

Contrôle de connaissances  
**Risques de marché / M2 FMGR**  
 18 Avril 2025 – durée 1h30

**Exercice 1 : VaR et scénarios**

1. On considère trois scénarios équiprobables et les valeurs de la perte  $X$  pour ces trois scénarios, notés 1, 2, 3.

Scénarios	1	2	3
$X$	1	3	5

- Calculer  $VaR_{50\%}(X)$
  - Calculer  $VaR_{90\%}(X)$
  - Tracer la fonction de répartition de  $X$ ,  $F_X$
  - Tracer la fonction  $\alpha \rightarrow VaR_\alpha(X)$
2. On introduit une seconde perte  $Y$

Scénarios	1	2	3
$X$	1	3	5
$Y$	2	4	6

- Montrer que  $F_Y \leq F_X$
  - Montrer que  $VaR_\alpha(Y) \geq VaR_\alpha(X)$  pour tout  $\alpha \in [0,1]$ .
  - Peut-on associer des scénarios à  $VaR_{50\%}(X)$ ,  $VaR_{50\%}(Y)$ ,  $VaR_{50\%}(X + Y)$  ?
  - Calculer  $VaR_{50\%}(X + Y) - VaR_{50\%}(X) - VaR_{50\%}(Y)$
  - Calculer  $VaR_\alpha(X + Y) - VaR_\alpha(X) - VaR_\alpha(Y)$  en fonction de  $\alpha$
3. On considère la perte  $Y^*$

Scénarios	1	2	3
$X$	1	3	5
$Y^*$	6	4	2

- Montrer que  $Y$  et  $Y^*$  sont de même loi.
  - Est-ce que les VaR sont égales ?
  - Calculer  $VaR_{90\%}(X + Y^*)$  et comparer avec  $VaR_{90\%}(X) + VaR_{90\%}(Y^*)$
  - Calculer  $VaR_{20\%}(X + Y^*)$  et comparer avec  $VaR_{20\%}(X) + VaR_{20\%}(Y^*)$
4. On considère la perte  $Z$

Scénarios	1	2	3
$X$	1	3	5
$Z$	2	5	6

- Quelle est la perte « worst case » pour  $X$ , pour  $Z$ , pour  $X + Z$  ?
- A quels scénarios sont associés les pertes précédentes ?

On considère également la perte  $Z^*$

Scénarios	1	2	3
$X$	1	3	5
$Z^*$	6	5	2

- c. Montrer que  $Z$  et  $Z^*$  sont de même loi.
- d. Quelle est la perte « worst case » pour  $X$ , pour  $Z^*$ , pour  $X + Z^*$  ?
- e. A quels scénarios sont associés les pertes précédentes ?

**Exercice 2 : VaR et ES (méthode historique)**

- 1. Donner l'expression de  $VaR_{99\%}(X)$  pour la méthode historique avec une période de 252 jours.
- 2. De même pour  $ES_{97,5}(X)$  (méthode historique, période de 252 jours).

**Exercice 3 : Comonotone additivité de la VaR**

- 1. Montrer que la VaR à 99% est comonotone additive dans le cas de la méthode historique (période de 252 jours).
- 2. De même dans le cas général (on pourra supposer les fonctions de répartition inversibles)

**Exercice 4 : Invariance en loi**

- 1. Donner un exemple de mesure de risque non invariante en loi
- 2. En déduire qu'une mesure de risque non.invariante.en.loi peut être croissante quand les pertes augmentent pour chaque scénario, sans qu'elle n'augmente quand le risque augmente au sens de l'ordre stochastique usuel.

**Exercice 5 : VaR gaussienne**

- 1. Donner l'expression de  $VaR_{\alpha}(X)$  quand  $X$  suit une distribution gaussienne de moyenne nulle.
- 2. Et pour  $\alpha = 99\%$  ?
- 3. On considère la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 1 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 & 0.3 & 0.3 & 0.15 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 1 & 0.3 & 0.15 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 1 & 0.15 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner la condition vue en cours pour que cette matrice soit effectivement une matrice de corrélation.

**Exercice 6 (sous-additivité) :** montrer que l'écart-type des pertes est une mesure de risque sous-additive.

**Exercice 7 (VWHS) :** on considère des scénarios équiprobables, les pertes et les écart-types des pertes pour les différents scénarios.

Scénarios	1	2	3
$X$	10	30	50
Écart-type	5	3	10

Calculer la VaR à 90% selon la méthode historique filtrée par la volatilité.