Université Paris 1 Panthéon – Sorbonne **École de Management de la Sorbonne**

Magistère de Finance première année

Examen du 15 mai 2023
Théorie économique et politique monétaire : Durée 1 h30
Smartphones, tablettes, microordinateurs et notes de cours non autorisés

Exercice 1 : réduction des loteries composées

On considère les loteries (étudiées en cours) représentées par :

p_2 :	2 400 avec prob 0,34 0 avec prob 0,66
q_2 :	2 500 avec prob 0,33 0 avec prob 0,67

Et par :

	1	2 – 34	35 – 100
q_2	0	2500	**0**
p_2	2400	2400	**0**

1) Montrer que ces deux jeux de loteries sont stochastiquement équivalentes. On supposera par la suite que l'axiome de réduction des loteries composées est valide.

Considérons le second tableau. La probabilité de gain de la loterie q_2 est égale à la probabilité de tirer un entier entre 2 et 34 entre 1 et 100 (avec probabilité uniforme), soit 0,33. La loi des gains associée à q_2 est la même dans les deux présentations de la loterie. Il en est de même pour p_2.

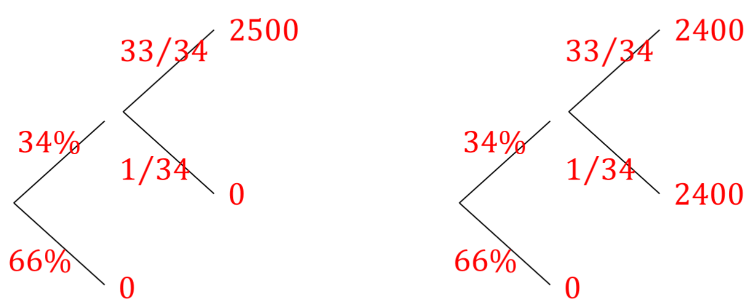
2) Considérons la loterie associée au second tableau. Expliciter comment le STP de Savage permet de simplifier l'analyse.

Selon le STP, un tirage d'un numéro entre 35 et 100 est une alternative non pertinente. On peut oublier la dernière colonne du tableau et ne considérer que :

	1	2 – 34
q_2	0	2500
p_2	2400	2400

3) Représenter la loterie associée au tableau 2 sous la forme d'une loterie composée.

- A gauche, la loterie q_2 (sous forme composée), à droite p_2



4) En supposant qu'il y a préférence pour la sécurité au voisinage de la certitude, expliquer quelle loterie doit être préférée.

La préférence pour la sécurité au voisinage de la certitude amène alors, en général, à préférer p_2 à q_2. Ceci amène donc à considérer que l'incohérence des choix mise en évidence par Allais pourrait résulter d'un effet de « framing » (cadrage) et/ou d'une remise en cause du principe de l'absence d'illusion stochastique. En effet, quand les participants à des expériences sont confrontés au second tableau, l'incohérence des décisions est beaucoup moins fréquente.

Exercice 2 : Indépendance conditionnelle et non conditionnelle ; indépendance mutuelle (jointe).

L'analyse des problématiques d'équité et le paradoxe de Simpson font intervenir au moins trois variables (par exemple, genre, réussite à un concours, type du concours). On peut illustrer la problématique à partir de l'exercice de probabilité suivant. On lance consécutivement deux dés identiques et équilibrés.

- A : le premier chiffre est pair
- B : le deuxième chiffre est impair
- C : la somme des deux chiffres est paire

1) Calculer $P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C)$

$P(A) = P(B) = P(C) = 0{,}5.$

$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0{,}25.$

2) A, B, C sont-ils deux à deux indépendants ?

Oui.

3) Relier $P(A \cap B), P(A)$ et $P(B)$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$

4) Supposons A, B, C sont-ils mutuellement indépendants. Montrer qu'alors $P(A \cap B|C) = P(A|C) \times P(B|C)$.

$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A) \times P(B) \times P(C)}{P(C)} = P(A) \times P(B)$. $P(A|C) = P(A)$. $P(B|C) = P(B)$. D'où le résultat.

5) Calculer $P(A \cap B|C)$. En déduire qu'il n'y a pas indépendance mutuelle.

$P(A \cap B|C) = 0$. Or, nous avons vu que $P(A|C) = P(B|C) = \frac{1}{2}$. D'où $P(A \cap B|C) \neq P(A|C) \times P(B|C)$. Cette inégalité implique qu'il n'y a pas indépendance mutuelle.

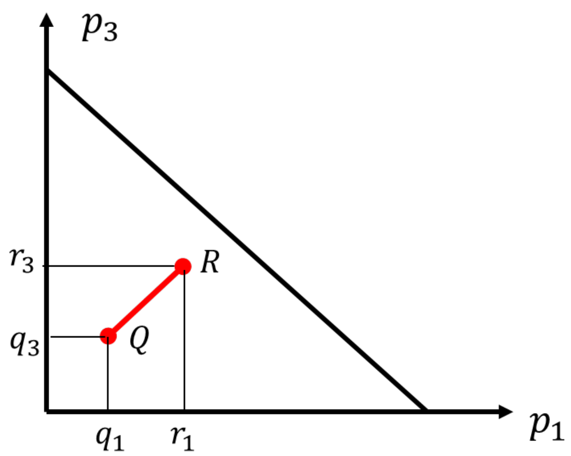
6) Conclure qu'indépendance conditionnelle et non conditionnelle ne sont pas équivalentes.

$P(A \cap B|C) \neq P(A|C) \times P(B|C)$ signifie qu'il n'y a pas indépendance conditionnelle de A et de B sachant C. Pourtant les événements A et de B sont indépendants.

Exercice 3 : Représentation de paris

On considère deux loteries $R = (r_1, r_2, r_3), Q = (q_1, q_2, q_3)$ représentées par leur coordonnées (r_1, r_3) et (q_1, q_3) dans le triangle de Machina. Déterminer et représenter graphiquement dans le triangle de Machina l'ensemble des loteries $\{\alpha R + (1-\alpha)Q, \alpha \in [0,1]\}$.

Pour $\alpha \in [0,1]$ $\alpha R + (1-\alpha)Q = (\alpha r_1 + (1-\alpha)q_1, \alpha r_2 + (1-\alpha)q_2, \alpha r_3 + (1-\alpha)q_3)$, cad points de coordonnées $\alpha(r_1, r_3) + (1-\alpha)(q_1, q_3)$ dans le triangle de Machina, cad le segment RQ ci-dessous.



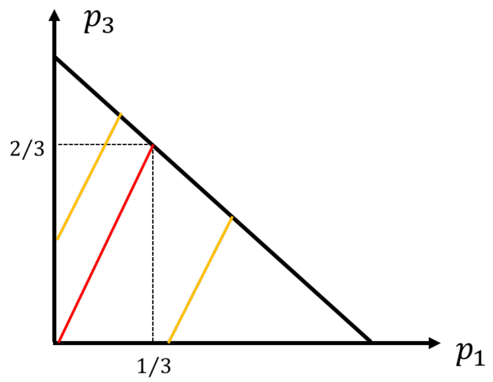
Exercice 4 : courbes d'iso-utilité dans le triangle de Machina

On considère trois états, les utilités associées à ces trois états sont $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$.

1) Donner les équations associées aux courbes d'iso-utilité dans le système de coordonnées de Machina.

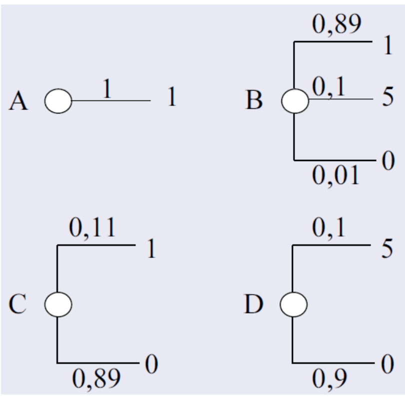
On rappelle que les courbes d'iso-utilité (avec trois états) sont de la forme : $p_3 = \left(\frac{u_2-u_1}{u_3-u_2}\right)p_1 + \frac{U(Q)-u_2}{u_3-u_2}$, soit avec les données de l'exercice $p_3 = 2p_1 + U(Q) - 2$, où $0 \leq U(Q) \leq 3$.

2) Représenter graphiquement les courbes d'iso-utilité dans le triangle de Machina ?



Les courbes d'iso-utilité sont des segments de droite parallèle au segment de droite en rouge (donc de pente égale à 2), représentés en orange dans le triangle de Machina. Le segment de droite en rouge a pour extrémité le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Il correspond au cas où $U(Q) = u_2 = 2$ et à l'équation $p_3 = 2p_1$. On obtient abscisse et ordonnée de l'extrémité de ce segment, en utilisant en outre $p_1 + p_3 = 1$.

Exercice 5 : Espérance d'utilité, axiome d'indépendance et paradoxe d'Allais



1) On considère les quatre loteries précédentes. On suppose que A est préféré à B (préférence pour la sécurité au voisinage de la certitude) et que D est préféré à C (plaisir attaché au risque). Montrer que ces choix ne sont pas compatibles avec la règle de l'utilité espérée.

Pour Allais, $A \succ B$. En termes d'espérance d'utilité :

- $u(1) > 0{,}89u(1) + 0{,}1u(5) + 0{,}01u(0)$, soit $\mathbf{0{,}11u(1) > 0{,}1u(5) + 0{,}01u(0)}$

Pour Allais, $C \prec D$. En termes d'espérance d'utilité :

- $0{,}11u(1) + 0{,}89u(0) < 0{,}1u(5) + 0{,}9u(0)$, soit $\mathbf{0{,}11u(1) < 0{,}1u(5) + 0{,}01u(0)}$

Il y a donc une contradiction.

2) On considère les loteries suivantes :
- *R : loterie qui rapporte 1 avec certitude,*
- *P : loterie qui rapporte 5 avec probabilité $\frac{10}{11}$ et 0 avec probabilité $\frac{1}{11}$*
- *V : loterie qui rapporte 0 avec certitude*

a. Ecrire A et B comme des loteries composées à partir de R et P

$A = 0{,}89R + 0{,}11R$: choisir avec probabilité 0,89 la loterie R et avec probabilité 0,11 la même loterie R est équivalent (stochastiquement) à choisir $R = A$

$B = 0{,}89R + 0{,}11P$. Il suffit de considérer un arbre ou d'appliquer la règle de calcul des probabilités composées pour voir que B est équivalent stochastiquement à choisir la loterie R avec probabilité 0,89 et la loterie P avec probabilité $0{,}11$.

b. Supposons $R \succ P$. Déduire de l'axiome d'indépendance une relation de préférence entre A et B

Si $R \succ P$, alors $A = 0{,}89R + 0{,}11R \succ 0{,}89R + 0{,}11P = B$

c. Ecrire C et D comme des loteries composées à partir de V, R et P

On reprend le même raisonnement qu'au a. en constatant que $C = 0{,}89V + 0{,}11R$ et $D = 0{,}89V + 0{,}11P$

d. Supposons $R \succ P$. Déduire de l'axiome d'indépendance une relation de préférence entre C et D

Si $R \succ P$, alors $C = 0{,}89V + 0{,}11R \succ 0{,}89V + 0{,}11P = D$

e. Conclure que les relations de préférence $A \succ B$ et $D \succ C$ ne sont pas compatibles avec l'axiome d'indépendance

Si $R \succ P$, alors $A \succ B$ et $C \succ D$. Si $R \preccurlyeq P$, alors $A \preccurlyeq B$ et $C \preccurlyeq D$ (même raisonnement que dans le premier cas : utilisation de l'axiome d'indépendance). Donc $A \succ B$ et $D \succcurlyeq C$ sont incompatibles (a fortiori $A \succ B$ et $D \succ C$ sont incompatibles).

L'intérêt de cet exercice est de montrer que c'est bien l'axiome d'indépendance qui est en cause dans le cadre du paradoxe d'Allais (incompatibilité avec la théorie de l'utilité espérée).