

Exercice 1 : Dynamique des marchés, probabilités conditionnelles et corrélation

On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t : $I_t = 1$, si hausse des cours boursiers entre $t - 1$ et t , $I_t = 0$, sinon

On suppose I_{t-1} et I_t de même loi et on note $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$ avec $0 < p < 1$. On note $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1)$ la probabilité conditionnelle d'une hausse en t sachant que l'on a observé une hausse en $t - 1$.

1. Ecrire $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1)$ en fonction des probabilités jointe $P(I_t = 1, I_{t-1} = 1)$ et marginale $P(I_{t-1} = 1)$;
2. Écrire la covariance entre I_{t-1} et I_t en fonction d'espérances ;
3. Écrire cette covariance en fonction des probabilités jointe et marginale ;
4. Donner une condition sur $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1)$ pour le coefficient de corrélation linéaire entre I_{t-1} et I_t soit nul. On suppose cette condition vérifiée par la suite.
5. Calculer la probabilité jointe $P(I_t = 1, I_{t-1} = 0)$.
6. Calculer la probabilité conditionnelle $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 0)$ en fonction des probabilités jointe et marginale ;
7. On suppose maintenant que $p = 0,5$ que les conditions précédentes relatives aux probabilités sont vérifiées et que l'achat d'une action rapporte 1€ en cas de hausse et -1 € en cas de baisse. Calculer l'espérance de gain associé à l'achat d'une action.
8. Calculer l'écart-type du gain associé à l'achat d'une action.
9. On considère la stratégie suivante : position acheteuse d'une action à la date t , vendeuse de deux actions à la date $t + 1$, acheteuse d'une action à la date $t + 2$. Calculer l'espérance du gain cumulé associé à la stratégie précédente.
10. Calculer son écart-type.

Exercice 2 : rationalité limitée et concours de beauté keynésien

On reprend l'illustration faite par Thaler du concours de beauté keynésien. Chaque participant au jeu propose un nombre compris entre 0 et 100. Le ou les gagnants sont ceux qui ont proposé le nombre le plus proche de $2/3 \times$ la moyenne des nombres proposés.

Il y a un grand nombre de participants et on néglige l'effet de sa propre contribution à la moyenne.

- 1) Examiner le cas où 67 est la valeur à proposer : quelles sont les contributions des autres participants ?
- 2) Montrer qu'il est toujours préférable de proposer la valeur 67 à une valeur strictement supérieure.
- 3) On suppose maintenant que tous les participants ont été à même d'effectuer le raisonnement précédent (de le poursuivre jusqu'à sa limite). En déduire une valeur maximale pour la moyenne des contributions.
- 4) Que devraient alors être les contributions si tous les participants suivaient la logique précédente.
- 5) On suppose que chaque participant choisit au hasard un nombre compris entre 0 et 100. Les conditions d'application de la loi des grands nombres sont réunies : quelle est la moyenne des contributions ?
- 6) Quelle est une contribution gagnante ?
- 7) Ceux qui donnent la réponse demandée à la question 6) sont dits de niveau 1. Donner la contribution des participants de niveau 2.
- 8) Selon Thaler, les lecteurs du Financial Times étaient répartis à parts égales entre participants de niveau 1, de niveau 2 et individus rationnels (ceux qui ont contribué comme dans la question 4)). Quelle est la contribution gagnante ?
- 9) La rémunération des gagnants se fait en points de bonus ou de malus. Chaque contribution perdante ou absence de contribution à cette question est associée à un point de malus. Ces points sont donnés aux gagnants sous forme de points de bonus également répartis entre eux. Donner votre contribution.

Exercice 3 : portefeuille orthogonal

On reprend les notations du cours : T est le portefeuille tangent, M le « portefeuille de marché », h le portefeuille orthogonal. Les données sont les suivantes : $\rho_{TM} = 0,9$, $\sigma_M = 15\%$, $\sigma_T = 25\%$. Les notations sont celles du cours.

- 1) Calculer β_{TM}
- 2) Chercher x tel que $r_h = x r_T + (1 - x) r_M$ soit non corrélé avec r_M (r_T , r_M rentabilité des portefeuilles T et M).
- 3) On se donne les caractéristiques du portefeuille tangent (les notations sont celles du cours) : $\sigma_T = 25\%$, $\bar{E}_T = 10\%$. Calculer le ratio de Sharpe du portefeuille tangent.
- 4) Calculer β_{MT} ;
- 5) Calculer $\bar{E}_M$ à partir de la relation du Médaf.
- 6) En déduire le ratio de Sharpe du portefeuille de marché.
- 7) Calculer $\bar{E}_h$ en utilisant la relation $r_h = x r_T + (1 - x) r_M$
- 8) Calculer β_{hM}
- 9) Calculer l'alpha de Jensen du portefeuille orthogonal
- 10) Calculer σ_h
- 11) En déduire le ratio de Sharpe du portefeuille orthogonal
- 12) Utiliser la relation, vue en cours, entre les ratios de Sharpe des portefeuilles et vérifier que sa cohérence avec la réponse à la question précédente.