

## Magistère de Finance première année

Examen du 18 janvier 2023

Théorie économique et politique monétaire : Durée 1 h30

### Exercice 1 : Renégociation de crédit (5 points)

Le taux sans risque est  $r_f = 5\%$ , le taux nominal de la dette est donné par  $i = 30\%$  et son montant à la date courante de 100. Les actionnaires disposent de 100 en caisse qu'ils peuvent conserver sous forme d'actifs de trésorerie (supposés ici rapporter le taux sans risque) ou investir dans un projet qui demande plus d'implication de leur part et dont les caractéristiques sont les suivantes : valeur d'actif à la date 1 égale à 126 avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ , valeur d'actif à la date 1 égale à 105 avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ , bêta du projet nul.

- a) Rappeler le problème du surplomb de la dette. (2 points)

La VAN du projet risqué est  $-100 + \frac{1}{1,05} \times \frac{1}{2} (126 + 105) = 0$  est positive et supérieure à celle du projet sans risque (VAN nulle). Mais les actionnaires ne récupérant rien de cette création de richesse (VAN nulle), elle bénéficie intégralement aux créanciers. Les actionnaires décidant des investissements, ne sont pas incités à choisir le projet à VAN positive, du fait de la charge trop élevée de la dette.

- b) Les actionnaires ont l'idée de proposer une renégociation de dette. Quels sont les taux d'intérêt compatibles avec le processus de renégociation ? Quelle est la stratégie optimale des actionnaires ? Quel risque subissent-ils alors ? (3 points)

La charge de la dette doit être telle que les actionnaires et les créanciers bénéficient de la renégociation. Les actionnaires bénéficient de la renégociation si  $i < 26\%$  (la VAN devient positive). Les créanciers bénéficient de la renégociation si  $i > 5\%$  : La VAN qui était nulle en cas d'abandon du projet risqué devient alors positive.

La mise en œuvre ou non du projet risqué à VAN positive devient donc un moyen de pression sur les créanciers. Cela aboutit à une réduction de leurs droits contractuels et remet en cause l'absolute priority rule (on entre dans le cas de contrats dits incomplets, c'est-à-dire dont les paiements ne sont pas définis pour tous les états de la nature (voir les transparents du cours sur la renégociation de la dette). C'est un avantage du contrôle des investissements par les actionnaires (qui ici, selon la théorie de l'agence sont mandatés par les créanciers pour gérer les investissements). Cependant, si les actionnaires proposent un taux proche de 5%, le gain de la renégociation pour les créanciers devient négligeable. Ils peuvent être tentés de refuser l'offre des actionnaires (voir la problématique du jeu de l'ultimatum).

### Exercice 2 : Actifs contingents (5 points)

On considère un actif, de prix aujourd'hui égal à 100, pouvant prendre deux valeurs à la date future,  $A_1 = 90$  (état bas) avec la probabilité 0,3 et  $A_1 = 120$  (état haut) avec la probabilité 0,7. On suppose également qu'il existe un placement sans risque. Pour simplifier les écritures, on supposera que le taux d'intérêt de ce placement sans risque est nul (0%). Un investissement de 100 dans le placement sans risque rapporte donc 100 à la date future, que l'on soit dans l'état haut ou dans l'état bas.

- a) (2 points) On considère un paiement contingent à l'état haut : paiement de 1 si  $A_1 = 120$  et de 0 si  $A_1 = 90$ . Constituer un portefeuille constitué de l'actif précédent et du placement sans risque qui duplique le paiement de l'actif contingent à l'état haut.

$$\begin{cases} \alpha \times 120 + \beta \times 100 = 1 \\ \alpha \times 90 + \beta \times 100 = 0 \end{cases}$$

$\alpha = 1/30, \beta = -3/100$ . Le prix de l'actif contingent à l'état haut est de  $100/30 - 3$  soit environ 0,33. On doit emprunter au taux sans risque.

Est-ce que ce portefeuille dupliquant dépend du prix de l'actif ou du taux sans risque ?

Le portefeuille dupliquant ne dépend pas du prix de l'actif risqué ou du taux sans risque (si l'on considère que le taux sans risque agit sur le montant placé initialement et pas sur le montant remboursé), car seuls les paiements à la date future interviennent dans le système d'équations précédent.

En déduire le prix de l'actif contingent à l'état haut.

Le prix (de duplication) de l'actif contingent à l'état haut est de  $\frac{100}{30} - 3$  soit  $\frac{1}{3}$ .

Indiquez si l'on est amené à emprunter de l'argent ou à vendre à découvert l'actif, car ces opérations peuvent être contraintes par la réglementation ou la difficulté de l'accès à la liquidité.

$\beta < 0$ . On doit emprunter au taux sans risque et acheter l'actif risqué.

b) Mêmes questions pour l'actif contingent à l'état bas. (1,5 points)

$$\begin{cases} \alpha \times 120 + \beta \times 100 = 0 \\ \alpha \times 90 + \beta \times 100 = 1 \end{cases}$$

$\alpha = -1/30, \beta = 4/100$ .  $\alpha = -1/30, \beta = 4/100$ .

Il faut vendre à découvert l'actif risqué et placer au taux sans risque.

Le prix (de duplication) de l'actif contingent est :  $-\frac{100}{30} + 4 = \frac{2}{3}$

c) (1,5 points) Quelle est la somme des prix des deux actifs précédents ?

La somme des prix est égale à un.

Pourquoi ?

On reconstitue en effet un placement sans risque.

Quelle interprétation mathématique pouvez-vous donner aux prix des deux actifs contingents ?

Les deux prix contingents peuvent s'interpréter comme des probabilités (le taux de l'actif sans risque est nul). Les prix des actifs contingents s'assimilent à des probabilités.

### Exercice 3 : marchés complets, opportunités d'arbitrage (5 points)

On considère un marché financier avec trois états. L'actif sous-jacent prend les valeurs 0, 1, 2. Son prix à la date initiale est noté  $S$ . Il existe une option d'achat de prix d'exercice 1 ; son prix est noté  $C$ . Il existe également un actif sans risque ; le taux sans risque est noté  $r_f$  et le prix de l'actif dans risque est noté  $P = \frac{1}{1+r_f}$ .

1) Le marché ainsi constitué est-il toujours complet ? (0,5 point)

Oui.

2) Pourquoi (oui ou non) ? (1 point)

La matrice des paiements peut s'écrire  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Elle est triangulaire inférieure, de déterminant

égal à 2, donc inversible.

3) Ecrire des ou les conditions pour que le marché précédent soit exempt d'opportunités d'arbitrage. (1,5 points)

Pour que le marché précédent soit exempt d'opportunités d'arbitrage, il faut (et il suffit) que les prix des actifs contingents aux trois états soient positifs.

L'option d'achat correspondant à l'actif contingent à l'état où le sous-jacent vaut 2, une première condition s'écrit :  $C > 0$ .

Maintenant, si l'on considère l'actif sous-jacent en position longue et une vente de quatre calls, on synthétise deux unités de l'actif contingent à l'état où le sous-jacent vaut 1. La condition de positivité s'écrit :  $S - 2C > 0$ .

Enfin, le dernier actif contingent est synthétisé en achetant l'actif sans risque, en vendant 0,5 unités d'actif sous-jacent et achetant l'option. La condition de positivité s'écrit :  $P - S + C > 0$ .

Pour que le marché précédent soit exempt d'opportunité d'arbitrage, il faut que les trois inégalités soient vérifiées.

- 4) Pouvez-vous décrire géométriquement l'ensemble des prix  $(S, C, P)$  tels qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage ? (2 points)

NB : Pour un corrigé détaillé, voir l'examen du 19 janvier 2022.

Les prix admissibles  $(S, C, P)$  vérifient les trois conditions :  $C > 0, S - 2C > 0, P - S + C > 0$ .

Pour tout réel  $\lambda$  positif, si  $(S, C, P)$  est un triplet de prix admissibles, alors  $(\lambda S, \lambda C, \lambda P)$ . Ceci implique que toute la demi-droite issue de l'origine (exclue) et passant par  $(S, C, P)$  est admissible. C'est ce qui caractérise un cône en géométrie.

Par ailleurs, si  $(S, C, P)$  et  $(\bar{S}, \bar{C}, \bar{P})$  sont deux triplets vérifiant les trois inégalités précédentes et  $\alpha \in ]0, 1[$ , alors on vérifie immédiatement que  $\alpha \times (S, C, P) + (1 - \alpha) \times (\bar{S}, \bar{C}, \bar{P})$  vérifie aussi les trois inégalités, c'est-à-dire est aussi un ensemble de prix non-arbitrables.

Un tel objet géométrique est un cône convexe épointé, épointé voulant dire que l'on retire l'origine  $(0, 0, 0)$  à cause des inégalités strictes.

NB : On retrouve systématiquement ce type d'objet dans l'analyse de l'absence d'opportunités d'arbitrage en « finance mathématique ».

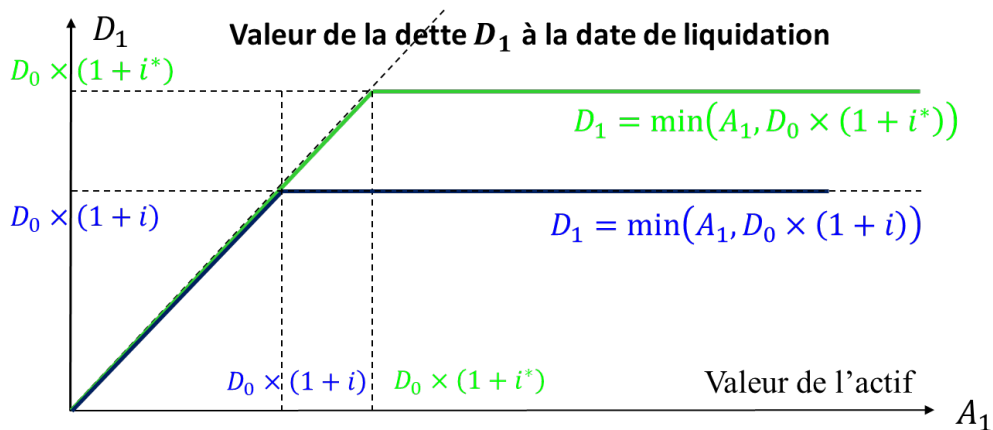
#### Exercice 4 : dette dans le cadre du modèle structurel de Merton (6 points)

- 1) Comment peut-on décomposer une dette risquée à partir de puts sur l'actif de l'entreprise et d'actif sans risque ? (1 point)

Dans le cadre du modèle structurel à une période, une dette risquée peut se décomposer comme la combinaison d'un placement sans risque, de remboursement égal au montant contractuellement dû aux prêteurs et de la vente d'un put sur l'actif de l'entreprise dont le prix d'exercice est le montant précédent.

- 2) Montrer que, toutes choses égales par ailleurs, le profit du prêteur augmente avec le taux d'intérêt nominal. On donnera une démonstration graphique et une démonstration analytique. (2 points)

La démonstration graphique est la plus simple :



On constate qu'une augmentation du taux d'intérêt nominal de  $i$  à  $i^*$  fait passer du profil de paiement représenté en bleu à celui représenté en vert. Le second étant au-dessus du premier, il est associé à un paiement supérieur donc à un profit (espérance de gain) supérieur.

La démonstration analytique résulte de l'illustration graphique. Il suffit de considérer les trois cas suivants :  $A_1 \leq D_0 \times (1 + i)$ ,  $D_0 \times (1 + i) \leq A_1 \leq D_0 \times (1 + i^*)$  et  $D_0 \times (1 + i^*) < A_1$ , de considérer les expressions des dettes  $\min(A_1, D_0 \times (1 + i))$  et  $\min(A_1, D_0 \times (1 + i^*))$  pour chacun des trois cas. Les inégalités au sens large ou strict s'en déduisent immédiatement.

- 3) Montrer que la fonction de profit du prêteur est concave en fonction du taux d'intérêt nominal. On pourra supposer que la fonction de profit est continument dérivable par rapport au taux d'intérêt nominal. (2 points)

La démonstration apparaît à différents endroits du cours. Dans la partie sur l'antisélection, on montre que  $\frac{d^2 \Pi_K(i)}{di^2} > 0$  et comme  $\Pi_K(i) + \Pi_D(i)$  ne dépend pas de  $i$ ,  $\frac{d^2 \Pi_D(i)}{di^2} = -\frac{d^2 \Pi_K(i)}{di^2} < 0$ , ce qui montre la concavité de la fonction de profit du prêteur (sous réserve d'acceptation du crédit par les actionnaires).

- 4) Etablir les niveaux du profit dans les cas extrêmes. (1 point)

Pour  $i = -100\%$ ,  $\Pi_D(i) = -D_0$  (voir cours). Pour  $i \rightarrow \infty$ ,  $\Pi_D(i) \rightarrow \Pi_A + D_0$  (voir cours).