Partiel Finance : Vendredi 19 janvier 2023 (durée de l'épreuve 1h30)

Calculatrices autorisées dans les mêmes conditions qu'au bac

Indiquez le nom de votre chargé de TD en clair sur votre copie, à défaut votre groupe de TD

Remarques générales : l'exercice 1 a été posé au partiel de janvier 2023 et il fait partie des exercices corrigés qui devaient déjà être révisés pour le CC. L'exercice 4 a déjà été traité en TD. Cela permettra de voir ceux qui se sont plus impliqués dans les TD, en termes de préparation et d'attention. Quand aux exercices 2 et 3, j'ai dit en amphi aux étudiants de réviser particulièrement la partie du cours relative aux droites caractéristiques et à la démonstration du Médaf, notamment celle qui est demandée dans l'exercice 3. Un étudiant qui aura travaillé sérieusement et assidûment devrait avoir de bons résultats. C'est ce qui est évalué et pas l'ingéniosité ou la vivacité d'esprit, même si, évidemment, il peut y avoir un lien entre ces deux dimensions.

Barème : 5 points / exercice, avec importance égale de chaque question (arrondi au ½ point supérieur pour chaque exercice). A priori, principe de bivalence : correction binaire juste / faux (pas de moitié de fraction de point ou de « à moitié juste »).

Exercice 1 : Marchés *Momentum* et corrélation

Voir corrigé de l'année dernière ou les exercices corrigés (exercice 6) sur le site du cours.

On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t : $I_t = 1$, *si hausse des cours boursiers entre* $t-1$ *et* t, $I_t = 0$, *sinon*

On suppose que I_{t-1} et I_t sont de même loi et on note $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$ avec $0 < p < 1$. On note $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1)$ la probabilité conditionnelle d'une hausse en t sachant que l'on a observé une hausse en $t-1$.

1. Rappeler la définition de la probabilité conditionnelle

$P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = \frac{P(I_t=1, I_{t-1}=1)}{P(I_{t-1}=1)} = \frac{P(I_t=1, I_{t-1}=1)}{p}$ où $P(I_t = 1, I_{t-1} = 1)$ est la probabilité jointe de hausse aux dates $t-1$ et t

2. Écrire la covariance entre I_{t-1} et I_t

$\text{Cov}(I_{t-1}, I_t) = E[I_{t-1}I_t] - E[I_t]E[I_{t-1}]$

3. Écrire cette covariance en fonction des probabilités

$\text{Cov}(I_{t-1}, I_t) = P(I_t = 1, I_{t-1} = 1) - p^2$

4. Donner une condition sur $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1)$ pour le coefficient de corrélation linéaire entre I_{t-1} et I_t soit positif (marché *Momentum*) $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) > p$
5. Montrer qu'alors $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) > 1 - p$
   - $\text{Cov}(I_{t-1}, I_t) = \text{Cov}(1 - I_{t-1}, 1 - I_t) > 0$ de par les propriétés de la covariance (bilinéarité, covariance avec une constante $= 0$)
   - $\text{Cov}(1 - I_{t-1}, 1 - I_t) = E[(1 - I_{t-1})(1 - I_t)] - E[1 - I_{t-1}]E[1 - I_t] = P(I_{t-1} = 0, I_t = 0) - (1 - p)^2 > 0$
   - $P(I_{t-1} = 0, I_t = 0) = P(I_t = 0|I_{t-1} = 0)P(I_{t-1} = 0)$
   - $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0)(1 - p) > (1 - p)^2$, d'où l'inégalité annoncée
6. Interpréter le résultat
   - On a montré l'équivalence entre corrélation positive des indicatrices et les conditions $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) > p$ ou $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) > 1 - p$
   - Comme $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) > p$ *et* $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) > 1 - p$ sont vraies simultanément, on peut effectivement parler de marché Momentum.
7. Supposons que $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = p$. Montrer qu'alors $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) = 1 - p$

Si $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = p$, *alors* $\text{Cov}(I_{t-1}, I_t) = \text{Cov}(1 - I_{t-1}, 1 - I_t) = 0$ *et donc* $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) = 1 - p$

8. En déduire l'indépendance des indicatrices de hausse
   - $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = P(I_t = 1)$
   - $P(I_t = 0|I_{t-1} = 1) = 1 - P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = 1 - P(I_t = 1) = P(I_t = 0)$
   - $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) = P(I_t = 0)$
   - $P(I_t = 1|I_{t-1} = 0) = 1 - P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) = 1 - P(I_t = 0) = P(I_t = 1)$
   - Les probabilités conditionnelles étant égales aux marginales, l'indépendance des indicatrices est établie.

Exercice 2 : Droite caractéristique

Rentabilités du portefeuille de référence P aux dates $t = 1,2,3$: $-1\%, 0\%, +1\%$. Rentabilités du portefeuille i aux mêmes dates : $r_{i,1}, r_{i,2}, r_{i,3}$

a) Calculer espérance et variance de la rentabilité du portefeuille de référence (notée r_P). Donner les formules de calcul et les valeurs numériques.

$E[r_P] = \frac{r_{P,1}+r_{P,2}+r_{P,3}}{3} = \frac{-1\%+0\%+1\%.}{3} = 0$. $\text{Var}[r_P] = E[r_P^2] - (E[r_P])^2 = \frac{2}{3}$.

b) Calculer la covariance entre r_P et r_i

$\text{Cov}(r_P, r_i) = E[r_P r_i] - E[r_P]E[r_i] = \frac{r_{i,3} - r_{i,1}}{3}$.

c) Calculer le Bêta (noté β) du portefeuille i par rapport au portefeuille P

$\beta = \frac{\text{Cov}(r_P, r_i)}{\text{Var}[r_P]} = \frac{r_{i,3} - r_{i,1}}{2}$.

d) On note ε, le terme résiduel (risque idiosyncratique) dans la droite caractéristique (d'équation $r_i = a + \beta r_P + \varepsilon$). Quelle est l'espérance du risque idiosyncratique ? En déduire une expression simple du coefficient a et de son interprétation.

$E[\varepsilon] = 0$ (ε est un bruit) . D'où $a = E[r_i] - \beta E[r_P] = E[r_i] = \frac{r_{i,1}+r_{i,2}+r_{i,3}}{3}$.

e) Représenter graphiquement la droite caractéristique quand $r_{i,1} = -1\%, r_{i,2} = 1\%, r_{i,3} = 1\%$

Droite d'équation $y = E[r_i] + \frac{r_{i,3}-r_{i,1}}{2} x = \frac{1}{3} + x$. Pente égale à 1, intersecte l'axe des ordonnées en $\frac{1}{3}$.

f) Calculer (numériquement) les valeurs du risque spécifique.

$\varepsilon_i = r_i - \left(\frac{1}{3} + r_P\right)$. $\varepsilon_{i,1} = -1 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$. $\varepsilon_{i,2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$. $\varepsilon_{i,3} = 1 - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$.

g) Calculer la variance du risque spécifique, la variance de r_i et $\beta^2 \times$ la variance de r_P

$E[\varepsilon_i^2] = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$. $\mathrm{Var}[r_i] = E[r_i^2] - (E[r_i])^2 = \frac{1}{3} \times (1+1+1) - \frac{1}{9} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{9}}$. $\beta^2 \times \mathrm{Var}[r_P] = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{9}}$.

Sanity check : vérifier que la relation de décomposition du risque est vérifiée.

$\mathrm{Var}[r_i] = \beta^2 \times \mathrm{Var}[r_P] + \mathrm{Var}[\varepsilon_i] \Leftrightarrow \frac{8}{9} = \frac{6}{9} + \frac{2}{9}$.

h) Méthode des moindres carrés ordinaire. Ecrire le critère à minimiser.

Il faut minimiser $E\left[\left(r_i - (a + \beta r_P)\right)^2\right]$, soit minimiser $\left(a + \beta r_{P,1} - r_{i,1}\right)^2 + \left(a + \beta r_{P,2} - r_{i,2}\right)^2 + \left(a + \beta r_{P,3} - r_{i,3}\right)^2$

i) Ecrire la condition du premier ordre relative au terme constant et déterminer a. Les données sont les rentabilités précédentes. Vérifier que l'on retrouve la valeur de a déjà calculée.

En écrivant que la dérivée par rapport à a est nulle : $\left(a + \beta r_{P,1} - r_{i,1}\right) + \left(a + \beta r_{P,2} - r_{i,2}\right) + \left(a + \beta r_{P,3} - r_{i,3}\right) = 0$ (NB : on suit la démonstration faite au tableau, mais on peut directement écrire que la dérivée de $E\left[\left(r_i - (a + \beta r_P)\right)^2\right]$ par rapport à a est égale à $2E[a + \beta r_P - r_i]$). Soit, après simplification, $a = E[r_i] - \beta E[r_P] = E[r_i]$, comme vu en d).

j) Ecrire la condition du premier ordre relative au terme β. Vérifier que l'on retrouve la valeur de β déjà calculée.

On peut développer $E\left[\left(r_i - (a + \beta r_P)\right)^2\right]$ comme dans la réponse à la question précédente ou écrire $E\left[r_P\left(r_i - (a + \beta r_P)\right)\right] = 0$, ce qui redonne l'expression du Bêta donnée au c).

<u>Exercice 3 : Médaf - démonstration via le buck for the bang ratio.</u>

On rappelle qu'un portefeuille investi en actifs $i = 0,1, \dots, n$ dans des proportions $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ a pour rentabilité $r_P = \omega_0 r_0 + \omega_1 r_1 + \cdots \omega_n r_n$ avec $\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n = 1$. On suppose que le premier actif est sans risque, de rentabilité $r_0 = r_f$

a) Montrer que $r_P = r_f + \omega_1\left(r_1 - r_f\right) + \cdots \omega_n\left(r_n - r_f\right)$

Il suffit d'écrire $\omega_0 = 1 - (\omega_1 + \cdots + \omega_n)$ et de reporter ω_0 dans l'équation donnant r_P

b) Est-ce que $\omega_1, \dots, \omega_n$ sont contraints ?

Non, car en éliminant ω_0, on a déjà intégré la contrainte que la somme des poids est égale à 1

c) Calculer $\frac{dE}{d\sigma^2}$ (buck for the bang ratio).

- L'espérance de rentabilité du portefeuille s'écrit comme $r_f + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \bar{E}_i$ avec $\bar{E}_i = E_i - r_f$. La dérivée par rapport à ω_i est $\bar{E}_i$.
- $\mathrm{Var}(r) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \mathrm{cov}(r_i, r_i) + 2\sum_{i \neq j} \omega_i \omega_j \,\mathrm{cov}\left(r_i, r_j\right)$. La dérivée de la variance par rapport à ω_i est égale à $2\sum_{i=1}^{n} \omega_j \mathrm{cov}(r_j, r_i) = 2\mathrm{cov}(r_i, r)$.
- buck for the bang ratio : $\frac{dE}{d\sigma^2} = \frac{\bar{E}_i}{2\mathrm{cov}(r_i, r)}$

d) Que vaut $\frac{dE}{d\sigma}$ si le portefeuille considéré est le portefeuille tangent.

$\frac{dE}{d\sigma}$ doit être égal à $\frac{E_T - r_f}{\sigma_T}$ Sinon, on pourrait aller au-dessus de la CML (faire une représentation géométrique)

e) En déduire la constance du buck for the bang ratio

$\frac{dE}{d\sigma} = \frac{E_T - r_f}{\sigma_T}$. Par ailleurs, $\frac{dE}{d\sigma} = \frac{dE}{d\sigma^2} \times \frac{d\sigma^2}{d\sigma} = 2\sigma_T \times \left(E_i - r_f\right)/2\mathrm{cov}(r_i, r_T)$.

D'où $\left(E_i - r_f\right)/2\mathrm{cov}(r_i, r_T) = \frac{E_T - r_f}{2\sigma_T^2}$ ne dépend pas du titre i (Constance du buck for the bang ratio).

f) En déduire l'équation de la SML

L'équation précédente se réécrit : $E_i - r_f = \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_T)}{\sigma_T^2} \times \left(E_T - r_f\right)$. Comme $\beta_{iT} = \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_T)}{\sigma_T^2}$, $E_i = r_f + \beta_{iT} \times \left(E_T - r_f\right)$, soit l'équation de la SML.

g) Rappeler la relation entre Bêta, coefficient de corrélation et volatilités

$\beta_{iT} = \rho_{iT} \frac{\sigma_i}{\sigma_T}$.

h) Rappeler la définition du ratio de Sharpe.

$s_i = \left(E_i - r_f\right)/\sigma_i$.

i) Déduire de l'équation de la SML une relation entre ratios de Sharpe et coefficient de corrélation.

$E_i = r_f + \beta_{iT} \times (E_T - r_f) \Rightarrow \frac{E_i - r_f}{E_T - r_f} = \beta_{iT} = \rho_{iT}\frac{\sigma_i}{\sigma_T}$. D'où $\frac{(E_i - r_f)/\sigma_i}{(E_T - r_f)/\sigma_T} = \rho_{iT}$, soit $\frac{s_i}{s_T} = \rho_{iT}$.

Exercice 4 : Traitement de l'information et conditionnement.

On considère le jeu de Monty Hall avec les données du TD.

1) Quelle est la probabilité a priori qu'un euro soit derrière la porte 3 ?

La question aurait dû être « Quelle est la probabilité a priori qu'un million d'euros soit derrière la porte 3 ? » et la réponse : $\frac{1}{3}$. Vu la question posée, la réponse est $\frac{2}{3}$. Vu l'ambiguïté de la question, toute réponse argumentée correctement est valable.

2) Quelle est la probabilité que le présentateur ouvre la porte 3 sachant que le million d'euros est derrière la porte 3 ?

Cette probabilité est égale à 0 : Le jeu est non-coopératif, puisque sinon le jeu se termine et le joueur voit où est la forte somme.

3) Quelle est la probabilité que le présentateur ouvre la porte 3 sachant que le million d'euros est derrière la porte 2 ?

Cette probabilité est égale à 1, selon le même raisonnement que précédemment.

4) Quelle est la probabilité que le présentateur ouvre la porte 3 sachant que le million d'euros est derrière la porte 1 ? On supposera ici que le présentateur n'est pas biaisé.

Pour le présentateur, peu importe a priori qu'il ouvre la porte 3 ou la porte 1. Si l'on suit ce principe la probabilité est égale à ½.

5) Quelle est la probabilité que le présentateur ouvre la porte 3 (utiliser la loi des probabilités totales) ?

$$\begin{aligned} P(\,P3\ ouverte) = {} & P(P3\ ouverte\ |1\ Million\ derrière\ P1) \times P(1\ Million\ derrière\ P1) \\ & + P(P3\ ouverte\ |1\ Million\ derrière\ P2) \times P(1\ Million\ derrière\ P2) \\ & + P(P3\ ouverte\ |1\ Million\ derrière\ P3) \times P(1\ Million\ derrière\ P3) \end{aligned}$$

$P(1\ Million\ derrière\ P1) = P(1\ Million\ derrière\ P2) = P(1\ Million\ derrière\ P2) = \frac{1}{3}$.

D'où $P(\,P3\ ouverte) = \left(\frac{1}{2} + 1 + 0\right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

6) Quelle est la probabilité que le million d'euros soit derrière la porte 2 sachant que le présentateur a ouvert la porte 3 ?

$$\begin{aligned} P(\,P3\ ouverte) = {} & P(P3\ ouverte\ |1\ Million\ derrière\ P1) \times P(1\ Million\ derrière\ P1) \\ & + P(P3\ ouverte\ |1\ Million\ derrière\ P2) \times P(1\ Million\ derrière\ P2) \\ & + P(P3\ ouverte\ |1\ Million\ derrière\ P3) \times P(1\ Million\ derrière\ P3) \end{aligned}$$

$P(1\ Million\ derrière\ P1) = P(1\ Million\ derrière\ P2) = P(1\ Million\ derrière\ P2) = \frac{1}{3}$.

D'où $P(\,P3\ ouverte) = \left(\frac{1}{2} + 1 + 0\right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

7) Conclure

Si après l'ouverture de la porte 3, le joueur décide de parier sur la porte 2 (donc de changer son choix) sa probabilité de gain est de $\frac{2}{3}$. Si le joueur ne prenait pas en compte l'information apportée par le choix du présentateur sa probabilité de gain serait de $\frac{2}{3}$, donc moitié moindre. Il est donc optimal de changer son choix initial.

8) Retrouver ce résultat par dénombrement des cas possibles.

On reprend les graphiques de Wikipedia (le cas avec un euro est associé à une chèvre, celui avec un million d'euros est associé à une voiture ; c'était la règle du jeu télévisé …).

Behind door 1	Behind door 2	Behind door 3	Result if staying at door #1	Result if switching to the door offered
Goat	Goat	**Car**	Wins goat	**Wins car**
Goat	**Car**	Goat	Wins goat	**Wins car**
Car	Goat	Goat	**Wins car**	Wins goat

Il y a simplement trois cas de figure équiprobables. On gagne une fois sur trois en ne changeant pas son choix et on gagne dans les deux autres cas en changeant son choix initial. On remarque qu'ici la loterie composée précédente apparaît sous forme réduite et que le problème du biais éventuel du présentateur disparaît.