

## *Interdépendance et risque de défaut*

- **Modèle structurel avec plusieurs entreprises**
  - *Probabilités de défaut jointes*
  - *Corrélations et probabilités de défaut jointes*
  - *Facteurs de risque systémique*
  - *Stress tests*
- **Risques liés aux interconnexions**
  - *Typologie des réseaux*
  - *Contagions (Davis et Lo)*
  - *Modèle d'Ising*
  - *Risques endogènes*

## Dépendance entre indicatrices de défaut et risque de crédit sur des portefeuilles

- Motivation : les taux de défaut des entreprises tendent à augmenter pendant les périodes de récession, cad quand la richesse agrégée diminue.
- Les valeurs des actifs des entreprises, tout comme celles des actions sont en général positivement corrélées.
- La baisse concomitante des valeurs des actifs implique que les défauts des entreprises ne sont pas indépendants, mais tendent à arriver de manière groupée
- Les banques, les autorités de supervision, etc. sont amenées à modéliser le lien entre des variables macroéconomiques ou « facteurs de risque communs » à l'ensemble des entreprises et les probabilités de défaut

5

## Dépendance entre événements de défaut : cas bivarié

- $a, b$  représentent deux entreprises pouvant faire défaut
- $D_i, i \in \{a, b\}$  : **indicatrices de défaut**,
  - $D_i = 1$  en cas de défaut,  $D_i = 0$  en cas de non-défaut.
- $p_i = P(D_i = 1), i = a, b$ , **probabilités marginales** de défaut :
- $P(D_a = 1, D_b = 1)$ , **probabilité de défaut jointe**.
- $P(D_a = 1 | D_b = 1) = \frac{P(D_a=1, D_b=1)}{P(D_b=1)}$  : **Probabilité conditionnelle de défaut** de  $a$  sachant le défaut de  $b$  :
- $P(D_b = 1 | D_a = 1) = \frac{P(D_a=1, D_b=1)}{P(D_a=1)}$  : Probabilité conditionnelle de défaut de  $b$  sachant le défaut de  $a$ .

6

## Dépendance entre événements de défaut : cas bivarié

- Covariance et corrélation entre événements de défaut :
  - $Cov(D_a, D_b) = E[D_a D_b] - E[D_a]E[D_b] = P(D_a = 1, D_b = 1) - P(D_a = 1)P(D_b = 1) = P(D_a = 1, D_b = 1) - p_a p_b$
  - Écart-types de  $D_a, D_b$  :  $\sigma_a = \sqrt{p_a(1 - p_a)}, \sigma_b = \sqrt{p_b(1 - p_b)}$
  - $\rho_{ab} = \frac{P(D_a=1, D_b=1) - p_a p_b}{\sqrt{p_a p_b (1 - p_a)(1 - p_b)}}$
- **Propriété** : La covariance (et donc la corrélation) entre les événements de défaut est positive si et seulement si :
  - $P(D_a = 1, D_b = 1) \geq p_a p_b$
  - $P(D_a = 1 | D_b = 1) \geq p_a$
  - $P(D_b = 1 | D_a = 1) \geq p_b$

7

## Corrélation et contagion (propagation des défauts)

- Corrélation positive si  $P(D_a = 1 | D_b = 1) > P(D_b = 1)$ 
  - Corrélation  $> 0$  peut être associée à un mécanisme causal bidirectionnel entre  $a$  et  $b$  (penser à la contagion)
    - Exemple « broken heart syndrome »



- Mais corrélation  $> 0$  peut être venir de l'impact d'un facteur exogène commun (cause commune)

8

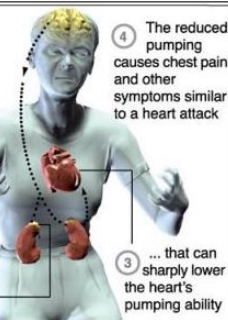
Le stress lié à la disparition d'un être cher peut causer une atteinte au ventricule gauche du cœur : effet lié à une **interaction directe entre deux personnes proches**

### A broken heart is not just folklore

A new study examines 19 patients who suffered cardiac problems following sudden emotional stress. The study offers a possible explanation.

1 Grief or fear is experienced ...

2 ... stimulating the adrenal glands and nerves to produce stress hormone including adrenaline ...

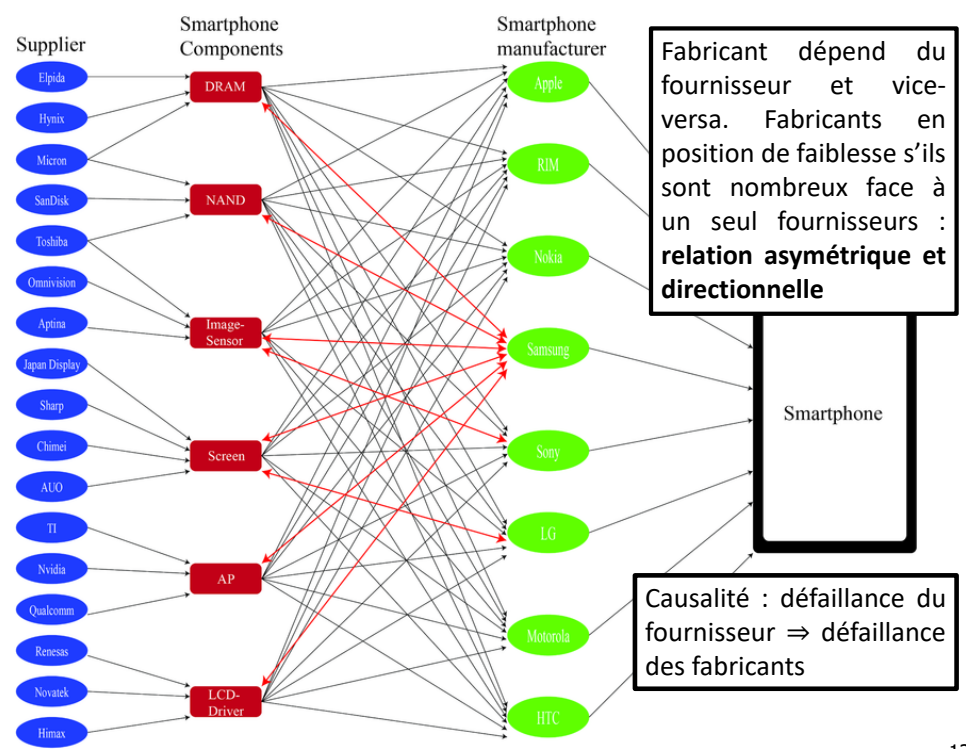
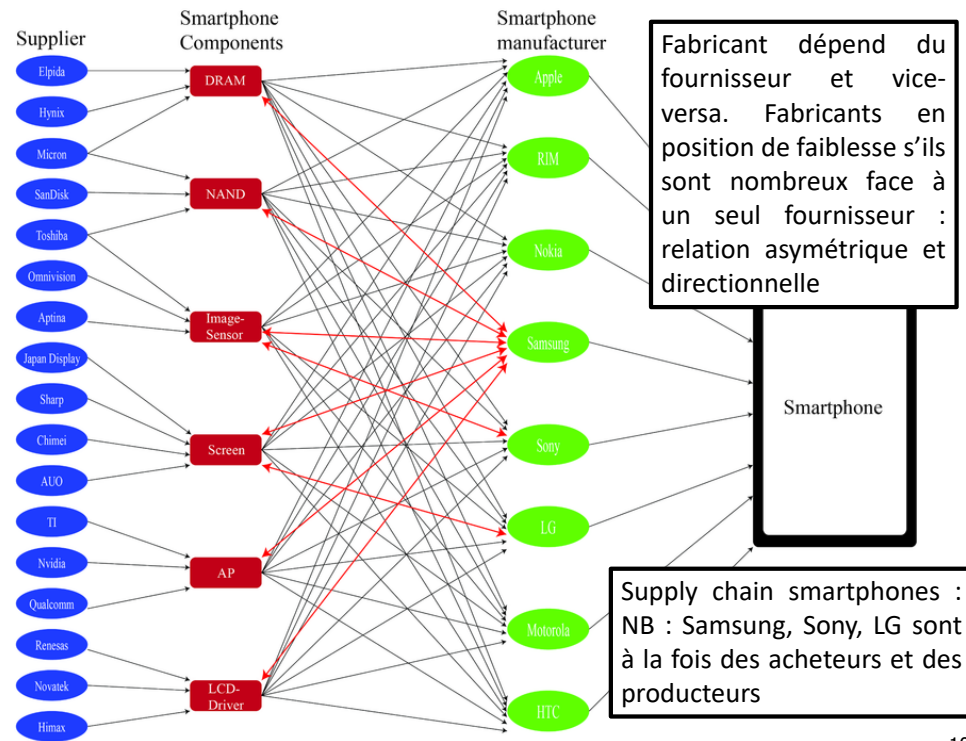
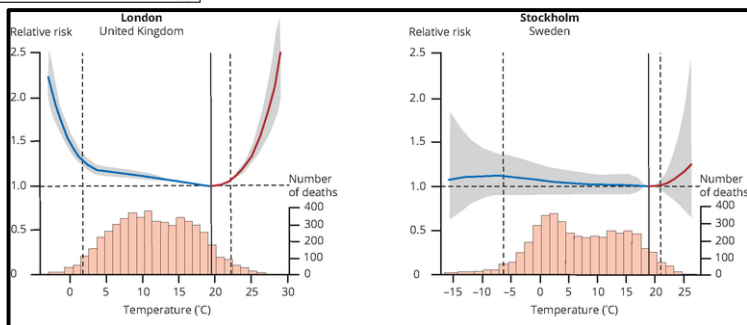


4 The reduced pumping causes chest pain and other symptoms similar to a heart attack

3 ... that can sharply lower the heart's pumping ability

SOURCE: New England Journal of Medicine AP

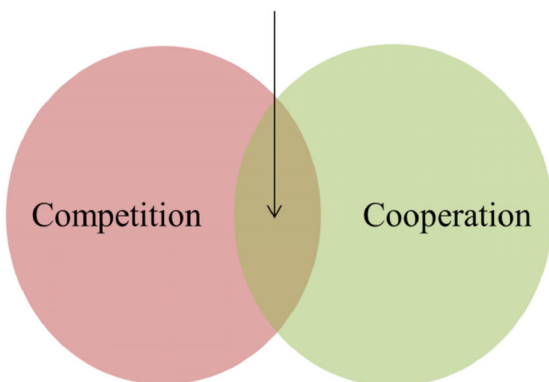
La température a un effet important sur le risque de décès des Londoniens. Facteur exogène qui impacte de manière non-linéaire l'ensemble des Londoniens. Cela va entraîner une corrélation positive entre les décès, qui vont arriver « par grappes » en cas de températures extrêmes, même s'il n'y a aucun contact direct entre deux habitants donnés de Londres



**Coopération** : collaboration de circonstance ou d'opportunité entre différents acteurs économiques qui, par ailleurs, sont des concurrents.

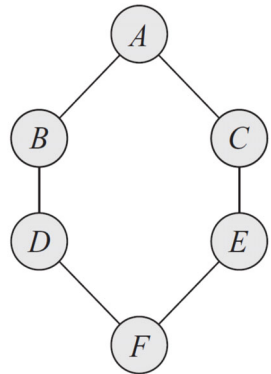
Exemples : Samsung et Apple

$$\text{Competition} \cap \text{Cooperation} = \text{Cooperation}$$



## Dépendance entre risques et causalité

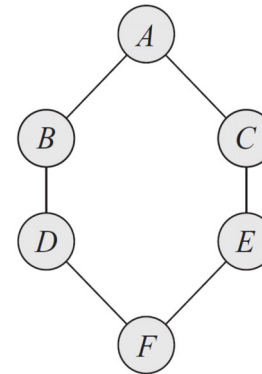
Dans la structure de dépendance ci-dessous, il n'est pas immédiat d'établir une hiérarchie de causes et d'effets du fait du caractère cyclique.



13

## Dépendance entre risques et causalité

Dans la structure de dépendance ci-dessous, il n'est pas immédiat d'établir une hiérarchie de causes et d'effets du fait du caractère cyclique.



De même, la notion de causalité implique qu'une entité (nœud) du réseau, disons  $A$  puisse avoir une action sur ses voisins, ici  $B$  et  $C$ . Pour un individu, il doit être considéré comme une entité propre dotée de capacité de décision et d'action. Différence entre le conditionnement par un événement (implique uniquement l'observation) et le conditionnement par une action (Judea Pearl) : probabilité de défaut sachant que j'observe un autre événement  $\neq$  probabilité de défaut sachant que tel investissement est (ou n'est pas réalisé)

14

## Dépendance entre risques et causalité

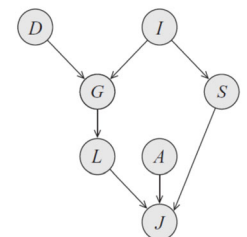
- La **cyclicité**, l'**absence d'action** (au sens de possibilité de choisir entre deux alternatives) et l'absence de hiérarchie (cause – effet ou parent – enfant) sont caractéristiques de l'**approche holistique** : les parties ne peuvent être considérées indépendamment du tout.
- Peut être bien adapté aux dépendances entre rentabilités des actions (stocks !).
- Toutes les rentabilités sont corrélées entre elles (cyclicité), pas de possibilité d'agir sur une rentabilité pour en modifier une autre.
- Il faut analyser globalement la structure des corrélations : ceci amène aux *modèles graphiques gaussiens* ou aux modèles inspirés de la physique (Ising) : champs de Markov

15

## Dépendance entre risques et causalité

- A contrario, les graphes orientés et acycliques (donc hiérarchisés), appelés « réseaux bayésiens » et « causaux » ne reposent pas sur cette approche holistique.
- Parmi ce qui s'oppose à l'holisme, on peut mentionner le réductionnisme et l'individualisme méthodologique.
- Indépendamment de ces différences de perspective, les représentations probabilistes sont définies précisément dans les deux cas
- Et il existe des ponts entre les deux approches

Bayesian Network  $G$



16



## *Dépendance entre risques et causalité*

- Modèles allant de facteurs macro-économiques ou de **facteurs latents** vers les rentabilités des actions : plutôt des approches bayésiennes :
  - *Indépendance conditionnelle sachant facteurs de risque*
- Modèles graphiques gaussiens : plutôt approche holistique
  - *Il est par exemple difficile de définir une probabilité de défaut intrinsèque, car ce risque dépend fortement de l'ensemble des interactions entre entreprises*
- Modèles issus de la théorie des « copules »
  - *Découplage entre les probabilités de défaut intrinsèques et la structure de dépendance*
- Il existe des liens entre ces modélisations

17

18

19

20

## Modèle structurel avec plusieurs sociétés

- Plusieurs sources de fragilité financière
  - Les valeurs des actifs des sociétés considérées sont souvent positivement corrélées
    - Exemple : banques américaines et prêts immobiliers
    - Baisse de valeur de l'immobilier américain conjuguée à des pratiques trop laxistes en matière d'octroi de crédit
    - Pertes importantes sur les « mortgages »
    - L'ensemble des banques américaines a été fragilisé par le retournement du marché immobilier à partir de 2007
  - Risques de contrepartie et de liquidité liées à des expositions croisées (interconnexions)
    - Prêts interbancaires en blanc, risque de contrepartie sur des opérations de prêts de titres, sur des produits dérivés, via les fonds de défaut mutualisés des chambres de compensation

21

## Baisse de valeurs des actifs



- Stress tests bancaires menés par la Fed dans le cadre du Dodd Frank Act
- Ont pour objet de mesurer les pertes des banques après des chocs macro-économiques
  - Severely Adverse Scenario
  - CET1 (Core Equity Tier One) : fonds propres « durs » calculés de manière harmonisée selon les prescriptions du comité de Bâle
    - BCBS : Basel Committee on Banking Supervision
  - CCAR : Comprehensive Capital Analysis and Review
  - DFAST : Dodd-Frank Act Stress Testing

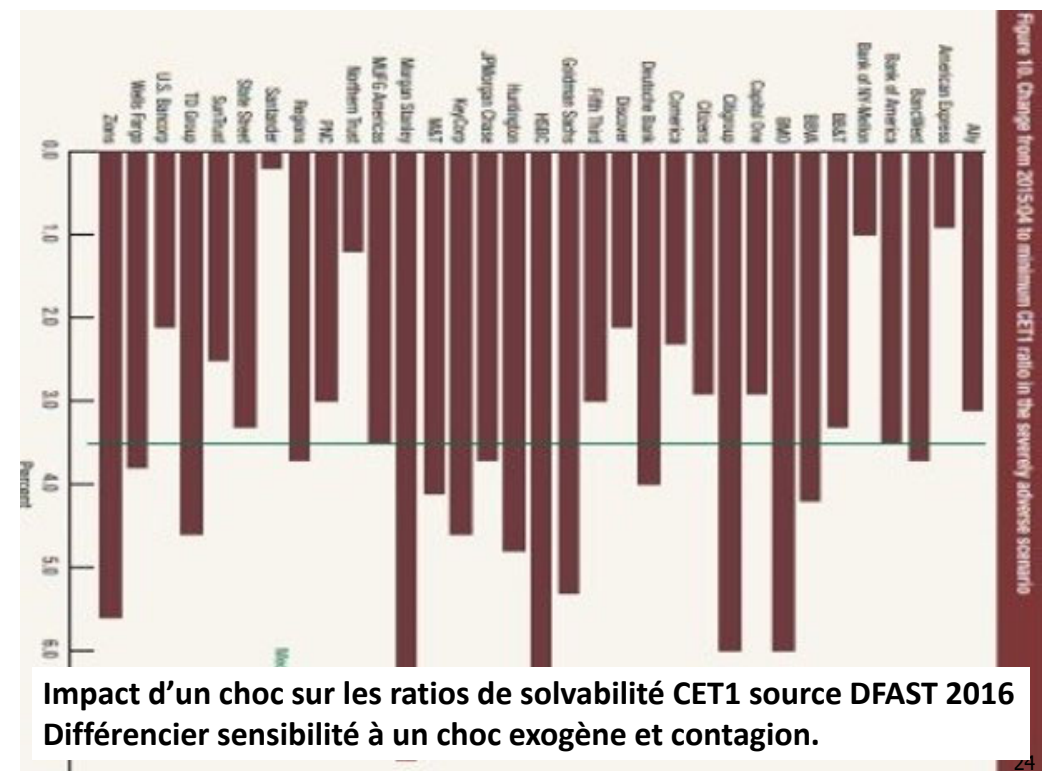
22



## Dodd-Frank Act Stress Test 2016: Supervisory Stress Test Methodology and Results

June 2016

23



Impact d'un choc sur les ratios de solvabilité CET1 source DFAST 2016  
Différencier sensibilité à un choc exogène et contagion.

24

## Analyses systémiques du risque financier à partir de données de marché

- SRISK : Brownlees & Engle (2016).
  - *SRISK est une mesure du besoin en fonds propres (recapitalisation ou "retained earnings") d'une banque après un krach boursier*
- CoVAR
  - *CoVaR is the VaR of the financial system conditional on that firm being in distress*
- Mesurer des risques bancaires systémiques à partir de données de marché :
  - *Importantes fluctuations statistiques les rendent peu praticables*
    - Danielsson, Valenzuela & Zer (2016). Can we prove a bank guilty of creating systemic risk? A minority report. Journal of Money, Credit and Banking.

25

Évolution du risque systémique de JP Morgan selon la méthodologie SRISK d'Engle. Il s'agit d'estimer les besoins en capital supplémentaire, en cas de baisse des indices boursiers de 40%. Pic à 140 milliards de dollars en 2008, décroissances et fluctuations rapides, avec des valeurs nulles ou négatives.



26

## SRISK: approche du risque systémique par Robert Engle

- À partir de données de marché (cours boursiers)



27

A new EDHEC initiative: the EDHEC Stress Testing Engine

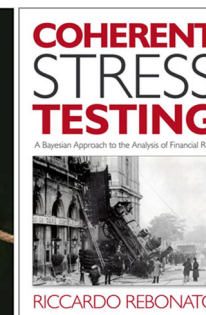
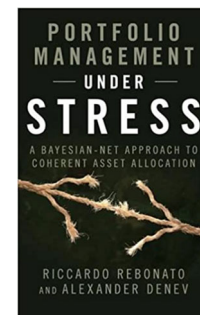
EDHEC is launching a new public-domain Stress Testing tool.  
Why is it useful? Which investment problems does it help solving?

by Riccardo Rebonato  
Professor of Finance, EDHEC-Risk Institute

<https://risk.edhec.edu/stress-test-engine>

An EDHEC-Risk Institute Working Paper

## A Financially Justifiable and Practically Implementable Approach to Coherent Stress Testing



## Creating a Scenario-Aware Correlation Matrix

- We build many such vectors, each of dimension  $N_{\text{asset}}$ .
- Finally, from these simulated vectors we can construct a correlation matrix among the  $N_{\text{asset}}$  elements that constitute the whole investment portfolio.
- Once we have the 'stressed' correlation matrix, we can build the conditional covariance matrix necessary to create the scenario-aware normalized principal components.
- With these conditional principal components we can finally apply the 'views-based' approach described above.

<https://www.youtube.com/watch?v=YCHETb6OM3s&feature=youtu.be>

28



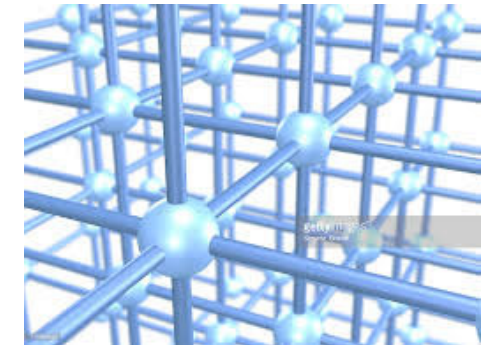
## La contagion financière et les réseaux

- Andrew Haldane, Rethinking the Financial Network
  - <http://www.bankofengland.co.uk/archive/Documents/historicpubs/speeches/2009/speech386.pdf>
  - [Haldane 2009, p. 3] Both events [the **failure of Lehman Brothers** and the unfolding of the SARS epidemic] were manifestations of the **behavior under stress of a complex, adaptive network**. Complex because these networks were a cats-cradle of interconnections, financial and non-financial. Adaptive because behavior in these networks was driven by interactions between optimizing, but confused, agents. **Seizures in the electricity grid**, degradation of ecosystems, the spread of epidemics and the disintegration of the financial system: each is essentially a different branch of the same network family tree.

29



Andy Haldane, Chief Economist, Bank of England



Réseau interconnecté

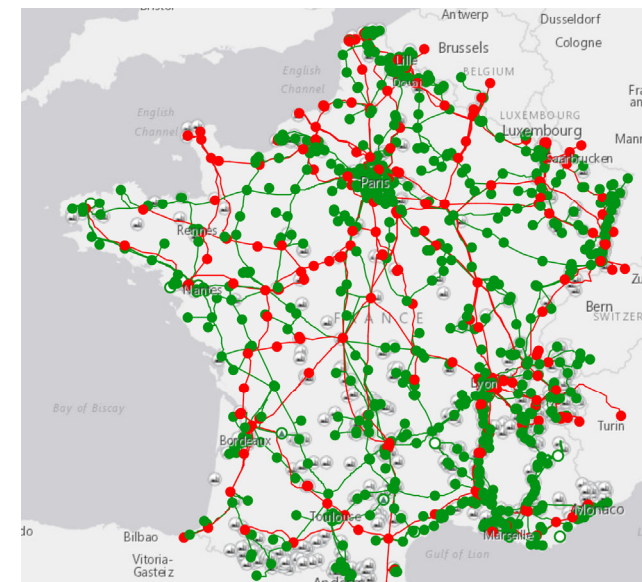
Le réseau électrique est dit « maillé » (mesh network)

30

## Lien social et « résilience »

- Andrew Haldane: réseaux bancaires interconnectés et stabilité financière ; parallèle avec réseaux électriques
- En présence de chocs idiosyncratiques de liquidité, l'interconnexion (assistance mutuelle) augmente la résistance du système.
- Mais en cas de choc de grande amplitude, c'est l'ensemble du réseau (système financier) qui s'effondre
  - *Interconnexion (avec soutien mutuel) : un bien et un mal*
    - « On vit ensemble, on meurt ensemble ».
  - *Système autarcique : indépendance...*
  - *Système concurrentiel : une partie disparaît (aléatoirement ou non, plus faibles ?)*

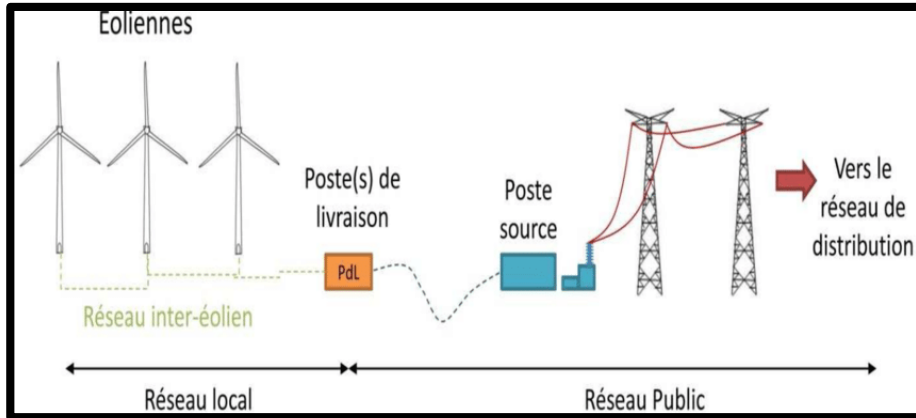
31



Réseau électrique (RTE) à très haute tension 400kV et haute tension 225kV : lignes (arêtes) et postes électriques (nœuds) : réseau non orienté : <https://www.rte-france.com/fr/la-carte-du-reseau>

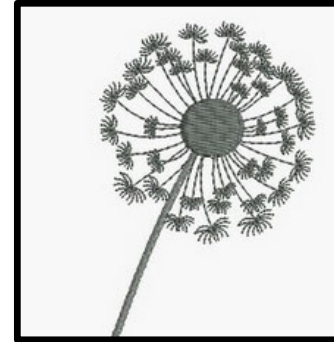
32

Topographie des réseaux électriques et éoliennes : Il est moins coûteux d'installer des éoliennes à proximité d'un point de raccordement au réseau haute tension de RTE.



33

Topographie des réseaux ; On aboutit à des réseaux dits « en fleur de pissenlit » combinant réseau étoilé ou cœur/satellites et une branche reliant le cœur à l'extérieur du réseau.

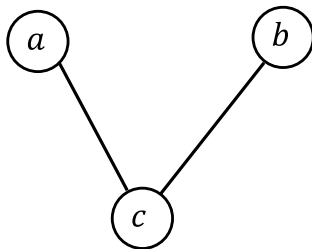


Ce qui peut relier le cœur d'un réseau de membres d'une chambre de compensation à l'extérieur ? Capital de la chambre de compensation, autres chambres de compensation (accords d'interopérabilité), prêts d'urgence de la banque centrale, ...

34

### Structure de réseaux

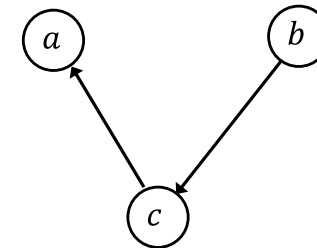
- Graphe (graphical model) : ensemble formé de **nœuds** (ici  $a, b, c$ ) et d'**arcs** (ou arêtes, connections, liens, edges) reliant ces nœuds (nodes)



35

### Structure de réseaux

- Graphe orienté (connected graphical model) : ensemble formé de nœuds et d'arcs reliant ces nœuds selon une direction représentée par la flèche



- Le sens de la flèche peut indiquer que  $b$  a prêté à  $c$ , ou que  $b$  détient une fraction du capital de  $c$

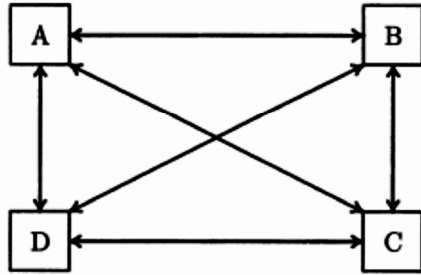
36



## Structures de réseaux

- Réseau complet (mesh) : toutes les entités du réseau sont connectées (interconnexion maximale)
  - Allen et Gale s'intéressent à la résilience d'un système financier (marché interbancaire) par rapport à des chocs exogènes de liquidité
    - Allen & Gale (2000). Financial contagion. *Journal of political economy*

FINANCIAL CONTAGION



Douglas Gale

## Structures de réseaux



- Structure incomplète : exemple, réseau circulaire (ring)

FINANCIAL CONTAGION

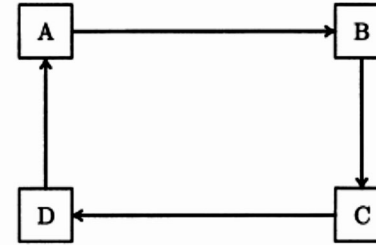


FIG. 2.—Incomplete market structure

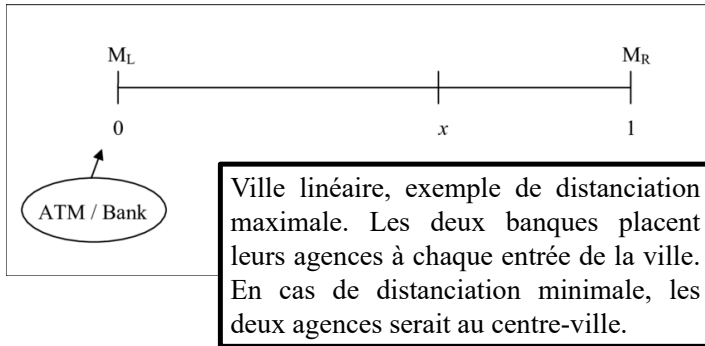


Franklin Allen

- Un choc exogène de liquidité affectant une partie du système financier sera mieux absorbé s'il peut être immédiatement réparti sur l'ensemble des intermédiaires financiers (réseau complet) que dans le cas d'une structure incomplète, avec la possibilité de faillites en chaîne (effet domino)

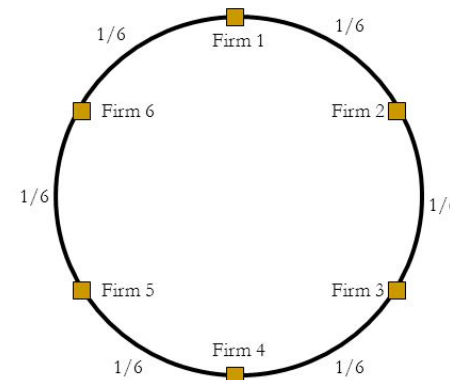
## Structures de réseau et concurrence spatiale

- Banques ayant un pouvoir de marché local : la proximité géographique diminue les coûts de transport
- Villes « linéaires » : (Hotelling) et « circulaires » (Salop)
- Positionnement optimal des agences ? distance maximale ou minimale (centre-ville) ?



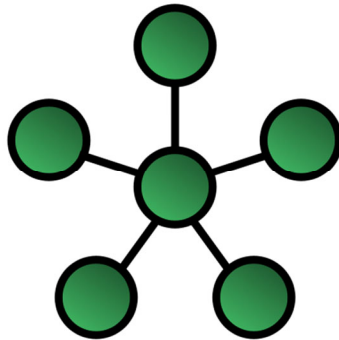
## Structures de réseau et concurrence spatiale

- Villes « circulaires » (Salop) : les entreprises (agences) sont équiréparties sur un cercle



## Structures de réseau

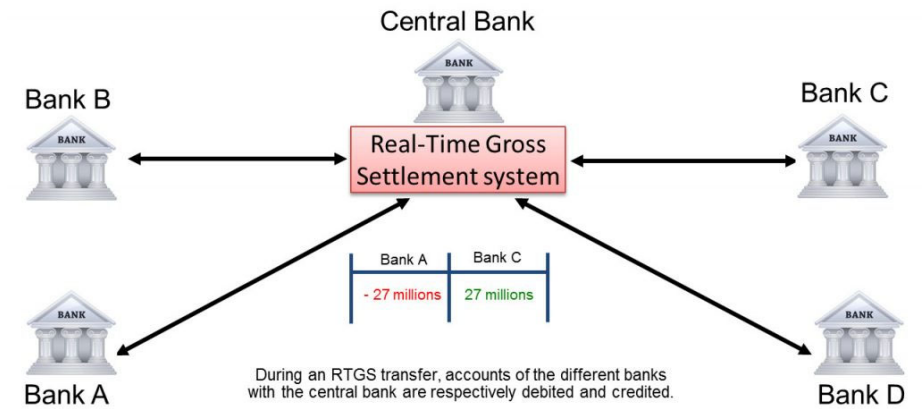
- Réseau étoilé (star network)



41

## Structures de réseau et systèmes de paiement

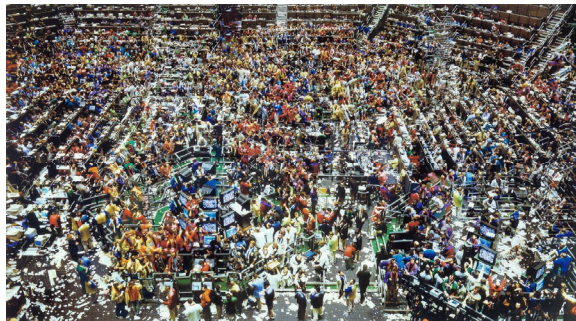
- Réseau étoilé pour les règlements (RTGS: real time gross settlement) : risque opérationnel pour la banque centrale



42

## Structures de réseau et négociation de titres

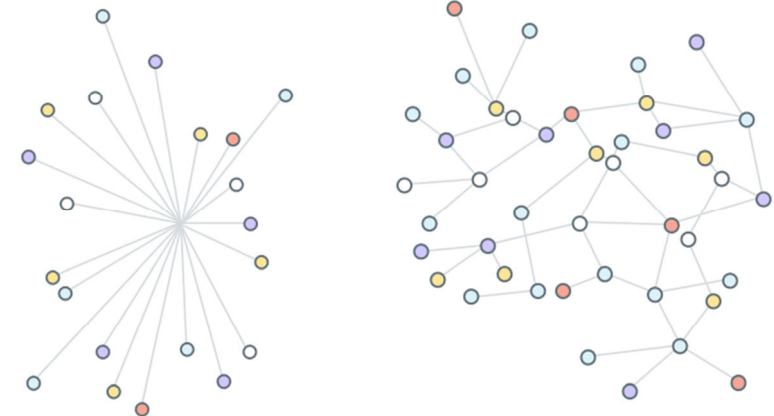
- Centralisation des ordres d'achat et de vente
  - Convergence des ordres d'achat et de vente vers un lieu unique
  - Lieu physique : marchés à la criée
  - Lieu virtuel : marchés électroniques, carnet d'ordres



Chicago Board of Trade, 1999

43

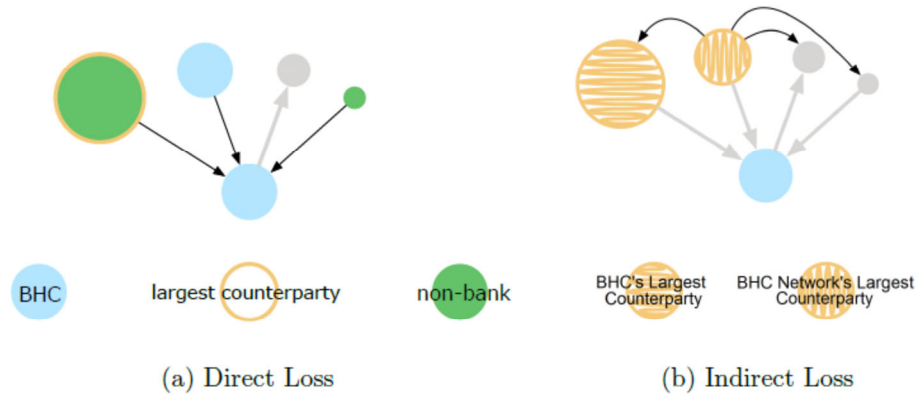
## Structures de réseau et négociation de titres



Marchés centralisés et marchés décentralisés

44

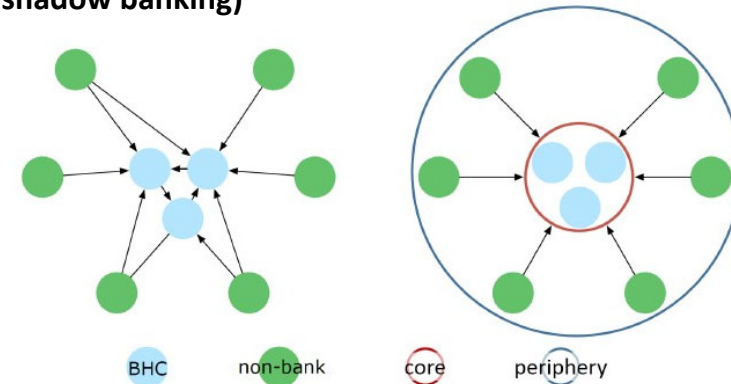
Pertes directes et indirectes dans un réseau. A gauche, les pertes directes (plus la taille d'un cercle est élevée, plus grande est le montant de la perte en cas de défaut de la contrepartie (exposition))



BHC : Bank Holding Company. A droite, le défaut d'une contrepartie pour laquelle l'exposition directe est faible peut avoir des conséquences plus graves, du fait des pertes indirectes

45

Les grandes banques sont considérées (à tort ?) comme le centre du réseau d'interconnexions. Les non-banques sont à la périphérie du système financier. Il peut y avoir des pertes venant du noyau du réseau (marché interbancaire) ou de sa périphérie (shadow banking)



Source : Office of Financial Research, US Treasury

46

## Interconnexion, centralité et régulation

- Fernand Braudel : relations étroites entre interconnexion, centralité et régulation



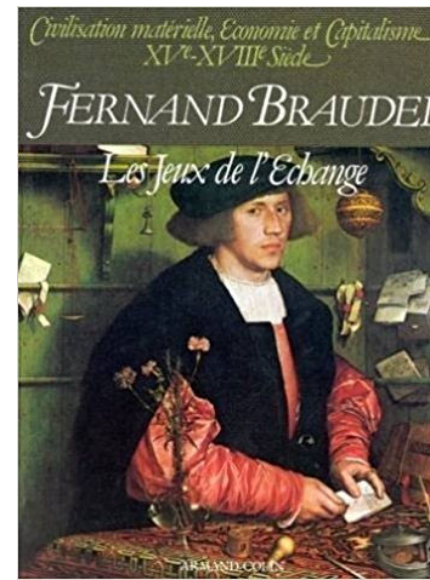
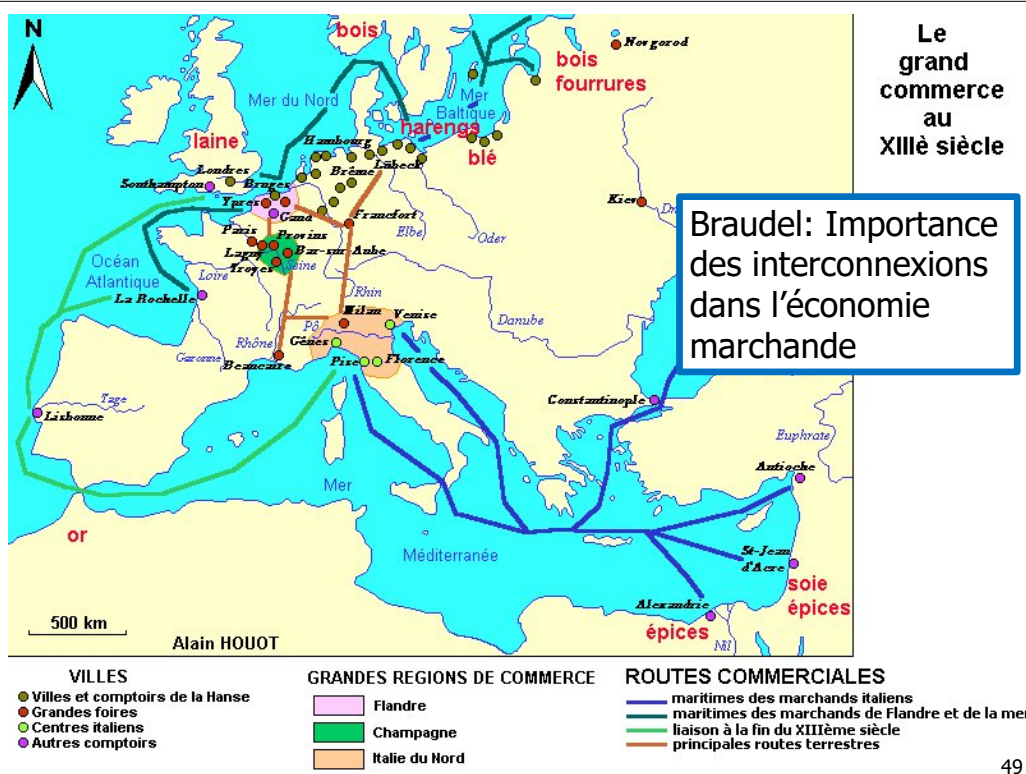
- *S'intéresse au développement du capitalisme marchand à l'aube de la Renaissance*
- *Les entités centrales sont fortement interconnectées*
- *Les règles qui s'appliquent à la périphérie ne prévalent pas au centre, qui « fabrique » ses propres règles*
- *Périphérie dominée par le centre (rule taker, spécialisation)*
- *Centre : places financières internationales (Londres et New York), banques centrales (Fed, BoE, ECB), banques systémiques (G-SIB), infrastructures de marché (FMI) : bourses et chambres de compensation ?*

47

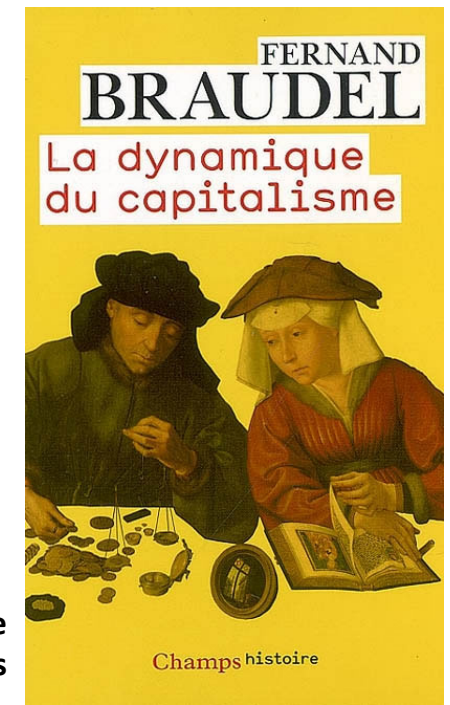
## Centre et économie monde

- Définition de l'économie monde selon l'historien Fernand Braudel :
- « un morceau de la planète économiquement autonome, capable pour l'essentiel de se suffire à lui-même et auquel ses liaisons et ses échanges intérieurs confèrent une certaine unité organique ». Une économie-monde est un système organisé par un centre, lequel exerce une domination ou une influence sur des périphéries et des marges.
- Fernand Braudel, *Civilisation matérielle, économie et capitalisme*, XVe-XVIIIe siècle, Paris, 1979.

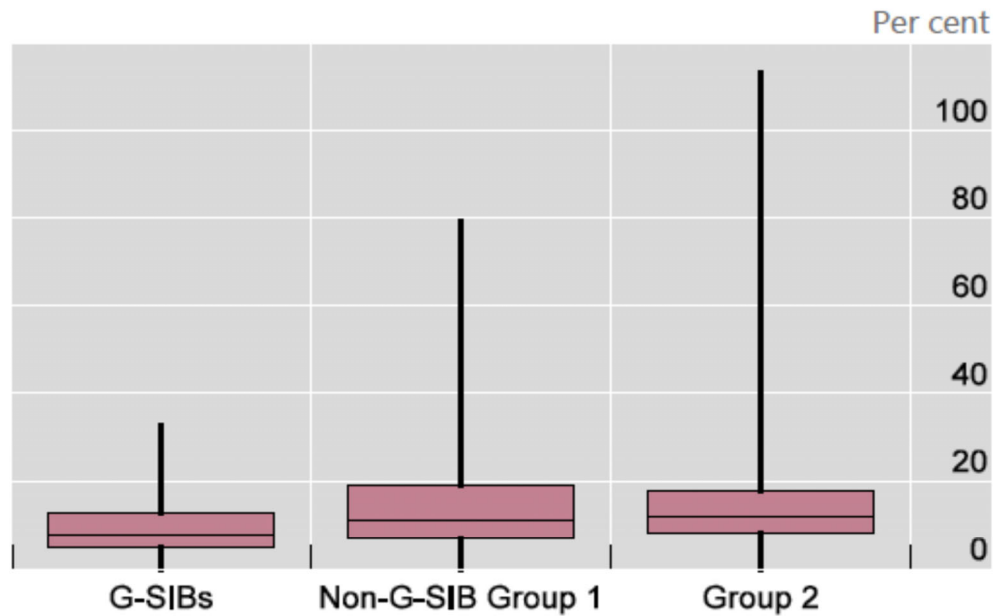




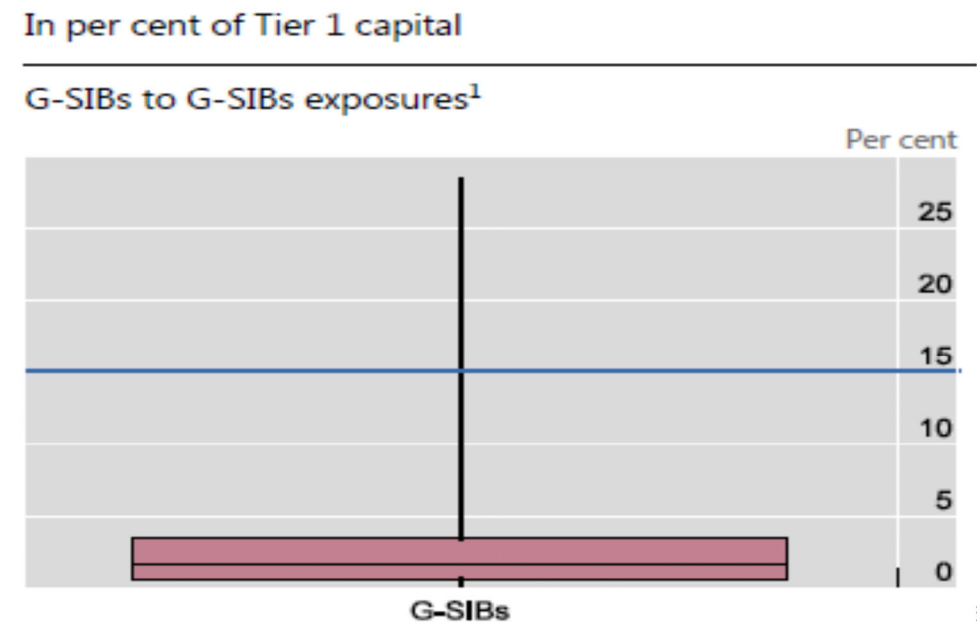
Distinction entre économie de marché et « capitalisme » (au sens des « maîtres du marché »)



*Exposition des banques envers les CCP (en % du capital), source BIS, septembre 2016*

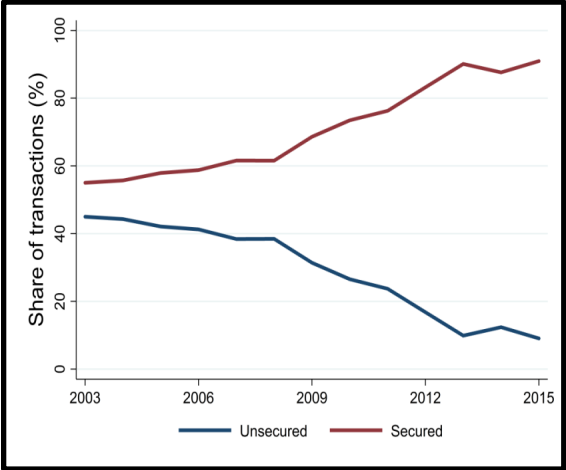


*Exposition interbancaires systémiques (en % du capital), source BIS, septembre 2016*



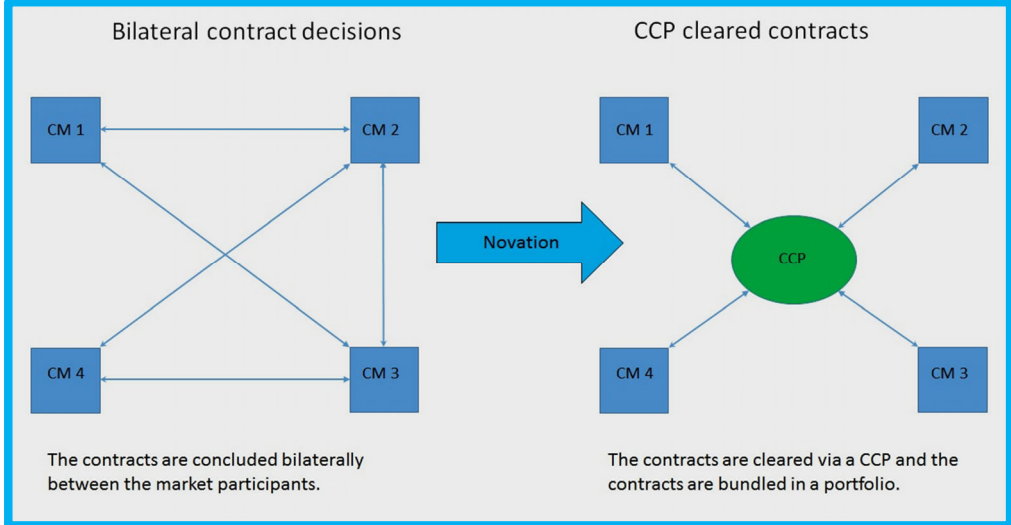
La diminution des prêts interbancaires non sécurisés (en blanc) au profit des prêts sécurisés par du collatéral (garanties) s'est accélérée avec la crise de 2008. Elle s'est accompagnée d'un raccourcissement des maturités, le marché se concentrant sur les prêts au jour le jour.

Diminution du risque de crédit interbancaire mais problématiques de liquidité (financement à long terme hors du système bancaire banques centrales, base stable de dépôts, obligations,



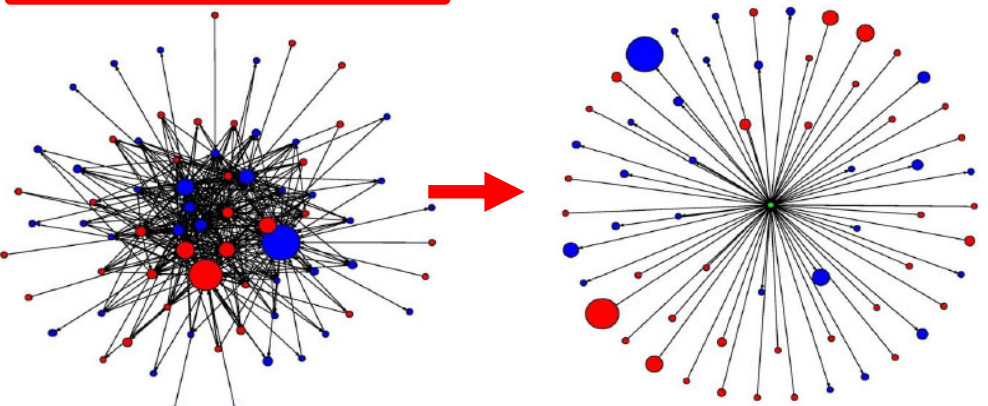
<https://www.ecb.europa.eu/pub/economic-research/resbull/2017/html/ecb.rb171206.en.html>

### Le développement des chambres de compensation



**Système multilatéral d'expositions interbancaires**  
**Topographie du réseau : centre et périphérie**  
 (Braudel, organisation des foires au Moyen-Âge)

**Une contrepartie centrale**  
**Banque centrale (clearing), CCP (Central Clearing Counterparty), carnet d'ordres centralisé**

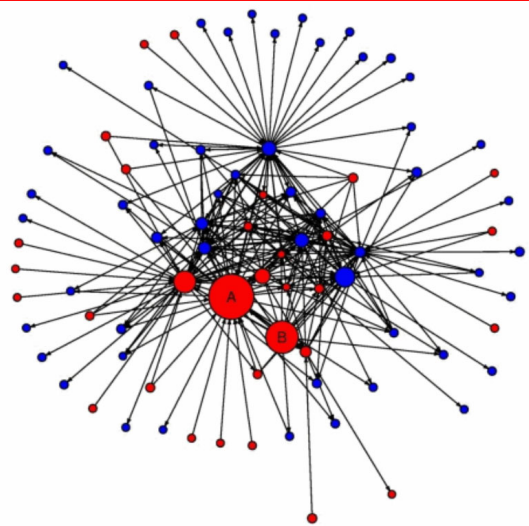


**Source: Janet Yellen (2013)**

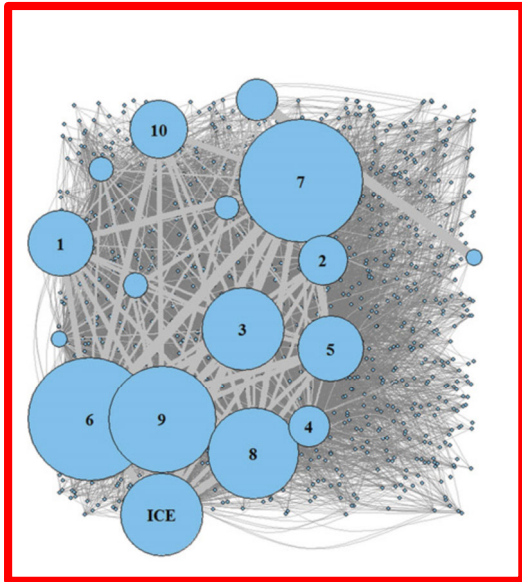
<https://www.federalreserve.gov/newsevents/speech/yellen20130104a.htm>

Réseau d'expositions dans le marché des CDS (credit default swaps), source DTCC, Yellen (2013). Les cercles rouges correspondent aux vendeurs de protection, les bleus aux acheteurs. Taille des cercles proportionnelle aux expositions nettes

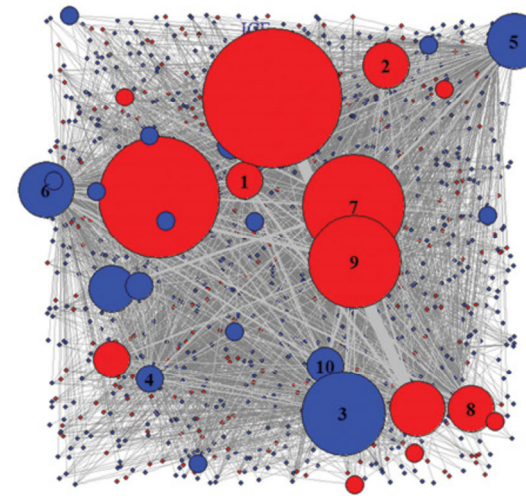
En 2013, le marché était structuré autour de deux très gros vendeurs de protection. Attention: il s'agit de positions nettes q





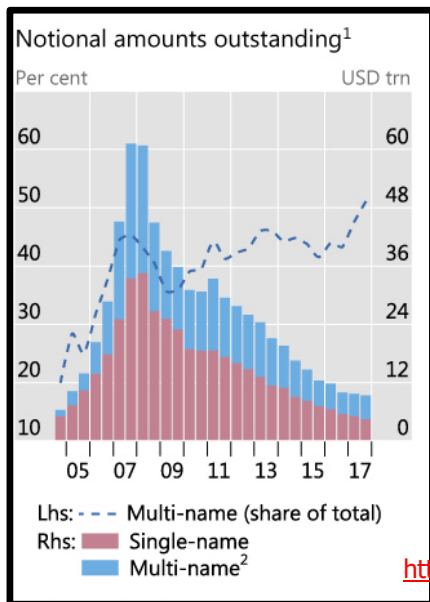


Montant brut (gross) des expositions à fin 2012. On remarque que le marché est très concentré avec 4 grands acteurs. ICE, la chambre de compensation (CCP) des CDS n'a pas encore un rôle majeur.



Montant net (gross) des expositions à fin 2012. En rouge, les vendeurs de protections, en bleu les acheteurs. Les deux plus vendeurs ne sont pas parmi les 10 premiers en termes d'expositions brutes.

### Les évolutions du marché des CDS

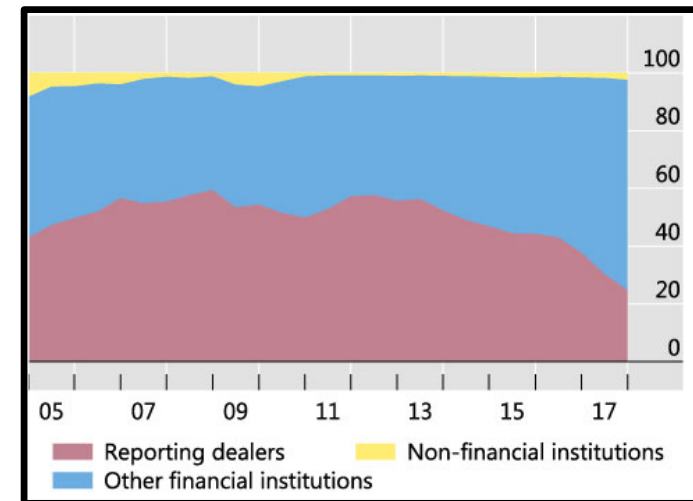


Source : BIS (Juin 2018)

On constate un effondrement du marché (mesuré à partir des expositions brutes) depuis 2008 et la diminution de la part de marché des CDS « single name » par rapport aux indices (CDS sur des portefeuilles)

[https://www.bis.org/publ/qtrpdf/r\\_qt1806b.htm](https://www.bis.org/publ/qtrpdf/r_qt1806b.htm)

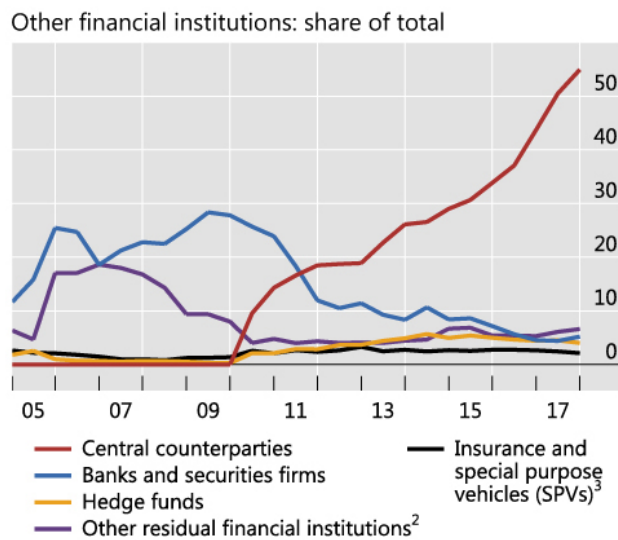
### Les évolutions du marché des CDS : désintermédiation bancaire ?



La part de marché des grandes banques (dealers), en % des expositions brutes, est passée de 50% à 20%

## Les évolutions du marché des CDS : désintermédiation bancaire ?

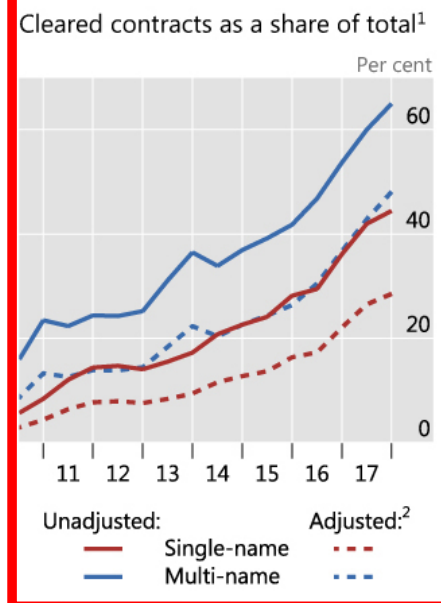
La décroissance des parts de marché des dealers dans les expositions brutes est associée à une très forte croissance des chambres de compensation (central counterparties)



61

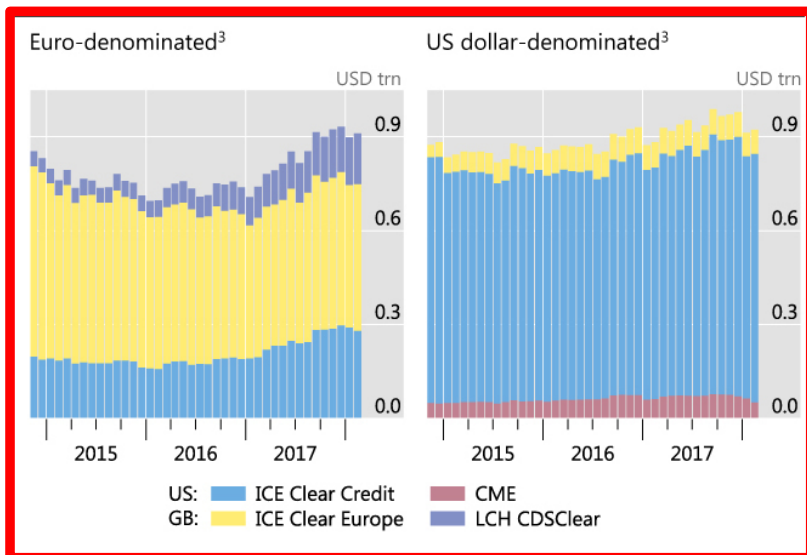
## La montée en puissance des chambres de compensation

La part de marché des CDS compensés centralement (cleared) par rapport aux CDS de gré à gré (OTC) s'accroît rapidement aussi bien pour les CDS single name que les CDS sur indices



62

## Une nouvelle concentration: le rôle prééminent d'ICE Clear



Source : BIS et Clarus Financial Technology

63

64

## Risques endogènes

Millennium Bridge



### ■ Parabole du Millennium Bridge

- [http://www.systemicrisk.ac.uk/systemic-risk/endogenous\\_risk](http://www.systemicrisk.ac.uk/systemic-risk/endogenous_risk)
- Danielsson et Shin, Endogenous risk, <http://www.ucd.ie/t4cms/DANIELSSON.pdf>

### ■ Ce pont sur la Tamise a été inauguré en juin 2000

- *Les mouvements de la foule présente ce jour là ont provoqué un mouvement de balançoire dont les conséquences auraient pu être dramatiques*
- *Les tentatives de chacun de rétablir son équilibre, rationnelles à un niveau individuel, ont amplifié cet effet de balançoire.*
- **boucle déstabilisatrice endogène** : *ce qui est prudent au niveau individuel, ne l'est plus au niveau d'un système*

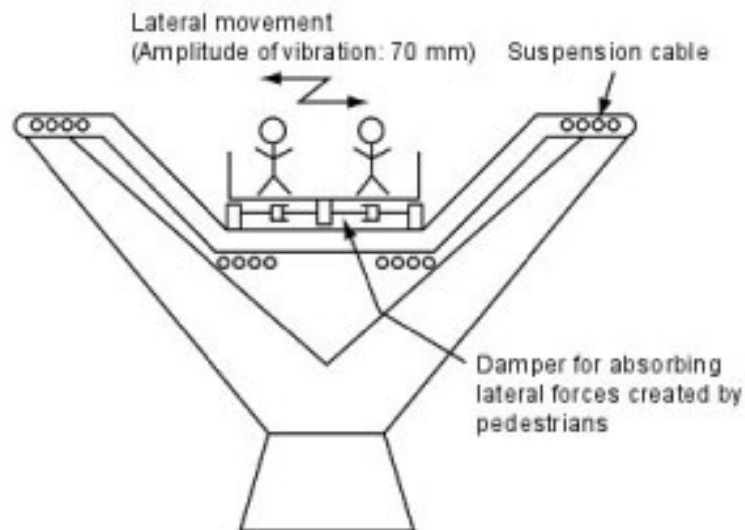
65

## Risques endogènes en finance, effets procycliques

- Amplification des chocs, positive feedback théorie des systèmes
- Effets procycliques des d'augmentation des haircuts (taux de décote) sur les obligations utilisées comme garantie.
  - *Liquidity and Leverage*
    - Adrian et Shin, 2010
  - *The role of margin requirements and haircuts in procyclicality*, Bank of International Settlements, 2010
    - <https://www.bis.org/publ/cgfs36.htm>
  - *Procyclicality of Haircuts*, Financial Stability Board, 2014
    - [https://www.fsb.org/2014/10/r\\_141013b/](https://www.fsb.org/2014/10/r_141013b/)
  - *(Pro?)-Cyclicality of Collateral Haircuts and Systemic Illiquidity* European Systemic Risk Board, 2016
  - *Margins and haircuts as a macroprudential tool*, European Central Bank, 2016
    - <https://www.ecb.europa.eu/press/key/date/2016/html/sp160606.en.html>

66

Modélisation physique de l'amplification des oscillations latérales des ponts du fait de mouvements des passants



67

Le millennium bridge sur la Tamise, au bord de l'effondrement le jour de son inauguration en 2000



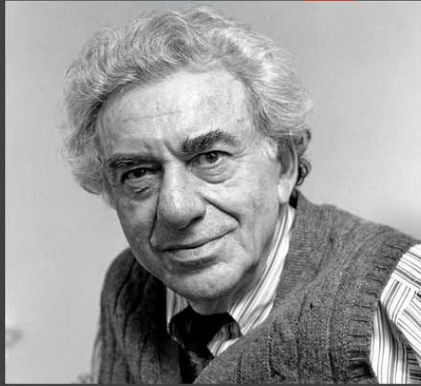
<https://www.youtube.com/watch?v=gQK21572oSU>

68



**Stability leads to instability.**  
 The more stable things become  
 and the longer things are stable,  
 the more unstable they will be  
 when the crisis hits.

[Hyman Minsky]



69

*“Short-Term Debt, Liquidity, and the Financial Crisis”*  
 (Douglas Diamond, novembre 2018), avec une analyse du  
 rôle accru des fonds monétaires

*“Private financial crises are  
 everywhere and always due to  
 problems of short-term debt”*  
 (Diamond, 2018)



<https://www.cfainstitute.org/research/multimedia/2018/2008-financial-crisis-keynote-short-term-debt-liquidity-financial-crisis>

70

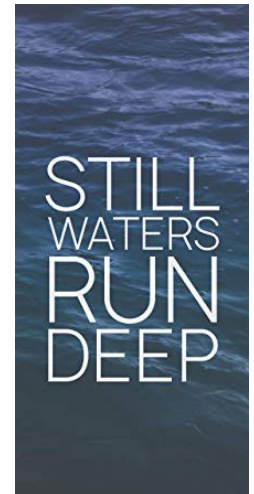
## *Le moment de Minsky*

- Théorie de l’instabilité financière endogène
- Quand la volatilité est faible, les risques sont plus faiblement rémunérés (à ratio de Sharpe inchangé)
  - $E_M - R_F = \left( \frac{E_M - R_F}{\sigma_F} \right) \times \sigma_F$
- les investisseurs vont augmenter leur niveau de risque en s’endettant (search for yield)
  - Effet de levier, déplacement vers la droite le long de la CML (Capital Market Line)
- Si la volatilité est faible, il est plus facile de s’endetter car les haircuts (taux de décote) sur les titres donnés en garantie sont plus bas

71

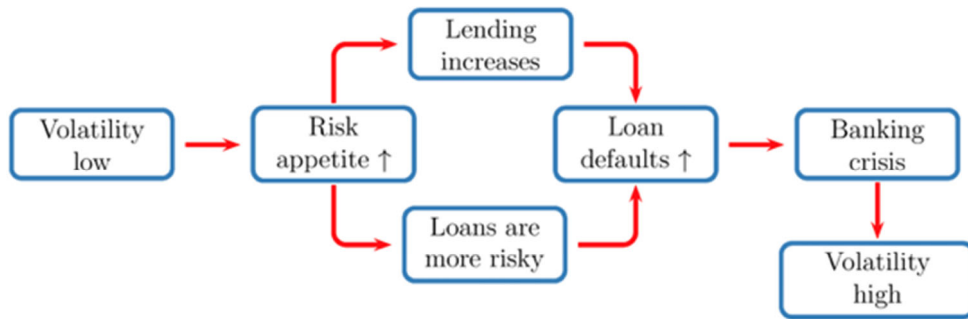
## *Le moment de Minsky*

- Selon la théorie de Minsky (1977), il faut se méfier de l'eau qui dort.
  - « Still waters run deep »
- Volatility, financial crises and Minsky's hypothesis
  - <https://voxeu.org/article/volatility-financial-crises-and-minskys-hypothesis>
  - <https://voxeu.org/article/low-risk-predictor-financial-crises>
  - Danielsson, J., Valenzuela, M., & Zer, I. (2018). Learning from history: volatility and financial crises. *The Review of Financial Studies*, 31(7), 2774-2805.

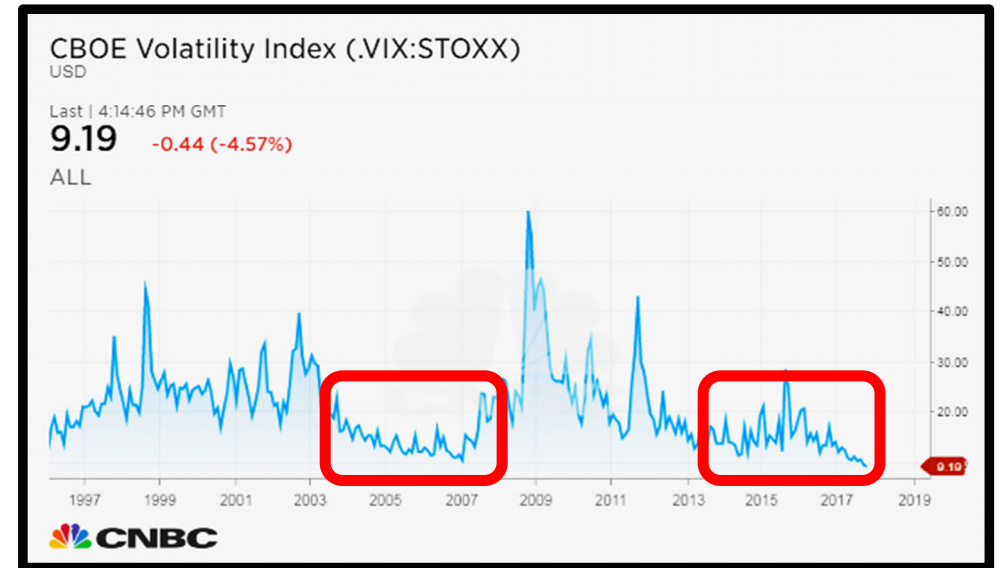


72

*Comment une faible volatilité peut induire de l'instabilité financière*



**Boucle endogène déstabilisatrice, via l'augmentation du risque de crédit bancaire**



**La crise financière de 2008 a été précédée d'un niveau faible du VIX. Fin 2017, le VIX avait atteint un niveau de 9,2% (60% en 2008)**



*"Volatility in markets is at low levels...to the extent that low levels of volatility may induce **risk-taking behavior**...is a concern to me and to the Committee". Janet Yellen, Chairman of the Fed*



**Federal Reserve, Washington**

**Janet Yellen, ancienne présidente de la banque centrale américaine (Federal Reserve)**

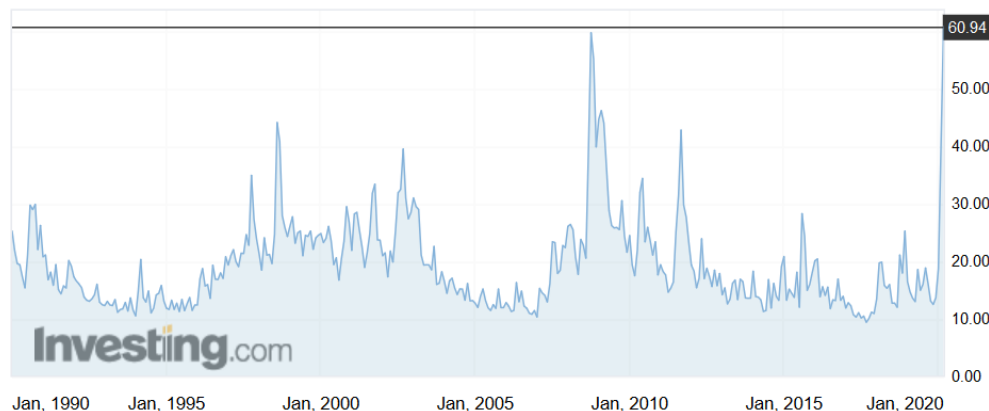
*L'indice VIX mesure la volatilité future anticipée pour l'indice SP&500 (via les volatilités implicites des options). La baisse des cours est accompagnée (précédée ?) d'une hausse de la volatilité*





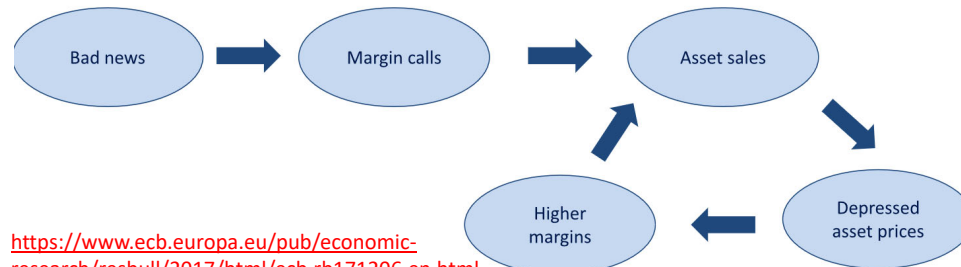
## Crises financière de 2008 (endogène) et de 2020 (exogène)

CBOE Volatility Index **60.94 -0.73 (-1.18%)**



77

Boucle déstabilisatrice liée aux dépôts de garantie, marges initiales sur les produits dérivés, taux de décote (haircuts) sur les obligations données en garantie dans les prêts sécurisés

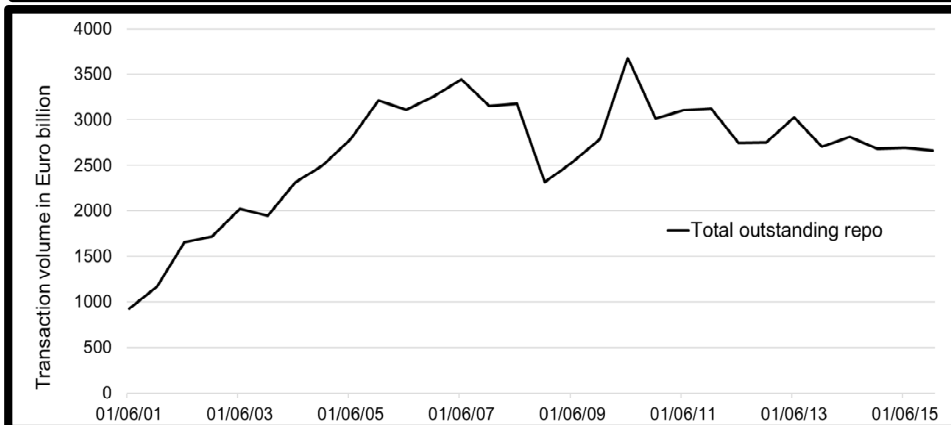


<https://www.ecb.europa.eu/pub/economic-research/resbull/2017/html/ecb.rb171206.en.html>

Une mauvaise nouvelle entraîne une augmentation du risque, puis des dépôts de garantie, les agents qui ne peuvent pas payer sont amenés à liquider leurs positions. L'impact dépréciateur des fire sales sur le marché implique une nouvelle augmentation des dépôts de garantie...

78

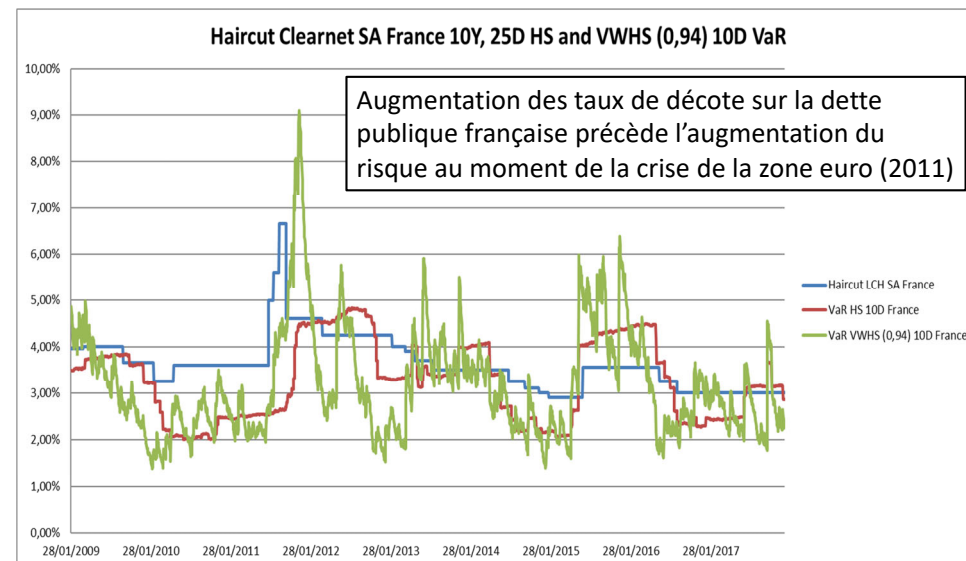
Le montant des repos (prêts sécurisés) en Europe passe de 1000 milliards d'euros en 2001 à 3500 milliards d'euros en 2007. Cela montre que l'augmentation du risque de contrepartie a été perçue bien avant la crise de 2008. La baisse de 2008 est liée à une contraction générale des marchés monétaires, y compris sécurisés



Source: European Repo Market Survey 2001-2016

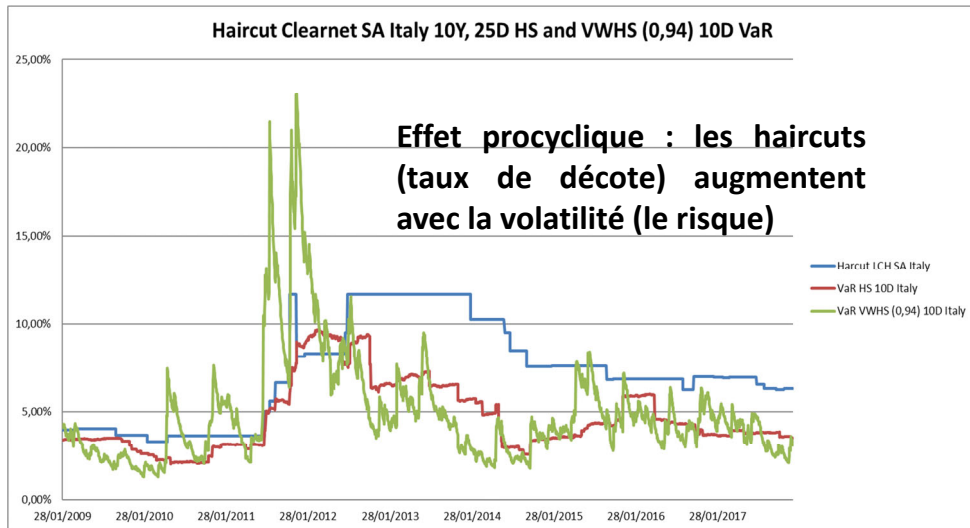
79

Taux de décote (haircuts) sur les repos (prêts sécurisés) de Clearnet SA (en bleu) et indicateurs de risque de marché (en vert et en rouge)



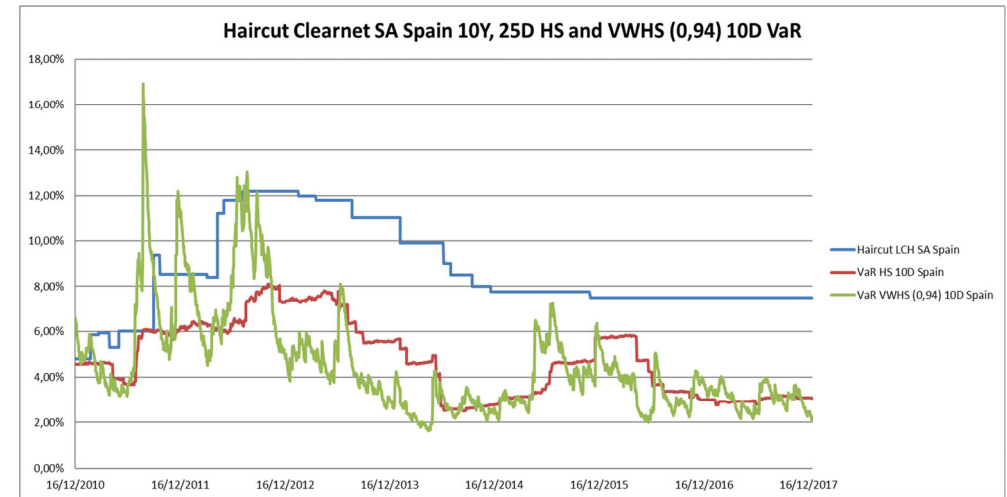
80

*Taux de décote (haircuts) sur les repos (prêts sécurisés) de Clearnet SA (en bleu) et indicateurs de risque de marché (en vert et en rouge)*



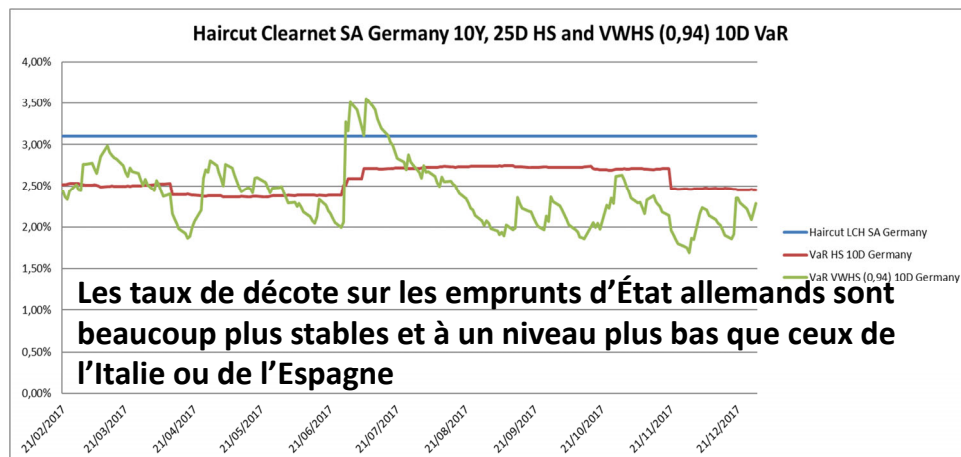
81

*Taux de décote (haircuts) sur les repos (prêts sécurisés) de Clearnet SA (en bleu) et indicateurs de risque de marché (en vert et en rouge)*



82

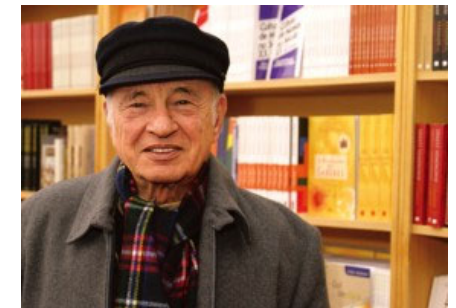
*Taux de décote (haircuts) sur les repos (prêts sécurisés) de Clearnet SA (en bleu) et indicateurs de risque de marché (en vert et en rouge)*



83

*Approches systémiques et interdépendance*

- « La mondialisation a créé une communauté de destins des êtres humains, devenus interdépendants : la crise présente en est la démonstration »
  - Edgar Morin
- Mise en évidence de la « complexité » du monde
  - étymologie « *complexus* »
  - « ce qui est tissé ensemble » dans un enchevêtrement d'entrelacements (*plexus*).



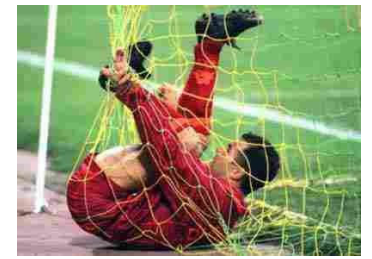
## Approches systémiques et interdépendance

- Principe de localité
  - Des objets distants ne peuvent avoir une influence directe l'un sur l'autre.
  - Un objet ne peut être influencé que par son environnement immédiat.
  - Selon Albert Einstein :
    - « Il semble essentiel pour cette disposition des choses introduites en physique que ces dernières, à un moment donné, revendiquent une existence indépendante l'une de l'autre, dans la mesure où elles se trouvent dans différentes régions de l'espace ».
- Principe de localité en contradiction avec l'intrication quantique.



## Approches systémiques et interdépendance

- Interdépendance en physique :
  - L'intrication quantique
    - Intrication : « entanglement »
  - l'état quantique de deux objets doit être décrit globalement, sans séparer un objet de l'autre.
  - Lorsque deux systèmes sont placés dans un état intriqué, on assiste à des corrélations entre les propriétés observées des deux systèmes qui ne seraient pas présentes si l'on pouvait attribuer des propriétés individuelles à chacun des deux objets S1 et S2.
  - Même s'ils sont séparés par de grandes distances spatiales, les deux systèmes ne sont pas indépendants et il faut considérer  $\{S1+S2\}$  comme un système unique.



Niels Bohr

## Approches systémiques et interdépendance

We cannot live only for ourselves. A thousand fibers connect us with our fellow men, and among those fibers, as sympathetic threads, our actions run as causes, and they come back to us as effects.

- Rev. Henry Melvill



REV. H. MELVILLE.

## Approches systémiques et interdépendance

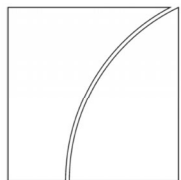
- L'interdépendance des phénomènes est un principe fondamental du bouddhisme.
  - sanskrit : शून्यता, *Śūnyatā*
    - Un objet ne peut être défini qu'en termes d'autres objets et n'exister qu'en relation avec d'autres entités
    - Rien ne peut exister de façon autonome et être sa propre cause.
      - Penser au fonctionnement du web
      - Externalité de réseau
    - Interdépendance : « coproduction conditionnée »
  - « Profonde est l'origine interdépendante, et difficile est sa compréhension »
    - *sūtra* du Diga-nikaya



Nāgārjuna, philosophe et logicien bouddhiste

<http://fr.wikipedia.org/wiki/N%C4%81q%C4%81rjuna>





### An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions

July 2005



Pablo Hernández de Cos, BCBS chairman & Carolyn Rogers BCBS Secretary General



## Le paquet bancaire : les nouvelles réglementations européennes CRR 2, CRD V, BRRD 2 ...



Petit-déjeuner EY

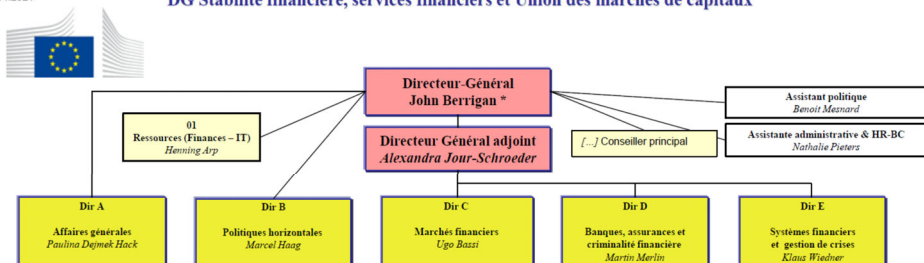
Paris, le 31 janvier 2019

Frédéric VISNOVSKY Secrétaire général adjoint

### Directorate-General for Financial Stability, Financial Services and Capital Markets Union (DG FISMA, European Commission)

01.04.2021

DG Stabilité financière, services financiers et Union des marchés de capitaux



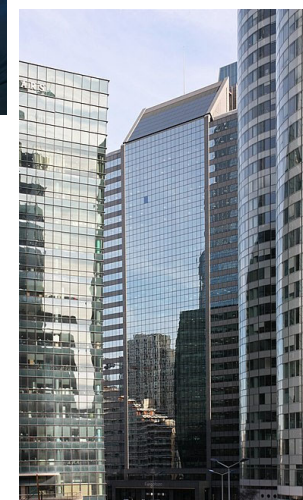
Mairead McGuinness, European Commissioner for Financial Services, Financial Stability and Capital Markets Union



José Manuel Campa, Chairperson, European Banking Authority



Isabelle Vaillant, Director of Prudential Regulation and Supervisory Policy



Tour Europlaza, la Défense

ECB guide to internal models



Andrea Enria



SSM headquarters



## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

- Objectif : modéliser la valeur d'un portefeuille de crédits à un horizon d'un an
  - *Bâle 2/3, Internal Ratings Based (IRB) approach*
  - *IFRS 9, stage 1 → stage 2*
- Pourquoi ? Quantifier les probabilités de pertes élevées et vérifier que les fonds propres des banques permettent d'absorber ces pertes (solvabilité)
  - *Et qu'il reste suffisamment de fonds propres pour éviter un « credit crunch » (c'est le but des stress-tests bancaires)*
- Fonds propres requis par les réglementations bancaires
  - *Impliquent le calcul du quantile à 99,9% de la distribution des pertes à un horizon d'un an.*

Modèle structurel : lien entre valeur future de l'actif et qualité de crédit (rating). Peut-être utilisé pour analyser les transitions entre ratings.

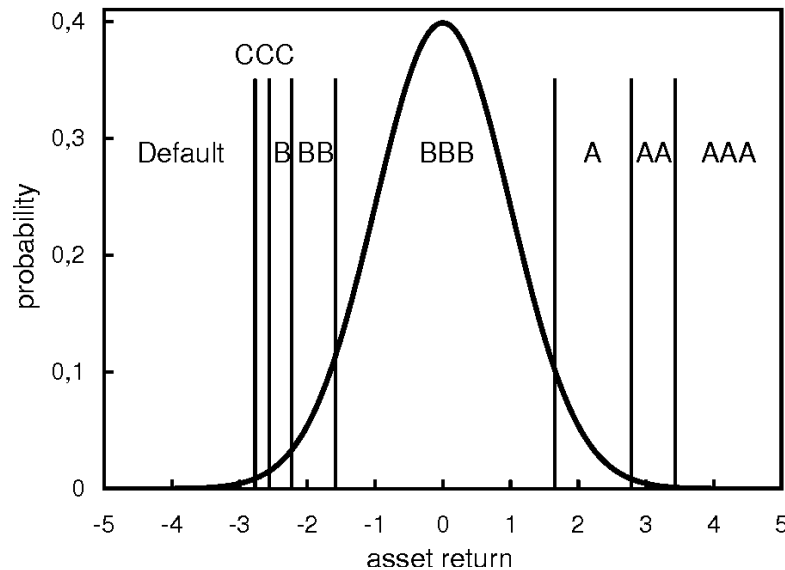
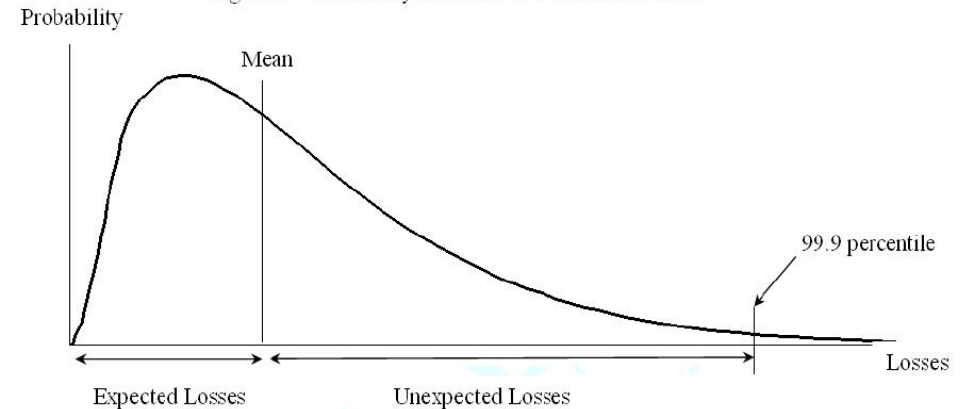


Figure 1 – Probability Distribution of Potential Losses

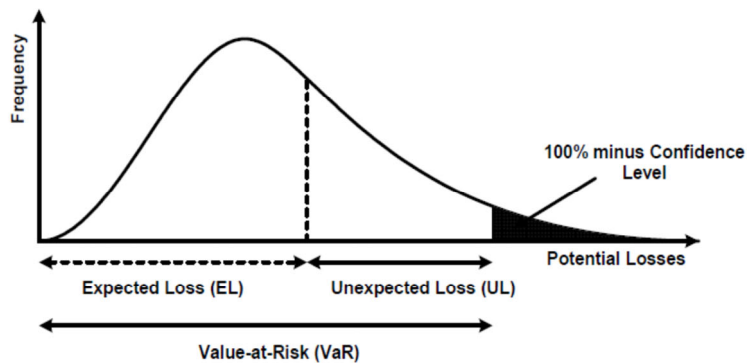


Source : Federal reserve, 2006,

[https://www.federalreserve.gov/generalinfo/basel2/draftnpr/npr/section\\_1.htm](https://www.federalreserve.gov/generalinfo/basel2/draftnpr/npr/section_1.htm)

Expected loss = espérance des pertes sur un portefeuille de crédit ; elle est en principe provisionnée. Les fonds propres doivent servir à absorber les pertes au-delà de ce niveau jusqu'au quantile de 99,9%





Source : An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions, 2005, <https://www.bis.org/bcbs/irbriskweight.pdf>

LGD : Loss Given Default, pourcentage de l'EAD (exposure at default) perdu en cas de défaut = 1 – RR (recovery rate, taux de recouvrement)

Expected loss = PD x LGD où PD = default probability

97

## Modèle structurel à plusieurs entreprises

- Dans l'approche selon les modèles internes (internal models) du comité de Bâle, les besoins en fonds propres réglementaires dérivent du calcul du quantile à 99,9% de la distribution des pertes (sur des portefeuilles de crédit)
- Pour un portefeuille homogène de crédits, cela fait intervenir la probabilité de défaut à un an (PD), la perte en cas de défaut (LGD) et un paramètre de corrélation entre les actifs servant de collatéral au crédit.
- L'approche du comité de Bâle suppose que les événements de défaut sont indépendants sachant un facteur de risque commun « latent »
  - Voir infra.
  - Plusieurs facteurs de risque pour le « trading book »

98

## Modèle structurel à plusieurs entreprises

- Théorème (Vasicek) : Quand le taux de recouvrement est nul et pour des portefeuilles « infiniment granulaires » (toutes les expositions individuelles tendent vers zéro) de nominal égal à 1,
- Il peut être démontré que les pertes agrégées peuvent être écrites comme :  $L = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - Z\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)$  où
  - $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$  : fonction de répartition de la loi normale
  - $Z$  : variable aléatoire normale centrée réduite
  - $\rho$  : paramètre de corrélation entre les valeurs des actifs
  - $\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - Z\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)$  probabilité conditionnelle de défaut sachant  $Z$

99

- On peut montrer que la fonction de répartition des pertes est donnée par :

$$P(L \leq x) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho} \times \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right)$$

- $L = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - Z\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)$
- $P\left(\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - Z\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right) \leq x\right) = P\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - Z\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \leq \Phi^{-1}(x)\right)$
- $= P\left(\Phi^{-1}(PD) - Z\sqrt{\rho} \leq \sqrt{1-\rho} \times \Phi^{-1}(x)\right)$
- $= P\left(-Z\sqrt{\rho} \leq \sqrt{1-\rho} \times \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(PD)\right)$
- $= P\left(-Z \leq \frac{\sqrt{1-\rho} \times \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right)$
- $= \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho} \times \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right)$



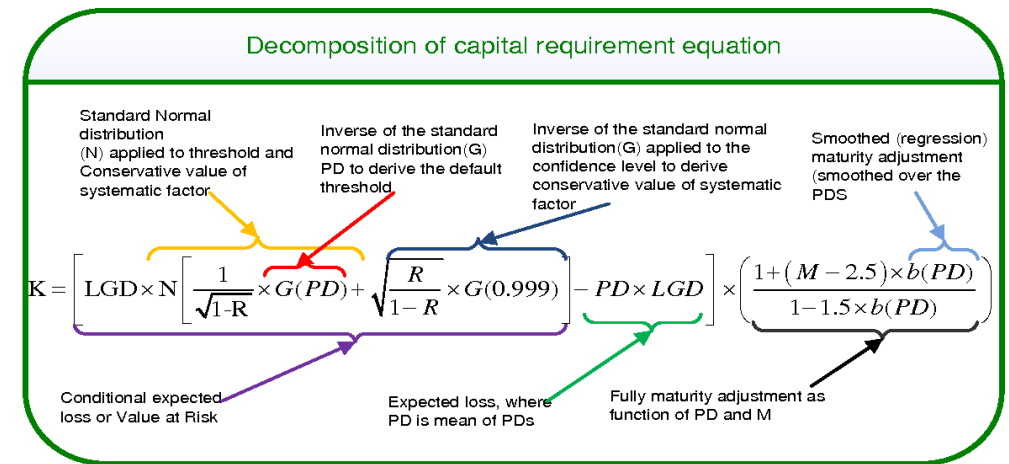
Oldrich Vasicek

100

## Modèle structurel à un facteur

- Le quantile à 99,9% de la distribution des pertes de crédit  $q_{99,9\%}$  est tel que :  $P(L \leq q_{99,9\%}) = 0,999$
- $q_{99,9\%} = \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{1-\rho}} + \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} \Phi^{-1}(0,999) \right)$ 
  - $\Phi \left( \frac{\sqrt{1-\rho} \times \Phi^{-1}(q_{99,9\%}) - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}} \right) = 0,999$
  - $\frac{\sqrt{1-\rho} \times \Phi^{-1}(q_{99,9\%}) - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}} = \Phi^{-1}(0,999)$
  - $\sqrt{1-\rho} \times \Phi^{-1}(q_{99,9\%}) = \Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho} \times \Phi^{-1}(0,999)$
  - $q_{99,9\%} = \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{1-\rho}} + \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} \Phi^{-1}(0,999) \right)$
- Modèle ASRF (Asymptotic Single Risk Factor)

101



Ici  $N(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$  et  $G = \Phi^{-1}$ .  $R$  est le paramètre de corrélation

102

## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises (sans participations croisées, prêts interbancaires ...)

- On va considérer deux entreprises  $a$  et  $b$  : on notera la valeur de leurs actifs  $A_{t,a}$  et  $A_{t,b}$ ,  $t = 0,1$ .
- De même les valeurs des dettes sont notées  $D_{t,a}$  et  $D_{t,b}$ ,  $t = 0,1$ , les taux d'intérêt nominaux  $i_a$  et  $i_b$ , les valeurs des actions  $E_{t,a}$  et  $E_{t,b}$ ,  $t = 0,1$
- $\ln \left( \frac{A_{1,a}}{A_{0,a}} \right) = \mu_a + \sigma_a U_a$ ,  $U_a \sim N(0,1)$
- Il y aura défaut de  $a$  si  $\{A_{1,a} < D_{0,a} \times (1 + i_a)\}$
- Les probabilités de défaut marginales de  $a$  et de  $b$  ont la même expression que précédemment
- Mais les probabilités de défaut jointes vont dépendre de la **corrélacion** entre les actifs des entreprises  $a$  et  $b$

103

## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

- Défaut joint de  $a$  et de  $b$  si  $A_{1,a}$  et  $A_{1,b}$  inférieurs au montant des dettes à rembourser
- $\{A_{1,a} < D_{0,a}(1 + i_a)\} \cup \{A_{1,b} < D_{0,b}(1 + i_b)\}$
- $\{\mu_a + \sigma_a U_a < \ln(D_{0,a}(1 + i_a)/A_{0,a})\} \cup \{\mu_b + \sigma_b U_b < \ln(D_{0,b}(1 + i_b)/A_{0,b})\}$
- $\left\{ U_a < \frac{\ln(D_{0,a}(1+i_a)/A_{0,a}) - \mu_a}{\sigma_a} \right\} \cup \left\{ U_b < \frac{\ln(D_{0,b}(1+i_b)/A_{0,b}) - \mu_b}{\sigma_b} \right\}$ 
  - $s_a = \frac{\ln(D_{0,a}(1+i_a)/A_{0,a}) - \mu_a}{\sigma_a}$  (seuil de défaut de  $a$ )
  - $s_b = \frac{\ln(D_{0,b}(1+i_b)/A_{0,b}) - \mu_b}{\sigma_b}$  (seuil de défaut de  $b$ )
  - $a$  et  $b$  sont en défaut si  $U_a < s_a$  et  $U_b < s_b$
- $p_a = P(U_a < s_a)$ ,  $p_b = P(U_b < s_b)$

104

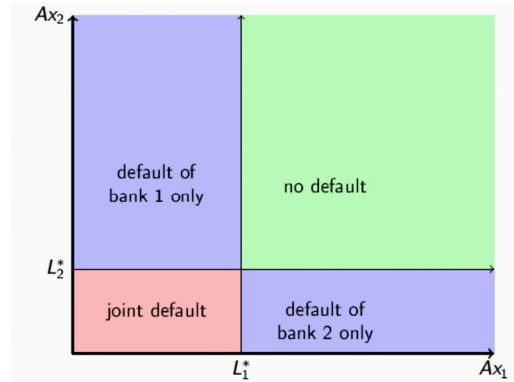
## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

- Remarque sur les probabilités marginales de défaut
- $p_a = P\left(U_a < \frac{\ln(D_{0,a}(1+i_a)/A_{0,a}) - \mu_a}{\sigma_a}\right)$
- $p_a = \Phi\left(\frac{\ln(D_{0,a}(1+i_a)/A_{0,a}) - \mu_a}{\sigma_a}\right)$
- La probabilité marginale de défaut  $p_a$  augmente avec le levier d'endettement  $D_{0,a}/A_{0,a}$ , augmente avec le taux nominal de la dette  $i_a$ , diminue avec la rentabilité attendue des actifs  $\mu_a$
- Si  $p_a \leq 50\%$  (cas le plus fréquent), une augmentation de la volatilité  $\sigma_a$  implique une augmentation de la probabilité de défaut

105

## Le modèle structurel avec plusieurs sociétés

- En abscisse la valeur des actifs de la banque 1, en ordonnée, la valeur des actifs de la banque 2
- $L_1^*, L_2^*$  correspondent à la valeur nominale des dettes à rembourser



- Ce graphique correspond à l'absence d'interconnexion (source Héam)

106

## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

- Probabilités marginales de défaut de  $a$  et de  $b$  :  $p_a, p_b$ 
  - $D_a = 1 \Leftrightarrow U_a < s_a, D_b = 1 \Leftrightarrow U_b < s_b$
  - $p_a = P(D_a = 1) = P(U_a < s_a),$
  - $p_b = P(D_b = 1) = P(U_b < s_b)$
- Corrélation de défaut:  $\rho_{ab}$ 
  - $\rho_{ab} = \frac{P(D_a=1, D_b=1) - p_a p_b}{\sqrt{p_a p_b (1-p_a)(1-p_b)}}$
  - $\rho_{ab} = \frac{P(U_a < s_a, U_b < s_b) - p_a p_b}{\sqrt{p_a p_b (1-p_a)(1-p_b)}}$
  - Pour des probabilités marginales de défaut données  $p_a, p_b$ , la corrélation de défaut ne dépend que de la probabilité de défaut jointe.

107

## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

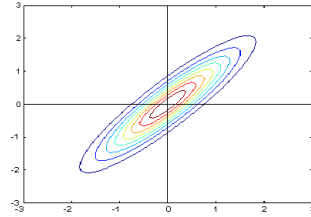
- Représentation de  $(U_a, U_b)$ 
  - $U_a = \sqrt{\rho} \times Z + \sqrt{1-\rho} \times Z_a, 0 \leq \rho \leq 1$
  - $U_b = \sqrt{\rho} \times Z + \sqrt{1-\rho} \times Z_b$
  - $Z, Z_a, Z_b$  : variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes
  - $Z$  : *facteur de risque commun* à  $a$  et  $b$
  - $Z$  peut être observable (cf risque de marché) ou latent
  - $Z_a, Z_b$  sont des risques spécifiques/idiosyncratiques à  $a$  et  $b$
- $(U_a, U_b)$  vecteur gaussien,  $U_a, U_b \sim N(0,1)$
- $E[U_a U_b] = \rho$ , coefficient de corrélation entre  $U_a$  et  $U_b$ 
  - Ici, on s'est limité à une corrélation positive.
- $\rho$  est la corrélation entre les rentabilités des actifs de  $a$  et de  $b$

108



## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

- Fonction de densité jointe de  $(U_a, U_b)$  :  $\varphi$
- $(u_a, u_b) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(u_a, u_b) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{u_a^2 - 2\rho u_a u_b + u_b^2}{2(1-\rho^2)}\right)$
- Courbes d'iso-densité  $\varphi(u_a, u_b) = \text{constante}$ 
  - $\Rightarrow u_a^2 - 2\rho u_a u_b + u_b^2 = c$  (ellipses)

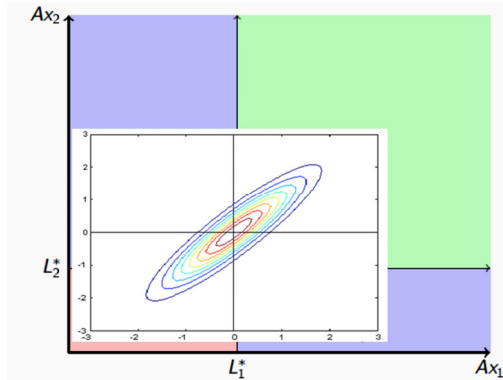


- Probabilité de défaut jointe des deux entités  $a$  et  $b$  :
  - $P_\rho(U_a < s_a, U_b < s_b) = \int_{-\infty}^{s_a} \int_{-\infty}^{s_b} \varphi(u_a, u_b) du_a du_b$
  - Fonction de répartition jointe tabulée dans Excel et tous les logiciels permettant de faire des calculs

109

## Le modèle structurel avec plusieurs sociétés

- En abscisse la valeur des actifs de la banque 1, en ordonnée, la valeur des actifs de la banque 2
  - Si la corrélation des actifs est positive, on se retrouvera moins souvent dans les zones mauves (un seul défaut)



110

## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

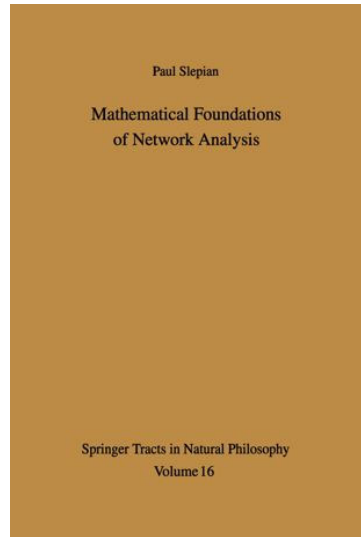
- Corrélation entre variables latentes  $U_a, U_b$  et probabilités jointes de défaut de  $a$  et  $b$
- $\rho > 0 \Rightarrow P_\rho(U_a < s_a, U_b < s_b) > P_\rho(U_a < s_a)P_\rho(U_b < s_b)$
- $P_\rho(U_a < s_a, U_b < s_b)$  : Probabilité de défaut de  $a$  et de  $b$ 
  - $p_a = P_\rho(U_a < s_a)$  : Probabilité de défaut de  $a$  (ne dépend pas de  $\rho$ )
  - $p_b = P_\rho(U_b < s_b)$  : Probabilité de défaut de  $b$
- Si  $\rho = 0$ ,  $U_a = Z_a$ ,  $U_b = Z_b$  :  $U_a$  et  $U_b$  sont deux variables gaussiennes indépendantes  $\Rightarrow$  les défauts de  $a$  et  $b$  sont indépendants
- $P_\rho(U_a < s_a) \times P_\rho(U_b < s_b)$  correspond à la probabilité jointe de défaut en cas d'indépendance.
- $\rho > 0 \Rightarrow$  Dépendance positive entre les événements de défaut

111

## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

- **Inégalité de Slepian** : dépendance des probabilités jointes de défaut en fonction du paramètre de corrélation  $\rho$
- $\rho < \rho' \Rightarrow P_\rho(U_a < s_a, U_b < s_b) < P_{\rho'}(U_a < s_a, U_b < s_b)$
- Une augmentation du paramètre de corrélation implique une augmentation de la probabilité de défaut jointe.
- $\rho < \rho' \Rightarrow P_\rho(U_a > s_a, U_b > s_b) < P_{\rho'}(U_a > s_a, U_b > s_b)$
- Augmentation également de la probabilité de survie (non-défaut) de  $a$  et  $b$ 
  - Cas bivarié (deux entreprises) : dépendance positive par quadrants
  - Cas multivarié (deux entreprises ou plus) :
    - dépendance positive par orthant supérieur (PLOU) dans le second cas (survie)
    - dépendance positive par orthant inférieure (PLOU) dans le premier cas (défaut)
  - Les inégalités précédentes restent vraies dans le cas multivarié

112



Joseph Slepian

## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

- Sachant  $Z$ , les événements de défaut sont indépendants
- Probabilités de défaut conditionnelles :  $P(U_a < s_a | Z)$ 
  - $= P(\sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho}Z_a < s_a | Z) = P\left(Z_a < \frac{s_a - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}} \mid Z\right) = \Phi\left(\frac{s_a - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right)$ ,  $\Phi$  fonction de répartition de la loi normale
  - De même  $P(U_b < s_b | Z) = \Phi\left(\frac{s_b - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right)$
- Remarque :
  - $p_a = P(U_a < s_a) = \Phi(s_a)$ , d'où  $s_a = \Phi^{-1}(p_a)$
  - Probabilité de défaut conditionnelle :  $\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_a) - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right)$
  - Egalité avec la perte  $L = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - Z\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)$  dans le modèle de Vasicek (voire

## Portefeuilles « infiniment granulaires »

- $N$  crédits de nominal  $\frac{1}{N}$ ,  $n$  défauts ( $n$  est aléatoire)
  - Même probabilité marginale de défaut :  $PD$
- $L = \frac{n}{N}$  fréquence des défauts
  - Proportion d'entreprises en défaut.
  - Perte sur le portefeuille si le taux de recouvrement est nul
- Rappel (loi des grands nombres en cas d'indépendance) : fréquence empirique converge vers probabilité (de défaut)
- Loi des grands nombres conditionnelle (en cas d'indépendance conditionnelle) : fréquence empirique converge vers la probabilité conditionnelle de défaut
- $L = \frac{n}{N} \rightarrow \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - Z\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)$  quand  $N \rightarrow \infty$

## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

- Sachant  $Z$ , les événements de défaut sont indépendants
- Probabilités de défaut conditionnelles :  $P(U_a < s_a | Z)$ 
  - $= P(\sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho}Z_a < s_a | Z) = P\left(Z_a < \frac{s_a - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}} \mid Z\right) = \Phi\left(\frac{s_a - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right)$ ,  $\Phi$  fonction de répartition de la loi normale
  - De même  $P(U_b < s_b | Z) = \Phi\left(\frac{s_b - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right)$
  - $P(U_a < s_a, U_b < s_b | Z) = P\left(Z_a < \frac{s_a - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}, Z_b < \frac{s_b - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}} \mid Z\right) = P\left(Z_a < \frac{s_a - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}} \mid Z\right) \times P\left(Z_b < \frac{s_b - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}} \mid Z\right) = \Phi\left(\frac{s_a - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right) \Phi\left(\frac{s_b - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right)$
  - $P(U_a < s_a, U_b < s_b) = E\left[\Phi\left(\frac{s_a - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right) \Phi\left(\frac{s_b - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right]$
  - $P(U_a < s_a, U_b < s_b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Phi\left(\frac{s_a - \sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right) \Phi\left(\frac{s_b - \sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

- $P(U_a < s_a, U_b < s_b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Phi\left(\frac{s_a - \sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right) \Phi\left(\frac{s_b - \sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ 
  - *Le modèle s'étend facilement à un nombre quelconque d'entreprises (ou entités juridiques pouvant faire défaut)*
  - *Intégrale à une dimension : calculs plus simples*
- Modèle de base utilisé par les agences de notation pour la titrisation tranchée (CLO, Collateralized Loan Obligations)
- Par les banques et les banques centrales pour quantifier le risque de crédit, notamment corporate :
  - *Exigences en fonds propres (pilier 1 de Bâle 2 et 3),*
  - *Stress-tests Fed ou EBA*
- Parfois critiqué, car sous-estime les probabilités jointes de nombreux défauts et donc l'incidence des crises financières systémiques

117

## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

- Autre construction possible des variables latentes  $(U_a, U_b)$ 
  - $U_a = \beta_a \times Z + \sqrt{1 - \beta_a^2} \times Z_a$
  - $U_b = \beta_b \times Z + \sqrt{1 - \beta_b^2} \times Z_b$ 
    - $-1 \leq \beta_a, \beta_b \leq 1$
  - $Z, Z_a, Z_b$  : variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes
  - $\beta_a, \beta_b$  : sensibilité de la rentabilité des actifs de a et de b
  - $E[U_a U_b] = \beta_a \beta_b$  : coefficient de corrélation entre  $U_a$  et  $U_b$ 
    - $\beta_a \beta_b$  : corrélation entre les rentabilités des actifs de a et de b
  - Si  $\beta_a, \beta_b \geq 0$ , quand  $Z$  prend des valeurs négatives, a et b tendent à faire défaut en même temps
  - Le modèle précédent : cas particulier avec  $\beta_a = \beta_b = \sqrt{\rho}$

118

## Le modèle structurel avec plusieurs entreprises

- **Inégalité de Slepian** (suite) : dépendance des probabilités jointes de défaut en fonction des paramètres  $\beta_a, \beta_b$ 
  - *On suppose  $\beta_a, \beta_b \geq 0$*
  - *Si  $\beta_a \uparrow$  ou  $\beta_b \uparrow$ , la corrélation entre les rentabilités des actifs  $\beta_a \beta_b$  augmente*
- $\beta_a < \beta'_a$  ou  $\beta_b < \beta'_b \Rightarrow P_{\beta_a, \beta_b}(U_a < s_a, U_b < s_b) < P_{\beta'_a, \beta'_b}(U_a < s_a, U_b < s_b)$
- $\beta_a < \beta'_a$  ou  $\beta_b < \beta'_b \Rightarrow P_{\beta_a, \beta_b}(U_a > s_a, U_b > s_b) < P_{\beta'_a, \beta'_b}(U_a > s_a, U_b > s_b)$ 
  - *Mêmes interprétations que dans le cadre précédent : Augmentation de la probabilité de défaut jointe, ainsi que de la probabilité de survie jointe.*
  - *La propriété reste vraie pour plus de deux entreprises*

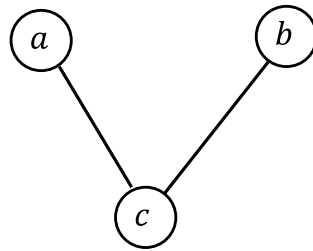
119

120



## Contagion et indépendance conditionnelle

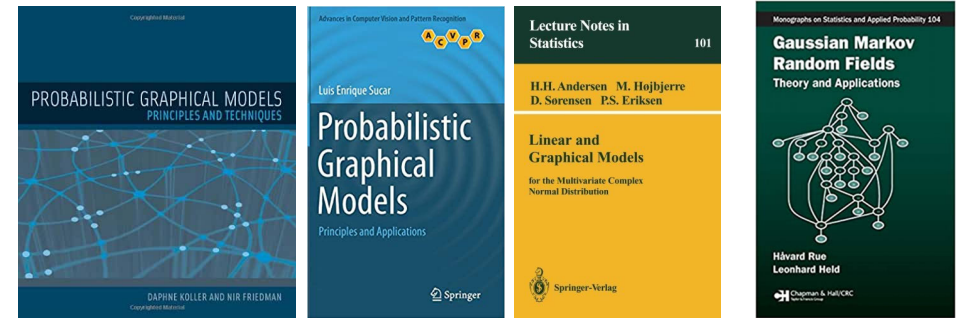
- On va supposer que  $a, b, c$  représentent trois entités pouvant chacune être en défaut ou pas.
- $D_i, i \in \{a, b, c\}$  correspond aux indicatrices de défaut,  $D_i = 1$  si  $i$  est en défaut,  $D_i = 0$  si  $i$  n'est pas en défaut
- L'état du système est caractérisé par le triplet  $(D_a, D_b, D_c)$
- Le réseau ci-dessous est non orienté :  $a$  et  $b$  ne sont pas liés directement, mais uniquement par l'intermédiaire de  $c$



121

## Contagion et indépendance conditionnelle

- « modèles graphiques » ou modèles graphiques probabilistes
  - Associer théorie des graphes et probabilités
  - Nœuds associés à des variables aléatoires : indicatrices de défaut.
  - Champs aléatoires de Markov, réseaux de croyance, réseaux probabilistes, réseaux d'indépendance probabiliste, réseaux bayésiens.
  - On part des probabilités conditionnelles : approches bayésiennes, insistance sur les relations et les interdépendances



122

## Contagion et indépendance conditionnelle

- $(D_a, D_b, D_c)$  peut prendre  $2^3$  valeurs  $d_a, d_b, d_c = 0, 1$ .
- Le réseau précédent peut représenter :
  - Un groupe d'affaires avec une chaîne de création de valeur non intégrée verticalement
  - Un ensemble de banques liées par des relations de prêt et d'emprunt
- $a$  et  $b$  connectés uniquement par l'intermédiaire de  $c$  :
- $P(D_a = d_a | D_c = d_c, D_b = d_b) = P(D_a = d_a | D_c = d_c)$ .
  - Sachant si  $c$  est en défaut, il n'est pas utile de connaître l'état de  $b$ , pour évaluer la probabilité de défaut de  $a$ .
- **Propriété dite de Markov** : Le défaut de  $a$  ne dépend que l'état des entités avec lesquels il est **directement connecté** (ses « voisins »), ici  $c$ 
  - Remarque : pour que la définition soit cohérente, il faut que  $P(D_b = d_b | D_c = d_c, D_a = d_a) = P(D_b = d_b | D_c = d_c)$

123

## Contagion et indépendance conditionnelle

- Preuve de l'équivalence entre :
  - $P(D_a = d_a | D_c = d_c, D_b = d_b) = P(D_a = d_a | D_c = d_c)$
  - $P(D_b = d_b | D_c = d_c, D_a = d_a) = P(D_b = d_b | D_c = d_c)$ 
    - L'égalité  $P(D_a = d_a | D_c = d_c, D_b = d_b) = P(D_a = d_a | D_c = d_c)$  peut se réécrire comme :
 
$$\frac{P(D_a=d_a, D_c=d_c, D_b=d_b)}{P(D_c=d_c, D_b=d_b)} = \frac{P(D_a=d_a, D_c=d_c)}{P(D_c=d_c)}$$
    - L'égalité précédente peut se réécrire comme :
 
$$\frac{P(D_a=d_a, D_c=d_c, D_b=d_b)}{P(D_a=d_a, D_c=d_c)} = \frac{P(D_c=d_c, D_b=d_b)}{P(D_c=d_c)}$$
    - En utilisant à nouveau les définitions des probabilités conditionnelles, on peut écrire l'égalité précédente comme
      - $P(D_b = d_b | D_c = d_c, D_a = d_a) = P(D_b = d_b | D_c = d_c)$
      - Ce qui montre l'équivalence

124

## Contagion et indépendance conditionnelle

- La propriété de Markov peut aussi s'écrire comme :
- $P(D_a = d_a, D_b = d_b | D_c = d_c) = P(D_a = d_a | D_c = d_c) \times P(D_b = d_b | D_c = d_c)$ 
  - *Indépendance des défauts de a et de b sachant le défaut de c*
    - $P(D_a = d_a, D_b = d_b | D_c = d_c) = \frac{P(D_a=d_a, D_b=d_b, D_c=d_c)}{P(D_c=d_c)}$
    - On a :  $P(D_a = d_a, D_b = d_b, D_c = d_c) = P(D_a = d_a | D_b = d_b, D_c = d_c) \times P(D_b = d_b, D_c = d_c)$
    - $P(D_a = d_a | D_c = d_c, D_b = d_b) = P(D_a = d_a | D_c = d_c)$  (Markov)
    - Donc  $P(D_a = d_a, D_b = d_b | D_c = d_c) = \frac{P(D_a=d_a | D_c=d_c) \times P(D_b=d_b, D_c=d_c)}{P(D_c=d_c)}$
    - Comme  $\frac{P(D_b=d_b, D_c=d_c)}{P(D_c=d_c)} = P(D_b = d_b | D_c = d_c)$ , on obtient  $P(D_a = d_a, D_b = d_b | D_c = d_c) = P(D_a = d_a | D_c = d_c) \times P(D_b = d_b | D_c = d_c)$ , ce qu'on voulait démontrer

125

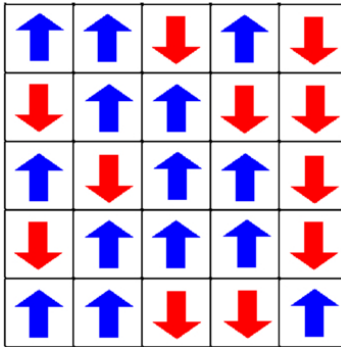
## Contagion et indépendance conditionnelle

- Probabilités de défaut jointes
  - $P(D_a = 1, D_b = d_b, D_c = d_c) = P(D_a = 1 | D_b = d_b, D_c = d_c) \times P(D_c = 1 | D_b = d_b) \times P(D_b = d_b)$ 
    - Grâce à la propriété de Markov,
    - $P(D_a = 1, D_b = d_b, D_c = d_c) = P(D_a = 1 | D_c = d_c) \times P(D_c = 1 | D_b = d_b) \times P(D_b = d_b)$
    - *L'accent est mis sur les probabilités conditionnelles*
- La probabilité de défaut marginale de l'entité a se calcule à partir des probabilités de défaut jointes
  - $P(D_a = 1) = \sum_{d_b, d_c=0,1} P(D_a = 1, D_b = d_b, D_c = d_c)$
  - *Calculs plus complexes car il faut sommer sur tous les états « non a »*
  - *La propriété de Markov permet de diminuer le nombre de calculs*

126

## Le modèle d'Ising

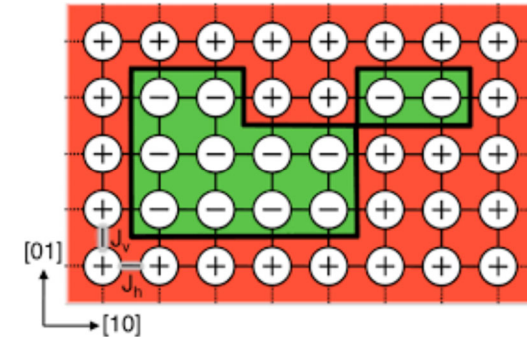
- Modèle d'Ising dans le plan : initialement utilisé pour l'analyse du ferromagnétisme et de l'aimantation



129

## Contagion (propagation des défauts)

- Propagation des défauts (en vert) dans un réseau
  - Les défauts se propagent, ce qui amène à ce qu'un groupe d'entreprises fortement connectées soit en défaut.
  - Les groupes en vert et en rouge forment des clusters
    - Ensemble connexe d'entités toutes dans le même état.



130

## Le modèle d'Ising

- Écriture du modèle
- $P(D_i = d_i, i = 1, \dots, n) = \frac{\exp(H(d_1, \dots, d_n))}{Z}$
- Où  $H(d_1, \dots, d_n) = \sum_i B_i d_i + \sum_{i < j} m_{ij} d_i d_j$  est le « Hamiltonien »
- $B_i$   $i = 1, \dots, n$  et  $m_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i < j$  sont des paramètres positifs
- $Z = E[\exp(H(D_1, \dots, D_n))]$  est la « fonction de partition »
- Si les  $m_{ij}$  (termes de « couplage ») sont nuls les défauts sont indépendants.
- On peut relier les  $B_i$  à des probabilités intrinsèques de défaut  $p_i$

131

## Le modèle d'Ising

- Si  $m_{ij} > 0$ , alors on a une connexion directe entre les entreprises  $i$  et  $j$
- Plus  $m_{ij}$  est élevé, plus l'intensité de la connexion (liens d'affaires) entre  $i$  et  $j$  est élevée
- Mais même si  $m_{ij} = 0$ , on peut avoir des connexions indirectes
- On peut montrer que les probabilités marginales de défaut  $P(D_i = 1)$  sont plus faibles qu'en cas d'indépendance
- L'appartenance à un réseau interconnecté augmente la résilience de chacun de ses membres.

132



## Dépendance positive entre risques

- **Définition** : Soit une fonction  $f: x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ .  $f$  est dite **supermodulaire** si  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) + f(y) \leq f(x \vee y) + f(x \wedge y)$ , où  $x \vee y = (\max(x_1, y_1), \dots, \max(x_n, y_n))$  et  $x \wedge y = (\min(x_1, y_1), \dots, \min(x_n, y_n))$
- **Propriété** : si  $f$  est deux fois différentiable, alors  $f$  est supermodulaire si et seulement si  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ .
  - Tous les éléments non diagonaux de la matrice hessienne sont positifs.
- **Définition** : Soit une fonction  $f: x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ .  $f$  est dite « Multivariate Totally Positive of Order 2 » (MTP2) si  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x)f(y) \leq f(x \vee y)f(x \wedge y)$ , où  $x \vee y = (\max(x_1, y_1), \dots, \max(x_n, y_n))$  et  $x \wedge y = (\min(x_1, y_1), \dots, \min(x_n, y_n))$ 
  - Remarque :  $f$  est supermodulaire si et seulement si  $\exp(f)$  est MTP2
  - Si  $f$  est MTP2 et à valeurs dans  $\mathbb{R}^{++}$ ,  $\ln(f)$  est supermodulaire. Les fonctions MTP2 sont parfois appelées log-supermodulaires.
    - Karlin & Rinott (1980). Classes of orderings of measures and related correlation inequalities. I. Multivariate totally positive distributions. *Journal of Multivariate Analysis*

133

## Dépendance positive entre risques

- **Définition** : Des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont dites **(positivement) associées** si pour toutes fonctions croissantes  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$ , où  $X = (X_1, \dots, X_n)$  (quand les espérances impliquées dans le calcul de  $\text{Cov}(f(X), g(X))$  sont bien définies
  - Esary, Proschan & Walkup (1967). Association of random variables, with applications. *The Annals of Mathematical Statistics*.
- **Remarques** :
  - $f$  croissante, si  $x = (x_1, \dots, x_n) \leq y = (y_1, \dots, y_n) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ , où  $x \leq y$  signifie :  $x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n$  (ordre partiel usuel sur  $\mathbb{R}^n$ )
  - $\text{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0 \Leftrightarrow E[f(X)g(X)] - E[f(X)]E[g(X)] \geq 0$
  - Supposons que  $X$  admet une fonction de densité jointe :  $\varphi: x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^+$ , avec  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ , et  $P(X \in A) = \int_A \varphi(x) dx$ . Alors l'inégalité précédente s'écrit comme
  - $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\varphi(x) dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx\right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x) dx\right)$

134

## Inégalité FKG et probabilités jointes de défaut

- **Remarques (suite)** :
  - Soit  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , fonctions décroissantes,  $-f, -g$  sont croissantes
  - $E[f(X)g(X)] = E[(-f(X)) \times (-g(X))] \geq E[-f(X)]E[-g(X)] = E[f(X)]E[g(X)]$
  - On peut donc remplacer  $f, g$  croissantes par  $f, g$  décroissantes dans la définition de l'association positive.
- **Remarques (suite) : cas gaussien**
  - Si  $X$  est un vecteur gaussien, centré ( $E[X] = 0$ ) et si les composantes de  $X$  sont positivement associées, il en est de même pour  $-X$
  - En effet, la loi de  $-X$  est égale à la loi de  $X$  (symétrie de la densité)
- **Théorème (FKG Inequality)** : Si  $X_1, \dots, X_n$  admettent une densité jointe MTP2, alors elles sont positivement associées
  - Pour le cas général : Sarkar (1969). *Some lower bounds of reliability*
  - Pour le cas discret : Fortuin, Kasteleyn, & Ginibre (1971). Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Communications in Mathematical Physics*

135

## Inégalités FKG et probabilités jointes de défaut

- **Exercice** : Utiliser l'inégalité FKG pour montrer que les corrélations de défaut sont positives dans le modèle structurel et dans le modèle d'Ising
  - **Préliminaire** :
    - Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$ . On dit que  $A$  est monotone, si  $x \in A$  et  $x \leq x' \Rightarrow x' \in A$
    - Exemple :  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  est monotone
    - Si  $A$  est monotone, alors  $f: x \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(x) = 1_A(x) \in \mathbb{R}$  est croissante (rappel  $1_A(x) = 1$  si  $x \in A$  et  $1_A(x) = 0$ , sinon.
    - Soit  $A, B$  monotones,  $P(X \in A \cap B) = E[1_{A \cap B}(X)] = E[1_A(X)1_B(X)] \geq E[1_A(X)] \times E[1_B(X)] = P(X \in A) \times P(X \in B)$
  - **Cas gaussien : exemple avec trois noms  $a, b, c$** 
    - Défaut de  $a, b, c$  :  $U_i < s_i, i = a, b, c$ .  $U_i = \beta_i Z + \sqrt{1 - \beta_i^2} \times Z_i$
    - $0 \leq \beta_a, \beta_b, \beta_c \leq 1$
    - $Z, Z_a, Z_b, Z_c$  : variables gaussiennes centrées réduites indépendantes

136

## Inégalités FKG et probabilités jointes de défaut

- Cas gaussien (suite)
  - On a déjà vu que  $U = (U_a, U_b, U_c)$  était MTP2
    - Modèle monotone à un facteur
  - Défaut de  $a, b, c : -U_i > -s_i, i = a, b, c$
  - $A = \{(x_a, x_b, x_c) \in \mathbb{R}^3, x_a > -s_a\}$  est monotone.
    - On définit  $B, C$  de la même manière.
    - $B = \{(x_a, x_b, x_c) \in \mathbb{R}^3, x_b > -s_b\}, C = \{(x_a, x_b, x_c) \in \mathbb{R}^3, x_c > -s_c\}$
    - $B, C$  sont aussi monotones, de même que  $A \cap B \cap C, A \cap B, A \cap C, B \cap C$
  - On a :  $P(-U \in A \cap B) \geq P(-U \in A) \times P(-U \in B)$ 
    - Probabilité de défaut jointe de  $a$  et de  $b$  est supérieure au produit des probabilités marginales (donc corrélation de défaut entre  $a$  et  $b$  positive)
  - On a des propriétés similaires pour des groupes de défaut
    - $P(-U \in A \cap B \cap C) \geq P(-U \in A \cap B) \times P(-U \in C)$

137

## MTP2 et croissance conditionnelles

- Propriété : Les distributions MTP2 **coïncident** avec les distributions **conditionnellement croissantes**
  - Karlin & Rinott (1980), Sarkar (1969)
  - Müller, & Scarsini (2000). Some remarks on the supermodular order. Journal of Multivariate Analysis
- Définition (croissance conditionnelle) : Un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est conditionnellement croissant si  $E[\phi(X_J), J \subset \{1, \dots, n\} | X_I, I = \{1, \dots, n\} \setminus J]$  est croissant en  $X_I$  pour toute fonction croissante  $\phi$  (telle que les espérances sont bien définies)
- *Exercice : étudier les corrélations conditionnelles de défaut dans le modèle structurel gaussien à un facteur*

138

## Dépendance positive entre risques

- Karlin & Rinott (1980) donnent de nombreux exemples de lois de probabilités MTP2
- Les lois de probabilités du modèle d'Ising sont MTP2
  - Lebowitz (1972). Bounds on the correlations and analyticity properties of ferromagnetic Ising spin systems. Communications in Mathematical Physics.
- Démonstration
  - La log-vraisemblance est (à une constante près) le hamiltonien soit  $H(d_1, \dots, d_n) = \sum_i B_i d_i + \sum_{i < j} m_{ij} d_i d_j$
  - Soit  $i \neq j, \frac{\partial^2 H}{\partial a_i \partial a_j} = m_{ij}$
  - $H(d_1, \dots, d_n)$  est log-supermodulaire si et seulement si  $m_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$ 
    - Remarque : la supermodularité sur  $\mathbb{R}^n$  implique la supermodularité sur  $\{0,1\}^n$
- Si  $m_{ij} = 0$  (absence de lien direct entre  $i$  et  $j$ ),  $D_i$  et  $D_j$  sont indépendants sachant  $\{D_k, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}\}$ 
  - Indépendance conditionnelle ou propriété de Markov

139

## Le modèle d'Ising

- Probabilités conditionnelles de défaut  $P(D_i = 1 | D_j = 1)$  sont supérieures aux probabilités marginales  $P(D_i = 1)$ 
  - Contagion
- Si une intensité de connexion  $m_{kl}$  augmente, alors toutes les probabilités marginales  $P(D_i = 1)$  diminuent.
  - Une augmentation de l'interconnexion améliore la résilience individuelle
- Si une intensité de connexion  $m_{kl}$  augmente, alors toutes les probabilités de défaut jointes  $P(D_i = 1, D_j = 1)$  augmentent.
  - Les défauts groupés sont plus fréquents dans les réseaux fortement interconnectés

140

## *Le modèle d'Ising*

- Changement de phase : « single risk »
  - *Pour des niveaux très élevés de connectivité, il n'y a plus que deux états, aucune entreprise en défaut ou toutes les entreprises en défaut (single risk)*
- Quand on augmente les paramètres  $B_i$  (ce qui correspond à un choc externe), on observe une déformation des distributions des pertes
  - *Au-delà d'un certain niveau du choc externe, tout le monde fait défaut : effondrement du système*
  - *La résilience du réseau à un choc externe diminue avec la connectivité dans le réseau.*
  - *Voir transparent suivant*

141

## *Contagion : modèle de Davis et Lo (à compléter)*

- **Le modèle de « défauts infectieux » de Davis et Lo**
  - *Davis & Lo (2001). Infectious defaults.*
    - *Ecriture du modèle*
    - *Augmentation du risque ?*

142

143

144

## Dépendance positive: modèle structurel

- Définition : une  $M$  –matrice est telle que tous ses éléments non-diagonaux sont négatifs.
  - Dénomination due à Ostrowki (1937) en l'honneur de Minkowski qui avait commencé à étudier ces matrices
- Cas gaussien : une distribution gaussienne multivariée de matrice de variance-covariance  $\Sigma$  est MTP2 si et seulement si  $\Sigma^{-1}$  est une  $M$  –matrice
  - Sarkar (1969), Bolviken (1982), Barlow & Proschan (1975), Karlin & Rinott (1983)
  - **Démonstration**
    - Notons  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  la densité d'une loi normale multivariée en  $(x_1, \dots, x_n)$
    - $\ln(\varphi(x_1, \dots, x_n)) = -\frac{1}{2}(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu) + \text{constante}$
    - Les dérivées secondes  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}, i \neq j$  sont égales à  $-\Sigma_{ij}^{-1}$
    - $\ln \varphi$  supermodulaire ssi  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0, i \neq j$ , cad  $\Sigma_{ij}^{-1} \leq 0$ , cad  $\Sigma^{-1}$   $M$  –matrice
    - Démonstration équivalente à celle du modèle d'Ising : Lauritzen et al (2019)

145

## Dépendance positive: modèle structurel

- **Corrélations partielles** (cas gaussien) : soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un vecteur gaussien. La corrélation partielle entre  $X_i$  et  $X_j$  sachant  $\{X_k, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}\}$  est la corrélation entre les résidus des régressions linéaires de  $X_i$  et  $X_j$  sur les  $X_k, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ 
  - Si la corrélation partielle entre  $X_i$  et  $X_j$  et les  $X_k, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$  est nulle, il y a indépendance entre  $X_i$  et  $X_j$  sachant  $X_k, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ . On note :  $X_i \perp X_j | X_k, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ 
    - Indépendance et nullité des corrélations des résidus sont équivalents dans le cas gaussien multivarié
    - La relation entre corrélation partielle est matrice de variance covariance est précisée plus loin
- Si une distribution gaussienne est MTP2 alors toutes les corrélations partielles sont positives (ou nulles)
  - Karlin & Rinott (1983), Lebowitz (1972), Fallat et al (2017).

146

## Éléments de théorie : modèle structurel

- Reprenons le cas du modèle structurel bivarié
  - Résultats aussi valables dans le cas multivarié
  - $U_a = \beta_a \times Z + \sqrt{1 - \beta_a^2} \times Z_a$
  - $U_b = \beta_b \times Z + \sqrt{1 - \beta_b^2} \times Z_b$ 
    - $0 \leq \beta_a, \beta_b \leq 1$
    - On a un modèle à un facteur et il y a une dépendance monotone (ici croissante) de  $U_a, U_b$  par rapport au facteur
    - *Monotone unidimensional latent variable models* (Junker & Ellis (1997))
- Dans ce cas la densité de  $(U_a, U_b)$  est MTP2.
  - Holland & Rosenbaum (1986). Conditional association and unidimensionality in monotone latent variable models. *The Annals of Statistics*
  - Rosenbaum (1984). Testing the conditional independence and monotonicity assumptions of item response theory. *Psychometrika*
  - La matrice de variance-covariance est donc une  $M$  – matrice

147

## Éléments de théorie : modèle structurel

- Dans le cas gaussien, on a des résultats supplémentaires sur l'accroissement de la dépendance entre les valeurs des actifs.
  - Cela permet d'avoir une théorie de la diversification des risques
  - Et de ses incidences sur la valeurs des actions et des dettes
  - Plus de diversification des risques à l'actif est bénéfique pour les créanciers, mais pas pour les actionnaires
  - Conforme à l'évolution des stratégies des entreprises
  - On peut raisonner au niveau de l'entreprise (ses actifs) ou au niveau des actions (choix de portefeuille, fusions-acquisitions)
  - Les périodes de crise vont induire des changements dans les corrélations entre actifs et affecter les valeurs des actions et des dettes
- **Définition (ordre supermodulaire)** : Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  et  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  deux vecteurs aléatoires, on dit que  $X \prec_{sm} Y$  au sens de l'ordre supermodulaire si  $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$  pour toute fonction  $f$  supermodulaire

148



## Éléments de théorie : modèle structurel

- **Propriété** : Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  et  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  deux vecteurs aléatoires gaussiens de même espérance  $\mu$  et de matrices de variance-covariance  $\Sigma_X \leq \Sigma_Y$ , alors  $X <_{sm} Y$ 
  - Müller, & Scarsini (2000). Some remarks on the supermodular order. *Journal of Multivariate Analysis*
- **Corollaire** : dans le modèle structurel gaussien, une augmentation du coefficient de corrélation  $\rho$ , ou une augmentation des sensibilités aux facteurs de risque  $\beta_a, \beta_b$  entraîne une augmentation de la dépendance au sens de l'ordre supermodulaire
- **Corollaire** : Augmentation du risque à l'actif des banques. Soit un portefeuille constitué de prêts aux entreprises  $a$  et  $b$  :  $D^\rho = D_a + D_b$ , alors  $\rho \leq \rho' \Rightarrow D^\rho <_{cx} D^{\rho'}$

149

## Covariance selection models

- Dempster, A. P. (1972). Covariance selection. *Biometrics*, 157-175.
- L'idée sous-jacente est que dans le cas d'un grand nombre de rentabilités d'actifs, il y a des redondances.
- On peut donc prévoir assez bien une donnée manquante,
  - *La variance conditionnelle d'une rentabilité sachant les autres rentabilités est très faible (cf algorithmes d'imputation de données manquantes)*
- Présence de nombreux termes proches de zéros dans l'inverse de la matrice de variance-covariance des rentabilités
- Elle est (presque) creuse (sparse matrix)



Arthur Dempster

150

## Covariance selection models

- Supposons que l'on a trois actifs  $a, b, c$  de rentabilités (centrées).
  - On considère le modèle à un facteur  $Z$ 

$$\begin{cases} r_a = Z + Z_a \\ r_b = Z + Z_b \\ r_c = Z \end{cases}$$
    - Avec  $Z, Z_a, Z_b$  variables gaussiennes, centrées, réduites indépendantes
- Matrice de variance-covariance et son inverse données par :
  - $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ , On appelle aussi  $\Sigma^{-1}$ , matrice de précision, notée  $P$
  - On remarque la nullité des termes  $p_{ab}$  et  $p_{ba}$ .
  - On remarque aussi que  $P$  est une  $M -$  matrice

151

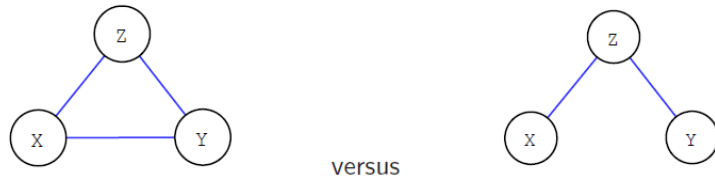
## Covariance selection models

- On remarque que  $r_a = Z + Z_a$  et  $r_b = Z + Z_b$  sont conditionnellement indépendants sachant  $r_c = Z$
- Corrélation partielle (sachant  $r_c$ ) entre  $r_a$  et  $r_b$  = corrélation des résidus des régressions linéaires de  $r_a$  et  $r_b$  sur  $r_c$
- Corrélation partielle liée à l'inverse de la matrice de variance-covariance  $\Sigma^{-1}$  ou à la matrice de précision  $\Sigma^{-1} = P = (p_{ij})$
- Corrélation partielle de  $i, j | k \neq i, j$  :  $-\frac{p_{ij}}{\sqrt{p_{ii} \times p_{jj}}}$ 
  - Si  $p_{ij}$  est négatif, alors la corrélation partielle est positive
  - Si  $p_{ij}$  est nul, alors la corrélation partielle est nulle
  - Importance des termes non diagonaux de  $P = \Sigma^{-1}$
  - On rappelle qu'une matrice  $P$  est une  $M -$  matrice si tous ses éléments non diagonaux sont négatifs

152

## Covariance selection models

- Corrélation partielle nulle veut dire que deux entités ne sont liées entre elles que par l'intermédiaire d'autres entités : pas de lien direct



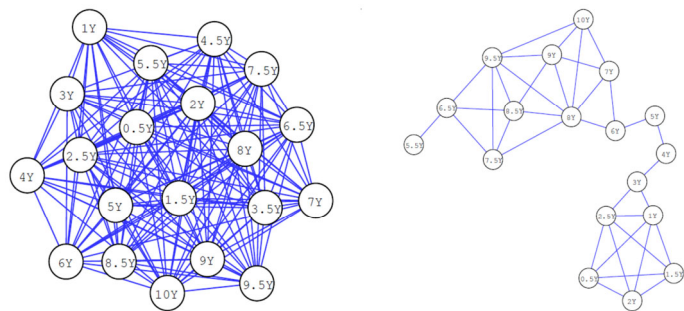
A droite : corrélation partielle nulle entre  $x$  et  $y$  sachant  $z$

153

## Covariance selection models

- Estimateur du maximum de vraisemblance d'une matrice de variance covariance sous la contrainte que des termes de la matrice inverse est simple (Dempster)
- $\Rightarrow$  estimations plus robustes, matrices mieux conditionnées quand le nombre d'actifs par rapport au nombre d'observations est élevé
  - Détermination des corrélations partielles nulles : Maximum de vraisemblance plus pénalisations des termes non nuls de la matrice inverse (LASSO)
    - d'Aspremont, A. Sparse Covariance Selection using Semidefinite Programming.
    - Friedman, Hastie, and Tibshirani (2007). Sparse inverse covariance estimation with the graphical lasso.
    - Meinshausen & Bühlmann (2006). High-dimensional graphs and variable selection with the lasso

154



D'Aspremont et al, Sparse Covariance Selection using Semidefinite Programming

- Autre approche : maximisation de la vraisemblance sous contrainte de  $M$  matrice pour la matrice de variance covariance
  - Agrawal, Roy & Uhler (2019). Covariance matrix estimation under total positivity for portfolio selection.
  - Lauritzen, Uhler & Zwiernik (2019). Maximum likelihood estimation in Gaussian models under total positivity.
  - Les termes de la matrice de précision sont négatifs ou nuls et la parcimonie vient de la saturation des contraintes.

155

## Rentabilités boursières : dépendance positive ?

Ex: 2016 Monthly correlations of global stock markets (*InvestmentFrontier.com*)

$$S = \begin{pmatrix} \text{Nasdaq} & \text{Canada} & \text{Europe} & \text{UK} & \text{Australia} \\ 1.000 & 0.606 & 0.731 & 0.618 & 0.613 \\ 0.606 & 1.000 & 0.550 & 0.661 & 0.598 \\ 0.731 & 0.550 & 1.000 & 0.644 & 0.569 \\ 0.618 & 0.661 & 0.644 & 1.000 & 0.615 \\ 0.613 & 0.598 & 0.569 & 0.615 & 1.000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Nasdaq} \\ \text{Canada} \\ \text{Europe} \\ \text{UK} \\ \text{Australia} \end{matrix}$$

Ex: 2016 monthly correlations of global stock markets (*InvestmentFrontier.com*)

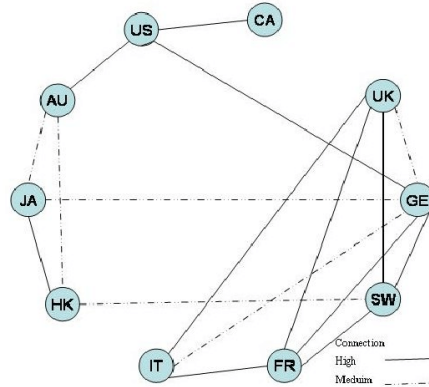
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Nasdaq} & \text{Canada} & \text{Europe} & \text{UK} & \text{Australia} \\ 2.629 & -0.480 & -1.249 & -0.202 & -0.490 \\ -0.480 & 2.109 & -0.039 & -0.790 & -0.459 \\ -1.249 & -0.039 & 2.491 & -0.675 & -0.213 \\ -0.202 & -0.790 & -0.675 & 2.378 & -0.482 \\ -0.490 & -0.459 & -0.213 & -0.482 & 1.992 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Nasdaq} \\ \text{Canada} \\ \text{Europe} \\ \text{UK} \\ \text{Australia} \end{matrix}$$

La matrice de variance-covariance des rentabilités est une  $M -$  matrice. Source : Agrawal, Roy, & Uhler (2019). Covariance Matrix Estimation under Total Positivity for Portfolio Selection .

156

## Covariance selection models

- Abdelwahab, Amor, & Abdelwahed (2008). The analysis of the interdependence structure in international financial markets by graphical models. *International research journal of finance and economics*, 15(2), 1-306.



The partial correlation graph for the international financial stock returns data

157

## Détermination des liens à partir de données boursières

- Mao, K. (2009). *Two models for Bayesian supervised dimension reduction* (Doctoral dissertation, Duke University, Durham).

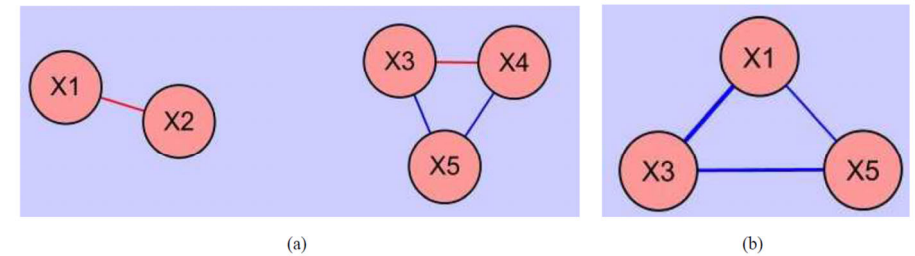
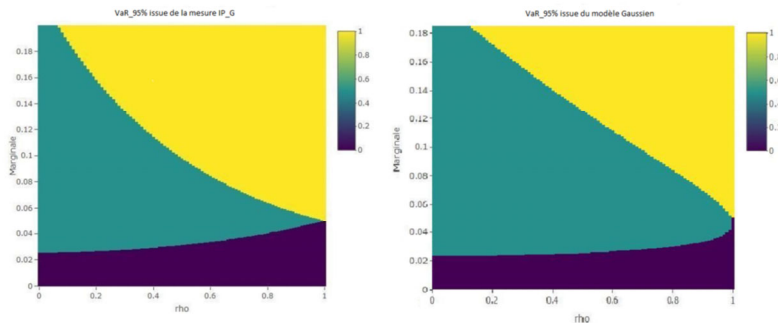


Figure 11: Graphical models inferred from the (a) the covariance matrix of the explanatory variables and (b) the gradient outer product matrix. Each node represents a variable and each edge indicates conditional dependence. The distance of the edge is inversely proportional to the amount of dependence, the thickness of the edge is proportional to the certainty of the inference and blue edges are negative while red edges are positive.

158

## Modèle d'Ising et modèle structurel gaussien

- Comparaison entre modèles où les rentabilités des actifs suivent des lois normales et le modèle d'Ising



- Pour un niveau de connectivité donné, dans le modèle d'Ising, on observe le changement de phase (effondrement du système) pour des chocs plus faibles que dans le cas gaussien

159

## Pour aller plus loin sur les modèles graphiques : mini cours de Caroline Uhler

Mini-course - Probabilistic Graphical Models:  
A Geometric, Algebraic and Combinatorial Perspective

Caroline Uhler

Lecture 1: Graphical Models and Markov Properties

CIMI Workshop on Computational Aspects of Geometry  
Toulouse

November 6, 2019

160

## Positive dependence and $MTP_2$ distributions

- A distribution (i.e. density function)  $p$  on  $\mathcal{X} = \prod_{v \in V} \mathcal{X}_v$ , with  $\mathcal{X}_v \subseteq \mathbb{R}$  discrete or open subset, is **multivariate totally positive of order 2** ( $MTP_2$ ) if

$$p(x)p(y) \leq p(x \wedge y)p(x \vee y) \quad \text{for all } x, y \in \mathcal{X},$$

where  $\wedge$  and  $\vee$  are applied coordinate-wise.

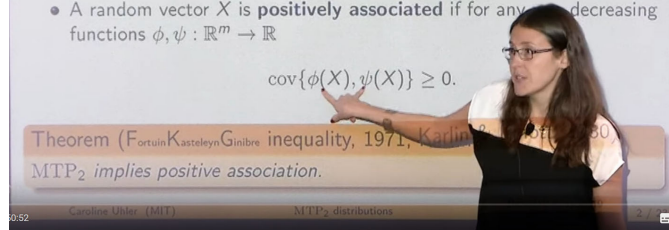
- A random vector  $X$  is **positively associated** if for any increasing functions  $\phi, \psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{cov}\{\phi(X), \psi(X)\} \geq 0.$$

Theorem (Fortuin-Kasteleyn-Ginibre inequality, 1971, Karlin & Rubin, 1960)  
 $MTP_2$  implies positive association.



Caroline Uhler (MIT)



"Your Dreams May Come True with  $MTP_2$ " : vidéo de présentation au Simons Institute de Berkeley

<https://simons.berkeley.edu/talks/your-dreams-may-come-true-mtp2>

## Sur les distributions $MTP_2$

UNIVERSITY OF COPENHAGEN DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Faculty of Science



## Total positivity in Markov structures

Steffen Lauritzen<sup>1</sup>  
 Department of Mathematical Sciences

[https://en.wikipedia.org/wiki/Steffen\\_Lauritzen](https://en.wikipedia.org/wiki/Steffen_Lauritzen)

CRM, Montreal, July 2016  
 Slide 1/27

<sup>1</sup>based on joint work with Shaun Fallat, Kayvan Sadeghi, Caroline Uhler, Nanny Wermuth, and Piotr Zwiernik (arXiv:1510.01290)

