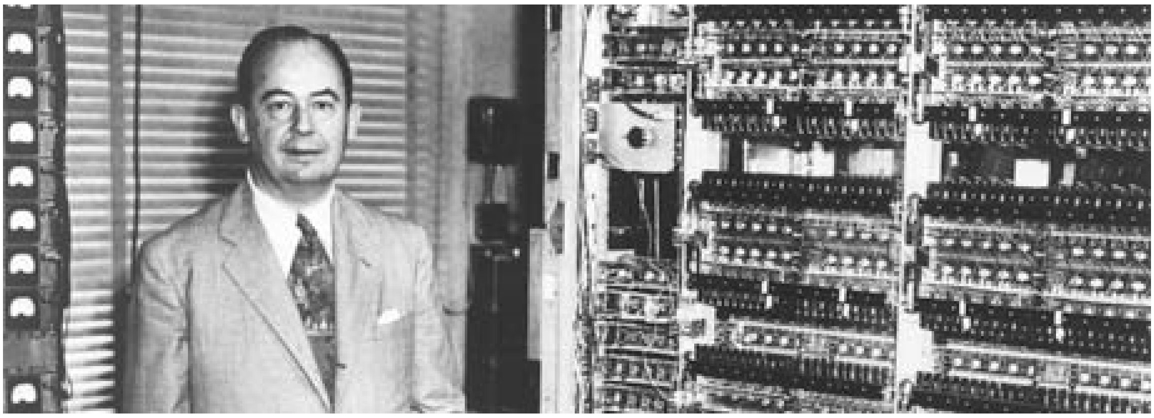
TD1 (Finance M1) : Rappels de probabilités dans un cadre financier avec indications de correction

Il faut un ordinateur et Excel par étudiant ou par groupe de deux étudiants.

Prérequis pour le TD : loi binomiale (https://www.math93.com/index.php/lycee/139-premiere-es/810-premiere-es-l-loi-binomiale), espérance, variance, écart-type, indépendance, probabilité conditionnelle, probabilités totales

Exercice 1 : Tirage avec une pièce truquée : méthode d'extraction de Von Neumann



John Von Neumann

Contexte : Dans les probabilités étudiées au Lycée, on considère très souvent l'égale répartition comme donnée. Pour une pièce « équilibrée », la probabilité de tomber sur pile ou face est donc de ½. On parle alors de la « conception classique » des probabilités.

Un article de Von Neumann permet de réaliser des tirages équiprobables avec une pièce « non équilibrée », pour laquelle on n'a pas de connaissance de la probabilité.

Soit une pièce dont on ne sait pas si elle est équilibrée. On note $p \in]0,1[$, la probabilité (inconnue) qu'elle tombe sur pile. On utilise la procédure suivante. On note B_1 le résultat du tirage, avec $B_1 = 1$ si la pièce tombe sur pile et 0 si la pièce tombe sur face. On procède à un nouveau tirage, on note B_2, le résultat du nouveau tirage : Si la pièce n'est pas tombée à nouveau du même côté ($B_1 \neq B_2$), alors on valide le premier tirage. Si la pièce retombe du même côté, on annule la procédure, on oublie les deux tirages et on recommence à zéro. Calculer la probabilité de tomber sur pile.

Exercice 2 : retour sur le lancer de pièce biaisé.

On note $p \in]0,1[$, la probabilité que la pièce tombe sur pile.

1) Calculer la probabilité que la pièce tombe au moins une fois sur pile en deux lancés indépendants.
2) Calculer cette probabilité en utilisant le principe d'indifférence de Laplace.
3) Calculer cette probabilité selon l'approche de Bayes, qui suppose une distribution uniforme sur p.

Exercice 3 : taux de change aléatoire et résultat espéré d'une entreprise exportatrice

Considérons le résultat d'une entreprise qui exporte pour 100 $ aux US.

On note e_t le nombre de $ pour acheter un €. Aujourd'hui, $e_0 \approx 1{,}17\$$. Le résultat R en € est donné par : $R = 100/e_1$, où e_1 est le taux de change « pour l'année à venir ». On suppose que e_1 peut varier de $\alpha = \pm 30\%$ autour de e_0 de manière uniforme.

1) C'est une hypothèse discutable d'un point de vue statistique et économique, choisie ici par commodité de calcul. Calculer l'espérance du taux de change futur.
2) Calculer l'espérance du résultat futur. Discuter ce résultat.

Exercice 4 : probabilités de suites de hausse et de baisse des cours boursiers en l'absence d'indépendance

Une hausse (respectivement une baisse) des cours à une date donnée est codée par 1 (respectivement 0). Une suite de hausses et de baisses est alors une suite binaire. Une valeur égale à 1 peut être vue comme la réalisation d'un événement particulier, par exemple « hausse du cours d'une action un jour donné » ou bien « pluie un jour donné ».

On considère les quatre suites de valeurs suivantes : 11111111, 00000000, 10101010, 10010101. On vous propose de prolonger les suites de nombres plus haut. Quelles seraient les valeurs raisonnables dans chaque cas ? sur quoi reposerait votre argumentation (induction, heuristique de représentativité, fréquences d'apparition et suites indifférentes) ? Quel degré de certitude donneriez-vous à votre réponse ?

a) On se place maintenant dans le cas d'une suite aléatoire de 1 et de 0 avec équiprobabilité et indépendance, comme dans l'exemple canonique du lancer d'une pièce non biaisée.
   - Calculer la probabilité d'occurrence de chacune des séquences plus haut.
   - Calculer la probabilité conditionnelle que le prochain tirage soit 1, sachant les précédents tirages.
b) On suppose maintenant que les lancés de pièce ne sont pas indépendants.

La probabilité de tirer pile sachant que l'on a tiré pile la fois précédente est de 0,7 (la probabilité conditionnelle ne dépend que du tirage précédent). La probabilité de tirer face sachant que l'on a tiré face la fois précédente est de 0,7. Les mêmes causes produisant les mêmes effets, ceci traduit l'habitude du lanceur qui tend à relancer la pièce à l'identique.

Par ailleurs, la pièce est équilibrée : Pour le premier tirage, on pourra supposer que la probabilité de tirer pile ou face est égale à ½.

- Quelle est la probabilité de tirer pile au premier lancé ?
- Quelle est la probabilité de tirer pile sachant que l'on a tiré pile la fois précédente.
- Quelle est la probabilité de tirer deux fois de suite pile (y compris le premier lancé) puis de tirer face ?
- Quelle est la probabilité de tirer pile trois fois de suite (y compris le premier lancé), puis de tirer face

- Calculer la probabilité de tirer pile n fois de suite (n entier), y compris le premier lancé, puis de tirer face.
- Utiliser les résultats sur l'espérance de la loi géométrique pour donner la valeur moyenne du nombre de tirages de pile consécutifs.
- Utiliser la fonction Alea d'Excel, faire une simulation, avec 1024 tirages de la suite des piles et face. Commencer avec pile, puis avec face. Calculer le rapport entre le nombre de tirages pile et le nombre de tirages face. Que remarque-t-on, quelle la différence avec des tirages indépendants ? Recommencer avec plusieurs tirages.
- Quelle est la fréquence d'apparition de deux tirages pile consécutifs (PPP compte deux fois) si l'on fait un grand nombre de tirages ? Essayer avec plusieurs tirages.

Commentaires :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Probabilit%C3%A9_stationnaire_d%27une_cha%C3%AEne_de_Markov#Convergence_vers_la_loi_stationnaire

Exercice 5 : Générateurs pseudo aléatoires, tests d'indifférence de Ville

On considère trois générateurs de nombres aléatoires, celui d'Excel, et les deux exemples simples montrés en cours : suite récurrente faisant appel à l'algèbre modulaire et suite logistique.

En ce qui concerne la suite logistique, on pourra prendre comme valeur initiale 0,4 et on effectuera 200 tirages en amont du début de la simulation. De même, pour la suite utilisant l'algèbre modulaire (En ce qui concerne Excel, il n'est pas utile de faire cette initialisation).

On procède ensuite à 1024 simulations de 0 ou 1 et on génère trois colonnes dans un tableau Excel.

1) Calculer la fréquence d'apparition des 1 dans les trois échantillons.
2) Calculer la fréquence d'apparition d'un 1, conditionnellement au fait que la valeur précédente soit 1 ou bien 0.
3) Calculer la fréquence d'apparition d'un zéro, conditionnellement au fait que la valeur précédente soit 1 ou bien 0.
4) Recommencer 1) et 2) avec 2048 simulations. Y a-t-il un générateur qui donne des valeurs très différentes, de ce qui est attendu ?

Exercice 6 : marche aléatoire et gains cumulés.

On peut faire les quatre premières questions sans utiliser Excel. Les questions 5 et 6 font appel à la fonction ALEA d'Excel (on peut bien sûr utiliser d'autres outils informatiques, Python …)

On joue à pile ou face. Si on tombe sur pile, $B_i = 1$, si on tombe sur face $B_i = 0$. La probabilité de tomber sur pile est $p = \frac{1}{2}$. Si on parie sur pile et que pile sort, on gagne 1 euro, si face sort on pert 1 euro (et vice versa si on parie sur face). On va considérer plusieurs stratégies :

a. Buy and hold (on achète et on garde le titre, ce qui est équivalent à parier chaque jour à la hausse) : On joue toujours sur pile.
b. Momentum : si pile est apparu, on parie sur pile le coup suivant (vice versa avec face)

c. Contrarian : si pile est apparu, on parie sur face le lendemain (vice versa si pile est apparu)

1) Calculer la probabilité conditionnelle et l'espérance conditionnelle de gain au coup suivant pour chacune des stratégies.
2) Trouver l'espérance de gain au bout de n tirages (sans compter le premier tirage, la variance du gain cumulé, ainsi que l'écart-type. Comment l'écart-type de gain évolue-t-il avec n ?
3) Calculer la probabilité que le gain de la stratégie a soit positif ou nul.
4) Quelle est la perte maximale. Calculer la probabilité que la perte finale soit supérieure à 50% de la perte maximale (utiliser la fonction loi binomiale d'Excel).
5) Utiliser la fonction ALEA d'Excel pour simuler l'évolution des gains et pertes pour chacune des stratégies (travail seul ou par groupes de deux) pour $n = 1024$. Quel est le classement des trois stratégies ?
6) Répétition de simulations. On recommence la procédure précédente soixante fois. Trouver la proportion de cas où la stratégie a arrive en premier, en second et en dernier.