

Magistère de Finance première année

Examen du 23 mai 2025

Théorie économique et politique monétaire : Durée 1 h30

Exercice 1 : Comparaison du niveau de risque pour des variables aléatoires gaussiennes.

On considère deux variables aléatoires gaussiennes X et Y

- 1) Donner une condition nécessaire (et montrer qu'elle est bien nécessaire) pour qu'elles puissent être comparées au sens de l'ordre convexe.
- 2) La condition nécessaire étant vérifiée, rappeler la condition suffisante pour que les variables puissent être comparées au sens de l'ordre convexe.
- 3) En donner une première démonstration.
- 4) En donner une seconde démonstration.

Exercice 2 : Scission d'entreprise et protection des créanciers.

On supposera dans cet exercice que le taux sans risque est nul. On considère deux actifs A, B et deux états de la nature u, d . $A_u = 70, A_d = 50, B_u = 80, B_d = 0$.

- 1) Est-ce que A et B sont comonotones (si oui, pourquoi, si non pourquoi).
- 2) On note $A_0 = 60$ et $B_0 = 40$ les valeurs à la date 0 des deux actifs. En déduire les prix des actifs contingents aux états u, d
- 3) Montrer que A est plus risqué que B au sens de l'ordre convexe.
- 4) La dette contractuelle d'une entreprise possédant les actifs A et B est égale à D . Représenter la valeur des actions, à la date courante, en fonction de D
- 5) Représenter la valeur des dettes, à la date courante, en fonction de D .
- 6) Est-ce que les payoffs des actions et des dettes sont comonotones (si oui, pourquoi, si non pourquoi) ?
- 7) On suppose maintenant que $D = 100$. Donner la valeur aujourd'hui de la dette de l'entreprise.
- 8) On opère une scission de l'entreprise. Les dettes sont affectées au prorata de la valeur des actifs.
 - a. Donner la valeur contractuelle des dettes de chacune des entités issues de la scission
 - b. Donner la valeur économique, à la date courante, de chacune des dettes.
 - c. Que remarque-t-on ?
- 9) On change les données relatives aux actifs possédés par l'entreprise : $A_u = 70, A_d = 50, B_u = 0, B_d = 80$. Est-ce que les lois marginales des actifs ont changé ?
- 10) Qu'en déduire à propos de la valeur, à la date courante, des dettes de chacune des entités issues de la scission ?
- 11) Calculer la valeur, à la date courante, de la dette émise par l'entreprise, avant la scission ?
- 12) En déduire la valeur des actions de l'entreprise, à la date courante, avant la scission ?
- 13) Que remarque-t-on ? Commentez.

Exercice 3 : ordre stochastique usuel (dominance stochastique au premier ordre)

On considère six états équiprobables et des paris B, C associés aux payoffs suivant $B = 222333, C = 333111$.

- 1) Est-ce que l'on préfère B à C , ou l'inverse, dans tous les états de la nature (expliquer pourquoi) ?
- 2) Expliquer les conditions dans lesquelles un individu préférerait C à B (ou l'inverse) ?
- 3) Montrer qu'il existe une variable aléatoire B^* de même loi que B , telle que $B^* - C \geq 0$
- 4) Tracer les fonctions de répartition de B et de C . Que remarque-t-on ?

Exercice 4 : Comonotonie de variables aléatoires

Il y a quatre états de la nature. On considère des richesses contingentes aux états, $X, Y, Z = X + Y$. X prend les valeurs 1,3,2,4, Y prend les valeurs 1,2,2,5.

- 1) Examiner les liens de comonotonie (ou pas) entre X, Y, Z
- 2) Exprimer X, Y, Z comme fonctions croissantes d'une variable aléatoire commune.
- 3) Donner une interprétation économique du tableau précédent
- 4) Expliciter le lien avec la théorie des options.

Exercice 5 : transfert de risque et Pareto-optimalité

On considère la distribution de richesse suivante. Les deux états sont supposés équiprobables. On note u_1, u_2 les fonctions d'utilité des deux agents. Elles suivent les propriétés usuelles. Les distributions initiales de richesses des agents sont les suivantes.

état	s_1	s_2
richesse agent 1	1	0
richesse agent 2	0	2

Soit avec les notations du cours $w_1(1) = 1, w_1(2) = 0, w_2(1) = 0, w_2(2) = 2$.

- 1) Est-ce que les distributions de richesses des agents sont comonotones ?
- 2) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour ε suffisamment petit, le transfert de richesse suivant est Pareto-améliorant :
 - a. Transfert de richesse de ε de l'agent 1 vers l'agent 2 si l'état s_1 se réalise.
 - b. Transfert de richesse de ε de l'agent 2 vers l'agent 1 si l'état s_2 se réalise.
- 3) Utiliser le raisonnement précédent pour montrer que les distributions de richesse Pareto-optimales qui résultent de la logique précédente sont comonotones.
- 4) Expliciter le contrat financier qui permet de réaliser le transfert de richesse correspondant.