

Magistère de Finance première année

Examen du 6 mai 2019

Théorie économique et politique monétaire : Durée 1 h30
Smartphones, tablettes, microordinateurs et notes de cours non autorisés**Exercice 1 (effet cliquet)**

On suppose qu'il existe deux types d'agents 1 et 2. L'effort e est observable par le principal (pas d'aléa moral). Le principal propose le schéma de rémunération suivant :

- Un salaire de w_1^* si l'effort $e = e_1$ est réalisé
- Un salaire de w_2^* si l'effort $e = e_2$ est réalisé

Pour une rémunération de w offerte par le principal, l'utilité de l'agent 1 est égale à $U_1 = w - \frac{\beta_1}{2} \times e^2$, où $\beta_1 = 1$ est un coefficient d'aversion à l'effort. Pour l'agent 2, l'utilité a la forme $U_2 = w - \frac{\beta_2}{2} \times e^2$ où $\beta_2 = 2$. L'utilité de réservation (le niveau minimal d'utilité pour l'agent accepte le contrat de travail est égale à 0 dans les deux cas.

1) Le principal connaît le type de l'agent (information parfaite, optimum de premier rang)

Le profit du principal est supposé être de la forme $\pi = e - w$ (on suppose que l'effort de l'agent, e , est directement traduit en profit brut du principal, auquel il faut soustraire la rémunération de l'agent.

- a) Pour un coefficient d'aversion à l'effort β , déterminer le niveau d'effort qui maximise le profit du principal, en supposant que la contrainte de participation $U \geq 0$ est saturée
- b) Donner alors le salaire versé par le principal à l'agent
- c) Donner le profit du principal
- d) Calculer e_1^*, w_1^*, π_1^*
- e) Calculer e_2^*, w_2^*, π_2^*

2) Hétérogénéité observée

Le principal a affaire à 50% d'agents de type 1 et 50% d'agents de type 2. Il connaît les caractéristiques des agents et propose donc un contrat de type (e_1, w_1) aux agents de type 1 et (e_2, w_2) aux agents de type 2.

- a) Écrire la forme du profit du principal
- b) Calculer le profit du principal

3) Hétérogénéité non observée

Le principal ne sait pas à quel agent il a à faire, mais juste leur proportion, égale à $\frac{1}{2}$ (hétérogénéité non observée ou antisélection). Il propose un menu de deux contrats (e_1, w_1) et (e_2, w_2) . L'agent choisit le contrat.

- a) Écrire l'inégalité qui doit être satisfaite pour l'agent de type 1, choisisse le contrat (e_1, w_1) et pas le contrat (e_2, w_2)
- b) Écrire l'inégalité qui doit être satisfaite pour l'agent de type 2, choisisse le contrat (e_2, w_2) et pas le contrat (e_1, w_1)
- c) Sachant que l'agent 1 a choisi le contrat (e_1, w_1) , écrire la condition pour que ce contrat soit effectivement accepté (utilité de réservation positive ou nulle)
- d) Sachant que l'agent 2 a choisi le contrat (e_2, w_2) , écrire la condition pour que ce contrat soit effectivement accepté (utilité de réservation positive ou nulle)

- e) On admettra par la suite que les contraintes (d) et (a) sont saturées (les inégalités au sens large deviennent des égalités ; on peut montrer qu'alors les contraintes (b) et (c) sont vérifiées. Écrire le profit du principal $\pi(e_1, e_2)$ en fonction de e_1 et de e_2 .
- f) Exprimer les niveaux d'effort e_1 et e_2 en fonction de β_1 et de β_2 à utilisant les conditions du premier ordre (nullité des dérivées du profit du principal par rapport à e_1 et e_2)
- g) Donner les valeurs numériques de e_1 et de e_2
- h) Donner les valeurs numériques de w_1 et w_2
- i) Donner la valeur numérique de l'utilité de l'agent 1
- j) Donner les valeurs numériques des profits du principal (profit unitaire pour les agents de type 1 et 2 et profit total)
- k) Comparer les résultats avec la situation d'information parfaite.

3) Deux périodes

On se place maintenant dans un contexte à deux périodes, l'agent conservant la même aversion à l'effort d'une période à l'autre. Le profit de chaque période est toujours $\pi = e - w$. Il n'y a pas d'actualisation, principal et agent maximisent la somme de leurs gains (ou de leur utilités) sur les deux périodes.

Le principal envisage plusieurs types de systèmes de rémunération :

Système de rémunération avec engagement : Le principal s'engage à proposer deux fois de suite le même système de rémunération soit le système optimal de second rang dans le cas d'une seule période deux contrats (e_1, w_1) et (e_2, w_2) . Les agents se comportent alors de manière identique sur les deux périodes conformément à la solution obtenue dans la question 2)

- a) Montrer que le principal a intérêt à revenir sur son engagement initial, car le choix de contrat à la première date lui révèle le type de l'agent et de proposer le contrat correspondant à la situation d'information parfaite à la seconde période.
- b) Anticipation de l'agent

On anticipe que le principal va revenir sur son engagement à la seconde période, le menu de contrats proposé est alors (e_1, w_1) à la première période suivi de (e_1^*, w_1^*) à la seconde période ou bien de (e_2, w_2) à la première période, suivi de (e_2^*, w_2^*) à la seconde période.

- a. Calculer l'utilité de l'agent 1 s'il choisit le contrat (e_1, w_1) suivi de (e_1^*, w_1^*)
- b. Calculer l'utilité de l'agent 1 s'il choisit le contrat (e_2, w_2) suivi de (e_2^*, w_2^*)
- c. Quelle est la décision optimale de l'agent 1 ?
- d. Calculer l'utilité de l'agent 2 s'il choisit le contrat (e_1, w_1) suivi de (e_1^*, w_1^*)
- e. Calculer l'utilité de l'agent 2 s'il choisit le contrat (e_2, w_2) suivi de (e_2^*, w_2^*)
- f. Quelle est la décision optimale de l'agent 2
- g. Que peut-on conclure ?

Les agents 1 et 2 choisissent le contrat (e_2, w_2) à la première période. L'équilibre n'est plus séparateur. Le principal ne peut pas proposer l'optimum de premier rang à la période 2, mais seulement l'optimum de second rang (information imparfaite).

Il peut donc proposer le contrat suivant (e_2, w_2) pour tout le monde à la période 1, suivi du choix de contrat (e_1, w_1) ou (e_2, w_2) à la seconde période.

Système avec pooling à la première période et équilibre séparateur à la seconde période : le principal propose un contrat unique (e, w) à la première période, suivi du contrat du choix de contrat (e_1, w_1) ou (e_2, w_2) à la seconde période.

- c) Système 2 : le principal propose un contrat unique (e, w) à la première période, suivi du contrat du choix de contrat (e_1, w_1) ou (e_2, w_2) à la seconde période. Chercher le contrat optimal (e, w) .
- d) Comparer les profits du principal dans le système avec engagement et dans les autres deux systèmes de rémunération considérés.

Exercice 2 : actifs contingents, options « path-dependent » et complétude des marchés

On considère un arbre binomial recombinaut avec deux périodes. A titre d'exemple, le prix du sous-jacent est de 100 € à la date initiale, il passe à 99 € en cas de baisse (b_1) et à 101 € en cas de hausse (h_1) à la première période. A la seconde période, si le prix monte (h_2), il augmente d'un euro et si le prix baisse (b_2), il diminue d'un euro. Les prix possibles du sous-jacent à la date 2, sont alors de 98, 100 et 102 euros.

On suppose qu'il existe des actifs contingents pour tous les deux états de la date 1 (soit deux états) et de la date 2 (soit trois états).

Si l'on s'intéresse à des options dont le paiement dépend de la trajectoire du sous-jacent (path-dependent), l'espace des états est celui des trajectoires. Par exemple (h_1, b_2) est l'état correspondant à une hausse suivie d'une baisse.

- 1) Identifier les états de la nature.
- 2) Représenter les vecteurs de paiement des cinq actifs contingents aux états de la date 1 et aux états de la date 2. Ceci pourra se faire sous la forme d'une matrice, où chaque ligne correspond à un type de trajectoire et chaque colonne représente le vecteur de paiement associé à l'un des 5 actifs précédents.
- 3) Identifier parmi les 5 actifs précédents deux actifs contingents à une trajectoire
- 4) Montrer comment on peut dupliquer le paiement de l'actif contingent à l'état (h_1, b_2)
- 5) Montrer alors comment on peut dupliquer le paiement de l'actif contingent à l'état (b_1, h_2)
- 6) On rajoute une troisième période : les prix possibles à cette troisième période sont donc 97, 99, 101 et 103 euros. On suppose qu'outre les actifs contingents aux trajectoires sur deux périodes, on peut également négocier les quatre actifs contingents à la date 3. Une trajectoire sur trois périodes est par exemple (b_1, h_2, b_3) qui signifie une baisse, suivie d'une hausse, suivie d'une baisse. Identifier les trajectoires sur trois périodes.
- 7) Représenter sous la forme d'une matrice les paiements associés aux 4 actifs contingents à la troisième période et aux quatre actifs contingents aux trajectoires sur deux périodes étudiés en 3), 4) et 5). Chaque ligne de la matrice correspond à une trajectoire sur trois périodes, chaque colonne, un des 8 actifs.
- 8) Dupliquer les (8) actifs contingents à chaque trajectoire sur trois périodes à partir des 8 actifs précédents. Commencer par ce qui vous paraît le plus simple.
- 9) On suppose que l'on rajoute une quatrième période. On a alors des prix possibles égaux à 96, 98, 100, 102, 104 à la quatrième période. On suppose que les actifs contingents à la quatrième période sont traités dans le marché ainsi que les actifs contingents à des trajectoires sur les trois premières périodes.
 - a. Compter le nombre de trajectoires et donc d'actifs contingents à des trajectoires sur 4 périodes
 - b. De combien d'actifs dispose-t-on (actifs contingents à la quatrième période plus actifs contingents à des trajectoires sur les trois premières périodes)
 - c. Quelle est la différence avec les problèmes à deux et trois périodes ?