Magistère de Finance première année

Examen du 27 février 2020 – éléments de corrigé
Théorie économique et politique monétaire : Durée 1 h30

Exercice 1 : assurance contre le risque de deux défauts.

On considère deux entreprises endettées. Les actifs suivent des distributions log-normales. On pourra utiliser les notations du cours.

a) Calculer les probabilités de défaut marginales.

Les probabilités de défaut marginales des entreprises $\Phi\left(\frac{\ln\left(D_{0,a}(1+i_a)/A_{0,a}\right)-\mu_a}{\sigma_a}\right)$ et $\Phi\left(\frac{\ln\left(D_{0,b}(1+i_b)/A_{0,b}\right)-\mu_b}{\sigma_b}\right)$ où $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$

b) Relier ces probabilités de défaut à l'espérance d'un paiement que l'on déterminera (et qui correspond en pratique à la jambe de défaut d'un fixed recovery credit default swap).

Considérons un paiement contingent au défaut de l'entreprise a (respectivement b). La probabilité de défaut est l'espérance de ce paiement.

c) On suppose maintenant que les deux actifs sont corrélés via un facteur commun. Ecrire la probabilité de défaut jointe, sous la forme d'une espérance, comme indiqué dans le cours. Il n'est pas nécessaire de donner toutes les étapes intermédiaires du calcul.

$$E\left[\Phi\left(\frac{s_a-\sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right)\Phi\left(\frac{s_b-\sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \Phi\left(\frac{s_a-\sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right)\Phi\left(\frac{s_b-\sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right)e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Exercice 2 : Actifs contingents et puts

On se place dans le cas d'un espace d'état discret, les états correspondant aux valeurs futures entières d'un actif sous-jacent : $0, \dots, S$. On suppose qu'il existe un actif sans risque de taux d'intérêt nul. Des options de vente sur l'actif sous-jacent, de prix d'exercice $1, \dots, S$ sont également disponibles.

a) Montrer que l'on peut représenter la matrice des paiements associés aux puts et à l'actif sans risque sous une forme triangulaire supérieure.

A titre d'exemple, on considère $S = 3$. Les trois premières colonnes sont associées à des puts de strike 1,2,3 et la dernière colonne à l'actif sans risque.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle inversible ?

Tous les termes diagonaux sont de la matrice triangulaire supérieure sont non nuls, elle est donc inversible.

Qu'en déduire sur la duplication d'un paiement quelconque ?

La matrice des paiements étant inversible, tout paiement peut être dupliqué par une combinaison linéaire de puts et d'actif sans risque.

b) On considère un actif contingent à l'état $s \in \{1, \dots, S-1\}$. Montrer comment cet actif peut être dupliqué à partir de puts.

Il suffit d'acheter un put de strike $s+1$, vendre deux puts de strike s et acheter un put de strike $s-1$ pour dupliquer le paiement de l'actif contingent à l'état s.

c) Comment l'actif contingent à l'état $s=0$ peut-il être répliqué à partir de puts ?

Il suffit d'acheter un put de strike 1.

d) Comment l'actif sous-jacent peut-il être dupliqué à partir de l'actif sans risque et de puts ?

Il suffit d'acheter S unités d'actif sans risque et de vendre une unité de put de strike S.

e) Comment l'actif contingent à l'état S peut-il être dupliqué ? On pourra utiliser la relation de parité call-put.

L'actif contingent à l'état S est un call de strike $S-1$. La relation de parité call put implique que ce call peut être dupliqué par l'achat d'un call de put de strike $S-1$, l'achat de l'actif sous-jacent et la vente de $S-1$ unités de l'actif sans risque. En utilisant le résultat sur la duplication de l'actif sous-jacent, le portefeuille de duplication de l'actif contingent à l'état S consiste en la vente d'un put de strike S, l'achat d'un put de strike $S-1$ et l'achat d'une unité d'actif sans risque.

Exercice 3 : options et risque de défaut dans le modèle de Cox Ross Rubinstein

On se place dans le cadre du modèle de Cox Ross et Rubinstein. En partant d'un prix initial A_0, les prix peuvent être multipliés à chaque étape par $u > 1$ ou $d < 1$. On note r_f le taux sans risque entre deux périodes. Au bout de $S \in \mathbb{N}$ étapes, il y a $S+1$ valeurs possibles pour le prix à la date n, $\tilde{A}_S$: $A_0 d^S, A_0 u d^{S-1}, A_0 u^2 d^{S-2}, \dots, A_0 u^S$. On note p probabilité de hausse, $q = 1-p$ probabilité de baisse.

a) Déterminer p en fonction de u, d et r_f

$pu + (1-p)d = 1 + r_f \Rightarrow p = \frac{1+r_f-d}{u-d}$, avec les restrictions habituelles sur les paramètres $d < 1 + r_f < u$, ce qui implique que $0 < p < 1$ et l'absence d'opportunités d'arbitrage entre actif risqué et actif sans risque.

b) Quelle est la probabilité (risque-neutre) d'être dans l'état $s \in \{0, \dots, S\}$?

Il faut qu'il y s hausses (et donc $S-s$ baisses), le prix est alors $A_0 u^s d^{S-s}$. La loi de probabilité des états est une loi binomiale. La probabilité d'être dans l'état $s \in \{0, \dots, S\}$ est $\tilde{q}_s = \binom{S}{s} p^s q^{S-s}$ où $\binom{S}{s} = C_S^s = \frac{S!}{s!(S-s)!}$.

c) Quelle est la forme de la fonction de survie $K \to S(K) = Q\left(\tilde{A}_S > K\right)$?

$A_S > K \Leftrightarrow A_0 u^s d^{S-s} > K \Leftrightarrow s > \frac{\ln\left(K/\left(A_0 d^S\right)\right)}{\ln(u/d)}$. Notons $s(K) = \left[\frac{\ln\left(K/\left(A_0 d^S\right)\right)}{\ln(u/d)}\right]$ où $[x]$ est la partie entière de x. $(K) = Q\left(\tilde{A}_S > K\right) = \sum_{s=s(K)}^{S} \tilde{q}_s$.

d) On va s'intéresser à la fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ où $C(K)$ est la prime du call de strike K. On suppose que le prix d'exercice n'est pas égal à l'une des valeurs $A_0 d^S, A_0 u d^{S-1}, A_0 u^2 d^{S-2}, \dots, A_0 u^S$. Montrer que $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ est dérivable et relier sa valeur à la fonction de survie aux points $A_0 d^S, A_0 u d^{S-1}, A_0 u^2 d^{S-2}, \dots, A_0 u^S$.

On reprend le raisonnement présenté pour les mines d'or (article de Myers). La prime de l'option d'achat de prix d'exercice K s'écrit comme $\frac{1}{1+r_f} \times \sum_{s=s(K)}^{S} \tilde{q}_s\,(s-K)$. La fonction $K \to s(K) = \left[\frac{\ln\left(K/\left(A_0 d^S\right)\right)}{\ln(u/d)}\right]$ est croissante (partie entière d'une fonction croissante). Les points de discontinuité correspondent aux valeurs entières de $\frac{\ln\left(K/\left(A_0 d^S\right)\right)}{\ln(u/d)}$. Comme $s = \frac{\ln\left(K/\left(A_0 d^S\right)\right)}{\ln(u/d)} \Leftrightarrow A_0 u^s d^{S-s} = K$, les points de discontinuité inférieurs ou égaux à S correspondent aux valeurs $A_0 d^S, A_0 u d^{S-1}, A_0 u^2 d^{S-2}, \dots, A_0 u^S$. Entre deux points de discontinuité, $s(K)$ est constant et la fonction $K \to \frac{1}{1+r_f} \sum_{s=s(K)}^{S} \tilde{q}_s\,(s-K)$ est affine (donc dérivable).

La dérivée par rapport à K est $-\frac{1}{1+r_f} \sum_{s=s(K)}^{S} \tilde{q}_s = -\frac{S(K)}{1+r_f}$.

e) On suppose maintenant que le prix d'exercice est égal à l'une des valeurs $A_0 d^S, A_0 u d^{S-1}, A_0 u^2 d^{S-2}, \dots, A_0 u^S$. Montrer que $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ est dérivable à gauche et à droite, relier ces dérivées à la fonction de survie.

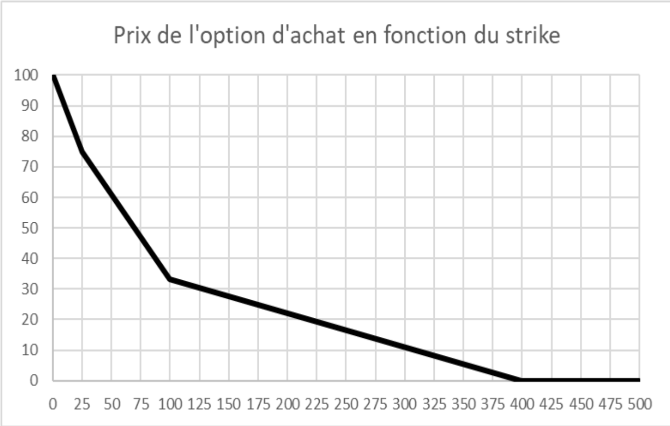
La dérivée à gauche existe et est égale à $-\frac{Q(A_1 \geq K)}{1+r_f}$. La dérivée à droite existe et est égale à $-\frac{Q(A_1 > K)}{1+r_f}$ (voir transparents du cours).

f) On prend $S = 2$. $r_f = 0$, $A_0 = 100$, $u = 2$, $d = 0{,}5$. Calculer p, q puis les probabilités risques-neutre correspondant aux trois états dont on donnera les valeurs.

$p = 1/3, q = 2/3$.

$\tilde{q}_0 = 4/9, \tilde{q}_1 = 4/9, \tilde{q}_2 = 1/9$, correspondant aux états où le prix vaut 25, 100, 400.

g) Calculer les primes d'options pour les prix d'exercice critiques et représenter graphiquement la fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$.



$C(0) = 100, C(25) = 75, C(100) = 33.3, C(400) = 0$

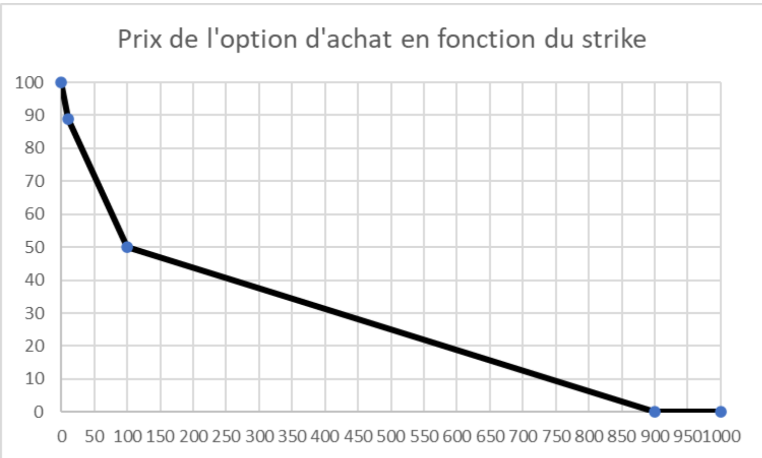
h) On considère toujours trois états, un taux sans risque nul et la même valeur initiale de l'actif : $S = 2, r_f = 0. A_0 = 100$. On modifie u et d : $u = 3, d = \frac{1}{3}$ (cela correspond à une augmentation de la dispersion des valeurs de l'actif sous-jacent autour de sa moyenne donc du risque). Calculer p, q puis les probabilités risques-neutre correspondant aux trois états dont on donnera les valeurs.

$p = 1/4, q = 3/4.$

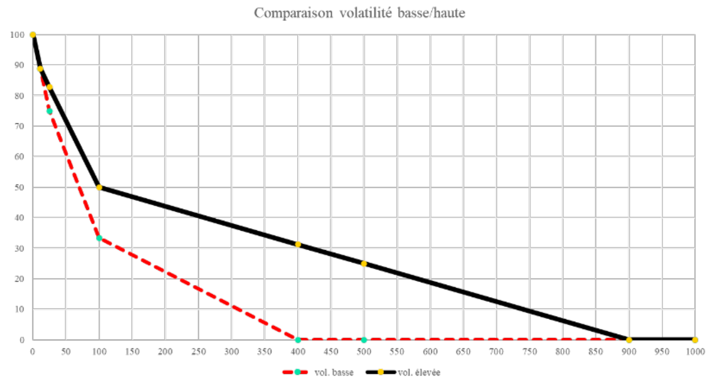
$\tilde{q}_0 = 9/16, \tilde{q}_1 = 6/16 = 3/8, \tilde{q}_2 = 1/16$, correspondant aux états où le prix vaut 11,1, 100 et 900.

i) Calculer les primes d'options pour les prix d'exercice critiques et représenter graphiquement la fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$.

$C(0) = 100, C(11.1) = 88{,}9, C(100) = 50, C(900) = 0.$



j) Comparer avec la fonction précédente.



Les prix des calls augmentent avec la volatilité.

k) L'entreprise est endettée, le montant à rembourser est égal à 50. Calculer la prime de l'assurance contre le risque de défaut dans les deux cas (on pourra utiliser la relation de parité call – put).

La prime de l'assurance contre le risque de défaut est égale à la prime d'un put de strike 50. La relation de parité call-put (avec un taux d'intérêt nul) implique $P(50) = C(50) + 50 - 100 = C(50) - 50$. Dans le premier cas (volatilité faible), la prime d'assurance est égale à 11,1 euros, dans le second (volatilité élevée), la prime est égale à 21,88 euros.

Exercice 4 : duplication statique de paiement à partir d'options d'achat

Soit deux fonctions réelles f et g deux fois continûment dérivables telles que pour $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = g''(x)$. On rappelle qu'alors $f = g$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(a) + \int_a^x f''(x)dx = g'(a) + \int_a^x g''(x)dx = f'(x)$ et $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)dx = g(a) + \int_a^x g'(x)dx = g(x)$.

a) Utiliser la propriété précédente pour montrer l'égalité suivante :

$$\forall x, a \in \mathbb{R}, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_{-\infty}^{a} (K-x)^+ f''(K)dK + \int_a^{\infty} (x-K)^+ f''(K)dK.$$

On notera g la fonction définie par : $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_{-\infty}^{a} (K-x)^+ f''(K)dK + \int_{-\infty}^{a} (x-K)^+ f''(K)dK$. On vérifie que $g(a) = f(a)$.

$g'(x) = f'(a) - \int_{-\infty}^{a} 1_{x \le K} f''(K)dK + \int_a^{\infty} 1_{x>K} f''(K)dK = f'(a) - \int_{\min(x,a)}^{a} f''(K)dK + \int_a^{\max(x,a)} f''(K)dK$.

On remarque que $g'(a) = f'(a)$. Dérivons $g'(x)$. $g''(x) = f''(x)1_{x<a} + f''(x)1_{x>a}$ pour $x \neq a$. Les limites à gauche et à droite de $\frac{g'(x)-g'(a)}{x-a}$ sont égales à $f''(a)$, ce qui montre que g' est dérivable en a, de dérivée égale à $f''(a)$. On a donc $g''(x) = f''(x)$, ce qui termine la démonstration.

b) On considère un profil de paiement f, payé à une date future donnée. Le détenteur de ce profil de paiement reçoit $f(A_1)$ à cette date future où A_1 est le prix de l'actif sous-jacent. A_0 est le prix de l'actif sous-jacent à la date courante. On supposera pour simplifier que le taux d'intérêt sans risque entre la date courante et la date future est nul. On notera Q la probabilité risque neutre. Ecrire la prime d'une option d'achat (respectivement d'une option de vente) de prix d'exercice K sous la forme d'une espérance. On notera $C(K)$ la prime d'une option d'achat de prix d'exercice K et $P(K)$, la prime d'une option de vente de prix d'exercice K et de même date d'exercice que l'option d'achat.

$C(K) = E^Q[(A_1 - K)^+], P(K) = E^Q[(K - A_1)^+]$

c) On considère que les conditions sont remplies pour intervertir l'opérateur d'espérance sous probabilité risque-neutre et les intégrales précédentes. Ecrire la prime associée au profil de paiement f.

On part de l'égalité démontrée en a) :

$f(A_1) = f(a) + f'(a)(A_1 - a) + \int_{-\infty}^{a}(K - A_1)^+ f''(K)dK + \int_{a}^{\infty}(A_1 - K)^+ f''(K)dK.$ On peut donc dupliquer un profil de paiement arbitraire par un portefeuille comprenant $f(a) - af'(a)$ unités d'actif sans risque, $f'(a)$ unités d'actifs sous-jacent et un continuum d'options de vente et d'achat. On choisit souvent pour a, le prix à terme de l'actif sous-jacent (ici A_0). En prenant les espérances puis en intervertissant les espérances sous Q et les intégrales par rapport à K, on obtient :

$$E^Q[f(A_1)] = f(a) + f'(a)(A_0 - a) + \int_{-\infty}^{a} P(K)f''(K)dK + \int_{a}^{\infty} C(K)f''(K)dK$$

Ainsi, il est possible de déterminer la prime associée à un profil de paiement arbitraire, si l'on connait les primes des calls et des puts pour tous les prix d'exercice. Cette relation est due à Peter Carr et Dilip Madan (voir par exemple https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=4&ved=2ahUKEwie5LOQ2p3oAhUKExoKHV4lBhgQFjADegQIAhAB&url=https%3A%2F%2Fwww.frouah.com%2Ffinance%2520notes%2FPayoff%2520function%2520decomposition.pdf&usg=AOvVaw3L68ygizP21MdTqh73ZZLb)

Exercice 5 : augmentation du risque dans le cas gaussien

a) On considère deux variables aléatoires gaussiennes, X_1, X_2 de moyenne μ et d'écarts types, respectivement σ_1 et σ_2. On suppose $\sigma_2 > \sigma_1$ On rappelle que toute combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes indépendantes est une variable gaussienne. Montrer que l'on peut écrire $X_2 = X_1 + \varepsilon$ (l'égalité précédente est en loi), où ε est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle, indépendante de X_1.

Considérons trois variables gaussiennes indépendantes centrées réduites, U, U_1. On définit ε, Y_2 par $\varepsilon = \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}U$. $Y_2 = \sigma_1 U_1 + \varepsilon$ est une variable aléatoire gaussienne, de moyenne nulle et de variance σ_2^2 (donc d'écart-type σ_2), donc de même loi que X_2. $\sigma_1 U_1$ est de même loi que X_1 et ε est indépendant de $\sigma_1 U_1$.

b) On considère une fonction d'utilité concave et continument dérivable u. On considère une variable aléatoire gaussienne de moyenne μ et d'écart type σ. Ecrire l'espérance de l'utilité de X, comme une intégrale par rapport à la densité d'une variable gaussienne centrée réduite.

On peut écrire $X = \mu + \sigma Z$ où Z est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. $E[u(X)] = E[u(\mu + \sigma Z)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\mu + \sigma x) e^{-x^2/2} dx.$

c) Utiliser les propriétés de symétrie des variables gaussiennes centrées pour transformer l'intégrale sur $\mathbb{R}$ en la somme de deux intégrales sur $\mathbb{R}^+$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\mu + \sigma x) e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{0} u(\mu + \sigma x) e^{-x^2/2} dx + \int_{0}^{\infty} u(\mu + \sigma x) e^{-x^2/2} dx$. Considérons l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} u(\mu + \sigma x) e^{-x^2/2} dx$ et effectuons le changement de variable $x \to -x$. $\int_{-\infty}^{0} u(\mu + \sigma x) e^{-x^2/2} dx = \int_{0}^{\infty} u(\mu - \sigma x) e^{-x^2/2} dx.$

Au total, $E[u(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{0}^{\infty} u(\mu + \sigma x) e^{-x^2/2} dx + \int_{0}^{\infty} u(\mu - \sigma x) e^{-x^2/2} dx \right)$ ou encore :

$$E[u(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{0}^{\infty} \big(u(\mu + \sigma x) + u(\mu - \sigma x)\big) e^{-x^2/2} dx \right)$$

d) Dériver par rapport à σ (on supposera que l'on peut intervertir intégration et dérivation) et utiliser la décroissance de la dérivée d'une fonction concave pour conclure sur le signe de la dérivée de l'espérance d'utilité par rapport à l'écart-type.

$\frac{dE[u(X)]}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{0}^{\infty} \big(u'(\mu + \sigma x) - u'(\mu - \sigma x)\big) x e^{-x^2/2} dx \right)$. Comme $x > 0$, $\mu + \sigma x > \mu - \sigma x$ et $u'(\mu + \sigma x) - u'^{(\mu - \sigma x)} < 0$, par la décroissance de l'utilité marginale. On obtient $\frac{dE[u(X)]}{d\sigma} < 0$. L'espérance d'utilité de la richesse décroit avec l'écart-type (le « risque ») quand on considère des richesses gaussiennes, de même moyenne. On remarque que l'on n'a utilisé que la concavité de la fonction d'utilité, pas la croissance.