Partiel Finance : Vendredi 17 janvier 2024 (durée de l'épreuve 1h30)

Calculatrices autorisées dans les mêmes conditions qu'au bac

Indiquez le nom de votre chargé de TD en clair sur votre copie, à défaut votre groupe de TD

Exercice 1 : Dynamique des marchés, probabilités conditionnelles et corrélation (voir jeu de transparents « Traitement de l'information financière – dynamique des marchés ») – 5 points.

On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t : $I_t = 1$, *si hausse des cours boursiers entre* $t-1$ *et* t, $I_t = 0$, *sinon*

On suppose I_{t-1} et I_t de même loi et on note $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$ avec $0 < p < 1$. On note $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1)$ la probabilité conditionnelle d'une hausse en t sachant que l'on a observé une hausse en $t-1$.

1. (0,5 pt) Ecrire $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1)$ en fonction des probabilités jointe $P(I_t = 1, I_{t-1} = 1)$ et marginale $P(I_{t-1} = 1)$.

$P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = \frac{P(I_t=1,I_{t-1}=1)}{P(I_{t-1}=1)} = \frac{P(I_t=1,I_{t-1}=1)}{p}$.

2. (0,5 pt) Écrire la covariance entre I_{t-1} et I_t en fonction d'espérances.

$\mathrm{Cov}(I_{t-1}, I_t) = E[I_{t-1} \times I_t] - E[I_{t-1}] \times E[I_t]$.

3. (0,5 pt) Écrire cette covariance en fonction des probabilités jointe et marginale.

$\mathrm{Cov}(I_{t-1}, I_t) = P(I_t = 1, I_{t-1} = 1) - p^2$.

4. (0,5 pt) Donner une condition sur $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1)$ pour le coefficient de corrélation linéaire entre I_{t-1} et I_t soit nul. On suppose cette condition vérifiée par la suite.

Le coefficient de corrélation linéaire entre I_{t-1} et I_t est nul si et seulement si $\mathrm{Cov}(I_{t-1}, I_t) = 0$, soit $P(I_t = 1, I_{t-1} = 1) = p^2$, soit $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = p$.

5. (0,5 pt) Calculer la probabilité jointe $P(I_t = 1, I_{t-1} = 0)$.

$P(I_t = 1, I_{t-1} = 0) + P(I_t = 1, I_{t-1} = 1) = P(I_t = 1)$, d'où $P(I_t = 1, I_{t-1} = 0) = p - p^2$.

6. (0,5 pt) Calculer la probabilité conditionnelle $P(I_t = 1|I_{t-1} = 0)$ en fonction des probabilités jointe et marginale ;

$P(I_t = 1|I_{t-1} = 0) = \frac{P(I_t=1,I_{t-1}=0)}{P(I_{t-1}=0)} = \frac{p-p^2}{1-p} = p$.

7. (0,5 pt) On suppose maintenant que $p = 0{,}5$ que les conditions précédentes relatives aux probabilités sont vérifiées et que l'achat d'une action rapporte 1€ en cas de hausse et -1 € en cas de baisse. Calculer l'espérance de gain associé à l'achat d'une action.

L'espérance de gain est égale à $P(I_t = 1) - P(I_t = 0) = 0$ €.

8. (0,5 pt) Calculer l'écart-type du gain associé à l'achat d'une action.

La variance du gain est égale à $P(I_t = 1) + P(I_t = 0) = 1$. L'écart-type du gain est égal à 1 €.

9. (0,5 pt) On considère la stratégie suivante : position acheteuse d'une action à la date t, vendeuse de deux actions à la date $t+1$, acheteuse d'une action à la date $t+2$. Calculer l'espérance du gain cumulé associé à la stratégie précédente.

L'espérance du gain cumulé est égale à 0, par linéarité de l'espérance.

10. (0,5 pt) Calculer son écart-type.

Sous les hypothèses précédentes, les autocorrélations entre les indicatrices de hausse sont nulles ; de même pour les gains/pertes à différentes périodes. Il en résulte que la variance du gain cumulé est la somme des variances, soit $1 + 4 + 1 = 6$. L'écart-type du gain est égal à $\sqrt{6} = 2{,}45$ €.

<u>Exercice 2 : rationalité limitée et concours de beauté keynésien</u> (voir jeu de transparents « négociation et information ») – 6 points

On reprend l'illustration faite par Thaler du concours de beauté keynésien. Chaque participant au jeu propose un nombre compris entre 0 et 100. Le ou les gagnants sont ceux qui ont proposé le nombre le plus proche de 2/3 x la moyenne des nombres proposés. Il y a un grand nombre de participants et on néglige l'effet de sa propre contribution à la moyenne.

1) (0,5 pt) Examiner le cas où 67 est la valeur à proposer : quelles sont les contributions des autres participants ?

Il faut que la moyenne des autres participants soit égale à 100, ce qui n'est possible que si tous les autres participants misent 100.

2) (0,5 pt) Montrer qu'il est toujours préférable de proposer la valeur 67 à une valeur strictement supérieure.

La valeur gagnante est toujours inférieure ou égale à 67. La distance entre $x > 67$ et la valeur gagnante est toujours supérieure à 67 – la valeur gagnante.

3) (1 pt) On suppose maintenant que tous les participants ont été à même d'effectuer le raisonnement précédent (de le poursuivre jusqu'à sa limite). En déduire une valeur maximale pour la moyenne des contributions.

Aucun participant ne contribue donc au-delà de 67, ce qui implique que la moyenne des contributions est inférieure ou égale à 67. En itérant le raisonnement précédent la valeur maximale pour la moyenne des contributions ne peut être strictement positive, elle est donc nulle.

4) (1 pt) Que devraient alors être les contributions si tous les participants suivaient la logique précédente ?

Tous les participants devraient donc contribuer la même valeur, soit 0.

5) (0,5 pt) On suppose que chaque participant choisit au hasard un nombre compris entre 0 et 100. Les conditions d'application de la loi des grands nombres sont réunies : quelle est la moyenne des contributions ?

50.

6) (0,5 pt) Quelle est une contribution gagnante ?

L'entier le plus proche de 2/3 x 50, soit 33.

7) (1 pt) Ceux qui donnent la réponse demandée à la question 6) sont dits de niveau 1 ; Donner la contribution des participants de niveau 2.

Par le même raisonnement que précédemment, les participants de niveau 2 donnent le chiffre 22.

8) (1 pt) Selon Thaler, les lecteurs du Financial Times étaient répartis à parts égales entre participants de niveau 1, de niveau 2 et individus rationnels (ceux qui ont contribué comme dans la question 4)). Quelle est la contribution gagnante ?

L'entier le plus proche de 1/3 (0 + 22 + 33), soit 12.

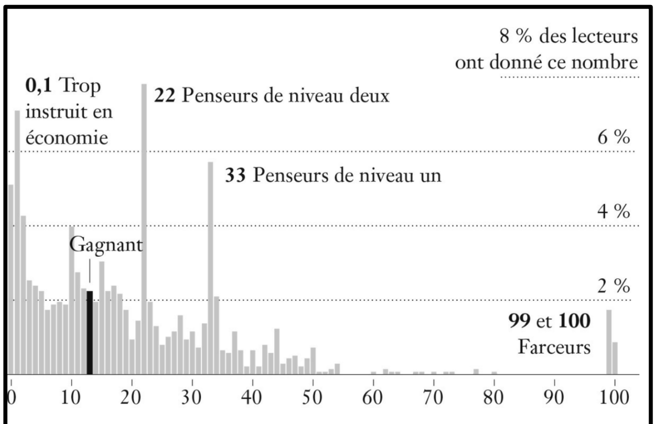

Figure 10 – Distribution des nombres donnés par les lecteurs du *Financial Times*

9) (0 pt) La rémunération des gagnants se fait en points de bonus ou de malus. Chaque contribution perdante ou absence de contribution à cette question est associée à un point de malus. Ces points sont donnés aux gagnants sous forme de points de bonus également répartis entre eux. Donner votre contribution.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX **A compléter au moment de la correction.** XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Exercice 3 : portefeuille orthogonal (voir jeu de transparents sur le Médaf) – 9 points

On reprend les notations du cours : T est le portefeuille tangent, M le « portefeuille de marché », h le portefeuille orthogonal. Les données sont les suivantes : $\rho_{TM} = 0{,}9$, $\sigma_M = 15\%$, $\sigma_T = 25\%$. Les notations sont celles du cours.

1) (0,5 pt) Calculer β_{TM}

$\beta_{TM} = \rho_{TM} \times \frac{\sigma_T}{\sigma_M} = 1{,}5.$

2) (1 pt) Chercher x tel que $r_h = xr_T + (1-x)r_M$ soit non corrélé avec r_M (r_T, r_M rentabilité des portefeuilles T et M).

$\mathrm{Cov}(r_h, r_M) = x\mathrm{Cov}(r_T, r_M) + (1-x)\mathrm{Cov}(r_M, r_M) = x\rho_{TM}\sigma_T\sigma_M + (1-x)\sigma_M^2$. Soit $x\beta_{TM} + 1 - x = 0$, d'où $x = -2$ et $r_h = -2r_T + 3r_M$.

3) (0,5 pt) On se donne les caractéristiques du portefeuille tangent (les notations sont celles du cours) : $\sigma_T = 25\%$, $\bar{E}_T = 10\%$. Calculer le ratio de Sharpe du portefeuille tangent.

$s_T = \frac{\bar{E}_T}{\sigma_T} = \frac{10\%}{25\%} = 0{,}4.$

4) (0,5 pt) Calculer β_{MT}

$\beta_{MT} = \rho_{TM} \times \frac{\sigma_M}{\sigma_T} = 0{,}54.$

5) (1 pt) Calculer $\bar{E}_M$ à partir de la relation du Médaf

$\bar{E}_M = \beta_{MT} \times \bar{E}_T = 5{,}4\%.$

6) (0,5 pt) En déduire le ratio de Sharpe du portefeuille de marché.

$s_M = \frac{\bar{E}_M}{\sigma_M} = \frac{5{,}4\%}{15\%} = 0{,}36.$

7) (1 pt) Calculer $\bar{E}_h$ en utilisant la relation $r_h = xr_T + (1-x)r_M$

$\bar{E}_h = x\bar{E}_T + (1-x)\bar{E}_M = -2 \times 10\% + 3 \times 5{,}4\% = -3{,}8\%.$

8) (0,5 pt) Calculer β_{hM}

$\beta_{hM} = 0.$

9) (1 pt) Calculer l'alpha de Jensen du portefeuille orthogonal

$\alpha_h = \bar{E}_h - \beta_{hM}\bar{E}_M = \bar{E}_h = -3{,}8\%.$

10) (1 pt) Calculer σ_h

$r_h = -2r_T + 3r_M$, d'où $2r_T = 3r_M - r_h$. r_M et r_h étant non corrélés, $4\sigma_T^2 = 9\sigma_M^2 + \sigma_h^2$. $\sigma_h^2 = 4 \times 0{,}25^2 - 9 \times 0{,}15^2$ et $\sigma_h = 21{,}79\%$

11) (0,5 pt) En déduire le ratio de Sharpe du portefeuille orthogonal

$s_h = \frac{\bar{E}_h}{\sigma_h} = \frac{-3{,}8\%}{21{,}79\%} = -0{,}1744.$

12) (1 pt) Utiliser la relation, vue en cours, entre les ratios de Sharpe des portefeuilles et vérifier que sa cohérence avec la réponse à la question précédente.

Nous avons la relation d'orthogonalité : $s_T^2 = s_M^2 + s_h^2$. $|s_h| = \sqrt{s_T^2 - s_M^2} = \sqrt{0{,}4^2 - 0{,}36^2} = 0{,}1744$