L. Summers vs J. Yellen : des familles d'économistes

- **Larry Summers, Paul Samuelson, Kenneth Arrow**

Partage optimal des risques

- Le découpage du passif entre actions et dette est une forme particulière de partage des risques associés à l'actif
  - *Responsabilité limitée des actionnaires*
- Recours à la finance externe : partage du risque des investissements avec les nouveaux bailleurs de fonds
  - *Les rémunérations variables permettent également de partager les risques économiques d'une entreprise*
  - *Entre salariés et bailleurs de fonds (actionnaires/créanciers)*
- Divers modèles de relations entre parties prenantes
  - *Actionnaires/créanciers : conflits d'agence de l'endettement*
    - Surinvestissement (asset substitution)
    - Sous-investissement (debt overhang)

Partage optimal des risques

- Divers modèles de relations entre parties prenantes
  - *Actionnaires/créanciers : conflits d'agence de l'endettement*
    - Agent : actionnaires
    - Principal : créanciers
    - Aléa moral : choix d'investissement (action de l'agent) imparfaitement observée par le principal :
    - Asymétrie d'information → efficacité économique ↓
  - *Actionnaires/dirigeants ou entrepreneurs/marchés financiers : conflits d'agence liés aux fonds propres*
    - Agent : dirigeants ou entrepreneurs
    - Principal : marché financier
    - Schémas incitatifs : rémunération de l'agent ↑ avec le risque
    - Si l'agent est averse vis-à-vis du risque efficacité économique ↓
    - Si l'agent a des ressources limitées, rationnement des financements

Partage optimal des risques

- Divers modèles de contrats entre parties prenantes
  - *Prêteurs/emprunteurs*
  - *Prêteurs : principal (conçoit et propose le contrat)*
  - *Emprunteurs : agents (contrainte de participation)*
    - Pas d'emprunt forcé
  - *Antisélection : asymétrie d'information est liée à l'hétérogénéité des emprunteurs, non observée par les prêteurs*
    - Pooling (équilibre mélangeant) : surinvestissement
    - Marchés de lemons ou rationnement : sous-investissement
  - *Perte d'efficacité économique*
- Modèles avec deux parties prenantes (principal et agent)
  - *Équilibre partiel (par opposition d'équilibre général)*

Partage optimal des risques

- Il est intéressant d'examiner la situation de partage optimal des risques quand on a un grand nombre d'agents
- On obtient des résultats intéressants de manière simple en information parfaite
  - *Et sans coûts de transaction (dérégulation)*
- Partage optimal des risques associé à comonotonie
  - *Implications sur les risques systémiques*
  - *Des contraintes de solvabilité (banques et assurances)*
- Il est coûteux de s'assurer contre les risques systémiques extrêmes
  - *Justification des bails-out des banques ? Gorton ?*
  - *Ne pas confondre avec les risques de catastrophe naturelle*

Références pour le cours

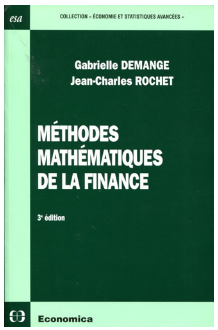
UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Références

- Les transparents du cours suffisent à a compréhension
  - *Néanmoins, il peut être utile de donner quelques références et indications pour préciser le positionnement du cours*
- L'ensemble des sessions est en rapport avec le champ de la microéconomie appliquée à la finance (ou « économie financière »).
- Prérequis utiles
  - *Théorie du consommateur, équilibre général concurrentiel des marchés et aux deux théorèmes du bien-être*
  - *Externalités*
  - *éléments de théorie des jeux non coopératifs*
- Par rapport à un cours pour économistes, l'accent est davantage mis sur la finance, notamment les principes d'évaluation (probabilité risque-neutre, AOA)

Références

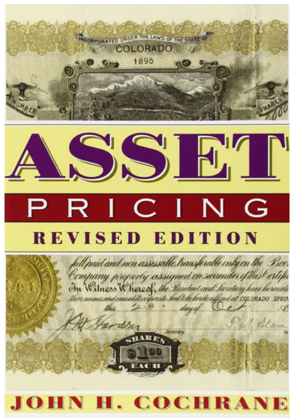
- On peut se référer aux ouvrages suivants, issus d'enseignements à l'X et à l'ENSAE, mais restant accessibles sur le plan mathématique
  - *Adaptation de l'équilibre général à l'allocation des risques*

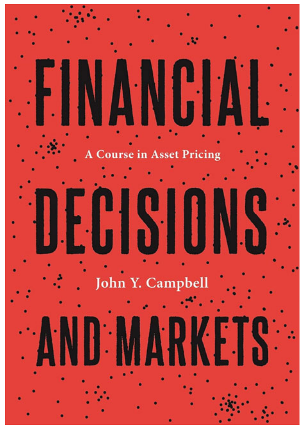


  - *Le cadre dynamique (possibilité de traiter des actifs financiers à plusieurs dates futures) nécessite d'introduire de nouveaux concepts*

Références

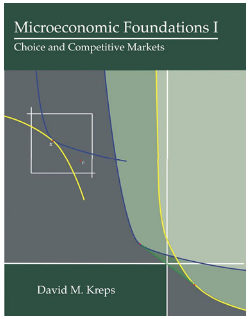
- Parmi les ouvrages en anglais, un peu plus orientés finance qu'économie et considérés comme des classiques
  - *Existent en format ebook (Kindle)*

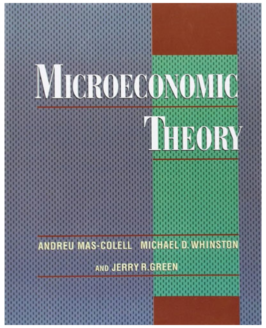


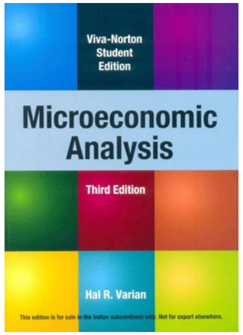


Références

- Ces ouvrages de microéconomie sont les classiques
  - *Le premier livre est accessible en format Kindle*
- Balayent le champ du cours et davantage
  - *Théorie du consommateur, économies de production*

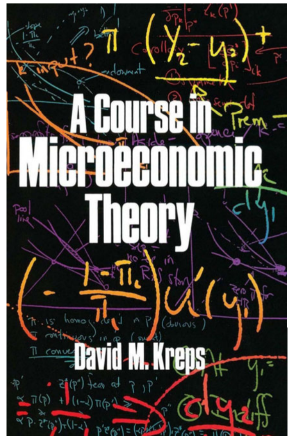


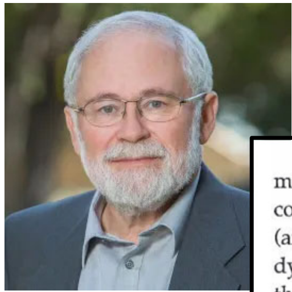




Références

- Version plus ancienne et moins complète que l'ouvrage déjà cité de Kreps
  - *Voir chapitres 3,5,6*
  - https://univ-scholarvox-com.ezpaarse.univ-paris1.fr/book/88914377

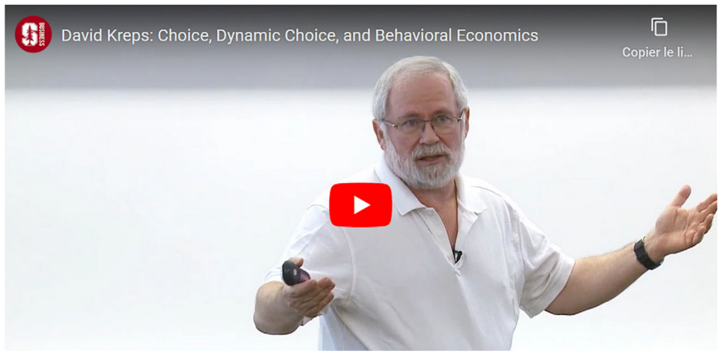




> The point is that if consumers know in advance all the future spot market prices, and if there is a full array of financial contingent claims, consumers can trade from any endowment point $e \in X$ to any desired (and affordable) consumption point $x \in X$ by designing an appropriate dynamic strategy. Money is transferred between date–event pairs using the financial contingent claims, and that money is allocated between consumption goods subsequently in the spot markets. This then implies that all the methods of general equilibrium discussed earlier apply.

Références

- David Kreps: Choice, Dynamic Choice, and Behavioral Economics
  - *Sur le site de l'école de management de Stanford*
  - https://www.gsb.stanford.edu/insights/david-kreps-choice-dynamic-choice-behavioral-economics



Références

- David Kreps (Choice, Dynamic Choice, and Behavioral Economics) : rationalité vs cohérence

Economic reasoning is largely based on…

1. Choices that individuals make---not any choices, but **consistent choices**

   (Economists sometimes use the adjective "rational" in place of "consistent," with the implied pejorative that choices that don't conform to their models are "irrational." This is bad choice of language and is the source of all sorts of silly arguments with psychologists, sociologists, etc.)

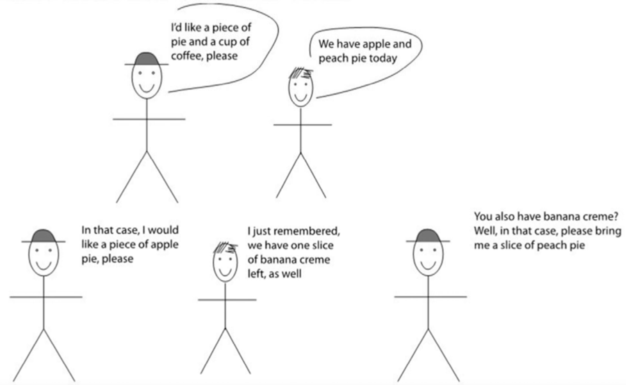
2. The "equilibration" of conflicting desires as expressed through choices in various institutional settings, most importantly, in price-mediated markets, but in other institutions as well.

Références

- David Kreps (Choice, Dynamic Choice, and Behavioral Economics) : rationalité vs cohérence

What is consistent choice? Everything but this:

A man walks into a roadside diner:



Références

- David Kreps: Choice, Dynamic Choice, and Behavioral Economics (à propos de l'indépendance par rapport aux alternatives non pertinentes)

Consistent choice (in economics) is…

…*never do* what that guy just did

Formally: If an economic agent chooses x and not y when both x and y are available, then she never chooses y when x is available.

As long as this property holds, her choices can be modeled as if she is maximizing utility

(There are some technical conditions to be met as well, but if the universe of things she might choose is finite, then the only technical addition to this is: If you ask her to choose from a nonempty set of objects, she is willing to make a choice.)

Références

- David Kreps: Choice, Dynamic Choice, and Behavioral Economics (à propos de l'indépendance par rapport aux alternatives non pertinentes)

Empirically, we know it is violated

The designer of a mail-order catalog (or internet web site) wants you to pay $200 to buy a particular printer. He wants you to choose "printer" over "keep $200"

To influence your choice, he sometimes does one of two things:

1. Advertise two printers, the one he wants you to buy for $200, and a second, slightly better model for $350. (You think, "Wow, that $200 printer is a great deal.")
2. Advertise the printer he wants you to buy and a second, much worse printer for $190. (You think, "Wow, that $200 printer is a great deal.")

Probabilités subjectives

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Partage optimal des risques et probabilités

VNM

- Ensemble des états de la nature $\Omega = \{1, \dots, S\}$
- Probabilité d'être dans l'état $s \in \Omega$: p_s, $p_s > 0$
- Interprétation classique : les probabilités $p_1, \dots, p_S$ sont <u>objectives</u>
  - *Les probabilités $p_1, \dots, p_S$ sont partagées par tous les investisseurs : Probabilités interpersonnelles*
  - *Les agents économiques partagent les mêmes croyances*
  - *Hypothèse raisonnable si l'on considère des jeux de hasard*
  - *Plus discutable pour des investissements financiers*
    - Stationnarité ? Événements singuliers : pas de loi des grands nombres
    - Possibilités très limitées d'expérimentation, un seul historique
- Autre interprétation : $p_1, \dots, p_S$ sont <u>subjectives</u>
  - *Sont-elles spécifiques à chaque investisseur ? Ou communes ?*

Partage optimal des risques : probabilités subjectives

- Commentaires bibliographiques
  - *On voit apparaître une axiomatique des préférences sur les loteries aboutissant à la notion de probabilité (subjective) dans de Finetti (1931), section 16, puis Koopman (1940) et enfin chez Savage (1954).*
  - *L'analyse s'applique à des espaces d'états finis (Villegas (1964) étend les résultats au cas d'espaces dénombrables*
- Principes de l'axiomatique (ensemble d'états fini)
  - *Idée de base : événements qualitativement plus probables que d'autres*
  - *$A \succ B$ si l'événement A est strictement plus probable que B*
  - *On suppose que $\succ$ est une relation totale entre événements et asymétrique*
  - *$\succ$ est asymétrique si on ne peut avoir $A \succ B$ et $B \succ A$*
  - *Par exemple, l'inégalité stricte entre réels est asymétrique*
  - *Pour une relation totale et asymétrique, $A \sim B$ si ni $A \succ B$, ni $B \succ A$*
  - *$A \succcurlyeq B$ si $A \succ B$ ou $A \sim B$*

Probabilités objectives et subjectives en économie financière

- Probabilités subjectives : cadre axiomatique
  - Fishburn (1986). The axioms of subjective probability. *Statistical Science*.

Statistical Science
1986, Vol. 1, No. 3, 335–358

The Axioms of Subjective Probability

Peter C. Fishburn

Abstract. This survey recounts contributions to the axiomatic foundations of subjective probability from the pioneering era of Ramsey, de Finetti, Savage, and Koopman to the mid-1980's. It is designed to be accessible to readers who have little prior acquaintance with axiomatics. At the same time, it provides a fairly complete picture of the present state of the measurement-theoretic foundations of subjective probability.

Key words and phrases: Axioms for comparative probability, numerical representations, additivity, countable additivity.

Probabilités objectives et subjectives en économie financière

- Probabilités subjectives : cadre axiomatique

> The axioms of subjective probability refer to assumed properties of a binary relation *is more probable than*, or its nonstrict companion *is at least as probable as*, on a set of propositions or events. This relation, often referred to as a qualitative or *comparative probability* relation, can be taken either as an undefined primitive (intuitive views) or as a relation derived from a preference relation (decision-oriented approach). In the latter case, to say that you regard *rain*

  - Fishburn (1986). The axioms of subjective probability. *Statistical Science*.

Probabilités objectives et subjectives en économie financière

- Probabilités subjectives : cadre axiomatique
  - Fishburn (1967). Preference-based definitions of subjective probability. *The Annals of Mathematical Statistics*.

> **PREFERENCE-BASED DEFINITIONS OF SUBJECTIVE PROBABILITY**[1]
>
> BY PETER C. FISHBURN
>
> *Advanced Research Department, Research Analysis Corporation*
>
> **1. Introduction.** Two main approaches have been used in defining subjective (personal) probability. In the intuitive approach, used by Koopman [13], [14], Kraft, Pratt, and Seidenberg [15], Scott [22], Good [9], Villegas [26], and to some extent by de Finetti [6], the axioms apply a comparative probability relation "is not more probable than" to a set of events or propositions.
>
> The second main approach bases the axioms on a comparative preference-indifference relation $\lesssim$ ("is not preferred to"): representatives include Ramsey [20], Savage [21], Suppes [23], Davidson and Suppes [3], Anscombe and Aumann [2], and Pratt, Raiffa, and Schlaifer [19]. Each axiomatization in this approach permits the derivation of a probability measure and a utility function that combines with the probabilities to yield a subjective expected utility model consistent with $\lesssim$.

Probabilités objectives et subjectives en économie financière

- Probabilités subjectives : cadre axiomatique
  - Suppes, P. (1969). The role of subjective probability and utility in decision-making.

> Although many philosophers and statisticians believe that only an objectivistic theory of probability can have serious application in the sciences, there is a growing number of physicists and statisticians, if not philosophers, who advocate a subjective theory of probability. The increasing advocacy of subjective probability is surely due to the increasing awareness that the foundations of statistics are most properly constructed on the basis of a general theory of decision-making. In a given decision situation subjective elements seem to enter in three ways: (i) in the determination of a utility function (or its negative, a loss function) on the set of possible consequences, the actual consequence being determined by the true state of nature and the decision taken; (ii) in the determination of an *a priori* probability distribution on the states of nature; (iii) in the determination of other probability distributions in the decision situation.

Probabilités objectives et subjectives en économie financière

- Probabilités subjectives : cadre axiomatique
  - Karni (2014). Axiomatic foundations of expected utility and subjective probability. *Handbook of the Economics of Risk and Uncertainty*.

> Ramsey (1931) sketched a proof of the existence of subjective probabilities. According to Ramsey, "the degree of belief is a casual property of it, which can be expressed vaguely as the extent to which we are prepared to act on it" (Ramsey, 1931, p. 170).
>
> Taking a similar attitude, de Finetti (1937) writes that "the degree of probability attributed by an individual to a given event is revealed by the conditions under which he would be disposed to bet on that event" (de Finetti, 1937). He proposed a definition of coherent subjective probabilities based on no arbitrage opportunities. D Finetti's model is based on the notion of expected value maximizing behavior, or linear utility.

Probabilités objectives et subjectives en économie financière

- Probabilités subjectives

> The *probability of any event* is the ratio between the value at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed, and the value of the thing expected upon its happening. (Bayes, 1763, page 376)
>
> We are driven therefore to the second supposition that the degree of a belief is a causal property of it, which we can express vaguely as the extent to which we are prepared to act on it. (Ramsey, 1931, page 170)

Probabilités objectives et subjectives en économie financière

- Probabilités subjectives

> . . . the degree of probability attributed by an individual to a given event is revealed by the conditions under which he would be disposed to bet on that event. (de Finetti, 1937; from Kyburg and Smokler, 1964, page 101)
>
> The intuitive thesis in probability holds that . . . probability derives directly from the intuition, and is prior to objective experience . . . (Koopman, 1940a, page 269)
>
> Personalistic views hold that probability measures the confidence that a particular individual has in the truth of a particular proposition, for example, the proposition that it will rain tomorrow. (Savage, 1954, page 3)

Partage optimal des risques : probabilités subjectives

- Interprétation subjective (épistémique) des probabilités
  - *Ramsey, de Finetti, Savage*
- Probabilités subjectives ?
  - Ministère de l'Education Nationale, ressources pour les collèges (classe de troisième)
    - https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/24/3/Probablites_17_03_08_maj2011_197243.pdf

1. PROBABILITÉS DÉFINIES À PARTIR DE CONSIDÉRATIONS DE SYMÉTRIE OU DE COMPARAISON 3
2. APPROCHE FRÉQUENTISTE DE LA PROBABILITÉ 6
3. MOYENS DE REPRÉSENTATION ET DE TRAITEMENT 9
4. LANGAGE ET PROPRIÉTÉS 10
5. EXPÉRIENCES À DEUX ÉPREUVES 11
6. CONTINUITÉ AVEC L'ENSEIGNEMENT AU LYCÉE 15
ÉLÉMENTS DE BIBLIOGRAPHIE : 16
ANNEXE 1 : DIFFÉRENTES INTERPRÉTATIONS DE LA PROBABILITÉ 17
ANNEXE 2 : ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DE LA NOTION DE PROBABILITÉ 19
1. PROBABILITÉ ÉPISTÉMIQUE 19
2. PROBABILITÉ DE TYPE FRÉQUENTISTE 21
2.1 Le théorème de Bernoulli 21
2.2 Théorèmes de convergence et fluctuation d'échantillonnage 23
2.3 Théorèmes de convergence et estimation d'une probabilité 24

Partage optimal des risques : probabilités subjectives interpersonnelles

- Probabilités personnelles et interpersonnelles : classe de 3e

description de la première peut être affinée en distinguant la probabilité personnelle, la probabilité interpersonnelle, et la probabilité logique. On peut illustrer ces différentes interprétations en prenant l'exemple d'une loterie de 1000 boules numérotées[15].

La probabilité personnelle

En ce qui me concerne, je ne vois pas pourquoi sortirait une boule plutôt qu'une autre. Et donc, la probabilité de tirer l'une quelconque des boules est de 1/1000.

La probabilité interpersonnelle (ou personnaliste)

Aucune personne sensée ne donnerait une probabilité plus forte à une boule qu'à une autre. Et donc, la probabilité de tirer l'une quelconque des boules est de 1/1000.

L'approche personnaliste est une variante de l'approche épistémique qui est opposée à une autre variante :

La probabilité logique

La relation logique entre l'hypothèse h_j (hypothèse de tirage de la boule n°j) et les données expérimentales est la même que celle existant entre toute autre hypothèse h_j et ces mêmes faits.
Les probabilités sont donc identiques. Et donc, la probabilité de tirer l'une quelconque des boules est de 1/1000.

La probabilité logique est sensée être une relation entre des informations ou indices et une hypothèse. Lorsqu'il ne dispose d'aucune information ou indice, le partisan de la probabilité logique utilise un principe appelé principe d'indifférence ou principe de raison insuffisante :

Le principe d'indifférence ou de raison insuffisante

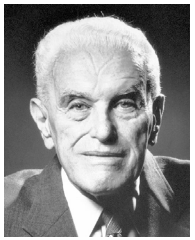
Il n'y a aucun indice permettant de privilégier l'une des 1000 hypothèses qui sont exclusives et conjointement exhaustives. Il faut donc attribuer à chacune d'elles la probabilité 1/1000.

Partage optimal des risques : probabilités subjectives interpersonnelles

- Peut-on avoir des probabilités subjectives interpersonnelles ?
  - *Peu vraisemblable, mais alors on perd les propriétés les plus importantes du partage des risques (diversification)*
- Exemple :
  - Supposons que l'investisseur Buffett pense que l'action Société générale dépasse le cours de 30 euros à un horizon d'un mois et qu'il en soit certain
  - Supposons que l'investisseur Musk pense l'inverse
  - Dans ce cas, un put digital de strike 30, échéance un mois n'a aucune valeur pour Buffet. Idem pour un call digital pour Musk
  - Ils vont donc parier l'un contre l'autre, au maximum de leurs possibilités
  - Chacun est persuadé de réaliser un « free lunch »
  - Mais ex-post, l'un des deux aura tort (et risque de faire faillite)
  - Pourquoi des divergences de points de vue ? Hubris (excès de confiance) ?
  - Pas d'apprentissage lors de la négociation
  - Milgrom & Stokey (1982). Information, trade and common knowledge. Journal of economic theory.

Partage optimal des risques : probabilités subjectives

Nancy Stokey



John Harsanyi

- Peut-on avoir des probabilités subjectives interpersonnelles ?
  - *« Doctrine Harsanyi »*
  - *Selon cette approche, les différences entre les probabilités d'individus rationnels devraient provenir uniquement de différences entre les informations dont ils disposent*
  - *Théorème d'Aumann (Agreing to disagree) : deux agents avec les mêmes probabilités a priori, des informations différentes auront les mêmes probabilités « a posteriori » en présence d'un « savoir commun »*
- Unique bien ou actif monétaire
  - *Pas de production, pas de choix de consommation*
  - *Pure économie d'échange (de marchés financiers)*

Axiomatique des probabilités subjectives

Partage optimal des risques : probabilités subjectives

- On considère S états de la nature.
  - *Exemple financier : S valeurs d'un actif sous-jacent*
  - *Paris : course hippique avec S chevaux. L'état s est associé à la victoire du cheval s*
- Un payoff est associé à un vecteur de $\mathbb{R}^S$
  - *Spécifie ce que l'on reçoit dans chaque état de la nature*
- On considère une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^S$
  - *Etablit des préférences sur les payoffs*
  - *Hypothèse 1 : ordre total (completeness)*
  - *Hypothèse 2 (monotonie) :* $x_s > y_s, \forall s \Rightarrow x \succ y$. *On préfère plus à moins.*
  - *Hypothèse 3 (continuité) :* x^n, $n \in \mathbb{N}$, $x^n \to x$, $\forall n, x^n \succcurlyeq y \Rightarrow x \succcurlyeq y$
  - *Hypothèse 4 (additivité) :* $x \succcurlyeq y \Rightarrow x + z \succcurlyeq y + z$, $\forall z$

Partage optimal des risques : probabilités subjectives

- Théorème : une relation de préférence sur $\mathbb{R}^S$ vérifie les conditions H1-H2-H3-H4 si et seulement s'il existe un vecteur de probabilités $(q_1, \dots, q_S)$ tel que $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow \sum_s q_s x_s \geq \sum_s q_s y_s$
  - *Vecteur de probabilités :* $q_1 \geq 0, \dots, q_S \geq 0$ *et* $q_1 + \cdots + q_S = 1$
  - *La partie* $\Leftarrow$ *est évidente*
  - *Démonstration de* $\Rightarrow$ *inspirée de Gilboa (Theory of Decision under Uncertainty) et de Rubinstein (*
  - $D = \{x, x \succcurlyeq 0\}$, $U = \{x, 0 \succ x\}$
  - U, D *non vides par complétude. D fermé par continuité. Donc* $U = D^C$ *ouvert.*
  - *Lemme :* D, U *sont convexes*
  - $x \succcurlyeq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \succcurlyeq 0$ *(si* $0 \succ \frac{x}{2}$, *alors* $\frac{x}{2} \succ \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ *(additivité), soit* $\frac{x}{2} \succ x$ *et comme* $0 \succ \frac{x}{2}$, $0 \succ x$ *(transitivité)*

Partage optimal des risques : probabilités subjectives

  - *En itérant le raisonnement précédent,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{x}{2^n} \succcurlyeq 0$
  - *Et par additivité* $\forall m \in \mathbb{N}$, $\frac{m}{2^n} x \succcurlyeq 0$
  - *Par continuité* $\forall \lambda > 0$, $x \succcurlyeq 0$
  - *Considérons* $\lambda \in [0,1]$
  - $x, y \succcurlyeq 0 \Rightarrow \lambda x \succcurlyeq 0$ *et* $(1-\lambda) y \succcurlyeq 0$
  - $\lambda x \succcurlyeq +(1-\lambda) y \succcurlyeq 0$ *par additivité*
  - *Ce qui montre la convexité de D (même raisonnement pour U)*
- On peut alors appliquer le théorème de séparation des convexes (voir transparent suivant)

Partage optimal des risques : probabilités subjectives

- Théorème de séparation des convexes

Corollaire 3.2.7 (Théorème de Hahn-Banach géométrique dans les espaces de dimension finie #1). *Soient C_1 et C_2 deux convexes non vides et disjoints de l'espace vectoriel normé E. On suppose que C_1 est ouvert. Il existe alors un hyperplan affine H séparant strictement C_1 de C_2. Plus précisément il existe une forme linéaire f sur E et un réel a tels que $\forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2$, $f(x_1) < a \leq f(x_2)$.*

- On applique le théorème au cas où $E = \mathbb{R}^S$, $C_1 = U, C_2 = D$.
- $x_n = \frac{1}{n}(1, \dots, 1) > (0, \dots, 0) \Rightarrow x_n \succ 0$, soit $x_n \in D$, donc $f(x_n) \geq a$. Or $f(x_n) = \frac{1}{n} f(1, \dots, 1) \to 0$, donc $a \leq 0$.
- $y_n = -\frac{1}{n}(1, \dots, 1) < (0, \dots, 0) \Rightarrow 0 \succ y_n$, soit $y_n \in U$, donc $f(y_n) < a$. Or $f(y_n) = -\frac{1}{n} f(1, \dots, 1) \to 0$, donc $0 \leq a$.
- Au total $a = 0$

Partage optimal des risques : probabilités subjectives

- On peut écrire $f(x) = \sum_i \pi_i x_i$
- Montrons que les π_i sont positifs ou nuls
- On considère les vecteurs de payoffs de la forme $(0, \dots, 1, \dots, 0)$.
- Ils sont associés à des éléments de D
- D'où $f(0, \dots, 1, \dots, 0) = \pi_i \geq 0$
- On exclut le cas où tous les π_i sont nuls (on ne séparerait rien)
- On peut renormaliser les π_i par leur somme : $\pi_i \to \frac{\pi_i}{\pi_1 + \dots + \pi_S}$

Partage optimal des risques : probabilités subjectives

- Approche intuitive des probabilités quantitatives à partir de relations de préférence (plus probable, moins probable) ?
- Principes de l'axiomatique (ensemble d'états fini)
  - *$\succcurlyeq$: Relation d'ordre total (plus probable) sur les événements*
  - *Transitivité $A \succ B$ et $B \succ C \Rightarrow A \succ C$*
  - *Monotonie : si $B \subseteq A$, $A \succcurlyeq B$*
  - *Non-négativité $A \succcurlyeq \emptyset$*
  - *Additivité : si $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$, alors $A \succ B \Rightarrow A \cup C \succcurlyeq B \cup C$*
  - *Passage au complémentaire : si $A \succ B$, alors on ne peut avoir $A^c \succ B^c$*
- P : Probabilité compatible avec la relation de préférence $\succ$
  - *$A \succ B \Leftrightarrow P(A) > P(B)$ et $A \succcurlyeq B \Leftrightarrow P(A) \geq P(B)$*

Partage optimal des risques : probabilités subjectives

- Exemple :
  - *Si $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ et si l'on dispose d'une mesure de probabilité P avec $p_i = P(\{i\})$*
  - *Soient $A, B \subseteq \Omega$. On peut définir $\succ$ par $A \succ B \Leftrightarrow P(A) \geq P(B)$*
  - *$P(A) = \sum_{i \in A} p_i \geq P(B) = \sum_{i \in B} p_i$*
- Réciproquement, si l'on part de $\succ$, peut-on construire P compatible avec $\succ$
  - *De Finetti avait conjecturé que la réponse était négative et qu'il fallait des conditions supplémentaires (ce qui est le cas)*
  - *Les axiomes précédents ne suffisent pas à garantir l'existence d'une probabilité (numérique) compatible avec $\succ$*
    - Kraft, Pratt & Seidenberg (1959). Intuitive probability on finite sets. *The Annals of Mathematical Statistics*.
    - Fishburn (1986). The axioms of subjective probability. *Statistical Science*.

Partage optimal des risques : probabilités subjectives - Exercice

- $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$
  - *On suppose que :*
    - $\{4\} \succ \{1,3\}$
    - $\{2,3\} \succ \{1,4\}$
    - $\{1,5\} \succ \{3,4\}$
    - $\{1,3,4\} \succ \{2,5\}$
  - *Où $\succ$ signifie plus probable*
  - *On va chercher à montrer qu'il n'existe pas de probabilité P compatible avec $\succ$*
  - *Préciser la tribu engendrée par les événements précédents (cad la plus petite tribu qui contient ces événements)*

Partage optimal des risques : probabilités subjectives - Exercice

- Précisons la partition qui engendre l'ensemble des événements
  - *Le complémentaire d'un événement est un événement*
  - *La différence symétrique de deux événements est un événement*
  - *Evénements considérés :*
  - $\{4\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,5\}$
  - $\{1\} = \{1,4\} \backslash \{4\}$
  - $\{3\} = \{1,3\} \backslash \{5\}$
  - $\{2\} = \{2,3\} \backslash \{3\}$
  - $\{5\} = \{2,5\} \backslash \{2\}$
  - *On peut en déduire que l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de* $\{1,2,3,4,5\}$
  - *S'il existe une probabilité sur l'ensemble des parties de* $\{1,2,3,4,5\}$*, il doit exister* $p_1, \dots, p_5$ *positifs et sommant à* 1.

Partage optimal des risques : probabilités subjectives - Exercice

- On note $p_1, \dots, p_5$ les probabilités associées aux états $1,2,\dots,5$
- Ecrire les inégalités induites par la relation de préférence
  - $\{4\} \succ \{1,3\} \Rightarrow p_4 > p_1 + p_3$
  - $\{2,3\} \succ \{1,4\} \Rightarrow p_2 + p_3 > p_1 + p_4$
  - $\{1,5\} \succ \{3,4\} \Rightarrow p_1 + p_5 > p_3 + p_4$
  - $\{1,3,4\} \succ \{2,5\} \Rightarrow p_1 + p_3 + p_4 > p_2 + p_5$ (4)
- En faisant la somme des trois premières inégalités
  - $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 > 2p_1 + 2p_3 + 2p_4$
  - $p_2 + p_5 > p_1 + p_3 + p_4$ (5)
  - (5) contredit (4)
- $\nexists$ de probabilité sur l'ensemble des événements

Partage optimal des risques : probabilités subjectives - Exercice

- Finance et existence de probabilités subjectives
  - $\{4\} \succ \{1,3\}$
  - $\{2,3\} \succ \{1,4\}$
  - $\{1,5\} \succ \{3,4\}$
  - *On va associer des paris et des mises à chacun des événements*
  - *On gagne* 1 *si l'événement se réalise et* 0 *sinon*
  - *Par exemple parier sur* $\{4\}$ *est associé au payoff* $1_{\{4\}}$*, parier sur* $\{1,3\}$ *est associé au payoff* $1_{\{1,3\}}$
  - $\pi_{\{1,3\}}$ *: prime associée au pari sur la réalisation de* $\{1,3\}$
  - *Si on peut acheter et vendre des paris* $\pi_{\{1,3\}} = \pi_{\{1\}} + \pi_{\{3\}}$
  - *Sinon opportunité d'arbitrage*
  - $\{4\} \succ \{1,3\} \Rightarrow \pi_{\{4\}} > \pi_{\{1,3\}}$

Partage optimal des risques : probabilités subjectives - Exercice

- Finance et existence de probabilités subjectives
    - $\{4\} \succ \{1,3\}, \{2,3\} \succ \{1,4\}, \{1,5\} \succ \{3,4\}$
  - *Vendons les paris chers et achetons les paris bon marché*
  - *On vend* $\{4\}, \{2,3\}, \{1,5\}$ *et on achète* $\{1,3\}, \{1,4\}, \{3,4\}$
  - *On récupère* $\pi_{\{4\}} + \pi_{\{2,3\}} + \pi_{\{1,5\}} - \pi_{\{1,3\}} - \pi_{\{1,4\}} - \pi_{\{3,4\}} > 0$
  - *Ceci est associé au vecteur de paiements* $(1, -1, 1, 1, -1)$
  - $\{1,3,4\} \succ \{2,5\}$ *: on achète le pari* $\{2,5\}$ *et on vend le pari* $\{1,3,4\}$
  - *On récupère* $\pi_{\{1,3,4\}} - \pi_{\{2,5\}} > 0$
  - *C'est associé au vecteur de paiement* $(-1, 1, -1, -1, 1)$
  - *Paiement net* $(1, -1, 1, 1, -1) + (-1, 1, -1, -1, 1) = (0,0,0,0,0)$
  - *A la date initiale, on récupère* $\pi_{\{4\}} + \pi_{\{2,3\}} + \pi_{\{1,5\}} - \pi_{\{1,3\}} - \pi_{\{1,4\}} - \pi_{\{3,4\}} + \pi_{\{1,3,4\}} - \pi_{\{2,5\}} > 0$
  - *Opportunités d'arbitrage*

Partage optimal des risques : probabilités subjectives - Exercice

- Finance et existence de probabilités subjectives
  - *L'absence de probabilité associée aux préférences précédentes est liée à une incohérence qui permet de construire une opportunité d'arbitrage dès que l'on introduit un système de paris*
  - *Réciproquement, si le système de paris associé aux préférences ne conduit pas à des opportunités d'arbitrage, il existe une probabilité associée à ces paris*
  - *Les probabilités* p_i *sont les prix des paris contingents aux états*

Partage optimal des risques : probabilités subjectives

- Abdellaoui & Wakker (2020). Savage for dummies and experts. *Journal of Economic Theory*.
- Ellsberg (1961). Risk, ambiguity, and the Savage axioms. *The quarterly journal of economics*.
- De Finetti (1931). Sul Significato Soggettivo della Probabilittextà. *Fundamenta mathematicae*.
- De Finetti (1937). La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives. In *Annales de l'institut Henri Poincaré.*
- Gilboa (2009). *Theory of decision under uncertainty.* Cambridge university press.
- Koopman (1940). The axioms and algebra of intuitive probability. *Annals of mathematics*.

Partage optimal des risques : probabilités subjectives

- Machina (2003). States of the World and the State of Decision Theory. *The economics of risk*.
- Nau (2001). De Finetti was right: probability does not exist. *Theory and Decision*.
- Nau (2011). Risk, ambiguity, and state-preference theory. *Economic Theory*.
- Parmigiani & Inoue (2009). *Decision theory: Principles and approaches*. John Wiley & Sons.
- Rubinstein, (2012). *Lecture notes in microeconomic theory: the economic agent*. Princeton University Press.
- Savage (1954). *The foundations of statistics.*
- Villegas (1964). On Qualitative Probability σ-Algebras. *The Annals of Mathematical Statistics.*
- Wakker (2010). *Prospect theory: For risk and ambiguity*. Cambridge university press.

Pareto optimalité

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Partage optimal des risques

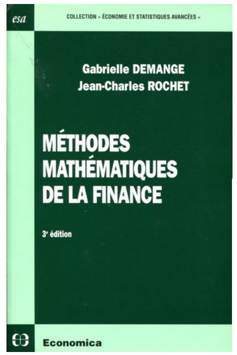
- On considère une économie d'échange (pas de production)
- Un seul bien est échangé : le « numéraire » (monnaie)
- Une seule date future (Pas de dynamique des prix à étudier)
- Représentation du risque
  - *Ensemble (fini) des états de la nature* $\Sigma = \{1, \ldots, S\}$
  - *Probabilité d'être dans l'état* $s \in \Sigma$: p_s, $p_s > 0$
- Préférences des individus : espérance de l'utilité de la richesse future.
- Marchés complets : autant d'actifs traités que d'états de la nature
- Cadre bien adapté à l'analyse de l'échange des risques, via les marchés financiers (actions, obligations, produits dérivés)

Partage optimal des risques : organisation de la présentation

- Dans un premier temps, nous allons caractériser les allocations de richesses Pareto-optimales
  - *Critère d'efficacité économique*
- Puis, examiner la demande des agents en titres risqués
  - *Choix de portefeuille*
  - *Rappeler la définition, l'existence et l'unicité d'un équilibre des marchés financiers*
- Puis utiliser le premier théorème du bien-être
  - *Tout équilibre est associé à une allocation Pareto-optimale des richesses*
  - *Pour établir un lien entre prix des actifs contingents et probabilités de réalisation des états de la nature (primes de risque)*

Partage optimal des risques

- Compte-tenu du contexte de la présentation (notamment le cadre statique), on peut se référer aux ouvrages suivants
  - *Adaptation de l'équilibre général à l'allocation des risques*



  - *Le cadre dynamique (possibilité de traiter des actifs financiers à plusieurs dates futures) nécessite d'introduire de nouveaux concepts*

Partage optimal des risques

- Extraits de l'article d'Arrow de 1964, initialement publié en français en 1953 : ici est introduit le concept d'actif contingent

III ALLOCATION OF RISK-BEARING BY SECURITIES

In the actual world, risk-bearing is not allocated by the sale of claims against specific commodities. A simplified picture would rather be the following: securities are sold which are payable in money, the amount depending on the state s which has actuallyoccurred (this concept is obvious for stocks; for bonds, we have only to recall the possibility of default if certain states s occur); when the state s occurs, the money transfers determined by the securities take place, and then the allocation of commodities takes place through the market in the ordinary way, without further risk-bearing.

It is not difficult to show that any optimal allocation of risk-bearing can be achieved by such a competitive system involving securities payable in money. For the given optimal allocation, x^*_{isc}, let the prices $\bar{p}_{sc}$ and the incomes y_i be determined as in the previous section. For simplicity, assume there are precisely S types of securities, where a unit security of the sth type is a claim paying one monetary unit if state s occurs and nothing otherwise. Any security whatever may be regarded as a bundle of the elementary types just described.

Let q_s be the price of the sth security and p_{sc} the price of commodity c is state s occurs. Choose them so that

The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing[1]

I INTRODUCTION

The theory of the optimal allocation of resources under conditions of certainty is well-known. In the present note, an extension of the theory to conditions of subjective uncertainty is considered.

Attention is confined to the case of a pure exchange economy; the introduction of production would not be difficult. We suppose I individuals, and S possible states of nature. In the sth state, amount x_{sc} of commodity c $(c=1, \dots, C)$ is produced. It is assumed that each individual acts on the basis of subjective probabilities as to the states of nature; let π_{is} be the subjective probability of state s according to individual i. Further, let x_{isc} be the amount of commodity claimed by individual i if state s occurs. These claims are, of course, limited by available resources, so that

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{I} x_{isc} = x_{sc}$$

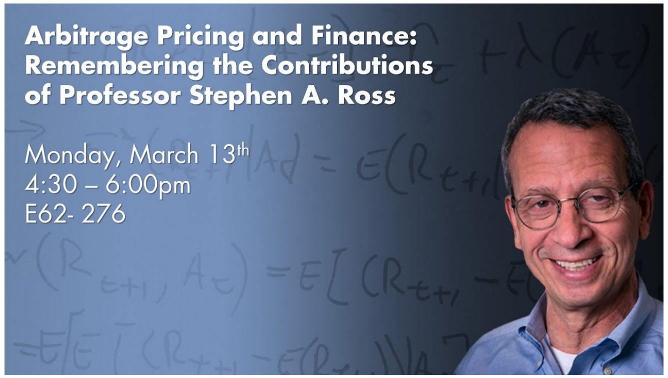
assuming the absence of saturation of individuals' desires.

The problem of optimal allocation of risk-bearing is that of choosing the magnitudes x_{isc}, subject to restraints (1), in such a way that no other choice will make every individual better off. In Section 2, it is briefly argued that, if there exists markets for claims on all commodities, the competitive system will lead to an optimal allocation under certain hypotheses.

However, in the real world the allocation of risk-bearing is accomplished by claims payable in money, not in commodities. In Section 3, it is shown that the von Neumann-Morgenstern theorem enables us to conclude that, under certain hypotheses, the allocation of risk-bearing by competitive securities markets is in fact optimal.

Références

- Si la notion d'actif contingent est due à Arrow et Debreu, on considère que Stephen Ross est celui qui a fait le lien avec les options et la théorie de l'évaluation par arbitrage
  - https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=GwyHCub7u4w



Références

- Ross (1976). Options and efficiency. *The Quarterly Journal of Economics*.

OPTIONS AND EFFICIENCY *

STEPHEN A. ROSS

This paper argues that in an uncertain world options written on existing assets can improve efficiency by permitting an expansion of the contingencies that are covered by the market. The two major results obtained are, first, that complex contracts can be "built up" as portfolios of simple options and, second, that there exists a single portfolio of the assets, the efficient fund, on which all options can be written with no loss of efficiency.

- La première partie de l'article est en lien avec les transparents sur « la fabrique des produits dérivés »
- Et avec celle des gains d'efficience permis par l'ouverture de nouveaux marchés.

Références

- Ross (1976). Options and efficiency. The Quarterly Journal of Economics.
- La première partie de l'article est en lien avec les transparents sur « la fabrique des produits dérivés »

> The possibility of writing option contracts opens up new spanning opportunities. Although there are only a finite number of marketed capital assets, shares of stock, bonds, or as we shall call them "primitives," there is a virtual infinity of options or "derivative" assets that the primitives may generate. Furthermore, in general, it is less costly to market a derived asset generated by a primitive than to issue a new primitive, and there is at least some reason to believe that options will be created until the gains are outweighed by the set-up costs.

Références

- Ross (1976). Options and efficiency. The Quarterly Journal of Economics.

> An easy way to understand this is by analogy with a market where individuals are permitted to purchase a grapefruit only if they also buy an orange. If, by a fluke, everyone wishes to consume one grapefruit with one orange, this constraint has no force. Otherwise, opening separate markets would improve efficiency.

- Aux Etats-Unis, le marché des options sur taux d'intérêt s'est développé par démembrement de la partie optionnelle des obligations d'entreprise (callable bonds).
- « Complétion » des marchés : moteur de l'innovation financière
- Pas de résultat théorique permettant de prouver des gains d'efficience en cas d'ouverture de nouveaux marchés (ou de création de nouveaux produits financiers)

Partage optimal des risques : espérance d'utilité

- Les agents économiques ont des préférences à la Von Neumann – Morgenstern
  - *Ceci peut résulter du théorème de Von Neumann et Morgenstern*
    - Présenté au second semestre
  - *Pour des probabilités objectives*
  - *Dans le cas de probabilités subjectives, Savage montre que l'on peut également représenter les préférences des agents par l'espérance de l'utilité de la richesse (pour la probabilité subjective)*
  - *Anscombe et Aumann ont un formalisme un peu différent de Savage, plus en ligne avec celui utilisé pour la démonstration du théorème de VNM*
    - Anscombe, & Aumann (1963). A definition of subjective probability. *Annals of mathematical statistics.*
    - Kreps (1996). *Leçons de théorie microéconomique*. Presses univ. de France.

Partage optimal des risques

- On note $w_n(s)$ la richesse de l'agent n dans l'état s et $\widetilde{w}_n$ la variable aléatoire représentant sa richesse
  - *$\widetilde{w}_n$: variable aléatoire prenant les valeurs $w_n(1) < \cdots < w_n\ (S)$*
- Espérance d'utilité de l'agent n :
  - $E[u_n(\widetilde{w}_n)] = \sum_{s=1}^{S} p_s u_n(w_n(s))$
  - *p_s probabilité de l'état s, u_n strictement croissante concave*
- Ressource globale disponible dans l'état s : $W(s)$
  - *$\widetilde{W}$ variable aléatoire prenant les valeurs $W(1), \dots, W(S)$*
- <u>Allocation réalisable</u> :
  - *Richesses individuelles $\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_N$ vérifiant la condition d'équilibre $\widetilde{w}_1 + \cdots + \widetilde{w}_N = \widetilde{W}$*
  - *C'est-à-dire $w_1(s) + \cdots + w_N(s) = W(s)$, $\forall s \in \{1, \dots, S\}$*

Partage optimal des risques

K. Arrow

- Allocation : $\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_N$
  - *Richesses aléatoires des individus $n = 1, \dots N$*
- **Allocation réalisable** : $\widetilde{w}_1 + \cdots + \widetilde{w}_N = \widetilde{W}$
  - *Relation entre variables aléatoires*
  - *Égalité doit être vraie dans tous les états de la nature*
- $w_1(s) + \cdots + w_N(s) = W(s), \forall s = 1, \dots, S$
  - *S contraintes*
  - *Ou : $\sum_{n=1}^{N} w_n(s) = W(s), \forall s = 1, \dots, S$*
  - *Allocation : $w_n(s)$, $s = 1, \dots S$, $n = 1, \dots N$*
  - *Niveau de richesse de chacun des N individus dans les S états de la nature*
  - *$S \times N$ quantités à déterminer*

Partage optimal des risques

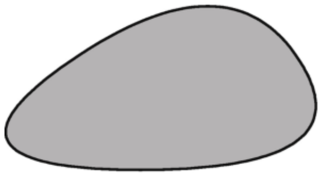
- Allocation Pareto optimale :
  - *Allocation réalisable telle qu'il n'existe pas d'autre allocation réalisable qui donne une espérance d'utilité supérieure à un agent, sans diminuer celle d'aucun autre.*
    - Seule Pareto optimalité ex-ante a un sens
    - Toute allocation ex-post est Pareto optimale
- Caractérisation des allocations optimales
  - *Propriété : Une allocation maximisant $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n E[u_n(\widetilde{w}_n)]$ pour des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_N$*
    - Sous contrainte de réalisation de l'allocation $\widetilde{w}_1 + \cdots + \widetilde{w}_N = \widetilde{W}$
  - *est Pareto optimale*

Propriété : Utility possibility set

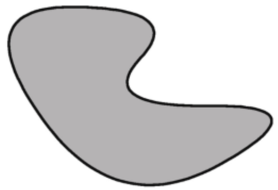
- Deux agents : ensemble des allocations réalisables $X = \{(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2), \widetilde{w}_1 + \widetilde{w}_2 = \widetilde{W}\}$
- « Utility possibility set » : $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \exists(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) \in X, (x_1, x_2) \leq (E[u_1(\widetilde{w}_1)], E[u_2(\widetilde{w}_2)])\}$
  - *Ensemble des couples (x_1, x_2) tels que x_1 et x_2 sont dominés par des utilités de richesse pour des allocations réalisables.*
- Propriété : U est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$
  - *Preuve : Soit (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dans U et $0 \leq \lambda \leq 1$*
  - $\lambda(x_1, x_2) + (1-\lambda)(y_1, y_2) \leq (\lambda E[u_1(\widetilde{w}_1)] + (1-\lambda)E[u_1(\tilde{v}_1)], \lambda E[u_2(\widetilde{w}_2)] + (1-\lambda)\lambda E[u_2(\tilde{v}_2)])$
  - *Par la concavité de u_1, $\lambda E[u_1(\widetilde{w}_1)] + (1-\lambda)E[u_1(\tilde{v}_1)] \leq E[u_1(\lambda\widetilde{w}_1 + (1-\lambda)\tilde{v}_1)]$.*
  - *De même pour l'agent 2*
  - *On conclut car $(\lambda\widetilde{w}_1 + (1-\lambda)\tilde{v}_1, \lambda\widetilde{w}_2 + (1-\lambda)\tilde{v}_2) \in X$*

Propriété : Utility possibility set

- Propriété : U est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$



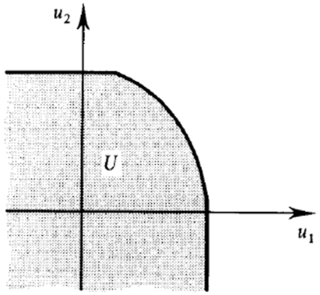
Ensemble convexe



Ensemble non convexe

Allocations Pareto-optimales

- Définition : frontière de Pareto
- $UP = \{(u_1, u_2) \in U, \nexists (x_1, x_2) \in U, (x_1, x_2) > (u_1, u_2)\}$
- Ci-dessous, l'ensemble U (utility possibility set) convexe
- UP est le bord supérieur gauche de U



Partage optimal des risques

- Exemples de distributions de richesse

	s1	s2
Ann	1	0
Bob	0	1

ou

	s1	s2
Ann	1	1
Bob	0	0

- *Dans le premier cas, Ann et Bob ont probablement intérêt à échanger de la richesse entre les états s_1 et s_1*
- *Dans le second, non : Comme la richesse de Bob ne peut être négative, il ne peut que recevoir ; tout transfert va induire une baisse de la richesse d'Ann (dans les deux états). Il y a Pareto-optimalité*

Partage optimal des risques

- Notons u_1 l'utilité d'Ann, u_2 celle de Bob.
- u_1, u_2 sont croissantes et (strictement) concaves
- On suppose u_1, u_2 dérivables $\Rightarrow u_1', u_2'$ décroissantes
- Notons $p_1 > 0, p_2 > 0$ les probabilités associées aux deux états
- $w_1(1) = 1, w_1(2) = 0$ (dotation initiale d'Ann)
- $w_2(1) = 0, w_2(2) = 1$ (dotation initiale de Bob)
- L'état 1 est plus favorable que l'état 2 pour Ann et c'est l'inverse pour Bob : $\widetilde{w}_1$ et $\widetilde{w}_2$ ne sont pas comonotones.
- $W(1) = w_1(1) + w_2(1) = 1, W(2) = w_1(2) + w_2(2) = 1$
- On considère un transfert de richesse d'Ann vers Bob de $p_2 dw$ (où dw « infiniment petit » et $dw > 0$) dans l'état 1 et de $p_1 dw$ de Bob vers Ann dans l'état 2.

Partage optimal des risques

- Changement dans l'espérance d'utilité d'Ann
- $\big(p_1 u_1(1 - p_2 dw) + p_2 u_1(p_1 dw)\big) - \big(p_1 u_1(1) + p_2 u_1(0)\big)$
- $\approx p_1 p_2 \big(u_1'(0) - u_1'(1)\big) dw > 0$ car $u_1'(0) > u_1'(1)$ (utilité marginale décroissante)
- Changement dans l'espérance d'utilité de Bob
- $\big(p_1 u_2(p_2 dw) + p_2 u_2(1 - p_1 dw)\big) - \big(p_1 u_2(0) + p_2 u_2(1)\big)$
- $\approx p_1 p_2 \big(u_2'(0) - u_2'(1)\big) dw > 0$
- Le transfert précédent améliore les (espérances d') utilité d'Ann et de Bob
- $(w_1(1) = 1, w_1(2) = 0), (w_2(1) = 0, w_2(2) = 1)$ n'est pas une distribution de richesse Pareto-optimale

Partage optimal des risques

- $(w_1(1) = 1, w_1(2) = 0)$, $(w_2(1) = 0, w_2(2) = 1)$ n'est pas une distribution de richesse Pareto-optimale.

	s1	s2
Ann	1	0
Bob	0	1

- Remarque : tant que $w_1(1) < w_1(2)$ et $w_2(1) > w_2(2)$ on peut continuer à effectuer des transferts Pareto améliorants.
- On va s'arrêter quand $w_1(1) = w_1(2)$ ou $w_2(1) = w_2(2)$, disons quand $w_1(1) = w_1(2)$ (richesse d'Ann non aléatoire).
- Comme $\widetilde{w}_1 + \widetilde{w}_2 = \widetilde{W} = 1$, on en déduit que $w_2(1) = w_2(2)$ (richesse de Bob non aléatoire). Et vice versa.
- Pas de risque agrégé ⇒ pas de risque pour les individus à l'optimum (de Pareto).

Partage optimal des risques

- Caractérisation des allocations optimales
  - *Propriété : Une allocation maximisant $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n E[u_n(\widetilde{w}_n)]$ pour des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$*
    - Sous contrainte de réalisation de l'allocation $\widetilde{w}_1 + \cdots + \widetilde{w}_N = \widetilde{W}$
  - *est Pareto optimale*
- Démonstration du résultat précédent par l'absurde
  - *Soit $\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_N$ tels que $\widetilde{w}_1 + \cdots + \widetilde{w}_N = \widetilde{W}$ maximisant $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n E[u_n(\widetilde{w}_n)]$*
  - *Si cette allocation n'est pas Pareto-optimale, il existe une autre allocation réalisable $\widetilde{w}_1^*, \ldots, \widetilde{w}_N^*$ telle que pour au moins un agent i, $E[u_i(\widetilde{w}_i^*)] > E[u_i(\widetilde{w}_i)]$ et $E[u_n(\widetilde{w}_n^*)] \geq E[u_n(\widetilde{w}_n)]$.*
  - *Il en résulte que $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n E[u_n(\widetilde{w}_n^*)] > \sum_{n=1}^{N} \lambda_n E[u_n(\widetilde{w}_n)]$*

Partage optimal des risques

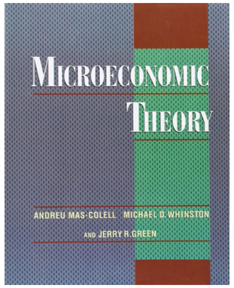
- **Réciproque** : toute allocation réalisable Pareto-optimale maximise un critère du type $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n E[u_n(\widetilde{w}_n)]$
  - *Démonstration, Microeconomic theory, page 560*

Proposition 16.E.2: If $u^* = (u_1^*, \ldots, u_I^*)$ is a solution to the social welfare maximization problem (16.E.1) with $\lambda \gg 0$, then $u^* \in UP$; that is, u^* is the utility vector of a Pareto optimal allocation. Moreover, if the utility possibility set U is convex, then for any $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_I) \in UP$, there is a vector of welfare weights $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_I) \geq 0$, $\lambda \neq 0$, such that $\lambda \cdot \bar{u} \geq \lambda \cdot u$ for all $u \in U$, that is, such that $\bar{u}$ is a solution to the social welfare maximization problem (16.E.1).

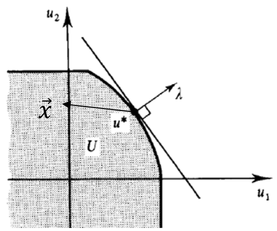
Proof: The first part is immediate: if u^* were not Pareto optimal, then there would exist a $u \in U$ with $u \geq u^*$ and $u \neq u^*$; and so because $\lambda \gg 0$, we would have $\lambda \cdot u > \lambda \cdot u^*$.

For the second part, note that if $\bar{u} \in UP$, then $\bar{u}$ is in the boundary of U. By the supporting hyperplane theorem (see Section M.G of the Mathematical Appendix), there exists a $\lambda \neq 0$ such that $\lambda \cdot \bar{u} \geq \lambda \cdot u$ for all $u \in U$. Moreover, since the set U has been constructed so that $U - \mathbb{R}_+^I \subset U$, we must have $\lambda \geq 0$ (indeed, if $\lambda_i < 0$, then by choosing a $u \in U$ with $u_i < 0$ large enough in absolute value, we would have $\lambda \cdot u > \lambda \cdot \bar{u}$). ■

Partage optimal des risques



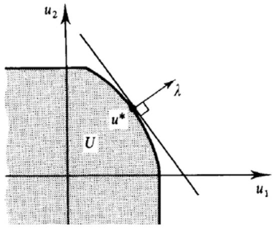
- Démonstration (simplifiée)
  - *Soit le point (v_1, v_2)sur la frontière de Pareto*
  - *Considérons le vecteur $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ (voir graphique)*
  - *Pour tout vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2) \in U$, $\vec{\lambda}.(\vec{x} - \vec{v}) \leq 0$*
  - *$\vec{\lambda}.(\vec{x} - \vec{v}) = \lambda_1(x_1 - v_1) + \lambda_2(x_2 - v_2)$ est le produit scalaire entre $\vec{\lambda}$ et $\vec{x} - \vec{v}$*

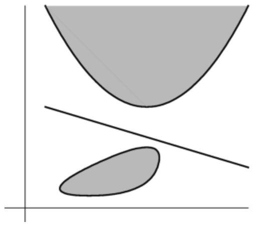


  - *$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \leq \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, ce qui montre que (v_1, v_2) est optimal pour la fonction d'utilité $\lambda_1 E[u_1(\widetilde{w}_1)] + \lambda_2 E[u_2(\widetilde{w}_1)]$*

Partage optimal des risques

- Remarque : le vecteur $\vec{\lambda}$ est orthogonal à la droite d'appui qui sépare le plan, U étant inclus dans l'un des deux demi-plans





- De manière générale, on peut toujours tracer une droite séparant deux ensembles convexes
  - *U et un demi-plan dans notre exemple*

Partage optimal des risques

- Pourquoi l'énoncé de la réciproque est-il intuitif ?
  - *Notons* $\widetilde{w}_1^*, \dots, \widetilde{w}_N^*$ *une allocation Pareto optimale*
  - *Notons* $u_i^* = E[u_i(\widetilde{w}_i^*)]$
  - $\widetilde{w}_1^*$ *est solution du problème* $\max_{\widetilde{w}_1,\dots,\widetilde{w}_n} \lambda_1 E[u_1(\widetilde{w}_1)]$
  - *sous les contraintes* $E[u_i(\widetilde{w}_i)] \geq u_i^*,\ i = 2, \dots, N$ *et* $\widetilde{w}_1 + \dots + \widetilde{w}_N = \widetilde{W}$
  - *Ceci revient à maximiser le Lagrangien* $\lambda_1 E[u_1(\widetilde{w}_1)] + \dots + \lambda_N E[u_N(\widetilde{w}_N)]$
  - *sous la contrainte résiduelle* $\widetilde{w}_1 + \dots + \widetilde{w}_N = \widetilde{W}$

Partage optimal des risques, utilitarisme et théorie du choix social

- La Pareto-optimalité est a priori un critère d'efficacité, pas de justice
  - *Une allocation qui donne toute la richesse à un individu et zéro aux autres est Pareto optimale*
- $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n E[u_n(\widetilde{w}_n)]$ semble faire intervenir une « utilité sociale » avec λ_n le poids de l'individu n
- Utiliser $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n E[u_n(\widetilde{w}_n)]$ comme mesure du « bien-être collectif » pose plusieurs problèmes
- La comparaison interpersonnelle des utilités individuelles
  - *Les fonctions d'utilité de VNM sont cardinales, mais définies à une transformation affine croissante près.*
- Le théorème d'impossibilité d'Arrow

Partage optimal des risques, utilitarisme et théorie du choix social

- Maximiser une combinaison linéaire des espérances d'utilité individuelles simplifie la caractérisation des allocations de risque Pareto-optimales
  - *Les poids* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *n'ont pas a priori d'interprétation économique*
  - *L'espérance de l'utilité de la richesse n'est définie qu'à une transformation affine croissante près.*
  - $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n E[u_n(\widetilde{w}_n)] = \sum_{n=1}^{N} E[\lambda_n u_n(\widetilde{w}_n)]$ *semble aller dans le sens de l'approche utilitariste du bien-être social.*
  - *Fleming (1952), Harsanyi (1953, 1955), Fishburn (1984), Coulhon & Mongin (1989), Hammond (1991, 1992) donnent des conditions justifiant l'utilisation d'une fonction additive si l'on s'intéresse au bien-être social.*
  - *Fleurbaey (2017). Le problème du choix social est-il résolu?. Revue économique.*

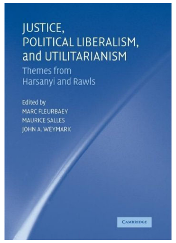
Le problème du choix social est-il résolu ?

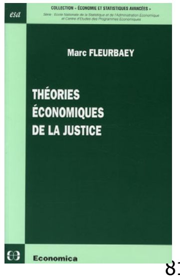
Marc Fleurbaey*

LE THÉORÈME D'AGRÉGATION

Le risque est omniprésent dans l'évaluation des politiques sociales dont les effets sont incertains et interagissent avec les fluctuations engendrées spontanément par les mécanismes économiques, politiques et sociaux. La pierre fondatrice de l'évaluation sociale dans le risque est le théorème d'Harsanyi [1955], qui s'énonce comme suit : si l'évaluation sociale repose sur un critère d'espérance de bien-être social, si les individus eux-mêmes évaluent les options en termes d'espérance d'utilité personnelle, et si l'évaluation sociale satisfait la condition de Pareto, alors la fonction de bien-être social dont l'espérance est maximisée par le critère peut s'écrire comme une somme pondérée des fonctions d'utilité VNM individuelles.

Précisons que le contexte est celui du risque avec des probabilités identiques employées pour calculer toutes les espérances individuelles ainsi que l'espérance sociale. Lorsque les individus ont des croyances différentes, il est incohérent d'utiliser leurs croyances pour évaluer leurs espérances d'utilité, car on peut appliquer le principe de Pareto dans des cas « d'unanimité factice » (Mongin [1995], [2015]), où chacun veut prendre un risque en surestimant ses propres chances de succès – combien de guerres ont-elles eu lieu parce que chaque camp était sûr de la victoire ?





Partage optimal des risques, utilitarisme et théorie du choix social

Harsanyi's 'Utilitarian Theorem' and Utilitarianism

MATHIAS RISSE
Kennedy School of Government, Harvard University

1. Introduction

1.1 In 1955, John Harsanyi proved a remarkable theorem:[1] Suppose n agents satisfy the assumptions of von Neumann/Morgenstern (1947) expected utility theory, and so does the group as a whole (or an observer). Suppose that, if each member of the group prefers option a to b, then so does the group, or the observer (Pareto condition). Then the group's utility function is a weighted sum of the individual utility functions. Despite Harsanyi's insistence that what he calls the *Utilitarian Theorem* embeds utilitarianism into a theory of rationality, the theorem has fallen short of having the kind of impact on the discussion of utilitarianism for which Harsanyi hoped. Yet how *could* the theorem influence this discussion? Utilitarianism is as attractive to some as it is appalling to others. The prospects for this dispute to be affected *by a theorem* seem dim. Yet a closer look shows how the theorem could make a contribution. To

- Risse (2002). Harsanyi's' utilitarian theorem and utilitarianism. *Noûs*.

Partage optimal des risques, utilitarisme et théorie du choix social

THEOREM 1. *Suppose $u, u_1, \ldots, u_n$ are von Neumann–Morgenstern utility functions on the set P of all lotteries generated from a nonempty set of pure prospects and, for all $p, q \in P$,*

(1) $u(p) = u(q)$ *whenever* $u_i(p) = u_i(q)$ *for* $i = 1, \ldots, n$.

Then there are real numbers $a_1, \ldots, a_n$, and b such that, for all $p \in P$,

$$u(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(p) + b.$$

If, in addition, for all $p, q \in P$,

(2) $u(p) \geqslant u(q)$ *whenever* $u_i(p) \geqslant u_i(q)$ *for* $i = 1, \ldots, n$,

then $a_i \geqslant 0$ for all i.

- Extrait de l'article de Fishburn (1984) : On Harsanyi's utilitarian cardinal welfare theorem. *Theory and Decision*.
- Résultat connu comme le théorème d'agrégation d' Harsanyi (1955).
  - Harsanyi (1953). Cardinal utility in welfare economics and in the theory of risk-taking. *Journal of Political Economy*.
  - Harsanyi (1955). Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparisons of utility. *Journal of political economy*.
  - Fleming (1952). A cardinal concept of welfare. *The Quarterly Journal of Economics*.

THEOREM 1. *Suppose $u, u_1, \ldots, u_n$ are von Neumann–Morgenstern utility functions on the set P of all lotteries generated from a nonempty set of pure prospects and, for all $p, q \in P$,*

(1) $u(p) = u(q)$ *whenever* $u_i(p) = u_i(q)$ *for* $i = 1, \ldots, n$.

Then there are real numbers $a_1, \ldots, a_n$, and b such that, for all $p \in P$,

$$u(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(p) + b.$$

If, in addition, for all $p, q \in P$,

(2) $u(p) \geqslant u(q)$ *whenever* $u_i(p) \geqslant u_i(q)$ *for* $i = 1, \ldots, n$,

then $a_i \geqslant 0$ for all i.

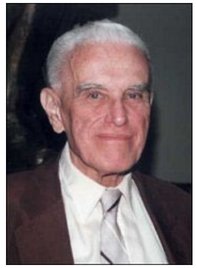
- Hypothèse 1 (Pareto Indifference) : si deux allocations de richesse sont indifférentes pour les individus, elles le sont pour la fonction d'utilité u
- Hypothèse 2 (semi-strong Pareto) : deux allocations de richesse sont ordonnées (au sens large) identiquement pour les individus, elles le sont pour la fonction d'utilité u.
  - *Remarque : Hypothèse 2 ⇒ Hypothèse 1*
- Ces hypothèses sont requises pour une fonction d'utilité « sociale » u
- Alors, u : combinaison linéaire à poids positifs (ou nuls) des utilités individuelles u_i

Partage optimal des risques, utilitarisme et théorie du choix social

- On peut aussi utiliser l'hypothèse 3 (Strong Pareto) :
  - *$u(p) > u(q)$ si $u_i(p) \geq u_i(q)$ pour tout individu i et si $u_i(p) > u_i(q)$ pour au moins un individu i*
  - *Dans ce cas, $u(p) = \sum_i a_i\, u_i(p) + b$ avec $a_i > 0$ pour tout individu i*

- Autre interprétation du théorème d'agrégation (Hammond ?)
  - *Il existe un "dictateur bienveillant" qui a une fonction d'utilité u telle que $E[u(\tilde{w})] > E[u(\tilde{v})] \Rightarrow E[u_n(\tilde{w})] > E[u_n(\tilde{v})]$, $\forall n = 1, \ldots N$.*
  - *Le dictateur a une fonction d'utilité de la forme $E[u(\tilde{w})] = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n E[u_n(\tilde{w})]$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_N > 0$*
  - *Formalisme en rapport avec le théorème d'impossibilité d'Arrow*

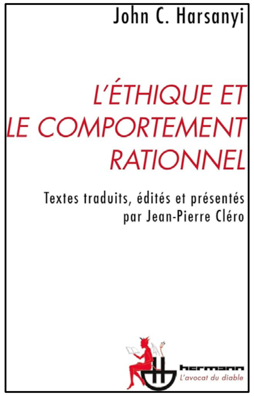
Partage optimal des risques, utilitarisme et théorie du choix social



- Harsanyi : théorème de l'observateur impartial
  - Harsanyi (1955). Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparisons of utility. *Journal of political economy.*
  - *Utilise (avant Rawls) le principe du voile d'ignorance :*

> Pour abréger la référence, nous appellerons *postulat d'équiprobabilité* la supposition fictive d'avoir la même probabilité d'occuper toute position sociale possible, tandis que nous appellerons *modèle d'équiprobabilité des jugements de valeur morale* l'ensemble du modèle de décision précédent fondé sur cette supposition.

  - *Si on donne la même probabilité au fait de revêtir chaque identité possible, chacun va maximiser l'utilité moyenne :* ***Utilitarisme total***



Partage optimal des risques, utilitarisme et théorie du choix social

- Le théorème d'agrégation d'Harsanyi : références complémentaires
  - Hammond (1991). Independence of irrelevant interpersonal comparisons. *Social Choice and Welfare*.
  - Hammond (1992). Harsanyi's utilitarian theorem: A simpler proof and some ethical connotations. In *Rational interaction: essays in honor of John C. Harsanyi* (pp. 305-319). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg
  - Weymark (1993). Harsanyi's social aggregation theorem and the weak Pareto principle. *Social choice and welfare*.
  - Coulhon & Mongin (1989). Social choice theory in the case of von Neumann-Morgenstern utilities. *Social Choice and Welfare*.
  - Risse (2002). Harsanyi's' utilitarian theorem and utilitarianism. *Noûs*.

Partage optimal des risques, utilitarisme et théorie du choix social

- Diverses interprétations de l'observateur impartial et des comparaisons interpersonnelles des fonctions d'utilité
  - *Harsanyi (1990). Interpersonal utility comparisons. In Utility and Probability*
  - *Fontaine, P. (2010). The Homeless Observer: John Harsanyi on Interpersonal Utility Comparisons and Bargaining, 1950–1964. Journal of the History of Economic Thought.*

> In an article published in *Social Research* in the winter of 1977, the Budapest-born economist John C. Harsanyi (1920–2000) reflected on the policy implications of utilitarianism:
>
> No doubt, since social utility is defined in terms of people's vNM [von Neumann-Morgenstern] utility functions, our utilitarian theory will tend to assign higher social priorities to those individual desires for which people are willing to take considerable risks in order to satisfy them. But this is surely as it should be. Other things being equal, we *should* give higher social priorities to intensely felt human desires; and one indication that somebody feels strongly about a particular desired objective is his willingness to take sizable risks to attain it. For example, if a person is known to have risked his life in order to obtain a university education (e.g., by escaping from a despotic government which had tried to exclude him from all higher education), then we can take this as a reasonably sure sign of his attaching very high personal importance (very high utility) to such an education; and I cannot see anything wrong with our assigning high social priority to helping him to such an education on the basis of this kind of evidence (1977a, pp. 643–4).

Partage optimal des risques, utilitarisme et théorie du choix social

Takashi Negishi

- Negishi (1960) montre que tout équilibre concurrentiel peut être obtenu comme une maximisation d'une combinaison linéaire des utilités individuelles ;
- Les poids étant inversement proportionnels aux utilités marginales de la richesse

> In the following, we shall show that a competitive equilibrium is a maximum point of a social welfare function which is a linear combination of utility functions of consumers, with the weights in the combination in inverse proportion to the marginal utilities of income. Then, the existence of an equilibrium is equivalent to the existence of a maximum point of this special welfare function. Therefore, we can prove the former by showing the latter.

WELFARE ECONOMICS AND EXISTENCE OF AN EQUILIBRIUM FOR A COMPETITIVE ECONOMY

by Takashi Negishi, Tokyo.

- Negishi (1960). Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy. *Metroeconomica*.

Partage optimal des risques

- Varian (1976). Two problems in the theory of fairness. *Journal of Public Economics*.
- Fleming (1952). A cardinal concept of welfare.
- Fishburn (1973). Summation social choice functions. *Econometrica*.
- Fishburn (1969). Preferences, summation, and social welfare functions. *Management Science*.

Partage optimal des risques

- Critère à maximiser : $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n E[u_n(\tilde{w}_n)]$
  - $E[u_n(\tilde{w}_n)] = \sum_{s=1}^{S} p_s u_n(w_n(s))$
  - $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n E[u_n(\tilde{w}_n)] = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(\sum_{s=1}^{S} p_s u_n(w_n(s)) \right)$
  - $= \sum_{s=1}^{S} p_s \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n u_n(w_n(s)) \right)$ *en échangeant les ordres de sommation*
- Optimisation du critère sous les contraintes de réalisation de l'allocation : maximisation sans contrainte du Lagrangien
- $L\big(w_1(1), \dots, w_N(1), \dots, w_1(S), \dots w_N(S)\big)$
  - $L = \sum_{s=1}^{S} p_s \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n u_n(w_n(s)) \right) - \sum_{s=1}^{S} \mu_s \left(\left(\sum_{n=1}^{N} w_n(s) \right) - W(s) \right)$
  - μ_s *: multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte* $W(s) = \sum_{n=1}^{N} w_n(s)$

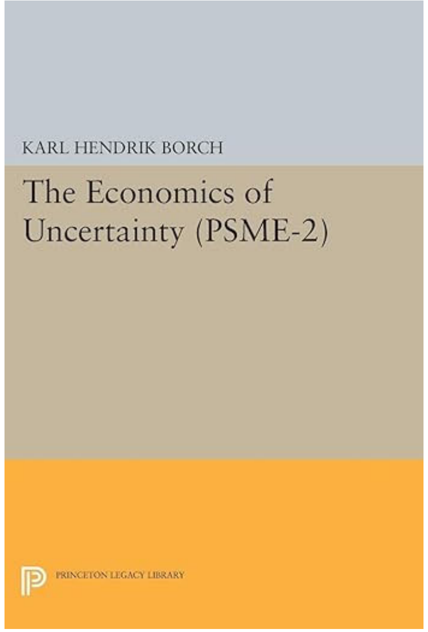
Partage optimal des risques

- $L = \sum_{s=1}^{S} p_s \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n u_n(w_n(s)) \right) - \sum_{s=1}^{S} \mu_s \left(\left(\sum_{n=1}^{N} w_n(s) \right) - W(s) \right)$
- $L = \sum_{s=1,n=1}^{s=S,n=N} \left(p_s \lambda_n u_n(w_n(s)) - \mu_s w_n(s) \right) + \sum_{s=1}^{S} \mu_s W(s)$
- Conditions du premier ordre
- $\frac{\partial L}{\partial w_n(s)} = 0 = p_s \lambda_n u'_n(w_n(s)) - \mu_s,$
- $s = 1, \dots, S, \forall n = 1, \dots, N$

Partage optimal des risques

K. Borch

- Optimalité : conditions du premier ordre
- $\lambda_n p_s u'_n(w_n(s)) = \mu_s, \forall s = 1, \dots, S, \forall n = 1, \dots, N$
- $\lambda_n p_{s'} u'_n(w_n(s')) = \mu_{s'}$
- D'où $\forall s, s' = 1, \dots, S, \frac{p_s u'_n(w_n(s))}{p_{s'} u'_n(w_n(s'))} = \frac{\mu_s}{\mu_{s'}} = \frac{p_s u'_m(w_m(s))}{p_{s'} u'_m(w_m(s'))}$
- $\frac{\mu_s}{\mu_{s'}}$ ne dépend pas de $n \Rightarrow$
- $\frac{p_s u'_n(w_n(s))}{p_{s'} u'_n(w_n(s'))} = \frac{p_s u'_m(w_m(s))}{p_{s'} u'_m(w_m(s'))}, \forall n, m = 1, \dots, N, \forall s, s' = 1, \dots, S$
- $\frac{u'_n(w_n(s))}{u'_n(w_n(s'))} = \frac{u'_m(w_m(s))}{u'_m(w_m(s'))}, \forall n, m = 1, \dots, N, \forall s, s' = 1, \dots, S$
- Conditions de Borch : taux marginaux de substitution entre les richesses dans les états s et s' identiques pour les agents



	Preface	v
I	The Economics of Uncertainty	3
II	Economic Decisions under Uncertainty	11
III	The Bernoulli Principle	23
IV	Applications of the Bernoulli Principle	34
V	Portfolio Selection	47
VI	The Bernoulli Principle—Observations and Experiments	62
VII	Decisions with Unknown Probabilities	77
VIII	Market Equilibrium under Uncertainty	88
IX	The Two-person Zero-sum Game	109
X	The General Two-person Game	129
XI	Elements of the General Game Theory	150
XII	The Objectives of the Firm	166
XIII	Survival and the Objectives of the Firm	181
XIV	Credibility and Subjective Probabilities	202
XV	Group Decisions	214
	Index	225

Karl Borch : the economics of uncertainty

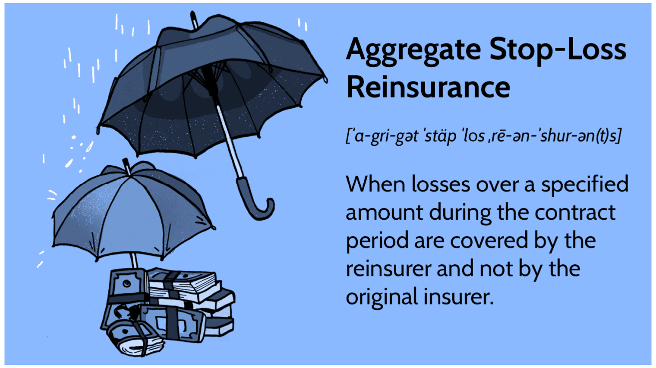
THE ECONOMICS OF UNCERTAINTY

Borch did not write only about insurance, but it is fair to say that after he started his academic career, practically his entire production was centered on the topic of uncertainty in economics in one form or the other. Many of his thoughts around the economics of uncertainty were formulated in his successful book *The Economics of Uncertainty*, published in 1968 by Princeton University Press (also available in Spanish, German, and Japanese). It illustrates the close connection between economics of uncertainty and insurance economics, at least as seen from Karl Borch´s point of view.

Borch helped establish, and travelled repeatedly, the bridge that links the theory of reinsurance markets and the "Capital Asset Pricing Model" (CAPM), developed by his former student Jan Mossin, among others. Although Borch was keenly conscious of the restrictive nature of the assumptions underlying the CAPM, he often used that model as an illustration, stressing that "the applications of CAPM have led to deeper insight into the functioning of financial markets". He also published an influential and clarifying criticism on the limitations on mean-variance analysis, in "A Note on Uncertainty and Indifference Curves" in *Review of Economic Studies* (1969).

Réassurance stop-loss et options

- Réassurance stop-loss (principe) : compagnie de réassurance prend en charge toutes les pertes au-delà d'un seuil

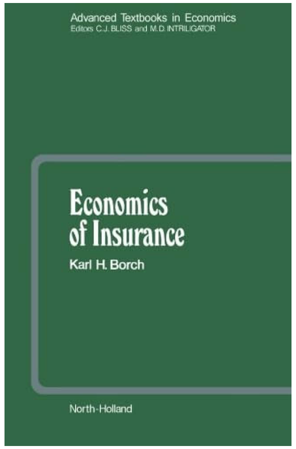


- Identique à un call sur les pertes
- Similarité entre marchés de réassurance et marchés d'options

Karl Borch : Economics of Insurance

Chapter 3. Insurance and Competitive Equilibrium 163

1. Principles of Premium Calculation 163
2. Insurance Premiums in the Market 168
3. Insurance Premiums and Asset Prices 174
4. Insurance and the Theory of Financial Markets 181
   1. Introduction 181
   2. A Simple Model 182
   3. Discussion of the Simple Model 187
   4. Generalization of the Simple Model 189
5. Additive Insurance Premiums: A Note 192
6. Static Equilibrium under Uncertainty and Incomplete Markets 198
   1. Introduction 198
   2. Arrow's state Model 200
   3. The Traditional Approach 203
   4. Incomplete Markets 207
7. A Theory of Insurance Premiums 209
   1. Introduction 209
   2. A Model of an Insurance Market 211
   3. Examples and Applications 215
   4. A Dynamic approach to Utility 222
   5. A Modification of the De Finetti's Model 225
   6. The Models and the Real World 227



Partage optimal des risques

- Implication des conditions de Borch
  - *Relation entre richesses individuelles $\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_n$ et richesse agrégée $\widetilde{W}$ à l'optimum*
  - *On rappelle que $u'_n(w) > 0, \forall w, \forall n = 1, \ldots, N$ et que les fonctions d'utilité marginale u'_n sont décroissantes*
    - Concavité des fonctions u'_n
  - *Considérons deux états $s, s' \in \{1, \ldots, S\}$*
  - *Supposons $w_n(s) > w_n(s')$*
  - *Alors $u'_n\big(w_n(s)\big) < u'_n\big(w_n(s')\big)$ car u'_n est décroissante*
  - *Soit $m \in \{1, \ldots, N\}$ un agent économique quelconque*
  - $\frac{u'_n(w_n(s))}{u'_n(w_n(s'))} = \frac{u'_m(w_m(s))}{u'_m(w_m(s'))} < 1 \Rightarrow u'_m\big(w_m(s)\big) < u'_m\big(w_m(s')\big)$

Partage optimal des risques

- $u'_m\big(w_m(s)\big) < u'_m\big(w_m(s')\big) \Rightarrow w_m(s) > w_m(s')$
  - *Car u'_m est décroissante.*
  - *Au total :*
- $w_n(s) > w_n(s') \Rightarrow w_m(s) > w_m(s'), \forall m \in \{1, \ldots, N\}$
- Si l'état s est plus favorable que l'état s' pour un agent donné, alors l'état s est plus favorable que l'état s' pour tous les agents.
  - $w_n(s) - w_n(s') > 0 \Leftrightarrow w_m(s) - w_m(s') > 0$, *alors $\widetilde{w}_n$ et $\widetilde{w}_m$ sont dites comonotones*
  - *$W(s) = \sum_{n=1}^{N} w_n(s)$ et $W(s') = \sum_{n=1}^{N} w_n(s')$,*
  - *D'où $W(s) > W(s')$: La richesse agrégée est plus élevée dans l'état s que dans l'état s'.*

Partage optimal des risques

- Exemple : 3 agents, 4 états
  - *Agent 1 : richesses : 0, 2, 5, 7*
  - *Agent 2 : richesses : 1, 4, 5, 10*
  - *Agent 3 : richesses : 10, 14, 15, 100*
- Les richesses des trois agents sont comonotones
- Richesse agrégée : 11, 20, 25, 117
  - *Agent 1 : $W(s) \rightarrow w_1(s) = G_1\big(W(s)\big)$*
  - $0 = G_1(11)$
  - $2 = G_1(20)$
  - $5 = G_1(25)$
  - $7 = G_1(117)$
- « corrélations de rang » vont être égales à 1
- Quid des utilités marginales des différents des différents agents

Partage optimal des risques

- Remarque :
  - *On montre de même que :*
  - $w_n(s) < w_n(s') \Rightarrow w_m(s) < w_m(s'), \forall m \in \{1, \dots, N\}$
  - *Et alors* $W(s) < W(s')$
  - *L'état* s *est moins favorable que l'état* s'
- On peut décider de classer les états en fonction de la richesse agrégée :
- $W(1) < W(2) < \cdots < W(S)$
- $w_n(1) < w_n(2) < \cdots < w_n(S)$
- Si on connait le niveau de la richesse agrégée $W(s)$, on connait l'état s et donc la richesse de l'agent n, $w_n(s)$
- $w_n(s) = G_n\big(W(s)\big), \forall s = 1, \dots, S$, G_n fonction croissante

Partage optimal des risques

- $\widetilde{w}_n = G_n\big(\widetilde{W}\big), \forall n = 1, \dots, N$
- À l'optimum (de Pareto), les richesses individuelles sont des fonctions croissantes de la richesse agrégée.
- Définition : des variables aléatoires $\widetilde{w}_n$, $n = 1, \dots, N$, fonctions croissantes d'une même variable aléatoire $\widetilde{W}$ sont dites comonotones.
- Définition équivalente : Si l'état s est plus favorable que l'état s' pour un agent donné, alors l'état s est plus favorable que l'état s' pour tous les agents.
  - $w_n(s) - w_n(s') > 0 \Leftrightarrow w_m(s) - w_m(s') > 0$

Partage optimal des risques

- Que dire des cas où $W(s) = W(s')$ (pas de risque agrégé)
  - *Supposons* $w_n(s) \geq w_n(s')$
  - *Alors* $u'_n\big(w_n(s)\big) \leq u'_n\big(w_n(s')\big)$ *car* u'_n *est décroissante*
  - *Soit* $m \in \{1, \dots, N\}$ *un agent économique quelconque*
  - $\frac{u'_n(w_n(s))}{u'_n(w_n(s'))} = \frac{u'_m(w_m(s))}{u'_m(w_m(s'))} \Rightarrow u'_m\big(w_m(s)\big) \leq u'_m\big(w_m(s')\big)$
- $u'_m\big(w_m(s)\big) \leq u'_m\big(w_m(s')\big) \Rightarrow w_m(s) \geq w_m(s')$
  - *Car* u'_m *est décroissante.*
  - *Au total :*
- $w_n(s) \geq w_n(s') \Rightarrow w_m(s) \geq w_m(s'), \forall m \in \{1, \dots, N\}$

Partage optimal des risques

- De même, $w_n(s) \leq w_n(s') \Rightarrow w_m(s) \leq w_m(s'), \forall m \in \{1, \dots, N\}$
- Par ailleurs, $W(s) = \sum_{n=1}^{N} w_n(s) = \sum_{n=1}^{N} w_n(s') = W(s')$
- Raisonnement par l'absurde :
  - *S'il existe* $m \in \{1, \dots, N\}$, *tel que* $w_m(s) > w_m(s')$, *alors* $\sum_{n=1}^{N} w_n(s) > \sum_{n=1}^{N} w_n(s')$
  - *S'il existe* $m \in \{1, \dots, N\}$, *tel que* $w_m(s) < w_m(s')$, *alors* $\sum_{n=1}^{N} w_n(s) < \sum_{n=1}^{N} w_n(s')$
- $\Rightarrow \forall m \in \{1, \dots, N\}, w_m(s) = w_m(s')$
- ! Cela n'implique pas que $w_m(s) = w_n(s)$ pour $n \neq m$

Partage optimal des risques

- $W(s) = W(s') \Rightarrow \forall m \in \{1, \dots, N\}, w_m(s) = w_m(s')$
- Si la richesse agrégée est identique dans deux états de la nature, à l'optimum, les niveaux de richesse des différents agents sont également identiques dans ces deux états.
- Cas extrême : pas de risque agrégé $\forall s = 1, \dots, S$, $W(s) = \overline{W}$
- Alors, $\forall s = 1, \dots, S$, $w_n(s) = \overline{w}_n$
- À l'optimum, la richesse des agents ne dépend plus de l'état de la nature.
  - *Assurance*
  - *Principe de mutualité (de Borch) : voir transparent suivant*

Partage optimal des risques

- On se place dans le cadre précédent (pas de risque agrégé).
- On part d'une allocation réalisable : $w_n(s)$ pour $s = 1, \dots, S$, $n = 1, \dots, N$
- $\forall s = 1, \dots, S$, $\sum_{n=1}^{N} w_n(s) = \overline{W}$
- On alloue à l'agent n, $E[\widetilde{w}_n] = \sum_{s=1}^{S} p_s w_n(s)$
  - *Allocation constante indépendante de l'état s*
  - $\sum_{n=1}^{N} w_n(s) = \overline{W} \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} p_s w_n(s) = p_s \overline{W}$
  - $\sum_{s=1}^{S} \sum_{n=1}^{N} p_s\, w_n(s) = \sum_{s=1}^{S} p_s\, \overline{W} = \overline{W}$
  - $\sum_{n=1}^{N} \sum_{s=1}^{S} p_s\, w_n(s) = \sum_{s=1}^{S} p_s\, \overline{W} = \overline{W}$
  - $\sum_{n=1}^{N} E[\widetilde{w}_n] = \overline{W}$
  - *Cette allocation et réalisable et augmente l'utilité de tous les agents. Elle est Pareto-optimale (principe de mutualité)*

Partage optimal des risques

- On numérotera par la suite les états $s = 1, \dots, S$ à partir du niveau de la richesse agrégée $\widetilde{W}$: $W(1) < W(2) < \cdots < W(S)$
- L'actif contingent à l'état s paye 1 si l'état s se réalise et 0 sinon
  - *De manière équivalente, l'actif contingent à à l'état* s *paye* 1 *si* $\widetilde{W} = W(s)$
  - *Les actifs contingents peuvent donc être vus comme des options digitales sur la richesse agrégée*
- Richesse agrégée = valeur du portefeuille de marché
  - *Portefeuille de marché approximé par un indice boursier large*

Exercices

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Exercice : comonotonie et corrélation

- On revient au cadre du modèle structurel avec une entreprise
- On suppose on note X la valeur de l'actif de l'entreprise
- On aura défaut si $X < a$ où a est lié au levier financier
- On note $I_A = 1_{\{X<a\}}$ l'indicatrice de l'événement de défaut $\{X < a\}$
  - $a = \ln\left(\frac{D_0(1+i)/A_0 - \mu_A}{\sigma_A}\right)$.
- L'entreprise augmente son levier financier. On alors défaut si $X < b$ avec $b > a$. On note $I_B = 1_{\{X<b\}}$ l'indicatrice de l'événement de défaut $\{X < b\}$ après modification du levier
- Comment interpréter I_A et I_B en termes d'options ?
- Montrer que I_A et I_B sont comonotones

Exercice : comonotonie et corrélation

- Montrer que $I_A = 1_{\{X<a\}}$ et $I_B = 1_{\{X<b\}}$ sont comonotones
- $I_A = 1_{\{-X>-a\}}$ et $I_B = 1_{\{-X>-b\}}$ sont des fonctions non-décroissantes (croissantes au sens large) de $-X$
- État 1 : $X < a$, état 2 : $a < X < b$, état 3 : $X > b$
- I_A : 1,0,0, I_B : 1,1,0 : les rangs des différentes valeurs sont les mêmes.
- Calculer le coefficient de corrélation entre I_A et I_B
  - *Calculer* $E[I_A I_B] = E\left[1_{\{X<a\}}1_{\{X<b\}}\right] = E\left[1_{\{X<a\}}\right] = 1 \times P(X < a) + 0 \times P(X \geq a) = P(X < a) = p_a$ *. Si X est gaussien* $p_a = \Phi(a)$
  - *Covariance entre* I_A *et* I_B *?* $p_a - p_a p_b = p_a(1 - p_b)$
  - *Variance de* I_A *:* $p_a(1 - p_a)$ *: exercice sur la variance d'une variable de Bernoulli.* $E[I_A] - (E[I_A])^2$

Exercice : comonotonie et corrélation

- Montrer que $I_A = 1_{\{X<a\}}$ et $I_B = 1_{\{X<b\}}$ sont comonotones
- $I_A = 1_{\{-X>-a\}}$ et $I_B 1_{\{-X>-b\}}$sont des fonctions non-décroissantes (croissantes au sens large) de $-X$
- Calculer le coefficient de corrélation entre I_A et I_B
- Calculons d'abord $E[I_A I_B] = E\left[1_{\{X<a\}}1_{\{X<b\}}\right] = E\left[1_{\{X<\min(a,b)\}}\right] = E\left[1_{\{X<a\}}\right] = \Phi(a) = p_a$
- Remarque : $\Phi(a) = p_a < \Phi(b) = p_b$ et $1 - p_b < 1 - p_a$
- $\mathrm{Cov}(I_A, I_B) = E[I_A I_B] - E[I_A]E[I_B] = p_a - p_a p_b = p_a(1 - p_b)$
- $\rho = \frac{p_a(1-p_b)}{\sqrt{p_a(1-p_a)p_b(1-p_b)}} = \frac{\sqrt{p_a(1-p_b)}}{\sqrt{p_b(1-p_a)}} = \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} \times \sqrt{\frac{1-p_b}{1-p_a}} < 1$
- Bien que les indicatrices de défaut soient comonotones, le coefficient de corrélation linéaire n'est pas égal à 1

Exercice : partage optimal des risques

- **On considère une économie à deux agents, A et B et deux états de la nature H et L.**
- a) Dans l'état H, l'agent A une richesse égale à 2, dans l'état L, une richesse égale à 0. Pour l'agent B, sa richesse dans l'état H est égale à 0, sa richesse dans l'état L égale à 1. On suppose que les probabilités des deux états sont évaluées de la même manière par les deux agents. Est-ce que l'allocation précédente est Pareto optimale ? Pourquoi ?

Exercice : partage optimal des risques

- a) Dans l'état H, l'agent A une richesse égale à 2, dans l'état L, une richesse égale à 0. Pour l'agent B, sa richesse dans l'état H est égale à 0, sa richesse dans l'état L égale à 1. On suppose que les probabilités des deux états sont évaluées de la même manière par les deux agents. Est-ce que l'allocation précédente est Pareto optimale ? Pourquoi ?
- Leurs richesses ne sont pas comonotones. En effet, la comonotonie signifie que les agents classent de manière identique les états en fonction de leur niveau de richesse. Or, pour l'agent A, $L < H$, alors que pour l'agent B, $H < L$. L'allocation n'est pas Pareto-optimale.
- b) On suppose maintenant que les probabilités subjectives des agents A et B diffèrent. Supposons d'abord que l'agent A pense que l'état H a une probabilité de 1 et que l'agent B pense que l'état H a une probabilité nulle. Écrire les espérances d'utilité. L'allocation précédente est-elle Pareto optimale ? Pourquoi ?

Exercice : partage optimal des risques

- b) On suppose maintenant que les probabilités subjectives des agents A et B diffèrent. Supposons d'abord que l'agent A pense que l'état H a une probabilité de 1 et que l'agent B pense que l'état H a une probabilité nulle. Écrire les espérances d'utilité. L'allocation précédente est-elle Pareto optimale ? Pourquoi ?
- Ici, on ne peut pas raisonner comme précédemment, car la caractérisation de la Pareto-optimalité à partir de la comonotonie des richesses individuelles suppose que les agents attribuent les mêmes probabilités aux états de la nature.
- Plus précisément, l'espérance d'utilité de l'agent A est $1 \times u_A(2) + 0 \times u_A(0)$ et celle de l'agent B, $0 \times u_B(0) + 1 \times u_B(1)$.
- L'agent A détient toute la richesse dans l'état H et l'agent B toute la richesse dans l'état L.
- Une réallocation implique de diminuer la richesse de l'agent A dans l'état H et donc diminuer son espérance d'utilité. Elle implique aussi de diminuer la richesse de l'agent B dans l'état L et de diminuer son espérance son espérance d'utilité.
- Les allocations sont Pareto-optimales car tout autre allocation admissible conduit à la fois à réduire l'espérance d'utilité de A et celle de B.

Exercice : partage optimal des risques

- **On considère une économie à deux agents, A et B et deux états de la nature H et L.**
- c) On suppose maintenant que l'agent A voit l'état H avec une probabilité nulle, alors que la probabilité de l'état L est nulle pour l'agent B. Quelles sont les allocations Pareto – optimales ?

Exercice : partage optimal des risques

- c) On suppose maintenant que l'agent A voit l'état H avec une probabilité nulle, alors que la probabilité de l'état L est nulle pour l'agent B. Quelles sont les allocations Pareto – optimales ?
- Les allocations Pareto-optimales sont celles où l'agent A ne détient de la richesse que dans l'état L et l'agent B que de la richesse dans l'état H. En fait, pour chacun des agents, il n'y a pas de risque (ou de manière équivalente, un seul état futur de la nature).
- Si l'on donnait une richesse positive à l'agent A dans l'état H (qu'il voit de probabilité nulle), il pourrait le donner à l'agent B et augmenter l'espérance d'utilité de B.
- Si l'on donnait une richesse positive à l'agent B dans l'état L (qu'il voit de probabilité nulle), il pourrait le donner à l'agent A et augmenter l'espérance d'utilité de A.
- C'est seulement quand la richesse de A est nulle dans l'état H et la richesse de B nulle dans l'état L que l'on ne plus faire de transferts mutuellement bénéfiques.

Exercice : partage optimal des risques

- **On considère une économie à deux agents, A et B et deux états de la nature H et L.**
- d) Quel contrat permet d'obtenir une allocation Pareto – optimale ? Comment peut-on l'interpréter ? Quels sont les inconvénients de cette situation ? Que révèle-t-elle sur la transmission d'information par les prix ?

Exercice : partage optimal des risques

- d) Quel contrat permet d'obtenir une allocation Pareto – optimale ? Comment peut-on l'interpréter ? Quels sont les inconvénients de cette situation ? Que révèle-t-elle sur la transmission d'information par les prix ?
- A et B échangent leurs allocations. Cela correspond à un contrat particulier (les produits dérivés et les swaps ont cet objectif). Le contrat correspond à ce que A donne à B toute sa richesse dans l'état H et que B donne à A toute sa richesse dans l'état L
- L'inconvénient est qu'un des agents sera nécessairement ruiné (les deux agents ne peuvent avoir raison en même temps).
- Cela signifie également que les agents n'ont pas appris de leur échange. Un agent qui souhaite payer pour recevoir de l'argent dans un état de probabilité nulle pour sa contrepartie indique que pour lui cette probabilité n'est pas nulle. Si la contrepartie considère que l'agent payeur a une certaine rationalité, il devrait réviser sa perception initiale que l'état ne peut arriver (a une probabilité nulle).
- Quand AIG Financial Products a garanti des produits de titrisation de notation AAA, il a considéré que le défaut était hautement improbable. Néanmoins, le fait même que les plus grandes banques d'investissement souhaitaient s'assurer contre ce risque montrait qu'il n'était pas négligeable.

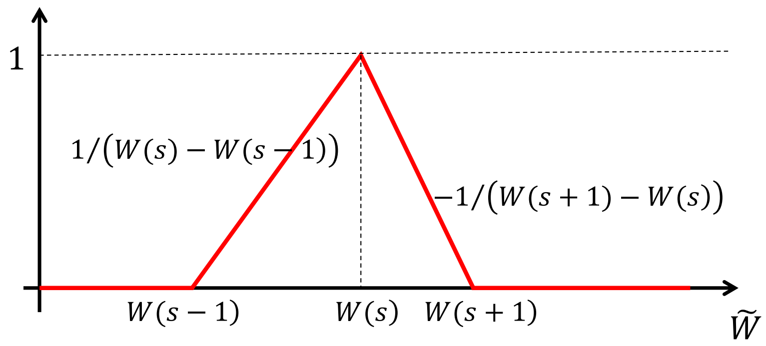
Actifs contingents

Actifs contingents

- Options sur indice boursiers et actifs contingents
- Considérons S options d'achat sur le portefeuille de marché
- De prix d'exercice $0 \equiv W(0), W(1), \dots, W(S-1)$
- Payoff de l'option d'achat de prix d'exercice $W(s)$
- $\max\left(0, \widetilde{W} - W(s)\right) = \left(\widetilde{W} - W(s)\right)^+$
- Papillon de prix d'exercice $W(s-1), W(s), W(s+1)$
  - *Achat d'options (d'achat) de prix d'exercice $W(s-1)$, vente d'options de prix d'exercice $W(s)$ et achat d'options de prix d'exercice $W(s+1)$*
- Quantités d'options $\alpha(s-1), -\alpha(s), \alpha(s+1)$

Actifs contingents

- Duplication du papillon avec prix d'exercice $W(s-1), W(s), W(s+1)$
- $\alpha(s-1) = 1/\left(W(s) - W(s-1)\right)$
- $\alpha(s) = -\alpha(s-1) - 1/\left(W(s+1) - W(s)\right) = -\frac{W(s+1) - W(s-1)}{(W(s+1)-W(s))(W(s)-W(s-1))}$
- $\alpha(s+1) = 1/\left(W(s+1) - W(s)\right)$



Actifs contingents

- Cherchons $\alpha(s-1), -\alpha(s), \alpha(s+1)$ tels que
- $\alpha(s-1)\left(\widetilde{W} - W(s-1)\right)^+ - \alpha(s)\left(\widetilde{W} - W(s)\right)^+ + \alpha(s+1)\left(\widetilde{W} - W(s+1)\right)^+ = 1$
- Si et seulement si $\widetilde{W} = W(s)$
- Ceci pour un état s donné, $s = 1, \dots, S-1$
  - *Le cas $s = S$ peut être traité à part et directement*
  - $\forall e \in \{1, \dots, S\}$,
  - $\alpha(s-1)\left(W(e) - W(s-1)\right)^+ - \alpha(s)\left(W(e) - W(s)\right)^+ + \alpha(s+1)\left(W(e) - W(s+1)\right)^+ = 1$, *si* $e = s$ *et* $= 0$ *sinon*
  - *Prenons* $e = s, s+1, s+2$
  - *Système linéaire de 3 équations à 3 inconnues* $\alpha(s-1), -\alpha(s), \alpha(s+1)$

Actifs contingents

- $e = s$ donne $\alpha(s-1)\big(W(s) - W(s-1)\big) = 1$
- $\alpha(s-1) = \frac{1}{W(s)-W(s-1)} = \frac{W(s+1)-W(s)}{(W(s)-W(s-1))(W(s+1)-W(s))}$
- Prenons $e = s + 1$
- $\alpha(s-1)\big(W(s+1) - W(s-1)\big) - \alpha(s)\big(W(s+1) - W(s)\big) = 0$
- $\alpha(s) = \frac{W(s+1)-W(s-1)}{(W(s)-W(s-1))(W(s+1)-W(s))}$
- Prenons $e = s + 2$
- $\alpha(s-1)\big(W(s+2) - W(s-1)\big) - \alpha(s)\big(W(s+2) - W(s)\big) + \alpha(s+1)\big(W(s+2) - W(s+1)\big) = 0$
- En faisant la différence entre les équations rouges, on obtient
- $\alpha(s-1) - \alpha(s) + \alpha(s+1) = 0 \Rightarrow \alpha(s+1) = \alpha(s) - \alpha(s-1)$
- $\alpha(s+1) = \frac{W(s)-W(s-1)}{(W(s)-W(s-1))(W(s+1)-W(s))}$

Actifs contingents

- Si $e = 1, \dots, s-1$, aucune des options d'achat n'est exercée et le payoff du papillon est nul
- $\forall e \in \{1, \dots, s-1\}$,
- $\alpha(s-1)\big(W(e) - W(s-1)\big)^+ - \alpha(s)\big(W(e) - W(s)\big)^+ + \alpha(s+1)\big(W(e) - W(s+1)\big)^+ = 0$
- Si $e \in \{s+3, \dots, S\}$, toutes les options sont exercées, le payoff du papillon est :
- $\alpha(s-1)\big(W(e) - W(s-1)\big) - \alpha(s)\big(W(e) - W(s)\big) + \alpha(s+1)\big(W(e) - W(s+1)\big) = 0$
- En prenant $e = s + 2$, nous avons montré que :
- $\alpha(s-1)\big(W(s+2) - W(s-1)\big) - \alpha(s)\big(W(s+2) - W(s)\big) + \alpha(s+1)\big(W(s+2) - W(s+1)\big) = 0$
- Or $W(s+2)$ est arbitraire
- Donc, l'équation rouge est vérifiée pour tout $W(e)$
- On a ainsi dupliqué les actifs contingents à partir de calls sur $\widetilde{W}$

Exercice : duplication du payoff $f(\widetilde{W}) = \widetilde{W}^2$ à partir d'options d'achat

- Corrigé 1 : approche algébrique
- Les valeurs possibles de $\widetilde{W}$ sont supposées être $0,1, \dots, K, \dots \in \mathbb{N}$
- Notons $\alpha(k)$ la quantité d'options d'achat de prix d'exercice $k \in \mathbb{N}$ à détenir
- Pour $\widetilde{W} = K$, seules les options de prix d'exercice inférieur à $K-1$ ont un payoff non nul.
- $f(1) = 1 \Rightarrow \alpha(0) = 1$
- $f(K) = K^2 = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha(k)(K-k)$
- $f(K) - f(K-1) = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha(k)$
- $\Rightarrow \alpha(K-1) = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha(k) - \sum_{k=0}^{K-2} \alpha(k) = \big(f(K) - f(K-1)\big) - \big(f(K-1) - f(K-2)\big)$
- $\alpha(K-1) = f(K) - 2f(K-1) + f(K-2)$

Exercice : duplication du payoff $f(\widetilde{W}) = \widetilde{W}^2$ à partir d'options d'achat

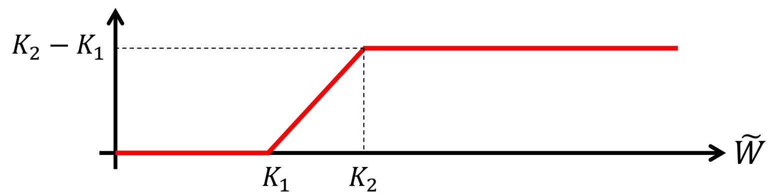
- Corrigé 2 : Méthode « graphique » de résolution
- Le payoff du portefeuille d'options est affine par morceaux
  - *Affine entre K et $K-1$*
  - *Prend les valeurs K^2 quand $\widetilde{W} = K$ et $(K-1)^2$ quand $\widetilde{W} = K-1$*
  - *$\Rightarrow$ pente entre K et $K-1 = K^2 - (K-1)^2 = 2K-1$*
  - *$\Rightarrow$ pente entre $K-1$ et $K-2 = 2(K-1)-1$*
  - *$\Rightarrow$ nombre d'options de prix d'exercice $K-1$ à détenir = changement de pente, soit $\alpha(K-1) = 2K-1-(2(K-1)-1) = 2$*
- On généralise le résultat précédent pour un payoff quelconque f
  - *Pente entre K et $K-1 = f(K) - f(K-1)$*
  - *pente entre $K-1$ et $K-2 = f(K-1) - f(K-2)$*
  - $\alpha(K-1) = f(K) - 2f(K-1) + f(K-2) \simeq f''(K)$

Exercice : continuum d'états

- Dans l'exercice précédent, on a considéré un nombre fini d'états de la nature
  - *Et donc un nombre fini de valeurs possibles de la richesse agrégée*
- Supposons maintenant que la richesse agrégée $\widetilde{W}$ est une variable aléatoire pouvant prendre toute valeur réelle positive ou nulle
  - *On considérera aussi des prix d'exercice d'options d'achat K réels positifs ou nuls*
  - *Date d'exercice commune à toutes les options*
  - *On supposera que la fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K) \in \mathbb{R}^+$ où $C(K)$ est la prime d'une option d'achat de prix d'exercice K est deux fois continument dérivable*
  - *Montrer qu'en l'absence d'opportunités d'arbitrage, la fonction C est décroissante et convexe*

Exercice : continuum d'états

- Soit $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+, K_1 < K_2$
- Achat d'un call de prix d'exercice K_1, vente d'un prix d'un call de prix d'exercice K_2.
- Payoff : $\left(\widetilde{W} - K_1\right)^+ - \left(\widetilde{W} - K_2\right)^+$
- $\left(\widetilde{W} - K_1\right)^+ - \left(\widetilde{W} - K_2\right)^+ \geq 0, \forall \widetilde{W} \in \mathbb{R}^+$
- Prime à payer $C(K_1) - C(K_2) \geq 0$
  - *Sinon opportunité d'arbitrage*
- $K_1 < K_2 \Rightarrow C(K_1) \geq C(K_2)$



Exercice : continuum d'états

- Soit $K, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$
- Considérons le papillon de payoff égal à :
- $\frac{1}{\varepsilon} \times \left(\left(\widetilde{W} - (K - \varepsilon)\right)^+ - 2\left(\widetilde{W} - K\right)^+ + \left(\widetilde{W} - (K + \varepsilon)\right)^+\right) \geq 0$
- Prime du papillon égale à $\frac{1}{\varepsilon}\left(C(K-\varepsilon) - 2C(K) + C(K+\varepsilon)\right)$
- En l'absence d'opportunités d'arbitrage :
- $\frac{1}{\varepsilon}\left(C(K-\varepsilon) - 2C(K) + C(K+\varepsilon)\right) \geq 0, \forall \varepsilon > 0$
- $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2}\left(C(K-\varepsilon) - 2C(K) + C(K+\varepsilon)\right) = C''(K) \geq 0$
  - *Faire un DL à l'ordre 2*
- Au total, $C'(K) \leq 0, C''(K) \geq 0$

Gestion optimale de portefeuilles

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Gestion optimale de portefeuilles

- Actifs contingents et gestion de portefeuilles
- L'agent économique $n \in \{1, \dots, N\}$ a une richesse aléatoire (dotation) $\tilde{w}_n = \left(w_n(1), \dots, w_n(S)\right)$
- Richesse à la date future dans les états de la nature $s \in \{1, \dots, S\}$
- Sa fonction d'utilité est u_n (u_n croissante, concave)
- Critère de satisfaction : espérance d'utilité de la richesse
- $E[u_n(\tilde{w}_n)] = \sum_{s=1}^{S} p_s u_n(w_n(s))$
- Il existe des marchés où sont échangés les actifs contingents
- $q_s, s = 1, \dots, S$, prix des actifs contingents
- Autant de marchés que d'états de la nature : marchés complets

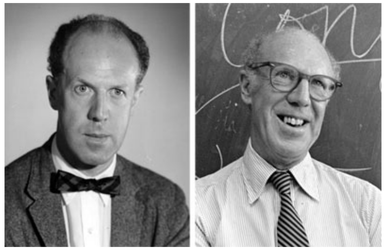
Gestion optimale de portefeuilles

- L'agent n peut constituer un portefeuille composé de $\alpha_n(1), \dots, \alpha_n(S)$ actifs contingents
- Ce portefeuille rapporte $\alpha_n(\mathrm{s})$ dans l'état (futur) s
- La richesse de l'agent devient $w_n(s) + \alpha_n(\mathrm{s})$ dans l'état s
- Le prix aujourd'hui de ce portefeuille est $\sum_{s=1}^{S} \alpha_n(\mathrm{s}) q_s$
  - *L'agent ne dispose pas de ressources monétaires à la date courante*
    - Pas de possibilité d'emprunter, échanges uniquement à la date future
  - *Financement des achats de titres par des ventes de titres*
- Contrainte de budget $\sum_{s=1}^{S} \alpha_n(\mathrm{s}) q_s = 0$

Gestion optimale de portefeuilles

- Choix de portefeuille optimal
- $\max_{\alpha_n(1),\dots,\alpha_n(S)} \sum_{s=1}^{S} p_s\, u_n(w_n(s) + \alpha_n(s))$
- Sous la contrainte de budget $\sum_{s=1}^{S} \alpha_n(\mathrm{s}) q_s = 0$
  - *Les actifs contingents permettent de transférer des ressources monétaires entre différents états de la nature*
  - *Si $\alpha_n(s) > 0$ transfert vers l'état s pour augmenter les ressources disponibles*
  - *Transferts financés par les états s où $\alpha_n(s) < 0$*
- Lagrangien L, λ_n multiplicateur de Lagrange
- $L = \sum_{s=1}^{S} p_s\, u_n(w_n(s) + \alpha_n(s)) - \lambda_n \sum_{s=1}^{S} \alpha_n(\mathrm{s}) q_s$
- $L = \sum_{s=1}^{S} p_s u_n\left(w_n(s) + \alpha_n(s)\right) - \lambda_n \alpha_n(\mathrm{s}) q_s$

Gestion optimale de portefeuilles



G. Debreu en 1950 et en 1983

- Conditions du premier ordre
- $\frac{\partial L}{\partial \alpha_n(s)} = 0, s = 1, \dots, S$
- $L = \sum_{s=1}^{S} p_s u_n\big(w_n(s) + \alpha_n(s)\big) - \lambda_n \alpha_n(s) q_s$
- $p_s u_n'\big(w_n(s) + \alpha_n^*(s)\big) = \lambda_n q_s$
- $w_n^*(s) = w_n(s) + \alpha_n^*(s)$
- $u_n'\big(w_n^*(s)\big) = \lambda_n q_s / p_s$,
  - *λ_n multiplicateur de Lagrange, q_s prix de l'actif contingent à l'état s, p_s, probabilité d'être dans l'état s, $u_n'\big(w_n^*(s)\big)$ utilité marginale de la richesse*
- $w_n^*(s) = (u'_n)^{-1}(\lambda_n q_s / p_s)$
- $\alpha_n^*(s) = (u'_n)^{-1}(\lambda_n q_s / p_s) - w_n(s)$
- $\sum_{s=1}^{S} \alpha_n^*(s) q_s = 0$ permet de déterminer λ_n

Gestion optimale de portefeuilles

- La procédure précédente permet de déterminer un portefeuille optimal $\alpha_n^*(1), \dots, \alpha_n^*(S)$ pour chaque agent $n \in \{1, \dots, N\}$ étant donné un système de prix d'états $q_1, \dots, q_S$
- Pure économie d'échange
- Pour chaque actif contingent s, tous les titres émis (vendus) sont achetés
- $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^*(s) = 0, \forall s \in \{1, \dots, S\}$
- Les $\alpha_n^*(s)$ dépendent de $q_1, \dots, q_S$
- Pour un ensemble de prix d'états $q_1, \dots, q_S$ donné, les contraintes précédentes d'équilibre offre/demande de titres ne sont pas forcément vérifiées

Equilibre des marchés financiers

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Équilibre des marchés financiers

- Définition d'un équilibre (général) sur les marchés
  - *Un ensemble de prix d'états* $q_1, \dots, q_S$
  - *Et des allocations optimales* $\alpha_n^*(s)$, $s = 1, \dots, S$, $n = 1, \dots, N$
  - *Tels que l'offre est égale à la demande sur les S marchés de titres contingents*
  - $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^*(s) = 0$, $\forall s \in \{1, \dots, S\}$
- Théorèmes du « bien-être » (Arrow) : en marchés complets, pour toute dotation initiale, $\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_N$
  - *Il existe un équilibre général*
  - *Les dotations à l'équilibre* $\widetilde{w}_1^*, \dots, \widetilde{w}_N^*$ *sont Pareto-optimales*
- Réciproquement, toute allocation Pareto-optimale est un équilibre général pour une dotation initiale

Équilibre des marchés financiers

- La Pareto-optimalité de l'équilibre général n'est pas garantie si les marchés ne sont pas complets
  - *Mais on peut organiser un système de transferts qui rétablit la Pareto optimalité*
  - *Jeu de rôle sur ouverture de l'économie*
- Conditions de Pareto-optimalité d'une allocation de la richesse agrégée entre les agents économiques
- $\bar{\lambda}_n u'_n\left(w_n^*(s)\right) = \bar{\mu}_s > 0$, $\forall s = 1, \dots, S$, $\forall n = 1, \dots, N$
- Optimalité des choix de portefeuilles
- $u'_n\left(w_n^*(s)\right) = \lambda_n q_s / p_s$, $\forall s = 1, \dots, S$, $\forall n = 1, \dots, N$
- $\Rightarrow \bar{\lambda}_n \times \lambda_n = \bar{\mu}_s p_s / q_s =$ constante positive
- $q_s = \bar{\mu}_s p_s \times$ constante positive

Équilibre des marchés financiers

- Les états s sont rangés par richesse agrégée croissante
- On rappelle que les allocations Pareto-optimales $w_n^*(s)$ sont des fonctions croissantes de la richesse agrégée W_s
- $\bar{\lambda}_n u'_n\left(w_n^*(s)\right) = \bar{\mu}_s$
- u'_n est décroissante
- $\bar{\mu}_s$ décroit avec s et avec la richesse agrégée W_s
- $q_s = \bar{\mu}_s p_s \times$ constante positive
- À probabilité p_s de réalisation d'un état donné s, il est plus coûteux d'acheter un actif contingent à un état où la richesse agrégée est plus basse
- Les prix d'état q_s reflètent à la fois les probabilités d'apparition des états et la rareté relative des ressources dans ces états

q_s/p_s ratio entre prix de l'actif contingent à l'état s et probabilité de cet état = prime de risque : fonction décroissante de la richesse agrégée
q_s : probabilité « risque-neutre », p_s : probabilité objective ou subjective interpersonnelle (selon les interprétations)

Différences entre probabilités p_s et prix des actifs contingents aux états q_s. Ici les états sont contingents aux défauts d'obligations de notations variées (richesse agrégée faible, $q_s/p_s > 1$)

	OAS spread	Expected loss	Ratio	
AAA	64	0.2	355	64
AA	71	1.4	33.8	70
A	103	2.8	15.5	100
BBB	171	20.1	8.3	151
BB	364	126.7	4.4	238

Source : Deutsche Bank

Fonction d'utilité exponentielle

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

fonctions d'utilité exponentielles

- Cas particulier simple de fonctions d'utilité exponentielles
- $u_n(\widetilde{w}_n) = -\exp(-\rho_n \widetilde{w}_n)/\rho_n,\ \rho_n \in \mathbb{R}^{*+}$
- $u'_n(\widetilde{w}_n) = \exp(-\rho_n \widetilde{w}_n)$
- $u''_n(\widetilde{w}_n) = -\rho_n \exp(-\rho_n \widetilde{w}_n)$
- Aversion absolue pour le risque $= -u''_n(\widetilde{w}_n)/u'_n(\widetilde{w}_n) > 0$
- Pour une fonction d'utilité exponentielle, l'aversion absolue pour le risque est constante (et égale) à ρ_n
- Fonctions d'utilité CARA (Constant Absolute Risk Aversion)
- L'aversion absolue pour le risque permet de définir *l'équivalent certain* d'un *petit risque*.

fonctions d'utilité exponentielles

- Conditions d'optimalité d'un partage des risques
- $\bar{\lambda}_n u'_n\big(w_n^*(s)\big) = \bar{\mu}_s, \forall s = 1, \dots, S, \forall n = 1, \dots, N$
- $\bar{\lambda}_n \exp\big(-\rho_n w_n^*(s)\big) = \bar{\mu}_s$
- $\ln\big(\bar{\lambda}_n\big) - \rho_n w_n^*(s) = \ln(\bar{\mu}_s)$
- $\ln\big(\bar{\lambda}_n\big)/\rho_n - w_n^*(s) = \ln(\bar{\mu}_s)/\rho_n$
- Soit $\rho \in \mathbb{R}^{*+}, 1/\rho = \sum_{n=1}^{N} 1/\rho_n$, ρ moyenne harmonique des coefficients d'aversion absolue pour le risque
- $\sum_{n=1}^{N} w_n^*(s) = W(s)$
- La somme des richesses individuelles est la richesse agrégée
- $\sum_{n=1}^{N} \ln\big(\bar{\lambda}_n\big)/\rho_n - W(s) = \ln(\bar{\mu}_s)/\rho$

fonctions d'utilité exponentielles

- $\sum_{n=1}^{N} \ln\big(\bar{\lambda}_n\big)/\rho_n - W(s) = \ln(\bar{\mu}_s)/\rho$
- $\Rightarrow \rho \sum_{n=1}^{N} \ln\big(\bar{\lambda}_n\big)/\rho_n - \rho W(s) = \ln(\bar{\mu}_s)$
- $\Rightarrow (\rho/\rho_n) \sum_{n=1}^{N} \ln\big(\bar{\lambda}_n\big)/\rho_n - (\rho/\rho_n) W(s) = \ln(\bar{\mu}_s)/\rho_n$
- $\ln\big(\bar{\lambda}_n\big)/\rho_n - w_n^*(s) = \ln(\bar{\mu}_s)/\rho_n$
- $\Rightarrow w_n^*(s) = \frac{\rho}{\rho_n} W(s) + \text{constante}, \forall s = 1, \dots, S$
- $\Rightarrow \widetilde{w}_n^* = \frac{\rho}{\rho_n} \widetilde{W} + \text{constante}$
- $\Rightarrow E[\widetilde{w}_n^*] = \frac{\rho}{\rho_n} E\big[\widetilde{W}\big] + \text{constante}$
- $\widetilde{w}_n^* = E[\widetilde{w}_n^*] + \frac{\rho}{\rho_n}\big(\widetilde{W} - E\big[\widetilde{W}\big]\big)$

fonctions d'utilité exponentielles

- $\tilde{w}_n^* = E[\tilde{w}_n^*] + \frac{\rho}{\rho_n}\left(\tilde{W} - E[\tilde{W}]\right)$
  - *Décrit la forme des allocations Pareto-optimales quand les agents économiques ont une aversion absolue pour le risque constante*
  - *Les distributions optimales ne font plus apparaître les poids λ_n de chaque agent dans la fonction de bien-être social.*
  - $\sum_{n=1}^{N} E[\tilde{w}_n^*] = E[\tilde{W}]$, $E[\tilde{w}_n^*]$ *richesse moyenne de chaque agent*
  - *Les allocations optimales ne dépendent plus que des richesses moyennes $E[\tilde{w}_n^*]$ de chaque agent économique.*
- $\tilde{w}_n^*$ fonction croissante de la richesse agrégée $\tilde{W}$
  - *Si la richesse agrégée $\tilde{W}$ ne dépend pas de l'état de la nature, $\tilde{W} = E[\tilde{W}]$*
  - $\tilde{w}_n^* \to E[\tilde{w}_n^*]$ *assurance parfaite contre les risques*
  - *Mutualisation des risques (Borch)*

fonctions d'utilité exponentielles

- $\tilde{w}_n^* = E[\tilde{w}_n^*] + \frac{\rho}{\rho_n}\left(\tilde{W} - E[\tilde{W}]\right)$
- Si la richesse agrégée n'est pas constante, il reste du risque (non diversifiable ou « de marché ») au niveau de l'ensemble de l'économie
- Ce risque doit être réparti entre les agents économiques : $\sum_{n=1}^{N} \tilde{w}_n^* = \tilde{W}$
- Si tous les agents ont le même ρ_n, $\rho = \frac{\rho_n}{N}$
- $\tilde{w}_n^* = E[\tilde{w}_n^*] + \frac{1}{N}\left(\tilde{W} - E[\tilde{W}]\right)$
- Sinon, les agents qui ont un coefficient d'aversion absolu pour le risque ρ_n plus faible que portent moins de risque

fonctions d'utilité exponentielles : détermination des primes de risque

- $\bar{\lambda}_n \exp\left(-\rho_n w_n^*(s)\right) = \bar{\mu}_s$ (rappel)
- $w_n^*(s) = E[\tilde{w}_n^*] + \frac{\rho}{\rho_n}\left(W(s) - E[\tilde{W}]\right)$ (rappel)
- D'où : $\bar{\lambda}_n \exp\left(-\rho_n E[\tilde{w}_n^*] + \rho E[\tilde{W}]\right) \times \exp\left(-\rho W(s)\right) = \bar{\mu}_s$
- D'où $\bar{\lambda}_n \exp(-\rho_n E[\tilde{w}_n^*])$ indépendant de n
- $\bar{\mu}_s = \frac{q_s}{p_s} \times$ constante positive (rappel)
- D'où $\frac{q_s}{p_s} = c \times \exp\left(-\rho W(s)\right)$
- $\sum_{s=1}^{S} q_s = \frac{1}{1+r_f} = c \times \sum_{s=1}^{S} p_s \exp\left(-\rho W(s)\right) = cE^P[-\rho W(s)]$
- $c = \frac{1}{1+r_f} \times \frac{1}{E^P[-\rho W(s)]}$, soit $\frac{q_s}{p_s} = \frac{1}{1+r_f} \times \frac{\exp(-\rho W(s))}{E^P[-\rho W(s)]}$

fonctions d'utilité exponentielles : state price density (ou fonction de prix d'états)

- $\frac{q_s}{p_s} = \frac{1}{1+r_f} \times \frac{\exp(-\rho W(s))}{E^P[-\rho W(s)]}$ définit le Stochastic Discount Factor.
- Produit financier qui paye à son détenteur V_1 si l'état 1 se réalise, …, V_S si l'état S se réalise.
- $\tilde{V}$: variable aléatoire, prenant les valeurs $V_1, \dots, V_S$
- Q : probabilité risque-neutre. $Q(\{s\}) = \tilde{q}_s = \left(1 + r_f\right) \times q_s$
- $\sum_{s=1}^{S} q_s V_s = \frac{1}{1+r_f} \sum_{s=1}^{S} \tilde{q}_s V_s = \frac{1}{1+r_f} E^Q[\tilde{V}] = \frac{1}{1+r_f} E^P\left[\frac{dQ}{dP}\tilde{V}\right]$.
- $\frac{dQ}{dP}$ variable aléatoire prenant les valeurs $\frac{\tilde{q}_s}{p_s} = \frac{\exp(-\rho W(s))}{E^P[-\rho W(s)]}$,
- Prix de $\tilde{V}$: $\frac{1}{1+r_f} E^P\left[\frac{\exp(-\rho W(s))}{E^P[-\rho W(s)]}\tilde{V}\right]$

Marchés incomplets, sur-réplication (à compléter)

Marchés incomplets et sur-réplication

- On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{N}$ états de la nature.
- On peut traiter $K \leq S$ produits financiers, de payoffs $\tilde{X}^1, \dots, \tilde{X}^K$.
- X_s^k désigne le paiement du produit k dans l'état s.
- On suppose que les vecteurs de paiement associés aux payoffs sont linéairement indépendants
- Si $K = S$, les marchés sont dits complets, si $K < S$, les marchés sont dits incomplets.
- On note p_k le prix du produit financier k

Marchés incomplets et sur-réplication

- Définition : on dit qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage si $\sum_{k=1}^K \lambda_k \tilde{X}^k > 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^K \lambda_k p_k > 0$
  - $\sum_{k=1}^K \lambda_k \tilde{X}^k > 0$ *signifie* $\sum_{k=1}^K \lambda_k X_s^k \geq 0 \; \forall s = 1, \dots, S$ *avec inégalité stricte pour au moins un* s
  - *On suppose ici implicitement que les états ont tous une probabilité d'occurrence strictement positive*
    - On peut se ramener à ce cas en oubliant les états de probabilité nulle
- Théorème : l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'un vecteur de coordonnées positives $q_1, \dots, q_S$, tels que $\forall k \in \{1, \dots, K\}$, $p_k = \sum_{s=1}^S q_s X_s^k$
    - Démonstration : lemme de Farkas ou théorème de prolongement de formes linéaires positives
    - $q_1, \dots, q_S$ sont les prix d'état ou prix Arrow-Debreu

Marchés incomplets et sur-réplication

- Remarques
  - *Si* $K = S$, *il existe un unique vecteur de prix d'état*
  - *En effet, le système d'équations* $p_k = \sum_{s=1}^S q_s X_s^k$, $k \in \{1, \dots, K\}$ *est un système de Cramer*
  - *Si* $K < S$, *le système est sous-déterminé, plus d'unicité.*
  - *On notera* σ *l'ensemble des prix d'état*
  - *Pour simplifier l'analyse, on supposera que* $X_1^1 = \cdots = X_S^1 = 1$. $\tilde{X}^1$ *est l'actif sans risque.*
  - *On suppose en outre que* $p_1 = 1$ *: taux d'intérêt sans risque nul*
  - $1 = \sum_{s=1}^S q_s$ *et* $q_1 \geq 0, \dots, q_S \geq 0$ *: les vecteurs associés aux prix d'état sont dans le simplexe de* $\mathbb{R}^K$

Marchés incomplets et sur-réplication

- Portefeuille sur-réplicant : soit $\tilde{X}$ un payoff aléatoire. S'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_K$, tels que $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k \tilde{X}^k \geq \tilde{X}$, on dit que $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k \tilde{X}^k$ sur-réplique $\tilde{X}$
- On suppose qu'il existe un portefeuille sur-répliquant $\tilde{X}$. Alors $\forall q \in \sigma, \sum_{k=1}^{K} \lambda_k p_k \geq E^q[\tilde{X}] = \sum_{s=1}^{S} q_s X_s$
  - *Il suffit d'utiliser* $E^q[\tilde{X}^k] = p_k$
  - *Corollaire : le problème* $\inf_{\lambda_1,\dots,\lambda_K} \sum_{k=1}^{K} \lambda_k p_k$ *avec* $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k \tilde{X}^k \geq \tilde{X}$ *admet une solution finie* $P_{\tilde{X}}$.
    - $P_{\tilde{X}}$ est appelé prix de sur-réplication de $\tilde{X}$
    - Remarque : ce problème de minimisation est un programme linéaire, appelé problème primal.
  - *Corollaire :* $P_{\tilde{X}} \geq \sup_{q\in\sigma} E^q[\tilde{X}]$
    - En effet $P_{\tilde{X}} \geq E^q[\tilde{X}], \forall q \in \sigma$

Marchés incomplets et sur-réplication

- Le problème $\sup_{q\in\sigma} E^q[\tilde{X}]$ est aussi un programme linéaire appelé problème dual.
- Théorème (pas de gap de dualité) : $P_{\tilde{X}} = \sup_{q\in\sigma} E^q[\tilde{X}]$
- Démonstration (par l'absurde) : supposons $P_{\tilde{X}} > \sup_{q\in\sigma} E^q[\tilde{X}]$.
  - *On note E le sous-espace vectoriel engendré par* $\tilde{X}^1, \dots, \tilde{X}^K$
  - *Il s'appelle l'ensemble des actifs « atteignables » (ou duplicables)*
  - $\tilde{X} \in E \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_K, \tilde{X} = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \tilde{X}^k$
  - *Dans ce cas prix de duplication et de sur-réplication coïncident* $P_{\tilde{X}} = E^q[\tilde{X}], \forall q \in \sigma$
  - *On peut donc se limiter à étudier le cas où* $\tilde{X} \notin E$
  - *On note* $\varepsilon = P_{\tilde{X}} - \sup_{q\in\sigma} E^q[\tilde{X}]$

Marchés incomplets et sur-réplication

- On note $P^* = P_{\tilde{X}} - \varepsilon/2$
- Lemme : $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_K, \lambda, \lambda\tilde{X} + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \tilde{X}^k > 0 \Rightarrow \lambda P^* + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k p_k > 0$
  - *Preuve :*
  - *Si* $\lambda > 0$. *Soit* $q \in \sigma$, $E^q\left[\lambda\tilde{X} + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \tilde{X}^k\right]$