rentabilité du portefeuille et son écart-type.
14) On considère le plan (σ, E) où les abscisses σ sont associées à l'écart-type de la rentabilité du portefeuille et les ordonnées à l'espérance de rentabilité E. Représenter le graphe associé à l'ensemble des portefeuilles pour les différentes valeurs possibles de ω.

Exercice 4 : Deux actions parfaitement corrélées

On considère deux actions A et B dont les rentabilités sont parfaitement corrélées. Les rentabilités attendues sont respectivement de 8 % et 10 % et les volatilités correspondantes sont de 10 % et de 20%. On notera x la proportion de la richesse investie dans l'action A et on considérera des portefeuilles composés de A et de B.

1) Écrire la relation entre rentabilité attendue du portefeuille et x
2) Écrire la relation entre l'écart-type du taux de rentabilité du portefeuille et x.
3) Trouver une composition de portefeuille qui annule le risque.
4) Calculer l'espérance de rentabilité du portefeuille précédent.
5) Établir la relation entre la rentabilité attendue du portefeuille et son écart-type quand l'espérance de rentabilité est supérieure à celle qui vient d'être calculée.
6) Même question quand l'espérance de rentabilité est inférieure.
7) Quel est alors le portefeuille préféré par les investisseurs ?

8) On suppose que le taux d'intérêt sans risque en vigueur sur le marché est égal à 5%. Quelle stratégie peut être mise en œuvre par les investisseurs ?
9) Est-elle compatible avec un équilibre de marché ?

Exercice 5 : « Dutch Book », options digitales et probabilités « risque-neutre »

Contexte général : la valeur de marché des cryptoactifs représente environ 300 milliards de dollars (septembre 2020, dont environ 200 milliards de dollars pour le bitcoin), à comparer par exemple à 1700 milliards de dollars pour la capitalisation boursière d'Amazon. Comme les marchés de devises, il fait l'objet d'une activité de négociation importante, encouragée par une « volatilité » importante des cours. Environ 20 milliards de dollars de bitcoins sont échangés quotidiennement (à nouveau avec des fluctuations importantes du volume d'échanges). A titre de comparaison, le volume quotidien d'échanges pour les devises traditionnelles était de 6 600 milliards de dollars pour le mois d'Avril 2019 (https://www.bis.org/statistics/rpfx19_fx.pdf). En France, depuis 2019, la fiscalité des plus-values de cession (pour les opérations occasionnelles) s'est rapprochée de celles des autres actifs financiers (flat tax à 30%).

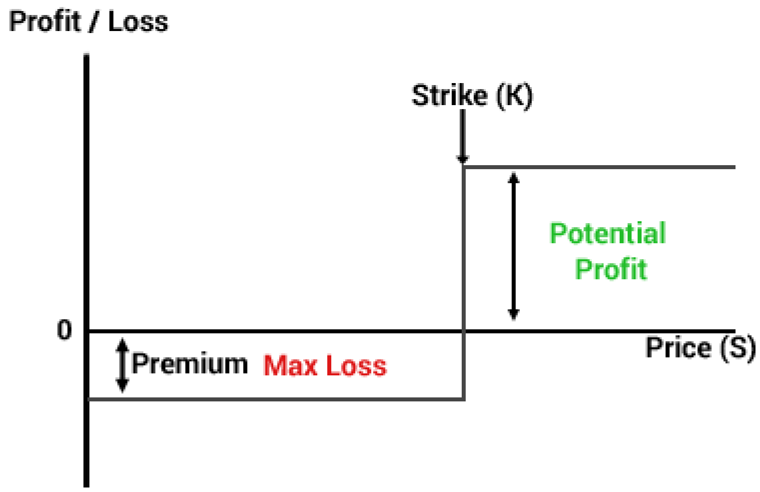
Evolution du cours du bitcoin sur différentes plates-formes de trading (Bitstamp, Coinbase, Gemini) le 14 octobre 2020. https://fr.tradingview.com/symbols/BTCUSD/ On remarque de légers décalages de cours entre les plates-formes.

Il existe des « produits dérivés » sur les cryptomonnaies, contrats sur différences (CFD -Contract For Differences) et des options digitales (binary options ou « all or nothing options »). Ces produits permettent de parier sur l'évolution des cours, avec une moindre mise initiale qu'un achat au comptant (fort effet de levier). En France, l'Autorité des Marchés Financiers (AMF) a fortement restreint la publicité sur de tels produits (https://www.amf-france.org/fr/espace-epargnants/proteger-son-epargne/forex-options-binaires-un-marche-fuir/forex-options-binaires-trading-haut-risque). L'AMF décrit très simplement le principe d'une option binaire : *Les options binaires sont des « instruments » de trading qui permettent de spéculer sur une très courte durée (quelques minutes, quelques heures…) sur l'évolution d'un titre (une action, une monnaie, un indice boursier, etc.) avec deux résultats possibles : la hausse ou la baisse de ce titre. Si le « trader » a bien anticipé cette évolution, il perçoit un gain déterminé à l'avance ; à l'inverse, s'il se trompe, il perd l'intégralité de sa mise de départ à l'expiration de l'option binaire*.

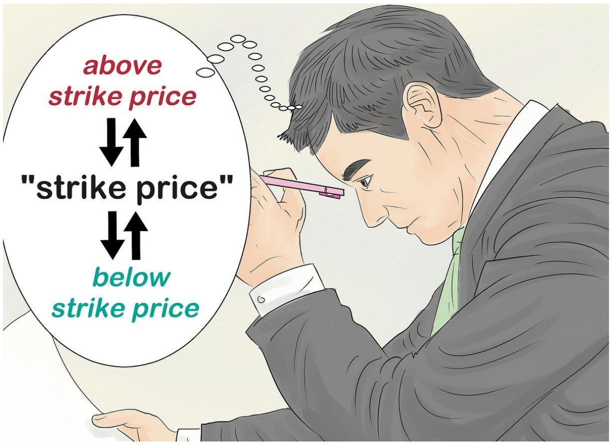
Il est à noter que ces marchés ne sont pas sans danger pour les particuliers. Outre les risques importants d'escroquerie, une étude de 2014 de l'AMF indique que « *9 clients sur 10 investissant sur le Forex et/ou les CFD via des sites de trading autorisés ont perdu de l'argent. La perte moyenne a été de 10 900 € par client* ».

Caractéristiques des options binaires :

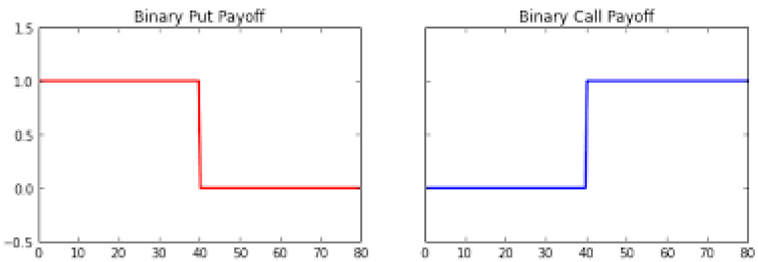
Dans le cas d'une option binaire de type « call », si le cours de l'actif financier (de la devise, du cryptoactif) atteint ou dépasse un certain seuil, appelé « strike » (ou strike price ou prix d'exercice) avant une date d'échéance (expiry date), l'acheteur reçoit une somme prédéterminée. Pour les devises, l'échéance peut être très courte, de l'ordre de 30 secondes. En contrepartie, une prime doit être versée. Il s'agit en fait d'un pari que le cours de l'actif dépasse le strike avant l'échéance. Le montant du pari est ce qui est promis à l'acheteur en cas de succès.



Profil de gain/perte d'un binary call : Si le cours n'atteint pas le strike, la perte est égale au montant de la prime du pari. Dans le cas contraire le gain net est le montant du pari moins la prime.



Un binary call est un pari à la hausse, un binary put, un pari à la baisse.



Différence entre les structures de paiement d'un binary call et d'un binary put.

Données de l'exercice :

On note e_t le cours du cryptoactif à la date $t = 0,1,2$ (pour simplifier l'exercice et les notations, on suppose qu'il n'y a que trois dates de négociation). La date courante est $t = 0$. Les dates d'échéance pour les options binaires sont $t = 1,2$. On suppose $e_0 = 100\$$ (on omettra de faire référence à la devise par la suite). Les dates $t = 0,1,2$ sont supposées très rapprochées et on négligera les effets liés à l'actualisation des flux.

On note $m = 1$, l'échelon de cotation (notch ou tick size) est l'écart minimal entre deux cours consécutifs ? Cet échelon minimal varie de manière selon les marchés (à titre indicatif, l'échelon de cotation est d'un centime pour le bitcoin).

1) Représenter les évolutions possibles du cours du bitcoin sous la forme d'un arbre, en supposant que le cours peut soit rester constant, soit augmenter ou diminuer d'un tick.
2) On s'intéresse d'abord aux contrats d'échéance $t = 1$. On suppose que seuls les calls digitaux de prix d'exercice 100 et 101 (dits « en dehors de la monnaie ») sont traités (négociés) et que seuls les puts digitaux de prix d'exercice 99 et 100 sont traités. On supposera qu'un call digital de strike 101 et de « nominal » 1 paye 1 si le prix du bitcoin à la date 1 est supérieur **ou égal** à 101. Ecrire les paiements des deux calls digitaux et des puts digitaux en fonction de e_1 pour un paiement en cas de succès de 1.
3) Décrire l'ensemble des événements aléatoires.
4) On note $c_{1,k}$ le prix d'un call digital d'échéance 1 et de strike k. Montrer par un raisonnement financier que $c_{1,101} \leq c_{1,100}$.
5) On note $p_{1,k}$ le prix d'un put digital d'échéance 1 et de strike k. Montrer que $c_{1,100} + p_{1,99} = 1$ et que $c_{1,101} + p_{1,100} = 1$.
6) Montrer que l'on peut définir des probabilités des événements élémentaires, à partir des calls et puts digitaux.
7) On considère maintenant les contrats d'échéance $t = 2$. Compléter le tableau suivant où chaque colonne est associée à un contrat et chaque ligne est associée à une trajectoire des prix dans l'arbre. Par exemple, la première colonne concerne le call digital d'échéance 1 et de strike 101. On a un paiement de 1 pour les trois trajectoires passant par le prix 101 à la date 1

	C,1,101	**C1,100**	**P,1,100**	**P,1,99**	**C,2,102**	**C,2,101**	**C,2,100**	**P,2,98**	**P,2,99**	**P,2,100**
(1;1)	1									
(1;0)	1									
(1;-1)	1									
(0;1)	0									
(0;0)	0									
(0;-1)	0									
(-1;1)	0									
(-1;0)	0									
(-1;-1)	0									

8) Cette question suppose une familiarité avec les matrices et les opérations sur les matrices. Elle présente plus d'intérêt théorique, mais est plus longue à traiter que les précédentes. La question est précédée d'explications, qui servent aussi de complément de cours. Les questions à traiter sont en gras. On considère maintenant des portefeuilles où l'on peut acheter et vendre des options digitales. On va chercher à constituer des portefeuilles de manière à

dupliquer des paiements sur les trajectoires : par exemple un paiement de 1 en cas de baisse entre les dates 0 et 1, suivie d'une hausse entre les dates 1 et 2 (et un paiement de zéro sinon). Ce paiement est conditionné à la trajectoire (-1 ;1). Il peut se représenter sous la forme du vecteur colonne suivant (où chaque ligne correspond à une trajectoire, les trajectoires étant rangées comme dans le tableau de la question précédente) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par duplication, on entend que le portefeuille d'options digitales va aussi procurer un paiement de 1 en cas de baisse entre les dates 0 et 1, suivie d'une hausse entre les dates 1 et 2 (et un paiement de zéro sinon). On se limitera aux 9 options digitales suivantes pour construire des portefeuilles :

C1,100	**P,1,100**	**P,1,99**	**C,2,102**	**C,2,101**	**C,2,100**	**P,2,98**	**P,2,99**	**P,2,100**

On note $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \\ \omega_8 \\ \omega_9 \end{pmatrix}$, le vecteur dont les coordonnées sont les quantités détenues (en positif si achat, en négatif si vente) dans les différentes options digitales. On note M, le tableau (matrice) des paiements des calls et puts digitaux (avec 9 lignes et 9 colonnes) qui vient d'être complété. On vérifiera (ou on admettra selon ses souvenirs et connaissance d'algèbre linéaire. Que le vecteur de paiement obtenu avec la procédure précédente s'écrit $M\vec{\omega}$ (produit d'une matrice (9x9) par un vecteur colonne (9x1) donne un vecteur colonne (9x1). Résoudre le problème précédent revient à trouver $\vec{\omega}$, tel que $M\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. C'est un système de neuf équations à neuf inconnues $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \\ \omega_8 \\ \omega_9 \end{pmatrix}$. La solution de ce système d'équations est donnée par : $\vec{\omega} = M^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ où M^{-1} est l'inverse de la matrice des paiements M.

Excel permet d'inverser très simplement des matrices avec la fonction inversemat (voir la syntaxe sur le support de Microsoft Office).

- **Recopier le tableau des paiements précédent et utiliser cette fonction inversemat.**
- On peut vérifier que chaque colonne du tableau M^{-1} permet bien de dupliquer un actif qui paye 1 si une trajectoire particulière est réalisée et 0 sinon. A titre d'exemple, on trouvera (vérifiera) que la septième colonne de M^{-1} s'écrit comme $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.
- **Vérifier que** $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$**. Pour cela, on utilisera la fonction produitmat d'Excel (voir la syntaxe sur le support de Microsoft Office).**
- **Vérifier que le produit ainsi dupliqué correspond à un pari d'une baisse (entre les dates 0 et 1) suivi d'une hausse (entre les dates 1 et 2).**
- **Vérifier directement qu'un achat de call digital d'échéance 2 et de strike 100, combiné à une vente de call digital d'échéance 1 et de strike 100 est associé au même paiement.**
- **Quelle est la mise de fonds pour ce pari ?**
- **Que se passe-t-il si cette mise de fonds est inférieure à zéro ? Montrer que l'on peut réaliser une opération particulièrement profitable (appelée opportunité d'arbitrage).**
- **On considère maintenant un portefeuille où l'on parie 1 sur chaque trajectoire possible. Quel est le vecteur de paiement résultant ?**
- **Supposons qu'il existe un compte de dépôt (à taux d'intérêt nul) où le découvert (toujours à taux nul) est autorisé. Montrer que le montant à investir pour recevoir**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Via le système de paris est nécessairement égal à 1.

- **Que se passe-t-il si le montant à investir pour dupliquer un actif qui paye 1 si une trajectoire particulière est réalisée et zéro sinon, est négatif ?**
- **On suppose que les prix contingents aux trajectoires sont tous positifs. Montrer que les prix des actifs associés aux trajectoires (événements élémentaires) forment une probabilité.**