Université Paris 1 Panthéon – Sorbonne **École de Management de la Sorbonne**

Magistère de Finance première année

Examen du 6 mai 2019
Théorie économique et politique monétaire : Durée 1 h30
Smartphones, tablettes, microordinateurs et notes de cours non autorisés

Exercice 1 (effect cliquet)

On suppose qu'il existe deux types d'agents 1 et 2.

L'effort e est observable par le principal (pas d'aléa moral).

Le principal propose le schéma de rémunération suivant :

- Un salaire de w_1^* si l'effort $e = e_1$ est réalisé
- Un salaire de w_2^* si l'effort $e = e_2$ est réalisé

Pour une rémunération de w offerte par le principal, l'utilité de l'agent 1 est égale à $U_1 = w - \frac{\beta_1}{2} \times e^2$, où $\beta_1 = 1$ est un coefficient d'aversion à l'effort. Pour l'agent 2, l'utilité a la forme $U_2 = w - \frac{\beta_2}{2} \times e^2$ où $\beta_1 = 2$. L'utilité de réservation (le niveau minimal d'utilité pour l'agent accepte le contrat de travail est égale à 0 dans les deux cas.

1) **Le principal connaît le type de l'agent (information parfaite, optimum de premier rang)**

Le profit du principal est supposé être de la forme $\pi = e - w$ (on suppose que l'effort de l'agent, e, est directement traduit en profit brut du principal, auquel il faut soustraire la rémunération de l'agent.

a) Pour un coefficient d'aversion à l'effort β, déterminer le niveau d'effort qui maximise le profit du principal, en supposant que la contrainte de participation $U \geq 0$ est saturée

Réponse : comme $U = w - \frac{\beta}{2} \times e^2 = 0$, le profit du principal est égal à $e - \frac{\beta}{2} \times e^2$. Le niveau d'effort qui maximise le profit est obtenu en dérivant par rapport à e, ce qui donne $e^* = \frac{1}{\beta}$

b) Donner alors le salaire versé par le principal à l'agent

$$w^* = \frac{1}{2\beta}$$

c) Donner le profit du principal

$$\pi^* = e - w = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2\beta}$$

d) Calculer e_1^*, w_1^*, π_1^*

$$e_1^* = \frac{1}{\beta_1} = 1, w_1^* = \frac{1}{2}, \pi_1^* = \frac{1}{2}$$

e) Calculer e_2^*, w_2^*, π_2^*

$$e_2^* = \frac{1}{\beta_2} = \frac{1}{2}, w_2^* = \frac{1}{4}, \pi_2^* = \frac{1}{4}$$

2) **Hétérogénéité observée**

Le principal a affaire à 50% d'agents de type 1 et 50% d'agents de type 2. Il connaît les caractéristiques des agents et propose donc un contrat de type (e_1^*, w_1^*) aux agents de type 1 et (e_2^*, w_2^*) aux agents de type 2.

a) Écrire la forme du profit du principal :

$$\pi = \frac{e_1^* - w_1^*}{2} + \frac{e_2^* - w_2^*}{2}$$

b) Calculer le profit du principal

$$\pi = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

3) Hétérogénéité non observée

Le principal ne sait pas à quel agent il a à faire, mais juste leur proportion, égale à $\frac{1}{2}$ (hétérogénéité non observée ou antisélection). Il propose un menu de deux contrats (e_1, w_1) et (e_2, w_2). L'agent choisit le contrat.

a) Écrire l'inégalité qui doit être satisfaite pour l'agent de type 1, choisisse le contrat (e_1, w_1) et pas le contrat (e_2, w_2)

$$w_1 - \frac{\beta_1}{2} \times e_1^2 \geq w_2 - \frac{\beta_1}{2} \times e_2^2$$

b) Écrire l'inégalité qui doit être satisfaite pour l'agent de type 2, choisisse le contrat (e_2, w_2) et pas le contrat (e_1, w_1)

$$w_2 - \frac{\beta_2}{2} \times e_2^2 \geq w_1 - \frac{\beta_2}{2} \times e_1^2$$

c) Sachant que l'agent 1 a choisi le contrat (e_1, w_1), écrire la condition pour que ce contrat soit effectivement accepté (utilité de réservation positive ou nulle)

$$U_1 = w_1 - \frac{\beta_1}{2} \times e_1^2 \geq 0$$

d) Sachant que l'agent 2 a choisi le contrat (e_2, w_2), écrire la condition pour que ce contrat soit effectivement accepté (utilité de réservation positive ou nulle)

$$U_2 = w_2 - \frac{\beta_2}{2} \times e_2^2 \geq 0$$

e) On admettra par la suite que les contraintes (d) et (a) sont saturées (les inégalités au sens large deviennent des égalités ; on peut montrer qu'alors les contraintes (b) et (c) sont vérifiées. Écrire le profit du principal $\pi(e_1, e_2)$ en fonction de e_1 et de e_2.

Remarque (a) et (d) impliquent (b) et (c)

$$w_1 - \frac{\beta_1}{2} \times e_1^2 \geq w_2 - \frac{\beta_1}{2} \times e_2^2 \geq w_2 - \frac{\beta_2}{2} \times e_2^2 = 0$$

Le profit du principal est :

$$\pi = \frac{e_1 - w_1}{2} + \frac{e_2 - w_2}{2}$$

Comme $U_2 = w_2 - \frac{\beta_2}{2} \times e_2^2 = 0$, $w_2 = \frac{\beta_2}{2} \times e_2^2$, don $e_2 - w_2 = e_2 - \frac{\beta_2}{2} \times e_2^2$

En utilisant (a), $w_1 - \frac{\beta_1}{2} \times e_1^2 = w_2 - \frac{\beta_1}{2} \times e_2^2$ et en utilisant l'expression de w_2, on obtient $w_1 = \frac{\beta_1}{2} \times e_1^2 + \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right) \times e_2^2$. $\left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right) \times e_2^2$ est une rente informationnelle (un surplus de salaire par rapport à la situation d'information parfaite) qu'il faut verser à l'agent de type 1 (bon agent du point de vue du principal) pour qu'il choisisse le contrat (e_1, w_1) et ne se fasse passer pour un « mauvais » (agent de type 2)/

Le profit du principal est donc $\pi(e_1, e_2) = \frac{1}{2} \times \left(e_1 - \left(\frac{\beta_1}{2} \times e_1^2 + \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right) \times e_2^2\right) + e_2 - \frac{\beta_2}{2} \times e_2^2\right)$

f) Exprimer les niveaux d'effort e_1 et e_2 en fonction de β_1 et de β_2 à utilisant les conditions du premier ordre (nullité des dérivées du profit du principal par rapport à e_1 et e_2

En dérivant par rapport à e_1, on obtient $e_1 = \frac{1}{\beta_1}$ (soit le même résultat qu'en information parfaite)

En dérivant $\pi(e_1, e_2)$ par rapport à e_2, on obtient $e_2 = \frac{1}{2\beta_2 - \beta_1}$

g) Donner les valeurs numériques de e_1 et de e_2

$e_1 = 1$, $e_2 = \frac{1}{3}$ (l'effort de l'agent 2 est plus faible qu'en information parfaite)

h) Donner les valeurs numériques de w_1 et w_2

$$w_1 = \frac{\beta_1}{2} \times e_1^2 + \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right) \times e_2^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$w_2 - \frac{\beta_2}{2} \times e_2^2 = \frac{2}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

i) Donner la valeur numérique de l'utilité de l'agent 1

$$U_1 = w_1 - \frac{\beta_1}{2} \times e_1^2 = \frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

j) Donner les valeurs numériques des profits du principal (profit unitaire pour les agents de type 1 et 2 et profit total)

Avec les agents de type 1, le profit unitaire du principal est $e_1 - w_1 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

Avec les agents de type 2, le profit unitaire du principal est $e_2 - w_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

Le profit du principal est $\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{3}$

k) Comparer les résultats avec la situation d'information parfaite.

En termes de profit unitaire du principal, celui réalisé avec les agents de type 1 et de $\frac{4}{9}$ contre $\frac{1}{2} = \frac{4{,}5}{9}$ en information parfaite. Pour les agents de type 2, le profit unitaire est de $\frac{2}{9}$ contre $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$. Le profit unitaire diminue aussi bien pour les agents de type 1 que de type 2.

3) Deux périodes

On se place maintenant dans un contexte à deux périodes, l'agent conservant la même aversion à l'effort d'une période à l'autre. Le profit de chaque période est toujours $\pi = e - w$. Il n'y a pas d'actualisation, principal et agent maximisent la somme de leurs gains (ou de leur utilités) sur les deux périodes.

Le principal envisage plusieurs systèmes de rémunération :

Système de rémunération avec engagement du principal : Le principal s'engage à proposer deux fois de suite le même système de rémunération soit le système optimal de second rang dans le cas d'une seule période deux contrats (e_1, w_1) et (e_2, w_2).

Les agents se comportent alors de manière identique sur les deux périodes conformément à la solution obtenue dans la question 2)

a) Montrer que le principal a intérêt à revenir sur son engagement initial, car le choix de contrat à la première date lui révèle le type de l'agent et de proposer le contrat correspondant à la situation d'information parfaite à la seconde période.

En proposant le contrat $e_1^* = \frac{1}{\beta_1} = 1, w_1^* = \frac{1}{2}$ aux agents de type 1 à la seconde période, le principal réalise un profit unitaire de $\pi_1^* = \frac{1}{2}$ contre $\frac{4}{9}$ en ne revenant pas sur son engagement ; avec les agents de type 2, $\pi_2^* = \frac{1}{4}$ contre $\frac{2}{9}$ si le principal ne revient pas sur son engagement (voir (k) de la question précédente. Il est donc optimal pour le principal de revenir sur son engagement.

b) Anticipation de l'agent

On anticipe que le principal va revenir sur son engagement à la seconde période, le menu de contrats proposé est alors (e_1, w_1) à la première période suivi de (e_1^*, w_1^*) à la seconde période ou bien de (e_2, w_2) à la première période, suivi de (e_2^*, w_2^*) à la seconde période.

a. Calculer l'utilité de l'agent 1 s'il choisit le contrat (e_1, w_1) suivi de (e_1^*, w_1^*)

L'utilité de l'agent 1 est de $w_1 - \frac{e_1^2}{2} = \frac{1}{18}$ à la première période et de zéro à la seconde période.

b. Calculer l'utilité de l'agent 1 s'il choisit le contrat (e_2, w_2) suivi de (e_2^*, w_2^*)

L'utilité de l'agent 1 à la première période est égale à $w_2 - \frac{e_2^2}{2} = \frac{1}{9} - \frac{1}{18}$ (c'est l'utilité correspondant à la rente informationnelle, l'agent 1 est indifférent

L'utilité de l'agent 1 à la deuxième période est égale à $w_2^* - \frac{(e_2^*)^2}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

c. Quelle est la décision optimale de l'agent 1 ?

L'agent 1 choisit le contrat (e_2, w_2) suivi de (e_2^*, w_2^*), c'est-à-dire qu'il se fait passer pour un agent de type 2.

d. Calculer l'utilité de l'agent 2 s'il choisit le contrat (e_1, w_1) suivi de (e_1^*, w_1^*)

L'utilité de l'agent 1 est de $w_1 - e_1^2 = \frac{5}{9} - 1 = -\frac{4}{9}$ à la première période

L'utilité de l'agent 1 est de $w_1^* - (e_1^*)^2 = \frac{1}{2} - 1$ à la seconde période.

Elle est donc négative à chaque période.

e. Calculer l'utilité de l'agent 2 s'il choisit le contrat (e_2, w_2) suivi de (e_2^*, w_2^*)

Comme la contrainte de participation de l'agent 2 est saturée s'il choisit le contrat (e_2, w_2), l'utilité de l'agent 2 est nulle à la première période. Elle est également nulle à la seconde période.

f. Quelle est la décision optimale de l'agent 2

L'agent 2 choisit (e_2, w_2) suivi de (e_2^*, w_2^*)

g. Que peut-on conclure ?

Les agents 1 et 2 choisissent le contrat (e_2, w_2) à la première période. L'équilibre n'est plus séparateur. Le principal ne peut pas proposer l'optimum de premier rang à la période 2, mais seulement l'optimum de second rang (information imparfaite).

Il peut donc proposer le contrat suivant (e_2, w_2) pour tout le monde à la période 1, suivi du choix de contrat (e_1, w_1) ou (e_2, w_2) à la seconde période.

Système avec pooling à la première période et équilibre séparateur à la seconde période : le principal propose un contrat unique (e, w) à la première période, suivi du contrat du choix de contrat (e_1, w_1) ou (e_2, w_2) à la seconde période.

c) Le principal propose un contrat unique (e, w) à la première période, suivi du contrat du choix de contrat (e_1, w_1) ou (e_2, w_2) à la seconde période. Chercher le contrat optimal (e, w).

Les contraintes de participations sont $w - \frac{e^2}{2} \geq 0$ et $w - e^2 \geq 0$. La première contrainte est induite par la seconde qui est saturée. On a donc $w - e^2$.

Le profit du principal en première période est $e - w = e - e^2$.

Ceci donne l'effort $e = \frac{1}{2}$ et le salaire $w = \frac{1}{4}$

d) Comparer les profits du principal dans le système avec engagement et dans les autres deux systèmes de rémunération considérés.

Exercice 2 : actifs contingents, options « path-dependent » et complétude des marchés

On considère un arbre binomial recombinant avec avec deux périodes. A titre d'exemple, le prix du sous-jacent est de 100 € à la date initiale, il passe à 99 € en cas de baisse (b_1) et à 101 € en cas de hausse (h_1) à la première période. A la seconde période, si le prix monte (h_2), il augmente d'un euro et si le prix baisse (h_2), il diminue d'un euro. Les prix possibles du sous-jacent à la date 2, sont alors de 98, 100 et 102 euros.

On suppose qu'il existe des actifs contingents pour tous les deux états de la date 1 (soit deux états) et de la date 2 (soit trois états).

Si l'on s'intéresse à des options dont le paiement dépend de la trajectoire du sous-jacent (path-dependent), l'espace des états est celui des trajectoires. Par exemple (h_1, b_2) est l'état correspondant à une hausse suivie d'une baisse.

1) Identifier les états de la nature.

Il y a quatre états de la nature correspondant aux 4 trajectoires : $(b_1, b_2), (b_1, h_2), (h_1, b_2), (h_1, h_2)$

2) Représenter les vecteurs de paiement des cinq actifs contingents aux états de la date 1 et aux états de la date 2. Ceci pourra se faire sous la forme d'une matrice, où chaque ligne correspond à un type de trajectoire et chaque colonne représente le vecteur de paiement associé à l'un des 5 actifs précédents. Les paiements n'ont pas lieu à la même date, on supposera que les taux d'intérêt sans risque entre les dates 0 et 1 et entre les dates 1 et 2 sont nuls. Un paiement à la date 1 est donc équivalent à un paiement à la date 2.

Il y a trois niveaux de prix pour l'actif contingent à la date 2 (il est recombinant), celui correspondant à deux baisses consécutives, celui correspondant à une baisse suivie d'une hausse (ou une hausse suivie d'une baisse), celui correspondant à deux hausses consécutives. On les note ici, respectivement, $2_1, 2_2, 2_3$. De même, on note 1_1 et 1_2 les niveaux de prix à la date 1 correspondant respectivement à une baisse et à une hausse du prix du sous-jacent. On assimile les notations des prix et des actifs contingents à une date : 2_2 représente l'actif qui verse 1 à la date 2.

	$\mathbf{1_1}$	$\mathbf{1_2}$	$\mathbf{2_1}$	$\mathbf{2_2}$	$\mathbf{2_3}$
$(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2})$	1	0	1	0	0
$(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{h_2})$	1	0	0	1	0
$(\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{b_2})$	0	1	0	1	0
$(\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2})$	0	1	0	0	1

3) Identifier parmi les 5 actifs précédents deux actifs contingents à une trajectoire

2_1 est contingent à la trajectoire (b_1, b_2). 2_3 est contingent à la trajectoire (h_1, h_2).

4) Montrer comment on peut dupliquer le paiement de l'actif contingent à l'état (h_1, b_2).

$2_2 + 2_1 - 1_1$ reproduit le paiement de l'actif contingent à l'état (h_1, b_2).

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5) Montrer alors comment on peut dupliquer le paiement de l'actif contingent à l'état (b_1, h_2).

$1_1 - 2_1$ reproduit le paiement de l'actif contingent à l'état (b_1, h_2).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6) On rajoute une troisième période : les prix possibles à cette troisième période sont donc 97, 99, 101 et 103 euros. On suppose qu'outre les actifs contingents aux trajectoires sur deux périodes, on peut également négocier les quatre actifs contingents à la date 3. Une trajectoire

sur trois périodes est par exemple (b_1, h_2, b_3) qui signifie une baisse, suivie d'une hausse, suivie d'une baisse. Identifier les trajectoires sur trois périodes.

Il y a maintenant $2^3 = 8$ trajectoires :
$(b_1, b_2, b_3), (b_1, b_2, h_3), (b_1, h_2, b_3), (b_1, h_2, h_3), (h_1, b_2, b_3), (h_1, b_2, h_3), (h_1, h_2, b_3), (h_1, h_2, h_3)$.

7) Représenter sous la forme d'une matrice les paiements associés aux 4 actifs contingents à la troisième période et aux quatre actifs contingents aux trajectoires sur deux périodes étudiés en 3), 4) et 5). Chaque ligne de la matrice correspond à une trajectoire sur trois périodes, chaque colonne, un des 8 actifs.

	(b_1, b_2)	(b_1, h_2)	(h_1, b_2)	(h_1, h_2)	3_1	3_2	3_3	3_4
(b_1, b_2, b_3)	1	0	0	0	1	0	0	0
(b_1, b_2, h_3)	1	0	0	0	0	1	0	0
(b_1, h_2, b_3)	0	1	0	0	0	1	0	0
(b_1, h_2, h_3)	0	1	0	0	0	0	1	0
(h_1, b_2, b_3)	0	0	1	0	0	1	0	0
(h_1, b_2, h_3)	0	0	1	0	0	0	1	0
(h_1, h_2, b_3)	0	0	0	1	0	0	1	0
(h_1, h_2, h_3)	0	0	0	1	0	0	0	1

8) *Dupliquer les (8) actifs contingents à chaque trajectoire sur trois périodes à partir des 8 actifs précédents. Commencer par ce qui vous paraît le plus simple.*

On remarque que 3_1 est contingent à la trajectoire (b_1, b_2, b_3), 3_4 est contingent à la trajectoire (h_1, h_2, h_3).

$(h_1, h_2) - 3_4$ duplique l'actif contingent à la trajectoire (h_1, h_2, b_3).

$(b_1, b_2) - 3_1$ duplique l'actif contingent à la trajectoire (b_1, b_2, h_3)

Ceci correspond aux deux premières et aux deux dernières lignes du tableau.

Pour les autres lignes, …

9) On suppose que l'on rajoute une quatrième période. On a alors des prix possibles égaux à 96, 98, 100, 102, 104 à la quatrième période. On suppose que les actifs contingents à la quatrième période sont traités dans le marché ainsi que les actifs contingents à des trajectoires sur les trois premières périodes.
   a. Compter le nombre de trajectoires et donc d'actifs contingents à des trajectoires sur 4 périodes

Il y a $2^4 = 16$ états de la nature (trajectoires)

   b. De combien d'actifs dispose-t-on (actifs contingents à la quatrième période plus actifs contingents à des trajectoires sur les trois premières périodes) ?

On dispose de 8 actifs.

   c. Quelle est la différence avec les problèmes à deux et trois périodes ?

On ne pourra pas dupliquer les actifs contingents aux 16 trajectoires avec 8 actifs. Une question (non posée dans l'énoncé) serait de trouver l'ensemble des actifs duplicables et l'ensemble des actifs non duplicables.