Université Paris 1 Panthéon – Sorbonne **École de Management de la Sorbonne**

Magistère de Finance première année

Examen du 17 mai 2022
Théorie économique et politique monétaire : Durée 1 h30
Smartphones, tablettes, microordinateurs et notes de cours non autorisés

Exercice 1 : Richesses comonotones

6,5 points : 1 point pour le 1), 1 point pour le 2), 0,5 point pour chaque question du 3)

On considère deux agents et trois états. On note w_1, w_2 la richesse (aléatoire) de chaque agent, assimilée à un triplet.

1) $w_1 = (0,1,3)$, $w_2 = (0,1,2)$. w_1 et w_2 sont-elles comonotones ? Pourquoi ?

Les richesses sont comonotones. Elles sont toutes deux fonctions croissantes du rang.

2) $w_1 = (1,0,0)$, $w_2 = (1,1,0)$. w_1 et w_2 sont-elles comonotones ? Pourquoi ?

Les richesses sont également comonotones. Elles sont fonctions croissantes de l'opposé du rang.

3) On reste dans le cadre du 2) pour les richesses. On note $p = P(w_1 = 1)$, la probabilité que la richesse de l'agent 1 soit égale à 1 et $q = P(w_2 = 1)$, la probabilité que la richesse de l'agent 2 soit égale à 1.

   a. Quelles sont les probabilités des trois états ?

Notons p_1, p_2, p_3 les probabilités. $p_1 = p, p_2 = q - p, p_3 = 1 - q$

   b. Calculer l'espérance des richesses w_1, w_2.

$E[w_1] = p, E[w_1] = q$

   c. Calculer les variances des richesses w_1, w_2

On peut faire le calcul (simple) ou se souvenir de l'expression de la variance pour une variable de Bernoulli. $\text{Var}[w_1] = p(1-p)$, $\text{Var}[w_1] = q(1-q)$

   d. Calculer la covariance entre les richesses w_1 et w_2

$\text{Cov}(w_1, w_2) = E[w_1 w_2] - E[w_1]E[w_2] = p - pq = p(1-q)$.

   e. Donner l'expression du coefficient de corrélation linéaire entre w_1 et w_2, en fonction de p et de q

$\rho = \frac{p(1-q)}{\sqrt{p(1-p)q(1-q)}} = \sqrt{\frac{p}{q}} \times \sqrt{\frac{1-q}{1-p}} < 1.$

   f. Calculer la valeur du coefficient de corrélation pour $p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$.

$\rho = \frac{1}{2}$ (on notera que bien que w_1 et w_2 soient comonotones, le coefficient de corrélation linéaire est nettement inférieur à 1).

   g. A quoi correspond cette situation ?

Cela correspond à la situation où les trois états sont équiprobables : $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

   h. Calculer la valeur du coefficient de corrélation pour $p = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}$.

$\rho = 1$.

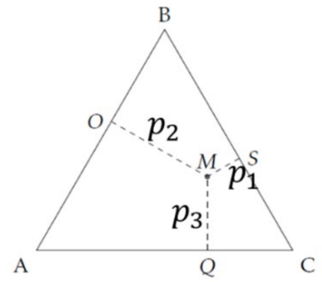
   i. A quoi correspond cette situation ?

La probabilité de l'état 2 est nulle. On se ramène à une situation à deux états où $w_1 = w_2$. Au final, la comonotonie peut être associée à des valeurs très différentes du coefficient de corrélation linéaire.

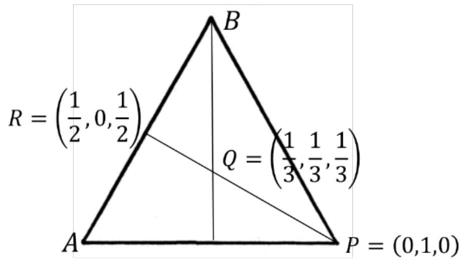
Exercice 2 : Représentation de paris

Barème : 6 points, 1,5 points pour le 1) (0,5 point par loterie), 2 points pour le 2) (0,5 point par remarque), 1,5 points pour le 3) (0,5 point pour chaque sous-question), 1 point pour le 4)

1) Représenter et construire géométriquement les loteries $P = (0,1,0)$, $Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $R = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ dans le triangle ci-dessous.



La représentation géométrique des loteries P, Q, R est indiquée ci-dessous :



2) Que remarque-t-on ?

Q est le barycentre du triangle, R est le milieu de AB, P est l'un des trois sommets. P, Q, R sont alignés.

3) Interpréter les intervalles QP, QR et RP comme des ensembles convexes de loteries.

- $QP = \{\alpha P + (1-\alpha)Q, \alpha \in [0,1]\}$ combinaisons convexes de la loterie équiprobable sur $\{w_1, w_2, w_3\}$ et de la loterie qui donne w_2 de manière certaine.
- $QR = \{\beta P + (1-\beta)Q, \beta \in [0,1]\}$ combinaisons convexes des loteries équiprobables sur $\{w_1, w_2, w_3\}$ et sur $\{w_1, w_3\}$
- $RP = \{\gamma P + (1-\gamma)Q, \gamma \in [0,1]\}$ combinaisons convexes de la loterie qui donne w_2 de manière certaine et de la loterie équiprobable sur $\{w_1, w_3\}$

4) Interpréter Q comme une combinaison de loteries.

Q étant le barycentre, les longueurs QR et QP sont égales à $1/3$ et $2/3$. $Q = \frac{2}{3}R + \frac{1}{3}P$ est une combinaison convexe des loteries R et P

Exercice 3 : gouvernance d'entreprises et trilemme éthique

Barème : 4 points, 1 point par sous-question.

Dans le cadre d'une réflexion sur la stratégie et les missions ou la raison d'être de l'entreprise et des problématiques ESG, on définit trois critères de performance :

- *A : Profit des bailleurs de fonds (pour simplifier les actionnaires)*
- *B : Revenus des employés*
- *C : Responsabilité environnementale (empreinte carbone, etc.)*

Il y a un comité d'orientation stratégique, avec un représentant de l'Etat, un représentant des salariés et un représentant des actionnaires.

1) Les préférences des trois parties prenantes sont les suivantes :
- *Pour les actionnaires :* $A \succ B \succ C$
- *Pour les salariés :* $B \succ C \succ A$
- *Pour l'Etat,* $C \succ B \succ A$

   a. Y a-t-il un vainqueur de Condorcet ?

$A \succ B \succ C$, $B \succ C \succ A$ et $C \succ B \succ A \Rightarrow B \succ A$, $B \succ C$, $C \succ A$. B : vainqueur de Condorcet et $B \succ C \succ A$.

   b. Quelles sont les implications de la stratégie choisie au niveau de l'organisation de l'entreprise et de son financement ?

L'Intérêt des actionnaires n'est plus pris en compte. Mode d'organisation ? Coopérative (accès aux fonds externes ?) ou entreprise publique ou profitable qui recours à l'autofinancement (ce sont les clients qui font les frais …).

2) Les préférences du représentant de l'Etat sont modifiées. Elles sont maintenant $C \succ A \succ B$

   a. Y a-t-il un vainqueur de Condorcet ?

$C \succ A$, $A \succ B$ *et* $B \succ C$. $C \succ A \succ B \succ C$. Il n'y a pas de vainqueur de Condorcet.

   b. Quelles sont les implications pour la gouvernance de l'entreprise ?

Le comité va décider par deux voix contre une, de privilégier C et A (et de laisser de côté B), de privilégier C et B (et de laisser de côté A) et de privilégier A et B (et de laisser de côté C). On peut aboutir à une situation d'instabilité stratégique : coalitions à deux contre un, instables.

Exercice 4 : courbes d'iso-utilité dans le triangle de Machina

Barème : 5 points, 2,5 points par question.

On considère trois états, les utilités associées à ces trois états sont $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$.

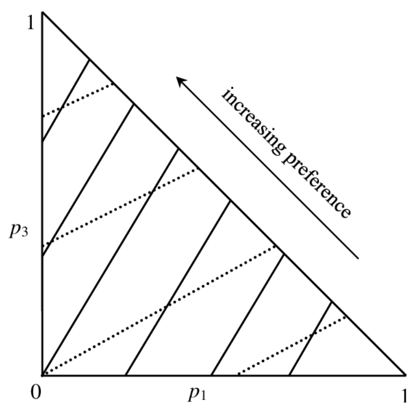
1) Donner les équations associées aux courbes d'iso-utilité dans le système de coordonnées de Machina

$$p_3 = \left(\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_2}\right) p_1 + \frac{U(Q) - u_2}{u_3 - u_2}$$

En utilisant les données de l'exercice, les courbes d'iso-utilités sont associées aux équations $p_3 = 2p_1 + a - 2$, où a varie entre 0 et 3 et où les courbes d'iso-utilité dans le triangle de Machina sont les segments de droite obtenus par l'intersection des droites associées aux équations précédentes et le triangle de Machina.

2) Représenter graphiquement les courbes d'iso-utilité dans le triangle de Machina ?

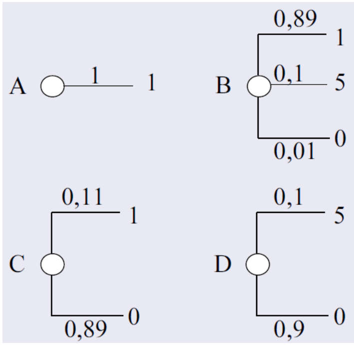
Elles correspondent aux courbes en trait plein ci-dessous, avec une pente égale à 2.



Exercice 5 : Espérance d'utilité, axiome d'indépendance et paradoxe d'Allais

Barème : 5,5 points. 2 points pour la question 1), 0,5 point par sous-question de la question 2)

1) On considère les quatre loteries suivantes. On suppose que A est préféré à B (préférence pour la sécurité au voisinage de la certitude) et que D est préféré à C (plaisir attaché au risque). Montrer que ces choix ne sont pas compatibles avec la règle de l'utilité espérée.



Selon la règle de l'utilité espérée : $A \succ B \Leftrightarrow u(1) > 0{,}89u(1) + 0{,}1u(5) + 0{,}01u(0)$, soit $0{,}11u(1) > 0{,}1u(5) +$ a $0{,}01u(0)$.

De même, $C \prec D \Leftrightarrow 0{,}11u(1) + 0{,}89u(0) < 0{,}1u(5) + 0{,}9u(0)$, soit $0{,}11u(1) < 0{,}1u(5) + 0{,}01u(0)$, d'où la contradiction.

2) On considère les loteries suivantes :

- *R : loterie qui rapporte 1 avec certitude,*
- *P : loterie qui rapporte 5 avec probabilité $\frac{10}{11}$ et 0 avec probabilité $\frac{1}{11}$*
- *V : loterie qui rapporte 0 avec certitude*

a. Ecrire A et B comme des loteries composées à partir de R et P

$$A = 0{,}89R + 0{,}11R$$

$$B = 0{,}89R + 0{,}11P$$

b. Supposons $R \succ P$. Déduire de l'axiome d'indépendance une relation de préférence entre A et B

Au vu du a. l'axiome d'indépendance implique directement $A \succ B$.

c. Ecrire C et D comme des loteries composées à partir de V, R et P

$$C = 0{,}89V + 0{,}11R$$

$$D = 0{,}89V + 0{,}11P$$

d. Supposons $R \succ P$. Déduire de l'axiome d'indépendance une relation de préférence entre C et D.

Au vu du c. l'axiome d'indépendance implique directement $C \succ D$.

e. Conclure que les relations de préférence $A \succ B$ et $D \succ C$ ne sont pas compatibles avec l'axiome d'indépendance.

Conclusion immédiate à partir de b. et de d. et du principe de non contradiction. On remarque donc que c'est l'axiome d'indépendance qui est pose problème dans les exemples choisis par Maurice Allais.