Thème 1 Finance 2022 :

Prérequis pour le TD : loi binomiale (https://www.math93.com/index.php/lycee/139-premiere-es/810-premiere-es-l-loi-binomiale), espérance, variance, écart-type, indépendance, probabilité conditionnelle, probabilités totales. Il faut un ordinateur et Excel par étudiant.

Exercice 1 : Stratégies boursières et évolution de la valeur d'un portefeuille.

On considère l'évolution suivante du prix d'un actif : $P_t = 100{,}105{,}95{,}80{,}100{,}110{,}120{,}110$ pour $t = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7$. Le taux sans risque est de 1%. La valeur initiale du portefeuille est égale à 100.

Calculer l'évolution de la valeur du portefeuille pour des stratégies autofinancées de type « buy and hold », « contrarian » et « momentum ». Pour ces trois stratégies, on suppose que l'on investit la richesse initiale dans l'actif (risqué).

Exercice 2 : dynamique des cours boursiers, risque et information

On considère le modèle simplifié d'évolution des cours : probabilité de hausse de 1 € avec probabilité ½, de baisse de 1 € avec probabilité ½ et variation des cours indépendante.

1) Représenter l'arbre d'évolution des cours sur quatre périodes (on représentera les écarts à partir du cours initial, dont la valeur est sans importance pour la suite).
2) Calculer l'écart-type de la richesse pour les horizons $1{,}2{,}3{,}4$ périodes.
3) On se place à la date 2. Calculer le risque de la richesse (mesuré par son écart-type) pour les horizons $1{,}2$ (correspondant maintenant aux dates $2{,}3$. Est-ce que le risque dépend de la richesse courante et/ou des richesses passées.
4) On considère une date courante entière t et une date de mesure du risque (toujours entier), T, avec $T \geq t$. Donner l'expression du risque du placement, mesuré comme l'écart-type en T de la richesse (ou de son accroissement).
5) On considère maintenant que l'on dispose d'une information sur la valeur du cours à la date 4. Il pourrait par exemple s'agir d'une information privée relative à une offre publique d'achat (OPA) à cette date, portant sur les actions d'une société cotée ; ou bien du cas d'une obligation (sans risque de défaut) dont la valeur terminale est la valeur nominale. De manière plus « romantique », il pourrait s'agir du devin intervenant en théorie de la décision dans le paradoxe de Newcomb.

   Etudier l'évolution du risque (toujours représenté par l'écart-type) et la présence éventuelle d'opportunités d'arbitrage (on pourra supposer qu'il existe un placement sans risque au taux nul) selon que la valeur terminale est $0{,}2$ ou 4 (les cas -2 ou -4 s'analysent par symétrie à partir des deux cas précédents).

Exercice 3 : probabilités de trois hausses ou baisses consécutives (événements extrêmes, probabilités conditionnelles).

Cet exercice est inspiré du « paradoxe » des trois pièces de monnaie, ou « paradoxe » de Galton. On considère un marché financier où les cours d'une action peuvent évoluer à la hausse ou à la baisse de manière indépendante avec équiprobabilité.

1) Calculer le nombre de scénarios possibles
2) Quelle est la probabilité de chaque scénario ?
3) En déduire la probabilité d'observer trois hausses ou baisses consécutives.

4) Calculer la probabilité d'observer trois hausses ou baisses consécutives par la méthode de dénombrement (rapport du nombre de cas favorables au nombre total de cas).
5) Sachant que l'on observe deux hausses pour une paire de dates quelconque (soit $(1,2), (1,3), (2,3)$), calculer la probabilité d'observer une hausse la date restante.
6) Quelle est la probabilité que l'on observe deux hausses pour une paire de dates quelconque ?
7) Calculer la probabilité d'observer trois hausses (ou baisses) consécutives par conditionnement.
8) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins deux hausses, deux baisses, deux baisses ou deux hausses ?
9) Sachant qu'il y a eu au moins deux hausses, quelle est la probabilité que la troisième variation de cours soit une hausse.
10) En déduire la probabilité de trois hausses en utilisant le conditionnement précédent.
11) Dans le calcul précédent, préciser l'événement conditionnant et le comparer aux événements précédents.

Exercice 4 : taux de change aléatoire et résultat espéré d'une entreprise exportatrice (on utilise uniquement des probabilités discrètes).

Considérons le résultat d'une entreprise qui exporte pour 100 $ aux US.

On note e_t le nombre de $ pour acheter un €. Aujourd'hui, $e_0 \approx 1{,}17\$$. Le résultat R en € est donné par : $R = 100/e_1$, où e_1 est le taux de change « pour l'année à venir ».

On suppose que e_1 peut varier de $\alpha = \pm 30\%$ autour de e_0 de manière équiprobable. On a donc : $P\big(e_1 = e_0(1+\alpha)\big) = P\big(e_1 = e_0(1-\alpha)\big) = \frac{1}{2}$.

1) Calculer l'espérance du taux de change futur.

$E[e_1] = \frac{1}{2} \times e_0(1+\alpha) + \frac{1}{2} \times e_0(1-\alpha) = e_0$.

2) Calculer l'espérance du résultat futur. Discuter ce résultat.

Exercice 4 bis : taux de change aléatoire et résultat espéré d'une entreprise exportatrice (nécessite de savoir calculer une intégrale)

Considérons le résultat d'une entreprise qui exporte pour 100 $ aux US.

On note e_t le nombre de $ pour acheter un €. Aujourd'hui, $e_0 \approx 1{,}17\$$. Le résultat R en € est donné par : $R = 100/e_1$, où e_1 est le taux de change « pour l'année à venir ».

On suppose que e_1 peut varier de $\alpha = \pm 30\%$ autour de e_0 de manière uniforme (c'est une hypothèse discutable d'un point de vue statistique et économique, choisie ici par commodité de calcul).

1) Calculer l'espérance du taux de change futur.
2) Calculer l'espérance du résultat futur. Discuter ce résultat.

Exercice 5 : marche aléatoire et gains cumulés.

On peut faire les deux premières questions sans utiliser Excel. Les questions 3 et 4 font appel à la fonction LOI.BINOMIALE.N d'Excel : https://support.microsoft.com/fr-fr/office/fonction-loi-binomiale-n-c5ae37b6-f39c-4be2-94c2-509a1480770c Les questions 5 et 6 font appel à la fonction ALEA d'Excel : https://support.microsoft.com/fr-fr/office/alea-alea-fonction-4cbfa695-8869-4788-8d90-021ea9f5be73 (on peut utiliser d'autres outils informatiques, Python …)

On joue à pile ou face. Si on tombe sur pile, $B_i = 1$, si on tombe sur face $B_i = 0$. La probabilité de tomber sur pile est $p = \frac{1}{2}$. Si on parie sur pile et que pile sort, on gagne 1 euro, si face sort on perd 1 euro (et vice versa si on parie sur face). On va considérer plusieurs stratégies :

a. Buy and hold (on achète et on garde le titre, ce qui est équivalent à parier chaque jour à la hausse) : On joue toujours sur pile.
b. Momentum : si pile est apparu, on parie sur pile le coup suivant (vice versa avec face)
c. Contrarian : si pile est apparu, on parie sur face le lendemain (vice versa si pile est apparu)

1) Calculer la probabilité conditionnelle et l'espérance conditionnelle de gain au coup suivant pour chacune des stratégies.
2) Trouver l'espérance de gain au bout de $n = 1024$ tirages (**<u>sans compter le premier tirage</u>**), la variance du gain cumulé, ainsi que l'écart-type. Comment l'écart-type du gain cumulé évolue-t-il avec n ?
3) Calculer la probabilité que le gain de la stratégie a soit positif ou nul.
4) Quelle est la perte maximale pour $n = 1024$. Calculer la probabilité que la perte finale soit supérieure à 50% de la perte maximale (utiliser la fonction loi binomiale d'Excel).
5) Utiliser la fonction ALEA d'Excel pour simuler l'évolution des gains et pertes pour chacune des stratégies (travail seul ou par groupes de deux) pour $n = 1024$. Quel est le classement des trois stratégies ?
6) Répétition de simulations. On recommence la procédure précédente soixante fois. Trouver la proportion de cas où la stratégie a arrive en premier, en second et en dernier.

Exercice 6 : Tirage avec une pièce truquée : méthode d'extraction de Von Neumann

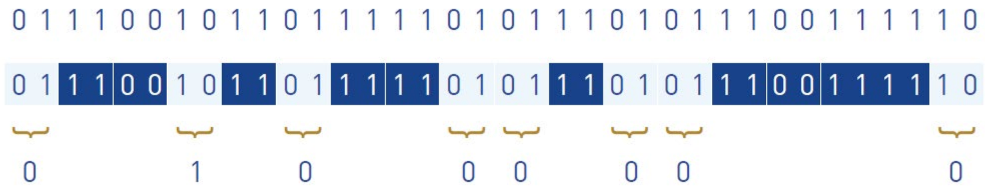
John Von Neumann et Oskar Morgenstern sont (notamment) les auteurs éponymes du théorème caractérisant les préférences économiques en présence d'incertitude

<u>Contexte</u> : Dans les probabilités étudiées au Lycée, on considère souvent l'égale répartition comme donnée. Pour une pièce « équilibrée », la probabilité de tomber sur pile ou face est donc de ½. On parle alors de la « conception classique » des probabilités.

Un article de Von Neumann permet de réaliser des tirages équiprobables avec une pièce « non équilibrée » (pour laquelle on n'a pas de connaissance de la probabilité de tomber sur pile).

Soit une pièce dont on ne sait pas si elle est équilibrée. On note $p \in]0,1[$, la probabilité (inconnue, pas forcément égale à $\frac{1}{2}$) qu'elle tombe sur pile. On utilise la procédure suivante :

- On note B_1 le résultat du tirage, avec $B_1 = 1$ si la pièce tombe sur pile et 0 si la pièce tombe sur face.
- On procède à un nouveau tirage, on note B_2, le résultat du nouveau tirage (supposé indépendant du premier tirage) : Si la pièce n'est pas tombée à nouveau du même côté ($B_1 \neq B_2$), alors on valide le premier tirage.
- Si la pièce retombe du même côté, on annule la procédure, on oublie les deux tirages et on recommence à zéro.



Extracteur de Von Neumann

Calculer la probabilité que le résultat de cette procédure soit « pile ».

Remarques : l'étude du lancer de pièces, même « équilibrées », montre que la probabilité pour une pièce de retomber sur pile, sachant qu'elle a été lancée du côté pile n'est pas $\frac{1}{2}$ (voir transparents du cours). Ce n'est que pour des jeux « idéalisés » que l'on a équiprobabilité, par la symétrie du jeu.

Dans le cas de la finance, on a quelques éléments théoriques, validés par l'analyse des données boursières, permettant de penser que la fréquence des hausses est très proche de la fréquence des baisses. Par ailleurs, la probabilité conditionnelle d'une hausse des cours sachant une hausse la veille est proche d'un $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'on est « proche » d'une situation de l'indépendance postulée dans l'énoncé de l'exercice.

Exercice 7 : retour sur le lancer de pièce biaisé.

On note $p \in]0,1[$, la probabilité que la pièce tombe sur pile.

1) Calculer la probabilité que la pièce tombe au moins une fois sur pile en deux lancés indépendants.
2) Calculer cette probabilité en utilisant le principe d'indifférence de Laplace (soit l'équiprobabilité ou dans notre cas $p = \frac{1}{2}$.
3) Calculer cette probabilité selon l'approche de Bayes, qui suppose une distribution a priori uniforme dans $[0,1]$ sur p (dans ce cas la fonction de densité est constante et prend la valeur 1 sur l'intervalle $[0,1]$; Le calcul nécessite un calcul d'intégrale). Comparer avec le résultat précédent

Remarque : dans les jeux de hasard, on considère le plus souvent des situations symétriques entre les gains et les pertes. Ce n'est néanmoins pas toujours le cas. Dans la roulette française, il y a trente-sept cases, numérotées de 0 à 36. La case 0 est associée à la banque. Si l'on parie sur rouge ou bien sur noir, la probabilité de gain est donc de $\frac{18}{37} < \frac{1}{2}$.

Sur les marchés boursiers, il n'y a pas non plus symétrie des hausses et des baisses. Quand on considère des données boursières, on constate que les baisses sont le plus souvent moins fréquentes que les hausses.

Exercice 8 : probabilités de suites de hausse et de baisse des cours boursiers en l'absence d'indépendance

Une hausse (respectivement une baisse) des cours à une date donnée est codée par 1 (respectivement 0). Une suite de hausses et de baisses est alors une suite binaire. Une valeur égale à 1 peut être vue comme la réalisation d'un événement particulier, par exemple « hausse du cours d'une action un jour donné » ou bien « pluie un jour donné ».

a) On considère les quatre suites de valeurs suivantes : 11111111, 00000000, 10101010, 10010101. On vous propose de prolonger les suites de nombres plus haut. Quelles seraient les valeurs raisonnables dans chaque cas ? sur quoi reposerait votre argumentation (induction, heuristique de représentativité, fréquences d'apparition et suites indifférentes) ? Quel degré de certitude donneriez-vous à votre réponse ?
b) On se place maintenant dans le cas d'une suite aléatoire de 1 et de 0 avec équiprobabilité et indépendance, comme dans l'exemple canonique du lancer d'une pièce non biaisée.
    - Calculer la probabilité d'occurrence de chacune des séquences plus haut.
    - Calculer la probabilité conditionnelle que le prochain tirage soit 1, sachant les précédents tirages.
c) On suppose maintenant que les lancés de pièce ne sont pas indépendants.

La probabilité de tirer pile sachant que l'on a tiré pile la fois précédente est de 0,7 (la probabilité conditionnelle ne dépend que du tirage précédent). La probabilité de tirer face sachant que l'on a tiré face la fois précédente est de 0,7. Les mêmes causes produisant les mêmes effets, ceci traduit l'habitude du lanceur qui tend à relancer la pièce à l'identique.

Par ailleurs, la pièce est équilibrée : Pour le premier tirage, on pourra supposer que la probabilité de tirer pile ou face est égale à ½.

- Quelle est la probabilité de tirer pile au premier lancé ?
- Quelle est la probabilité de tirer pile sachant que l'on a tiré pile la fois précédente.
- Quelle est la probabilité de tirer deux fois de suite pile (y compris le premier lancé) puis de tirer face ?

- Quelle est la probabilité de tirer pile trois fois de suite (y compris le premier lancé), puis de tirer face ?
- Calculer la probabilité de tirer pile n fois de suite (n entier), y compris le premier lancé, puis de tirer face.
- Utiliser les résultats sur l'espérance de la loi géométrique pour donner la valeur moyenne du nombre de tirages de pile consécutifs.
- Utiliser la fonction Alea d'Excel, faire une simulation, avec 1024 tirages de la suite des piles et face. Commencer avec pile, puis avec face. Calculer le rapport entre le nombre de tirages pile et le nombre de tirages face. Que remarque-t-on, quelle la différence avec des tirages indépendants ? Recommencer avec plusieurs tirages.
- Quelle est la fréquence d'apparition de deux tirages pile consécutifs (PPP compte deux fois) si l'on fait un grand nombre de tirages ? Essayer avec plusieurs tirages.

Exercice 9 : Générateurs pseudo aléatoires, tests d'indifférence de Ville

On considère trois générateurs de nombres aléatoires, celui d'Excel (fonction ALEA(), https://support.microsoft.com/fr-fr/office/alea-alea-fonction-4cbfa695-8869-4788-8d90-021ea9f5be73), et les deux exemples simples montrés en cours (http://laurent.jeanpaul.free.fr/Enseignement/cours%20de%20gestion%20financi%E8re%20%E9cole%20de%20management%20de%20la%20Sorbonne.html : l'appréhension de l'aléatoire) : suite récurrente faisant appel à l'algèbre modulaire et suite logistique.

En ce qui concerne la suite logistique, on pourra prendre comme valeur initiale 0,4 et on effectuera 200 tirages en amont du début de la simulation. De même, pour la suite utilisant l'algèbre modulaire (En ce qui concerne Excel, il n'est pas utile de faire cette initialisation).

On procède ensuite à 1024 simulations de 0 ou 1 et on génère trois colonnes dans un tableau Excel.

1) Calculer la fréquence d'apparition des 1 dans les trois échantillons.
2) Calculer la fréquence d'apparition d'un 1, conditionnellement au fait que la valeur précédente soit 1 ou bien 0.
3) Calculer la fréquence d'apparition d'un zéro, conditionnellement au fait que la valeur précédente soit 1 ou bien 0.
4) Recommencer 1) et 2) avec 2048 simulations. Y a-t-il un générateur qui donne des valeurs très différentes, de ce qui est attendu ?

Exercice 10 : Rentabilités, probabilités conditionnelles et coefficient de corrélation.

Notations et données

On considère deux actions émises par les sociétés a et b et deux dates $t = 0$ (date courante), $t = 0$ (date courante). Le prix de l'action a à la date t est noté $P_{a,t}$, celui de l'action b, $P_{b,t}$. La rentabilité simple de l'action a est noté R_a, $R_a = \frac{P_{a,1} - P_{a,0}}{P_{a,0}}$ (on suppose qu'il n'y a pas de dividende versé entre les dates 0 et 1). De même $R_b = \frac{P_{b,1} - P_{b,0}}{P_{b,0}}$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose $P_{a,0} = P_{b,0} = 100$ €.

$P_{a,1}$, $P_{b,1}$ sont des variables aléatoires pouvant prendre les valeurs 90 € et 110 € (de même donc pour R_a et R_b qui peuvent prendre les valeurs $+10\%$ et -10%).

On note $P(\{P_{a,1} = 110\})$, la probabilité de l'événement $\{P_{a,1} = 110\}$. Par la suite, pour simplifier les notations, on notera simplement $P(P_{a,1} = 110)$.

On suppose $P(P_{a,1} = 110) = 0{,}5$.

1) Calculer $E[R_a]$ et $\sigma(R_a)$, l'espérance et l'écart-type de R_a.
2) On suppose que $P(P_{b,1} = 110 | P_{a,1} = 110) = 0{,}7$ et que $P(P_{b,1} = 90 | P_{a,1} = 90) = 0{,}8$. Calculer $P(P_{b,1} = 110)$ puis $E[R_b]$ et $\sigma(R_b)$.
3) Calculer la probabilité jointe d'une hausse des cours, la probabilité d'une hausse et d'une baisse et le coefficient de corrélation linéaire entre les rentabilités et entre les prix futurs.
4) On considère un investissement de 50 € dans l'action a et de 50 € dans l'action b. Ecrire les valeurs possibles du portefeuille à la date $t = 1$ et les probabilités correspondantes.
5) En déduire espérance et écart-type de la rentabilité du portefeuille (notée R)
6) En déduire espérance et écart-type de la rentabilité du portefeuille par une autre méthode.