Contrôle de connaissances

Risques de marché / M2 FMGR

18 Avril 2025 – durée 1h30

Exercice 1 : VaR et scénarios

1. On considère trois scénarios équiprobables et les valeurs de la perte X pour ces trois scénarios, notés 1, 2, 3.

Scénarios	**1**	**2**	**3**
X	**1**	**3**	**5**

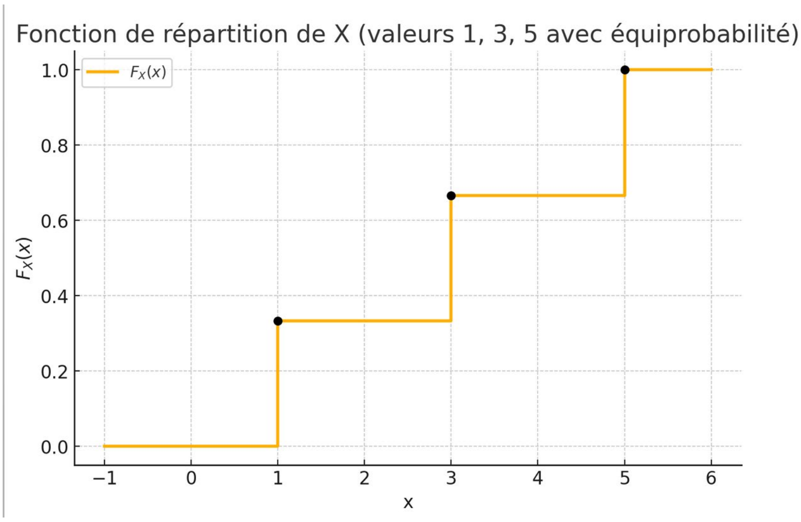
a. Calculer $\mathrm{VaR}_{50\%}(X)$

C'est aussi la médiane. Selon la définition usuelle de la VaR, elle est égale à $\mathrm{VaR}_{50\%}(X) = 3$.

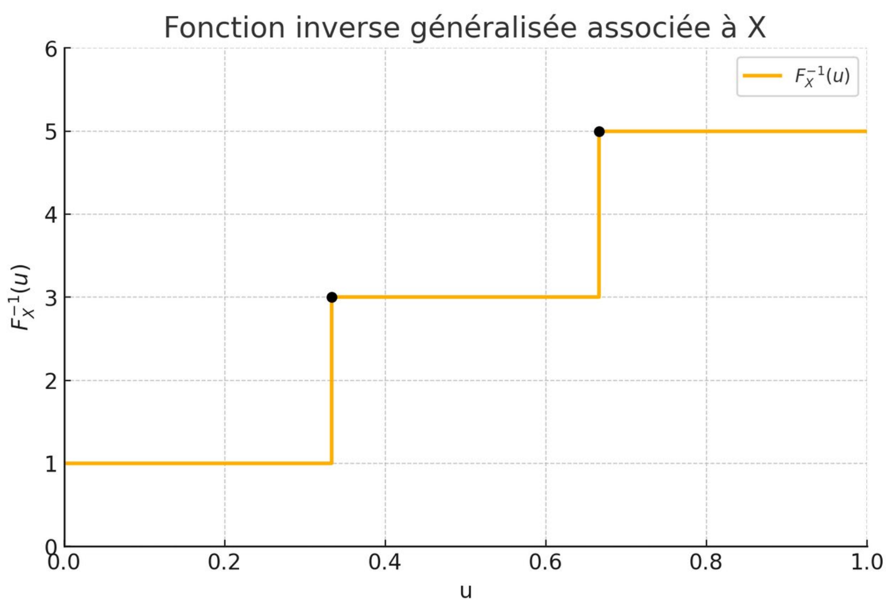
b. Calculer $\mathrm{VaR}_{90\%}(X)$

Toujours en prenant la définition habituelle de la VaR, $\mathrm{VaR}_{90\%}(X) = 5$.

c. Tracer la fonction de répartition de X, F_X



d. Tracer la fonction $\alpha \to VaR_\alpha(X)$

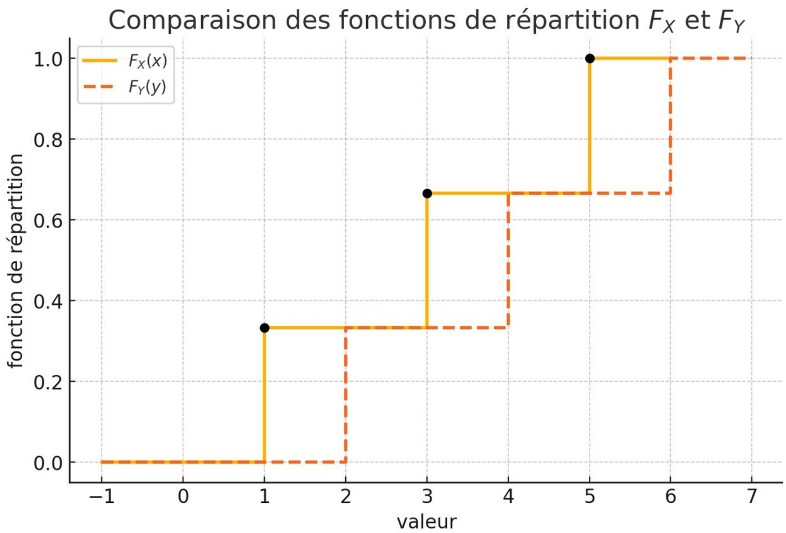


2. On introduit une seconde perte Y

Scénarios	1	2	3
X	**1**	**3**	**5**
Y	**2**	**4**	**6**

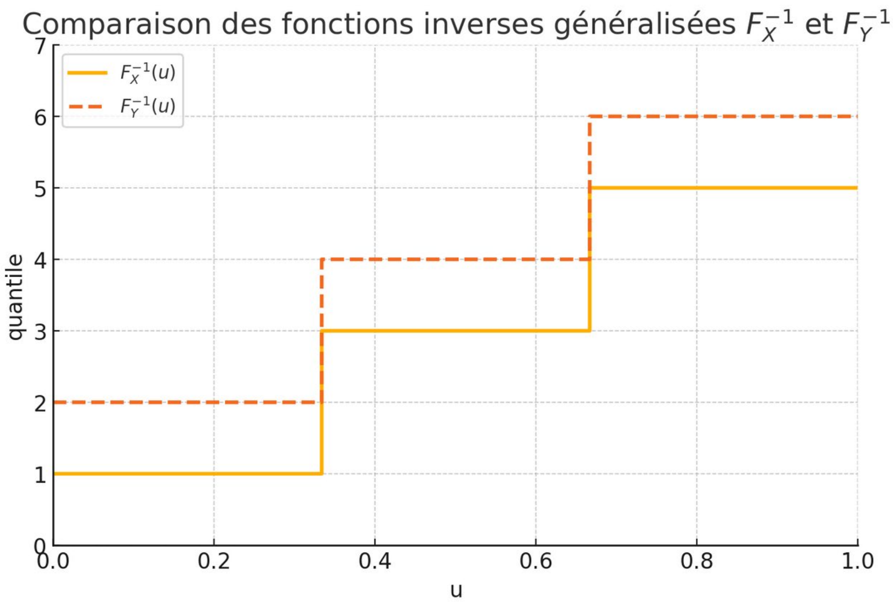
a. Montrer que $F_Y \leq F_X$

On remarque que $Y > X$ (pour tous les états), cela entraîne la dominance stochastique au premier ordre et donc l'inégalité affichée entre fonction de répartition. On peut aussi tracer les graphes associés aux deux fonctions de répartition et constater l'inégalité.



b. Montrer que $VaR_\alpha(Y) \geq VaR_\alpha(X)$ pour tout $\alpha \in [0,1]$.

L'inégalité entre fonctions de répartition implique une inégalité en sens inverse des fonctions quantiles (ou inverses généralisées). On peut retrouver ce résultat à partir des représentations graphiques.



c. Peut-on associer des scénarios à $VaR_{50\%}(X), VaR_{50\%}(Y), VaR_{50\%}(X+Y)$?

Oui, c'est le scénario numéro 2 qui est associé à ces VaR, avec des valeurs respectives égales à 3,4,7.

$VaR_{50\%}(X+Y) - VaR_{50\%}(X) - VaR_{50\%}(Y) = 7 - 3 - 4 = 0$. Ce qui est logique, puisque X, Y sont comonotones et que la VaR est comonotone additive.

d. Calculer $VaR_\alpha(X+Y) - VaR_\alpha(X) - VaR_\alpha(Y)$ en fonction de α

Puisque X, Y sont comonotones et que la VaR est comonotone additive, $VaR_\alpha(X+Y) - VaR_\alpha(X) - VaR_\alpha(Y) = 0$, pour tout α.

3. On considère la perte Y^*

Scénarios	1	2	3
X	1	3	5
*Y**	6	4	2

a. Montrer que Y et Y^* sont de même loi.

Pour Y et Y^*, les valeurs 2,4,6 sont équiprobables.

b. Est-ce que les VaR sont égales ?

Oui, car le VaR est une mesure de risque invariante en loi.

c. Calculer $VaR_{90\%}(X+Y^*)$ et comparer avec $VaR_{90\%}(X) + VaR_{90\%}(Y^*)$

$X + Y^* = 7$. S'agissant d'une variable aléatoire constante, la VaR est égale à cette valeur unique, soit $\mathrm{VaR}_{90\%}(X+Y^*) = 7$ et $\mathrm{VaR}_{50\%}(X+Y^*) - \mathrm{VaR}_{50\%}(X) - \mathrm{VaR}_{50\%}(Y) = 0$.

d. Calculer $VaR_{20\%}(X+Y^*)$ et comparer avec $VaR_{20\%}(X) + VaR_{20\%}(Y^*)$

En vertu de la réponse précédente, $\mathrm{VaR}_{20\%}(X+Y^*) = 7$. Par ailleurs, en se reportant à la réponse à la question b. $\mathrm{VaR}_{20\%}(X) = 1$ et $\mathrm{VaR}_{20\%}(Y^*) = 2$. D'où $\mathrm{VaR}_{50\%}(X+Y^*) - \mathrm{VaR}_{50\%}(X) - \mathrm{VaR}_{50\%}(Y) = 4 > 0$. On a un exemple où la VaR n'est pas sous-additive.

4. On considère la perte Z

Scénarios	1	2	3
X	1	3	5
Z	2	5	6

a. Quelle est la perte « worst case » pour X, pour Z, pour $X+Z$?

Respectivement 5,6,11.

b. A quels scénarios sont associés les pertes précédentes ?

Au scénario 3.

On considère également la perte Z^*

Scénarios	1	2	3
X	1	3	5
*Z**	6	5	2

c. Montrer que Z et Z^* sont de même loi.

Les pertes 2,5,6 sont équiprobables dans les deux cas.

d. Quelle est la perte « worst case » pour X, pour Z^*, pour $X+Z^*$?

Respectivement 5,6,8.

e. A quels scénarios sont associés les pertes précédentes ?

Respectivement, les scénarios 3,1,2. Le scénario worst-case pour un portefeuille peut donc n'être aucun des scénarios worst-case de ses constituants.

Exercice 2 : VaR et ES (méthode historique)

1. Donner l'expression de $\mathrm{VaR}_{99\%}(X)$ pour la méthode historique avec une période de 252 jours.

C'est la troisième pire perte (voir le cours).

2. De même pour $ES_{97,5}(X)$ (méthode historique, période de 252 jours).

$ES_{97.5\%}(X) = -\frac{1}{6.3} \times (x^1 + \cdots + x^6 + 0.3x^7)$, où x^k est la $k-$pire perte (voir le cours).

Exercice 3 : Comonotone additivité de la VaR

1. Montrer que la VaR à 99% est comonotone additive dans le cas de la méthode historique (période de 252 jours).

Notons les dates $1, \dots, t, \dots, 252$ et X, Y deux pertes comonotones. Deux variables aléatoires sont comonotones si elles sont ordonnées de la même manière. Cela signifie que la date associée à la pire perte est la même pour X et pour Y, notons-là t_1 ; de même pour les dates associées aux deuxième et troisième pire perte, notons-les t_2, t_3. Il en résulte immédiatement que t_1, t_2, t_3 sont les dates des trois pires pertes pour $X + Y$. La VaR à 99% est associée à la troisième pire perte. $\mathrm{VaR}_{99\%}(X) = X_{t_3}$, $\mathrm{VaR}_{99\%}(Y) = Y_{t_3}$ et $\mathrm{VaR}_{99\%}(X+Y) = (X+Y)_{t_3} = X_{t_3} + Y_{t_3} = \mathrm{VaR}_{99\%}(X) + \mathrm{VaR}_{99\%}(Y)$.

2. De même dans le cas général (on pourra supposer les fonctions de répartition inversibles)

La comonotonie de X et de Y implique que l'on peut écrire $X = F_X^{-1}(U)$ et $Y = F_Y^{-1}(U)$ avec $U \sim U[0,1]$. Or $\mathrm{VaR}_{99\%}(X) = F_X^{-1}(99\%)$ et $\mathrm{VaR}_{99\%}(Y) = F_Y^{-1}(99\%)$. Par ailleurs, $\{U < 99\%\} = \{F_X^{-1}(U) < F_X^{-1}(99\%)\} = \{F_Y^{-1}(U) < F_Y^{-1}(99\%)\}$. Il résulte de la croissance de F_X^{-1} et de F_Y^{-1} que l'ensemble précédent est aussi égal à $\{F_X^{-1}(U) + F_Y^{-1}(U) < F_X^{-1}(99\%) + F_Y^{-1}(99\%)\}$ ou $\{X + Y < F_X^{-1}(99\%) + F_Y^{-1}(99\%)\}$. Il en résulte que $\mathrm{VaR}_{99\%}(X+Y) = F_X^{-1}(99\%) + F_Y^{-1}(99\%) = \mathrm{VaR}_{99\%}(X) + \mathrm{VaR}_{99\%}(Y)$.

Exercice 4 : Invariance en loi

1. Donner un exemple de mesure de risque non invariante en loi.

Il faut qu'elle dépende explicitement des scénarios. Par exemple, dans le cas d'une approche historique : P probabilité uniforme sur $\{1,2\}$. On définit la mesure de risque comme $\rho(X) = X(1)$. Considérons X, Y avec $X(1) = 3, X(2) = 4$ et $Y(1) = 4, Y(2) = 3$. X, Y sont de même loi, mais $\rho(X) = 3$ et $\rho(Y) = 4$

2. En déduire qu'une mesure de risque non.invariante.en.loi peut être croissante ~~quand les pertes augmentent pour chaque scénario~~, sans qu'elle n'augmente quand le risque augmente au sens de l'ordre stochastique usuel.

Considérons X, Y avec $X(1) = 3, X(2) = 4$ et $Y(1) = 4, Y(2) = 0$ et la mesure de risque précédente : $\rho(X) = 3 < \rho(Y) = 4$ et pourtant X est plus risqué que Y au sens de l'ordre stochastique usuel.

Exercice 5 : VaR gaussienne

1. Donner l'expression de $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ quand X suit une distribution gaussienne de moyenne nulle.

Quand $\mu_X = 0$, $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \sigma_X \Phi^{-1}(\alpha)$.

2. Et pour $\alpha = 99\%$?

$\Phi^{-1}(0{,}99) \approx 2{,}326$, d'où $\mathrm{VaR}_{99\%}(X) \approx 2{,}326 \times \sigma_X$, toujours sous l'hypothèse que $\mu_X = 0$.

3. On considère la matrice suivante

$$\begin{pmatrix}
1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\
0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\
0.4 & 0.4 & 1 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\
0.4 & 0.4 & 0.4 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\
0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 & 0.3 & 0.3 & 0.15 & 0.15 \\
0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 1 & 0.3 & 0.15 & 0.15 \\
0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 1 & 0.15 & 0.15 \\
0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 1 & 0.2 \\
0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.2 & 1
\end{pmatrix}$$

Donner la condition vue en cours pour que cette matrice soit effectivement une matrice de corrélation.

Il faut que la « block correlation matrix » $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.15 \\ 0.1 & 0.15 & 0.2 \end{pmatrix}$ soit semi-définie positive.

Exercice 6 (sous-additivité) : montrer que l'écart-type des pertes est une mesure de risque sous-additive.

Avec les notations usuelles, $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + 2\rho\sigma(X)\sigma(Y) + \sigma^2(Y) \leq \sigma^2(X) + 2\sigma(X)\sigma(Y) + \sigma^2(Y) = \big(\sigma(X) + \sigma(Y)\big)^2$, ce qui implique la sous-additivité.

Exercice 7 (VWHS) : on considère des scénarios équiprobables, les pertes et les écart-types des pertes pour les différents scénarios.

Scénarios	**1**	**2**	**3**
X	**10**	**30**	**50**
Écart-type	**5**	**3**	**10**

Calculer la VaR à 90% selon la méthode historique filtrée par la volatilité.

Il résulte du tableau ci-dessous que la VaR à 90% pour la méthode filtrée est égale à 100, alors qu'elle n'est que de 50 pour la méthode historique standard.

Scénarios	**1**	**2**	**3**
X	**10**	**30**	**50**
σ_t	**5**	**3**	**10**
σ_3/σ_t	2	$10/3$	1
$X \times \sigma_3/\sigma_t$	**20**	**100**	**50**