Magistère de Finance première année

Examen du 27 février 2020
Théorie économique et politique monétaire : Durée 1 h30

Exercice 1 : assurance contre le risque de deux défauts.

On considère deux entreprises endettées. Les actifs suivent des distributions log-normales. On pourra utiliser les notations du cours.

a) Calculer les probabilités de défaut marginales.
b) Relier ces probabilités de défaut à l'espérance d'un paiement que l'on déterminera (et qui correspond en pratique à la jambe de défaut d'un fixed recovery credit default swap).
c) On suppose maintenant que les deux actifs sont corrélés via un facteur commun. Ecrire la probabilité de défaut jointe, sous la forme d'une espérance, comme indiqué dans le cours. Il n'est pas nécessaire de donner toutes les étapes intermédiaires du calcul.

Exercice 2 : Actifs contingents et puts

On se place dans le cas d'un espace d'état discret, les états correspondant aux valeurs futures entières d'un actif sous-jacent : $0, \dots, S$. On suppose qu'il existe un actif sans risque de taux d'intérêt nul. Des options de vente sur l'actif sous-jacent, de prix d'exercice $1, \dots, S$ sont également disponibles.

a) Montrer que l'on peut représenter la matrice des paiements associés aux puts et à l'actif sans risque sous une forme triangulaire supérieure. Cette matrice est-elle inversible ? Qu'en déduire sur la duplication d'un paiement quelconque ?
b) On considère un actif contingent à l'état $s \in \{1, \dots, S-1\}$. Montrer comment cet actif peut être dupliqué à partir de puts.
c) Comment l'actif contingent à l'état $s = 0$ peut-il être répliqué à partir de puts ?
d) Comment l'actif sous-jacent peut-il être dupliqué à partir de l'actif sans risque et de puts ?
e) Comment l'actif contingent à l'état S peut-il être dupliqué ? On pourra utiliser la relation de parité call-put.

Exercice 3 : options et risque de défaut dans le modèle de Cox Ross Rubinstein

On se place dans le cadre du modèle de Cox Ross et Rubinstein. En partant d'un prix initial A_0, les prix peuvent être multipliés à chaque étape par $u > 1$ ou $d < 1$. On note r_f le taux sans risque entre deux périodes. Au bout de $S \in \mathbb{N}$ étapes, il y a $S+1$ valeurs possibles pour le prix à la date n, $\tilde{A}_S$: $A_0 d^S, A_0 u d^{S-1}, A_0 u^2 d^{S-2}, \dots, A_0 u^S$. On note p probabilité de hausse, $q = 1 - p$ probabilité de baisse.

a) Déterminer p en fonction de u, d et r_f
b) Quelle est la probabilité (risque-neutre) d'être dans l'état $s \in \{0, \dots, S\}$?
c) Quelle est la forme de la fonction de survie $K \to S(K) = Q(\tilde{A}_S > K)$?
d) On va s'intéresser à la fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ où $C(K)$ est la prime du call de strike K. On suppose que le prix d'exercice n'est pas égal à l'une des valeurs $A_0 d^S, A_0 u d^{S-1}, A_0 u^2 d^{S-2}, \dots, A_0 u^S$. Montrer que $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ est dérivable et relier sa valeur à la fonction de survie aux points $A_0 d^S, A_0 u d^{S-1}, A_0 u^2 d^{S-2}, \dots, A_0 u^S$
e) On suppose maintenant que le prix d'exercice est égal à l'une des valeurs $A_0 d^S, A_0 u d^{S-1}, A_0 u^2 d^{S-2}, \dots, A_0 u^S$. Montrer que $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ est dérivable à gauche et à droite, relier ces dérivées à la fonction de survie.
f) On prend $S = 2$. $r_f = 0$, $A_0 = 100$, $u = 2$, $d = 0{,}5$. Calculer p, q puis les probabilités risques-neutre correspondant aux trois états dont on donnera les valeurs.
g) Calculer les primes d'options pour les prix d'exercice critiques et représenter graphiquement la fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$.

h) On considère toujours trois états, un taux sans risque nul et la même valeur initiale de l'actif : $S = 2$, $r_f = 0$. $A_0 = 100$. On modifie u et d : $u = 3$, $d = \frac{1}{3}$ (cela correspond à une augmentation de la dispersion des valeurs de l'actif sous-jacent autour de sa moyenne donc du risque). Calculer p, q puis les probabilités risques-neutre correspondant aux trois états dont on donnera les valeurs.

i) Calculer les primes d'options pour les prix d'exercice critiques et représenter graphiquement la fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$.

j) Comparer avec la fonction précédente.

k) L'entreprise est endettée, le montant à rembourser est égal à 50. Calculer la prime de l'assurance contre le risque de défaut dans les deux cas (on pourra utiliser la relation de parité call – put)

Exercice 4 : duplication statique de paiement à partir d'options d'achat

Soit deux fonctions réelles f et g deux fois continûment dérivables telles que pour $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = g''(x)$. On rappelle qu'alors $f = g$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(a) + \int_a^x f''(x)dx = g'(a) + \int_a^x g''(x)dx = f'(x)$ et $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)dx = g(a) + \int_a^x g'(x)dx = g(x)$.

a) Utiliser la propriété précédente pour montrer l'égalité suivante :

$$\forall x, a \in \mathbb{R}, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_{-\infty}^{a} (K-x)^+ f''(K)dK + \int_a^{\infty} (x-K)^+ f''(K)dK$$

b) On considère un profil de paiement f, payé à une date future donnée. Le détenteur de ce profil de paiement reçoit $f(A_1)$ à cette date future où A_1 est le prix de l'actif sous-jacent. A_0 est le prix de l'actif sous-jacent à la date courante. On supposera pour simplifier que le taux d'intérêt sans risque entre la date courante et la date future est nul. On notera Q la probabilité risque neutre. Ecrire la prime d'une option d'achat (respectivement d'une option de vente) de prix d'exercice K sous la forme d'une espérance. On notera $C(K)$ la prime d'une option d'achat de prix d'exercice K et $P(K)$, la prime d'une option de vente de prix d'exercice K et de même date d'exercice que l'option d'achat.

c) On considère que les conditions sont remplies pour intervertir l'opérateur d'espérance sous probabilité risque-neutre et les intégrales précédentes. Ecrire la prime associée au profil de paiement f.

Exercice 5 : augmentation du risque dans le cas gaussien

a) On considère deux variables aléatoires gaussiennes, X_1, X_2 de moyenne μ et d'écarts types, respectivement σ_1 et σ_2. On suppose $\sigma_2 > \sigma_1$ On rappelle que toute combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes indépendantes est une variable gaussienne. Montrer que l'on peut écrire $X_2 = X_1 + \varepsilon$ (l'égalité précédente est en loi), où ε est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle, indépendante de X_1.

b) On considère une fonction d'utilité concave et continument dérivable u. On considère une variable aléatoire gaussienne de moyenne μ et d'écart type σ. Ecrire l'espérance de l'utilité de X, comme une intégrale par rapport à la densité d'une variable gaussienne centrée réduite.

c) Utiliser les propriétés de symétrie des variables gaussiennes centrées pour transformer l'intégrale sur $\mathbb{R}$ en la somme de deux intégrales sur $\mathbb{R}^+$

d) Dériver par rapport à σ (on supposera que l'on peut intervertir intégration et dérivation) et utiliser la décroissance de la dérivée d'une fonction concave pour conclure sur le signe de la dérivée de l'espérance d'utilité par rapport à l'écart-type.