Magistère de Finance première année
Examen du 19 janvier 2022
Théorie économique et politique monétaire : Durée 1 h30. Calculatrices non autorisées

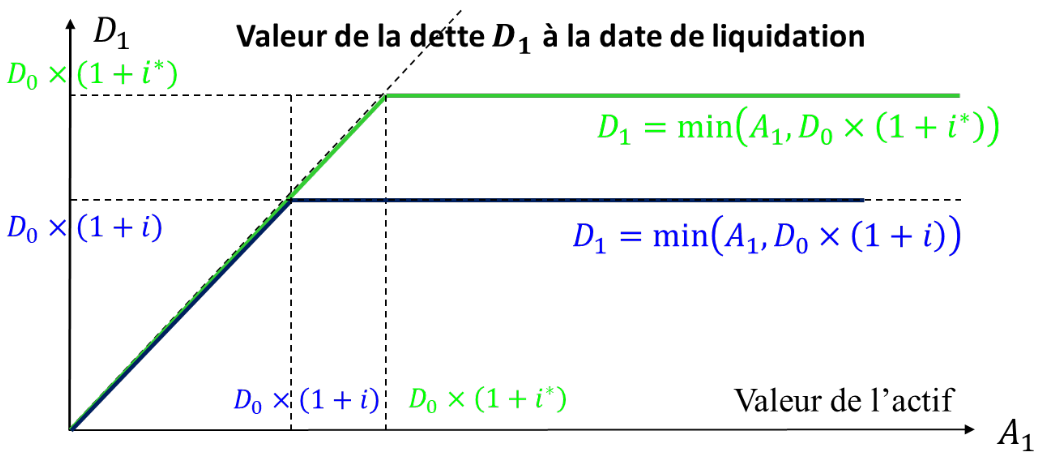
Exercice 1 : dette dans le cadre du modèle structurel de Merton

1) Comment peut-on décomposer une dette risquée à partir de puts sur l'actif de l'entreprise et d'actif sans risque ?

Dans le cadre du modèle structurel à une période, une dette risquée peut se décomposer comme la combinaison d'un placement sans risque, de remboursement égal au montant contractuellement dû aux prêteurs et de la vente d'un put sur l'actif de l'entreprise dont le prix d'exercice est le montant précédent.

2) Montrer que, toute choses égales par ailleurs, le profit du prêteur augmente avec le taux d'intérêt nominal. On donnera une démonstration graphique et une démonstration analytique.

La démonstration graphique est la plus simple :



On constate qu'une augmentation du taux d'intérêt nominal de i à i^* fait passer du profil de paiement représenté en bleu à celui représenté en vert. Le second étant au-dessus du premier, il est associé à un paiement supérieur donc à un profit (espérance de gain) supérieur.

La démonstration analytique résulte de l'illustration graphique. Il suffit de considérer les trois cas suivants : $A_1 \leq D_0 \times (1+i)$, $D_0 \times (1+i) \leq A_1 \leq D_0 \times (1+i^*)$ et $D_0 \times (1+i^*) < A_1$, de considérer les expressions des dettes $\min\left(A_1, D_0 \times (1+i)\right)$ et $\min\left(A_1, D_0 \times (1+i^*)\right)$ pour chacun des trois cas. Les inégalités au sens large ou strict s'en déduisent immédiatement.

3) Montrer que la fonction de profit du prêteur est concave en fonction du taux d'intérêt nominal. On pourra supposer que la fonction de profit est continument dérivable par rapport au taux d'intérêt nominal.

La démonstration apparaît à différents endroits du cours. Dans la partie sur l'antisélection, on montre que $\frac{d^2\Pi_K(i)}{di^2} > 0$ et comme $\Pi_K(i) + \Pi_D(i)$ ne dépend pas de i, $\frac{d^2\Pi_D(i)}{di^2} = -\frac{d^2\Pi_K(i)}{di^2} < 0$, ce qui montre la concavité de la fonction de profit du prêteur (sous réserve d'acceptation du crédit par les actionnaires).

Dans les transparents sur la « fabrique des produits dérivés », on montre que la fonction $K \to C(K)$ est convexe : Dans le cas où $K \to C(K)$ est dérivable, on a $C'(K) = -C_b(K)$, où $C_b(K)$ est la prime d'un call digital de strike K. La convexité de $K \to C(K)$ vient alors de la décroissance de $K \to C_b(K)$, montrée par ailleurs. La convexité en i de $i \to C\left(D_0(1+i)\right)$ et donc de la fonction de profit des actionnaires $i \to \Pi_K(i)$ résulte d'un simple changement de variable. Comme précédemment, on en déduit la concavité de $i \to \Pi_D(i)$.

4) Etablir les niveaux du profit dans les cas extrêmes

Pour $i = -100\%, \Pi_D(i) = -D_0$ (voir cours). Pour $i \to \infty$, $\Pi_D(i) \to \Pi_A + D_0$ (voir cours).

5) En déduire une propriété sur l'existence et l'unicité d'un taux d'équilibre sur un marché concurrentiel du crédit.

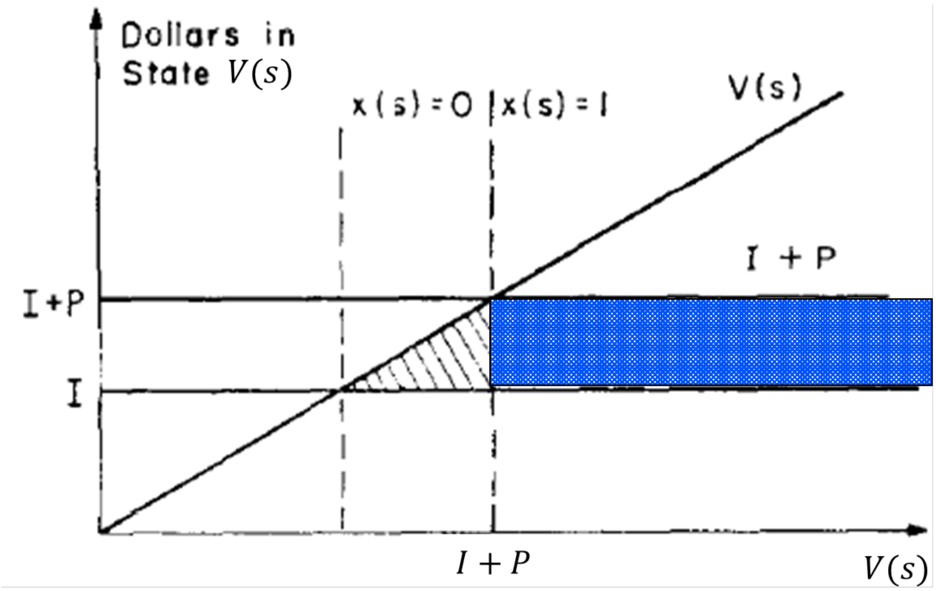
Il faut distinguer deux situations :

- Si $\Pi_A + D_0 > 0$, il y a un unique taux d'équilibre. En effet la fonction $i \in [-100\%, \infty[\to \Pi_D(i)$ étant strictement croissante et continue, partant d'une valeur négative et ayant une limite positive, il y a une unique solution à l'équation $\Pi_D(i) = 0$, qui caractérise un marché concurrentiel du crédit.
- Si $\Pi_A + D_0 < 0$, $\Pi_D(i) < 0, \forall i$, il n'existe pas de taux d'équilibre sur un marché concurrentiel du crédit, l'offre de crédit étant nulle.

6) On se place maintenant dans le cadre du modèle de Myers. On notera $P = D(1+i)$, le montant à rembourser aux créanciers où i est le taux nominal (même notations que précédemment). Analyser les droits des créanciers à partir des outils déjà vus sur les calls et les puts. Pour simplifier l'analyse, les paiements seront vus comme une fonction de $V(s)$ le chiffre d'affaires.

Dans le cadre du modèle de Myers, les droits des créanciers sont représentés par un call digital portant sur le chiffre d'affaires $V(s)$, de nominal P (montant de dette à rembourser contractuellement) et de strike $I + P$ (voir notations du cours).

7) Représenter graphiquement le profil de paiement de la dette en fonction de $V(s)$.



Il correspond à la zone hachurée en bleu.

8) On note Q la probabilité risque-neutre et $\tilde{V}$ la variable aléatoire qui prend la valeur $V(s)$ dans l'état s. Exprimer la valeur de la dette. On supposera pour simplifier que le taux d'intérêt sans risque est nul.

Sous les hypothèses précédentes, la valeur de la dette est $E^Q[P \times 1_{\tilde{V}>I+P}] = PQ(\tilde{V} > I + P)$ où Q représente la probabilité d'évaluation (« risque-neutre »).

9) Montrer que la valeur de la dette est toujours inférieure à son nominal P.

$Q(\tilde{V} > I + P) \leq 1 \Rightarrow PQ(\tilde{V} > I + P) \leq P$.

10) Quel est le profil de paiement de la dette quand $P = 0$?

Si $P = 0$, il n'y a rien à rembourser…

11) Quelle est alors sa valeur ?

La valeur de la dette est alors nulle.

12) Peut-on transposer le raisonnement du 2). Pourquoi ?

$P = D_0 \times (1+i) = 0$ si $i = -100\%$. Comme dans le cas étudié à partir de la question 2), quand le taux d'intérêt est égal à sa valeur minimale -100%, le profit du prêteur est égal à $-D_0$; le prêteur perd alors sa mise initiale.

Pour examiner si l'on peut transposer le raisonnement précédent, il faut examiner comment le profit du prêteur $PQ(\tilde{V} > I + P) - D_0$ dépend de P (ou bien de i puisque $P = D_0 \times (1+i)$). Et quand on examine la monotonie de $PQ(\tilde{V} > I + P)$ par rapport à P, il n'y a pas de conclusion évidente. Le nominal P augmente, mais la probabilité d'être remboursé diminue.

13) On pourra admettre la propriété suivante, vraie si $\tilde{V}$ est d'espérance finie (hypothèse très raisonnable) : $\lim_{x\to\infty} xQ(\tilde{V} > x) = 0$. Que devient alors la valeur de la dette quand le taux d'intérêt devient très grand.

La valeur de la dette $PQ(\tilde{V} > I + P)$ est positive ou nulle. Par ailleurs $0 \leq PQ(\tilde{V} > I + P) \leq PQ(\tilde{V} > P)$ et cette dernière quantité tend vers 0 quand $P \to \infty$. La valeur de la dette $PQ(\tilde{V} > I + P)$ tend donc vers 0 quand $i \to \infty$. Le profit du prêteur lui tend vers $-D_0$.

14) En déduire une propriété sur la valeur de la dette (on indique que la fonction qui au taux d'intérêt de la dette associe sa valeur est continue et qu'une démonstration graphique suffit).

La valeur de la dette $PQ(\tilde{V} > I + P)$ est positive ou nulle pour tout taux d'intérêt i (le prêteur a des droits) mais prend 0 comme valeurs extrêmes $i = -100\%$ et $i = \infty$.

La fonction de profit étant continue, on en déduit qu'il existe un taux i^* qui maximise la valeur de la dette (et donc du profit) ; accessoirement, le profit ne peut pas être une fonction monotone du taux d'intérêt comme précédemment.

Si $D_0(1+i^*) \times Q\left(\tilde{V} > I + D_0(1+i^*)\right) - D_0$ est positif, il existe des taux d'intérêt permettant de réaliser un profit positif des créanciers. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe des taux d'intérêt $\bar{\imath}$ associés à un profit nul des prêteurs. Si la VAN du projet est positive, elle sera alors positive pour les actionnaires à ces taux $\bar{\imath}$ et les projets pourront être financés. Il peut par ailleurs y avoir plusieurs équilibres (plusieurs taux $\bar{\imath}$) concurrentiels.
Considérons maintenant le cas où le profit maximum des prêteurs $D_0(1+i^*) \times Q\left(\tilde{V} > I + D_0(1+i^*)\right) - D_0$ est négatif. La situation à analyser est un peu différente : Les actionnaires ont intérêt à inciter les créanciers à prêter en leur accordant une partie de la création de valeur quand $P < V(s) < I + P$, afin que le profit des créanciers soit tout juste nul. Et cette promesse doit être faite ex-ante (on est dans le cas où le marché du crédit est concurrentiel, les actionnaires ont le pouvoir de marché).

15) Rappeler la condition telle qu'actionnaires et créanciers ont intérêt à renégocier la dette.

Si $P < V(s) < I + P$, actionnaires et créanciers ont un intérêt mutuel à renégocier la dette. On remarquera que cette renégociation se fait ex-post, une fois la valeur $\tilde{V}$ connue.

Exercice 2 : Butterfly
Trois options de vente sur une action ont la même date d'échéance et des prix d'exercice de 55 €, 60 € et 65 €. Leurs primes sont respectivement de 3 €, 5 € et 8 €.

1) Expliquez de quelle manière réaliser un butterfly.

On peut, par exemple, acheter une option de vente de strike 65 €, vendre deux options de vente de strike 60 € et acheter une option de vente de strike 55 €.

2) Construisez un tableau présentant les bénéfices de cette stratégie.

On note S le prix du sous-jacent à l'échéance. Les bénéfices de la stratégie (hors paiement de primes) sont les suivants. Les bénéfices nets sont donnés dans la ligne inférieure. Le montant à débourser pour acquérir le butterfly est égal à $8 - 2 \times 5 + 3 = 1$ €.

	$55 < S$	$55 \leq S < 60$	$60 \leq S < 65$	$65 \leq S$
Bénéfices	0	$S - 55$	$65 - S$	0
Bénéfices nets	-1	$S - 56$	$64 - S$	-1

3) Pour quelles valeurs de l'action le butterfly entraînera-t-il une perte ?

A la lecture du tableau précédent (ou en faisant une représentation graphique du profil de paiement net des primes), on voit que bénéfice net est nul pour $S = 56$ et $S = 64$, positif dans l'intervalle $]56{,}64[$ et négatif en dehors de cet intervalle.

Exercice 3 : On considère un marché financier avec trois états. L'actif sous-jacent prend les valeurs 0, 1,2. Son prix à la date initiale est noté S. Il existe une option d'achat de prix d'exercice 1 ; son prix est noté C. Il existe également un actif sans risque ; le taux sans risque est noté r_f et le prix de l'actif dans risque est noté $P = \frac{1}{1+r_f}$.

1) Le marché ainsi constitué est-il toujours complet ?

Oui

2) Pourquoi (oui ou non) ?

La matrice des paiements peut s'écrire $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Elle est triangulaire inférieure, de déterminant égal à 1, donc inversible.

3) Ecrire des ou les conditions pour que le marché précédent soit exempt d'opportunités d'arbitrage.

Il faut que les prix des actifs contingents aux trois états soient positifs, pour que le marché précédent soit exempt d'opportunités d'arbitrage. L'option d'achat correspondant à l'actif contingent à l'état où le sous-jacent vaut 2, une première condition s'écrit : $C > 0$.

Maintenant, si l'on considère l'actif sous-jacent en position longue et une vente de deux calls, on synthétise l'actif contingent à l'état où le sous-jacent vaut 1. La condition de positivité s'écrit : $S - 2C > 0$.

Enfin, le dernier actif contingent est synthétisé en achetant l'actif sans risque, en vendant le sous-jacent et achetant l'option. La condition de positivité s'écrit : $P - S + C > 0$.

Pour que le marché précédent soit exempt d'opportunité d'arbitrage, il faut que les trois inégalités soient vérifiées.

4) Pouvez-vous décrire géométriquement l'ensemble des prix (S, C, P) tels qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage ?

NB : un corrigé détaillé est donné ici à titre pédagogique. Il n'était pas attendu une réponse exhaustive à cette question, les éléments de mathématiques utiles n'ayant pas été rappelés en cours.

L'ensemble des prix (S, C, P) admissibles est délimité par les trois plans d'équation $C = 0$, $S - 2C = 0$, $P - S + C = 0$. On remarque que ces trois plans passent par l'origine $(0{,}0{,}0)$.

Par ailleurs pour tout réel λ positif, si (S, C, P) est un triplet de prix admissibles, alors $(\lambda S, \lambda C, \lambda P)$. Ceci implique que toute la demi-droite issue de l'origine (exclue) et passant par (S, C, P) est admissible. C'est ce qui caractérise un cône en géométrie.

Par ailleurs, si (S, C, P) et $(\bar{S}, \bar{C}, \bar{P})$ sont deux triplets vérifiant les trois inégalités précédentes et $\alpha \in]0{,}1[$, alors on vérifie immédiatement que $\alpha \times (S, C, P) + (1 - \alpha) \times (\bar{S}, \bar{C}, \bar{P})$ vérifie aussi les trois inégalités, c'est-à-dire est aussi un ensemble de prix non-arbitrables. En mathématiques, un tel objet géométrique est un cône convexe épointé (https://fr.wikipedia.org/wiki/C%C3%B4ne_(analyse_convexe)), épointé voulant dire que l'on retire l'origine $(0{,}0{,}0)$ à cause des inégalités strictes. On retrouve systématiquement ce type d'objet dans l'analyse de l'absence d'opportunités d'arbitrage en « finance mathématique ».

Si l'on considère les intersections deux à deux des trois plans précédents, on obtient trois droites. Par exemple, l'intersection des plans d'équations $C = 0$, $S - 2C = 0$, donne $C = 0$, $S = 0$ et P libre. Cela correspond à l'axe des côtes (le troisième axe dans la représentation spatiale usuelle) et on doit se restreindre aux côtes positives (le prix de l'actif sans risque est positif). La demi-droite associée est issue de l'origine et est orientée selon le vecteur de coordonnées $v_1 = (0,0,1)$.

Si l'on considère l'intersection des plans d'équations $C = 0$, $P - S + C = 0$, on est amené à considérer la demi-droite issue de l'origine et orientée selon le vecteur de coordonnées $v_2 = (1,0,1)$.

Enfin, l'intersection des plans d'équations $S - 2C = 0$, $P - S + C = 0$, donne $S = 2C, P = C$. On est donc amené à considérer des triplets $(2C, C, C)$ pour $C > 0$, soit une demi-droite issue de l'origine et orientée selon le vecteur de coordonnées $v_3 = (2,1,1)$.

On peut alors caractériser le cône convexe des prix admissibles : Il s'agit de tout triplet de la forme $\lambda \times (\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 + +\omega_3 v_3)$ où λ est un réel positif, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont trois réels positifs vérifiant $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. Géométriquement, cela signifie que l'on commence par former une combinaison convexe des trois vecteurs v_1, v_2, v_3 ce qui donne une direction admissible, puis à se déplacer le long de la demi-droite correspondante. Une autre interprétation géométrique simple qui permet de visualiser le cône des prix admissible est la suivante. On considère le triangle de sommets $(0,0,1), (1,0,1), (2,1,1)$. Toute demi-droite issue de l'origine et épointée passant par un des points du triangle précédent appartient au cône (et réciproquement on peut obtenir tous les éléments du cône par cette méthode). Le triangle précédent est appelé base. Dans les petites classes (4e), on réserve le nom de cône au cas où la base est circulaire (on parle de cône de révolution). Quand la base est un polygone (ici un triangle), on parle plutôt (toujours au collège) de pyramide. Les demi-droites issues de l'origine et passant par les trois côtés du triangle précédent sont appelées génératrices (elles forment les trois faces du cône). Les trois demi-droites passant par les sommets du triangle précédent s'appellent les arêtes.

Si les données de l'exercice sont anecdotiques, on peut remarquer que le raisonnement précédent s'étend immédiatement au cas d'un nombre quelconque d'actifs. Par exemple, avec quatre états de la nature et quatre actifs, on aurait également un cône, mais dont la base serait un quadrilatère.

Question de cours :

1) Rappeler le STP tel que formulé par Savage

Si f, g sont deux choix risqués et B un événement, le STP peut s'exprimer comme : $f \succ g|B$ et si $f \succ g|B^c \Rightarrow f \succ g$.

2) Reprendre la critique de Jeffrey du STP

Voici une illustration du contre-exemple de Jeffrey. Il s'agit de choisir entre deux investissements immobiliers.

	Achat propriété A		Achat propriété B	
	1 M$	0 $	1M$	0 $
Victoire démocrate	5%	95%	**7,5%**	92.5%
Victoire républicain	**30%**	70%	40%	60%

- Comparons les décisions d'acheter A ou B : achat de B plus intéressant que le candidat démocrate ou que le candidat républicain soit élu.
- Mais si l'achat de A faisait gagner avec certitude le républicain et que l'achat de B faisait gagner avec certitude le démocrate, il faudrait acheter A : Probabilité de 30% de faire une plus-value contre 7,5% si achat de A

3) Rappeler la reformulation du STP (Causal STP) par Judea Pearl pour échapper à cette critique.

Soit f et g, deux choix et B un événement, alors : $P\big(B|do(f)\big) = P\big(B|do(g)\big)$ et $\succ g|B, f \succ g|B^c \Rightarrow f \succ g$.