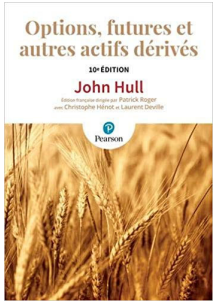
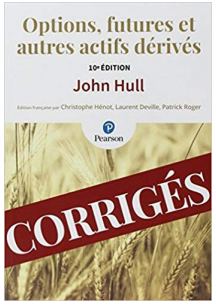
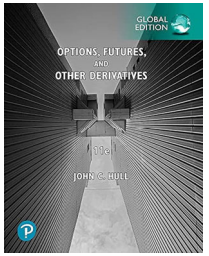
Rappels

Bibliographie

- Ouvrage sur les options
  - *Hull : options, futures et autres actifs dérivés*
  - *Traduction en français*
  - *Présentation pédagogique*
  - *Voir chapitres 9, 10, 11, puis le chapitre 14 sur les stock-options*
    - Certains exercices en fin de chapitre sont repris dans les transparents
- Cours de Thomas Bouvet - M1 Finance « Options en finance d'entreprise » :
  - http://tbouvetm1.blogspot.com/



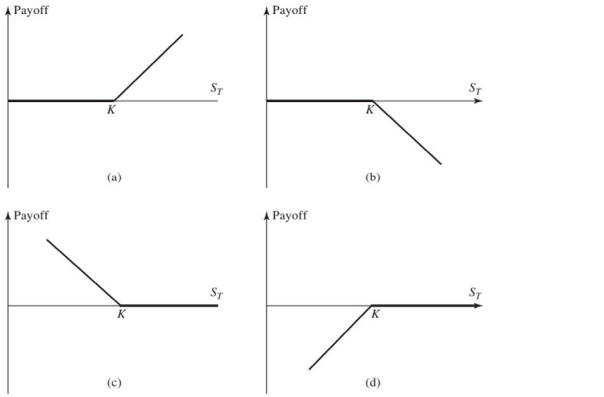




Rappels sur les options (calls et puts) dans le contexte du modèle structurel de Merton

- Extraits du livre de John Hull
  - *Hull, Options, futures, and other derivatives, 11th edition.*

Figure 10.5 Payoffs from positions in European options: (a) long call; (b) short call; (c) long put; (d) short put. Strike price = K; price of asset at maturity = S_T.



Rappels sur les options (calls et puts) dans le contexte du modèle structurel de Merton

- Hull, *Options, futures, and other derivatives, 11th edition.*

payoff from a long position in a European call option is

$$\max(S_T - K, 0)$$

This reflects the fact that the option will be exercised if $S_T > K$ and will not be exercised if $S_T \leq K$. The payoff to the holder of a short position in the European call option is

$$-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$$

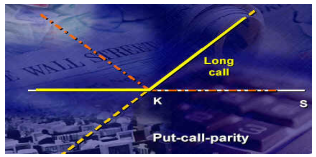
The payoff to the holder of a long position in a European put option is

$$\max(K - S_T, 0)$$

and the payoff from a short position in a European put option is

$$-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$$

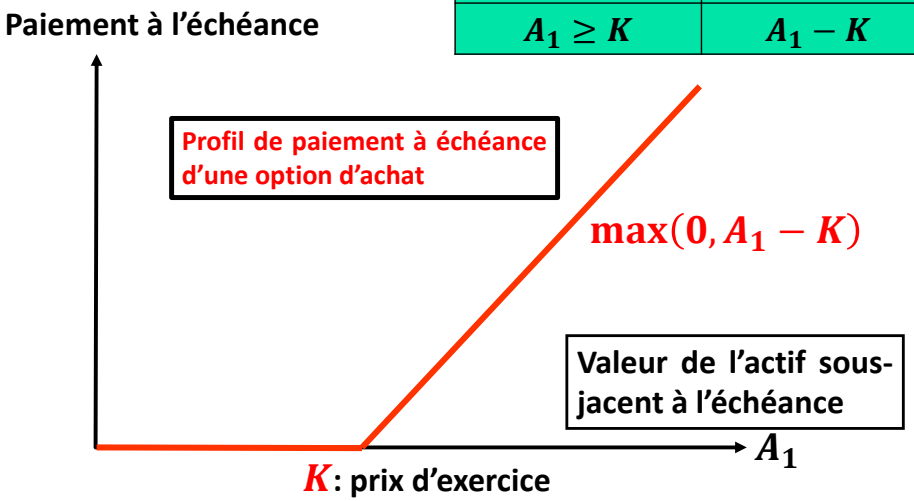
Achat d'options d'achat (calls) et de vente (puts)



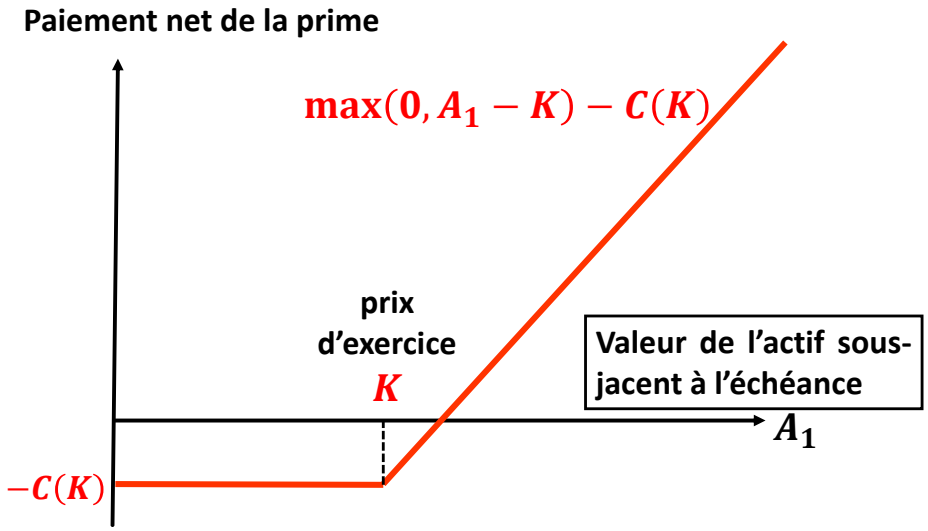
- Options d'achat et de vente de date d'exercice donnée
  - Ici $\boldsymbol{t = 1}$
  - On parlera de date d'exercice ou d'échéance
- De prix d'exercice $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^+$
- Sous-jacent, valeur de l'actif de l'entreprise $\boldsymbol{A_1} \in \mathbb{R}^+$
- Option d'achat (call) :
  - Paiement en $\boldsymbol{t = 1}$: $\boldsymbol{(A_1 - K)^+ \triangleq \max(A_1 - K, 0)}$
  - Prime (valeur de l'option) en $\boldsymbol{t = 0}$: $\boldsymbol{C(K)}$
- Option de vente (put) de prix d'exercice $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^+$
  - Paiement $\boldsymbol{(K - A_1)^+ \triangleq \max(K - A_1, 0)}$
  - Prime (valeur de l'option) en $\boldsymbol{t = 0}$: $\boldsymbol{P(K)}$

Achat de Call : profil de paiement à échéance

Condition d'exercice	Revenu du call à l'échéance
$A_1 \leq K$	0
$A_1 \geq K$	$A_1 - K$

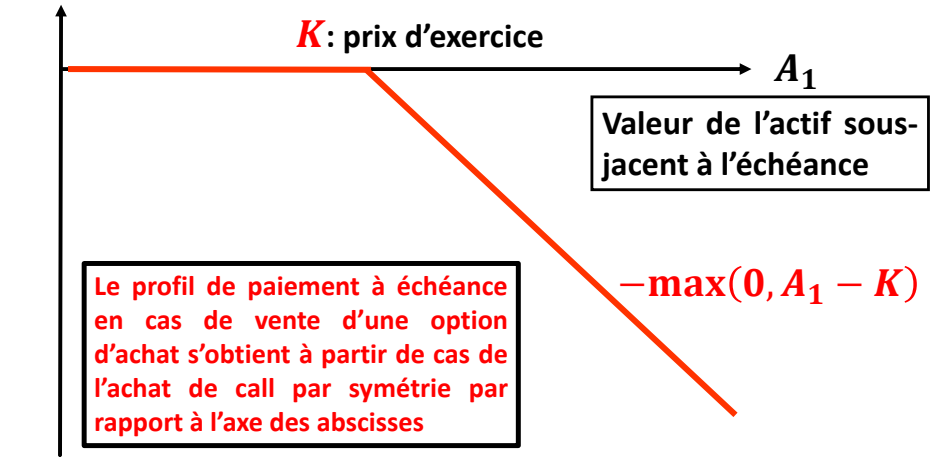


Achat de Call : profil de gain



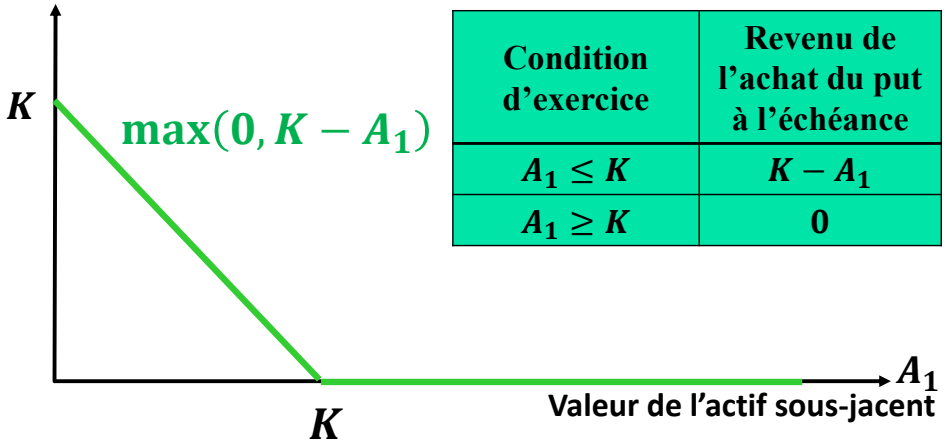
Vente de Call : profil de paiement à échéance

Condition d'exercice	Revenu de la vente du call à l'échéance
$A_1 \leq K$	0
$A_1 \geq K$	$K - A_1$



Achat de put

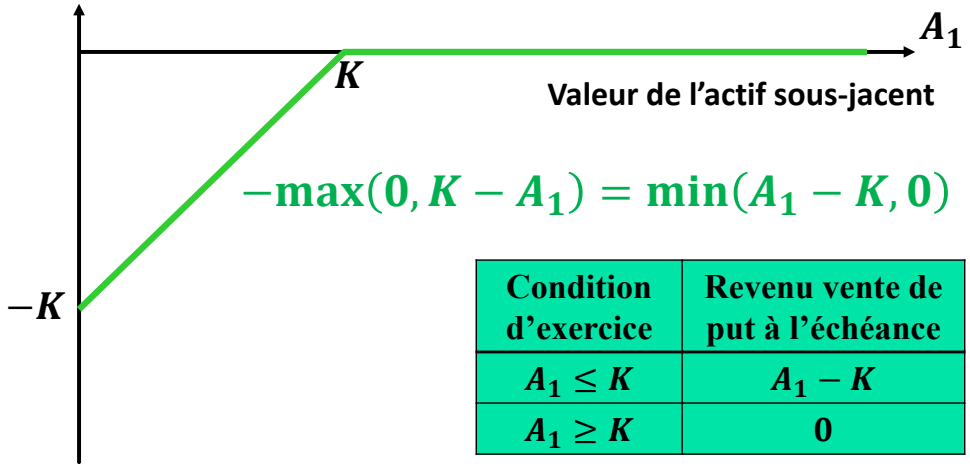
- Représentation graphique : profil de paiement de l'achat du put à l'échéance $t = 1$



Condition d'exercice	Revenu de l'achat du put à l'échéance
$A_1 \leq K$	$K - A_1$
$A_1 \geq K$	0

Vente de put

- Profil de paiement de la **vente du put** à l'échéance $t = 1$

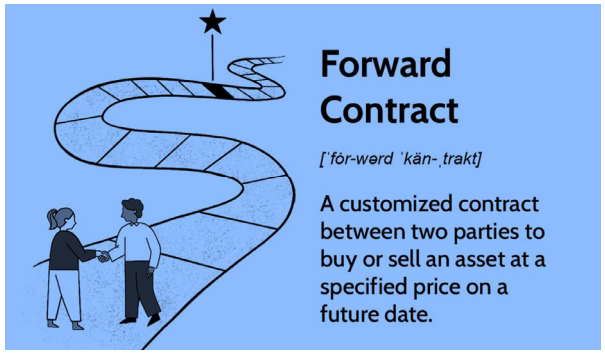


Condition d'exercice	Revenu vente de put à l'échéance
$A_1 \leq K$	$A_1 - K$
$A_1 \geq K$	0

Exercice : Contrat à terme

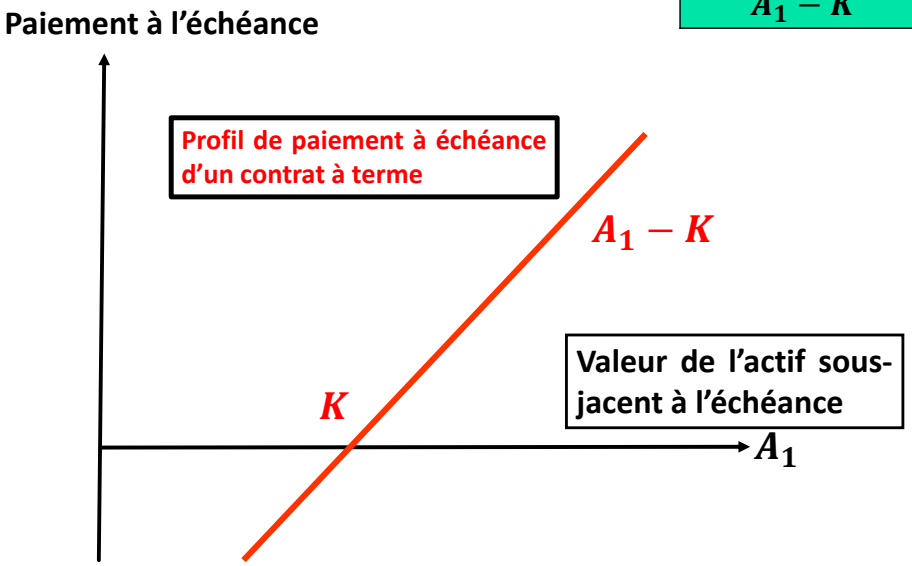
Contrat à terme

- On suppose par la suite que l'actif sous-jacent ne verse pas de dividende entre la date courante et l'échéance du contrat
- On ne prend pas en compte d'éventuels dépôts de garantie ou appels de marge en vue de gérer le risque de contrepartie



Contrat à terme : paiement à échéance

Revenu du contrat à terme à l'échéance
$A_1 - K$



Contrat à terme : évaluation

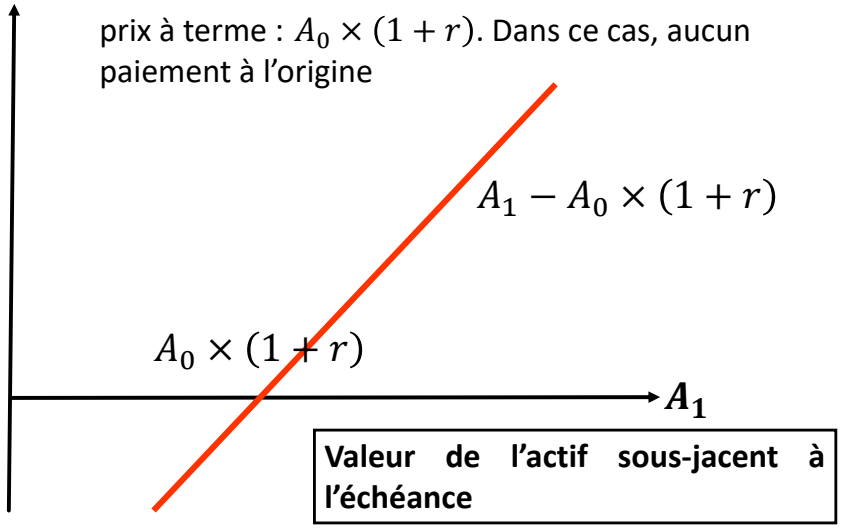
- *On parle aussi de contrat « forward »*
- *On suppose que l'actif sous-jacent ne verse pas de dividende entre les dates* 0 *et* 1.

- Le paiement du contrat à terme peut être dupliqué en achetant l'actif sous-jacent et en empruntant $\frac{K}{1+r}$
  - *r est le taux d'intérêt entre la date courante et l'échéance (ou maturité) du contrat à terme*
  - *En effet, en revendant l'actif sous-jacent à échéance, on reçoit A_1*
  - *En remboursant l'emprunt, on paye $\frac{K}{1+r} \times (1+r) = K$*
  - *On reçoit en net, à l'échéance $A_1 - K$*
- Le coût de duplication du paiement du contrat à terme est $A_0 - K/(1+r)$

Contrat à terme : prix à terme

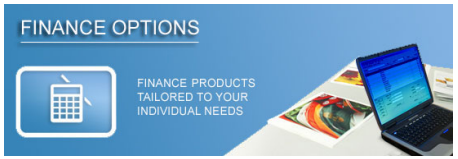
Revenu du contrat à terme à l'échéance
$A_1 - A_0 \times (1 + r)$

Paiement à l'échéance



Exercice : call spread

Exercice : call spread



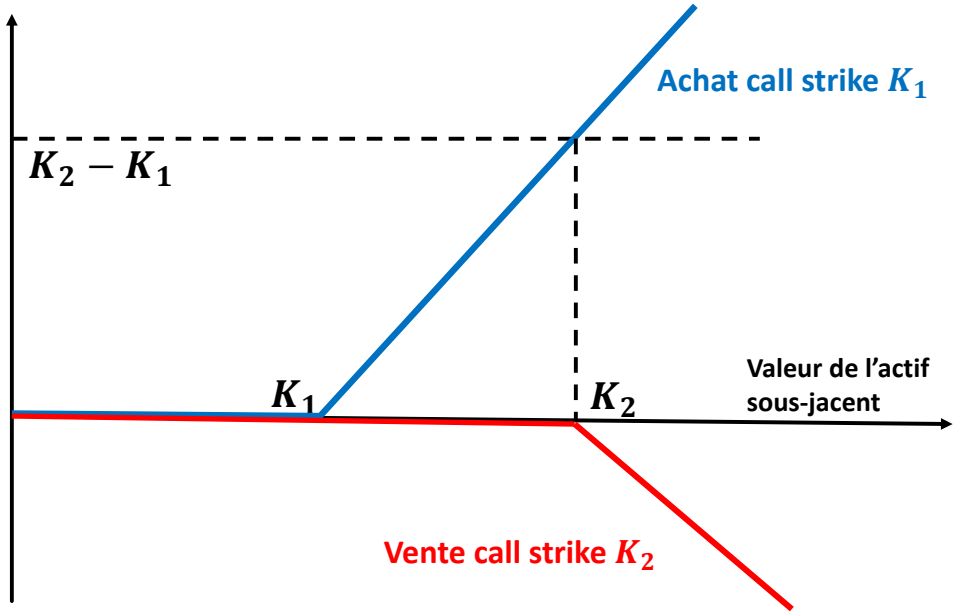
- Achat d'un call de strike K_1 et vente d'un call de strike $K_2, K_2 > K_1$
  - *Les deux calls ont la même date d'exercice*
  - *Le paiement à l'échéance du call spread est égal à* $\max(A_1 - K_1, 0) - \max(A_1 - K_2, 0)$
  - *Représenter de manière algébrique et graphique les profils de gain à échéance*

Exercice : call spread

- Achat d'un call de strike K_1 et vente d'un call de strike $K_2, K_2 > K_1$
  - *Les deux calls ont la même date d'exercice*
  - *Le paiement à l'échéance du call spread est égal à* $\max(A_1 - K_1, 0) - \max(A_1 - K_2, 0)$
  - *Représentation algébrique du gain à échéance*

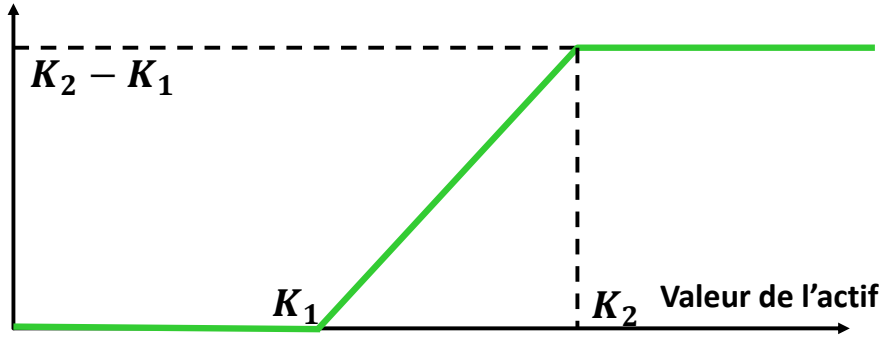
Prix d'exercice	Revenu du call acheté à l'échéance	Revenu du call vendu à l'échéance	Revenu global à l'échéance
$A_1 \leq K_1$	0	0	0
$K_1 < A_1 < K_2$	$A_1 - K_1$	0	$A_1 - K_1$
$A_1 \geq K_2$	$A_1 - K_1$	$-A_1 + K_2$	$K_2 - K_1$

call spread : approche géométrique



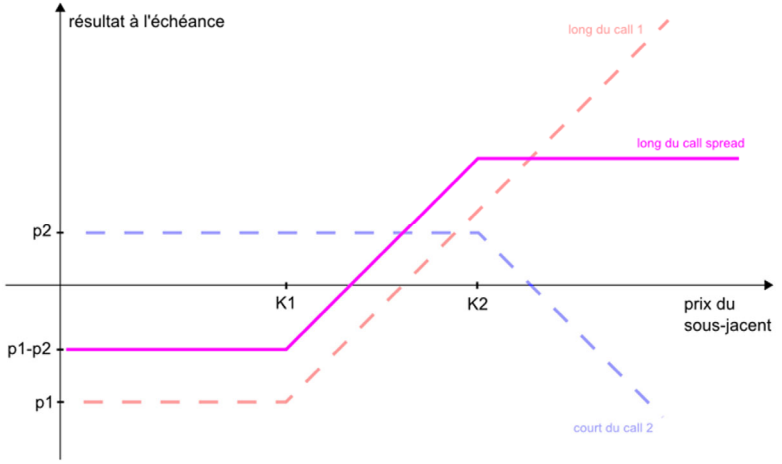
Exercice : call spread

- Profil de risque du call spread
  - *Représentation graphique, approche géométrique*

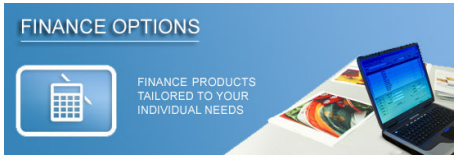


Exercice : call spread

- Call spread : achat de call, vente de call de strike supérieur
  - *Source du graphique : Wikipedia (le graphique représente les paiements nets des primes payées ou encaissées)*



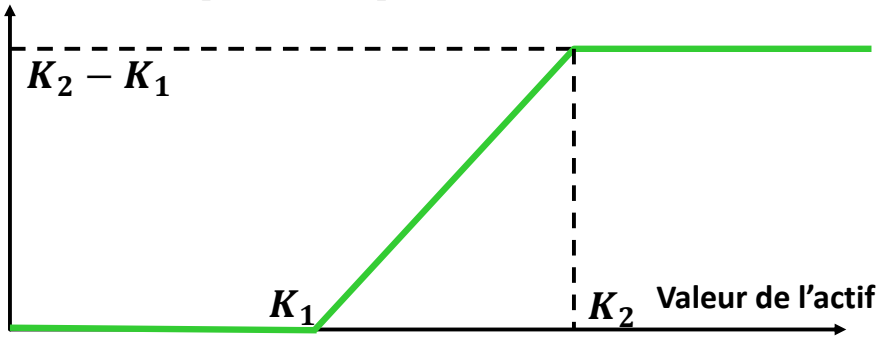
Exercice sur les options



- Exercice sur les options
  - *Montrer que la fonction $K \to C(K)$ est décroissante*
  - *$C(K)$ est la prime d'une option d'achat de strike K*
    - La date d'exercice est donnée.

Exercice sur les options

- Profil de risque du call spread



  - *Comme le paiement de ce portefeuille est positif, le prix de constitution de ce portefeuille également*
  - *Prix du call spread $C(K_1) - C(K_2) \geq 0$, soit $C(K_1) \geq C(K_2)$*
  - *Le profil de paiement est celui de la dette mezzanine*

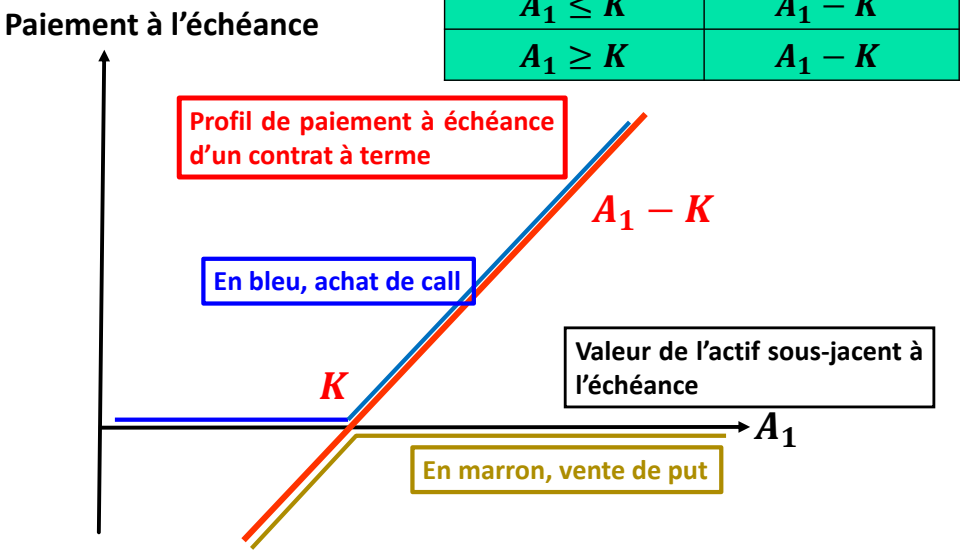
Exercice : relation de parité call – put (conversion)

Exercice : relation de parité call – put (conversion)

- Démontrer la relation de parité call-put :
- $C(K) - P(K) = A_0 - K/(1+r)$
  - *Taux sans risque de défaut entre* $t = 0$ *et* $t = 1$ *noté* r
  - $C(K) - P(K)$ *correspond au montant à investir pour constituer un portefeuille constitué de l'achat d'une option d'achat et de la vente d'une option de vente*
  - $A_0 - K/(1+r)$ *correspond au montant à investir pour constituer un portefeuille constitué de l'achat du sous-jacent et d'un emprunt dont le montant à rembourser en* $t = 1$ *est égal à* K

Relation de parité call-put

(Pas de) condition d'exercice	Revenu du contrat à terme à l'échéance
$A_1 \leq K$	$A_1 - K$
$A_1 \geq K$	$A_1 - K$



Achat de call, vente de put

	Date 0		Date 1
Prime du Call	$C(K)$	Paiement du call à échéance	$(A_1 - K)^+$
Prime du Put	$P(K)$	Paiement du put à échéance	$(K - A_1)^+$
Prime achat call, vente put	$C(K) - P(K$	Achat call, vente put : paiement à échéance	$(A_1 - K)^+ - (K - A_1)^+ = A_1 - K$

- ***En rouge, paiements connus à la date 0***
- ***En bleu, paiements aléatoires (A_1 est une variable aléatoire)***
- $(A_1 - K)^+ - (K - A_1)^+ = A_1 - K$ ***(voir graphique)***

Exercice : relation de parité call – put

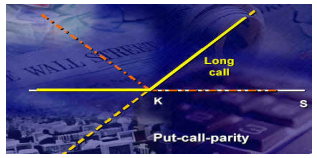
- Tableau des paiements à échéance
  - *Achat du call, vente du put*

Condition d'exercice	Achat du call	Vente du put	Revenu global à l'échéance
$A_1 \leq K$	0	$-K + A_1$	$A_1 - K$
$A_1 \geq K$	$A_1 - K$	0	$A_1 - K$

  - *Achat de l'action, emprunt de* $K/(1+r)$

	Achat de l'action	Emprunt de $K/(1+r)$	Revenu global à l'échéance
$A_1 \leq K$	A_1	$-K$	$A_1 - K$
$A_1 \geq K$	A_1	$-K$	$A_1 - K$

Exercice : relation de parité call – put



- Exercice : relation de parité call – put (suite)
  - $C(K) - P(K)$ *correspond au montant à investir pour constituer un portefeuille constitué de l'achat d'une option d'achat et de la vente d'une option de vente*
  - *Le paiement associé à ce portefeuille est* $(A_1 - K)^+ - (K - A_1)^+ = A_1 - K$
  - *Un portefeuille constitué de l'achat du sous-jacent et d'un emprunt au taux risque* r *d'un montant* $K/(1+r)$ *génère au moment de sa liquidation un flux net de* $A_1 - K$
    - Identique au flux précédent
  - *Le flux net à décaisser en* $t = 0$ *est* $A_0 - K/(1+r)$
  - *Les deux portefeuilles générant le même paiement en* $t = 1$ *doivent avoir la même valeur en* $t = 0$*, d'où le résultat*

Relation de parité call-put

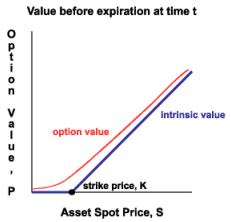
- Pourquoi parle-t-on de relation de « parité » ?
- Si $K = A_0 \times (1+r)$
  - $A_0 \times (1+r)$ *prix à terme du sous-jacent en l'absence de paiement de dividende*
  - $K = A_0 \times (1+r)$ $\Leftrightarrow$ *Prix d'exercice = prix à terme du sous-jacent*
  - *Alors* $C(K) = P(K)$
  - *« Parité » entre les primes des calls et des puts quand le prix d'exercice (strike) est égal au prix à terme*

relation de parité call – put

- La relation de parité call – put est liée à la décomposition du passif en actions et dette
  - $C(K) - P(K) = A_0 - K/(1+r)$ *peut se réécrire* $C(K) + K/(1+r) - P(K) = A_0$
  - $C(K) = E_0$
    - Option d'achat sur les actifs = fonds propres
    - Ici, $K = D_0 \times (1+i)$
  - $K/(1+r) - P(K) = D_0$
    - Valeur de marché de la dette risquée D_0 = dette sans risque $K/(1+r)$ - valeur du put ($P(K)$)
    - Relation entre actions, dette et actif à la date $t = 0$
  - *À la date* $t = 1$ *:*
  - $A_1 = \max(0, A_1 - K) + \min(A_1, K) = E_1 + D_1$

Exercice : Valeur intrinsèque et valeur temps

Exercice : Valeur intrinsèque et valeur temps



- Considérons une option d'achat de strike K
  - *Le paiement à l'échéance est* $(\boldsymbol{A_1 - K})^+ = \mathbf{max}(\boldsymbol{A_1 - K}, \mathbf{0})$
  - *Si l'option pouvait être exercée immédiatement, le paiement serait* $(\boldsymbol{A_0 - K})^+ = \mathbf{max}(\boldsymbol{A_0 - K}, \mathbf{0})$
  - *On appelle cette quantité la* ***valeur intrinsèque*** *de l'option*
  - *La différence entre la prime de l'option* $\boldsymbol{C(K)}$ *et la valeur intrinsèque* $(\boldsymbol{A_0 - K})^+$ *est la* ***valeur temps****.*
  - *Montrer que la valeur temps d'une option d'achat est toujours (strictement) positive*
    - Dans les exercices sur les options, il n'y a pas de distributions de dividende avant ou à la date d'exercice
    - Conseil : utiliser la relation de parité call - put

La valeur temps d'une option d'achat est positive (si le taux sans risque est positif)

- Démonstration
  - *La prime de l'option est positive* $\boldsymbol{C(K) \geq 0}$
  - *D'après la relation de parité* $\boldsymbol{C(K) = P(K) + A_0 - K/(1+r)}$
  - *Comme* $\boldsymbol{P(K) \geq 0}$, $\boldsymbol{C(K) \geq A_0 - K/(1+r)}$
  - ***Supposons que le taux sans risque*** $\boldsymbol{r}$ ***est positif***
  - *Alors,* $\boldsymbol{A_0 - K/(1+r) \geq A_0 - K}$
  - $\boldsymbol{C(K) \geq A_0 - K \Rightarrow C(K) \geq \mathbf{max}(A_0 - K, 0) = (A_0 - K)^+}$
  - *Le terme de droite est la valeur intrinsèque de l'option d'achat*
    - On peut montrer que la valeur temps augmente avec le **risque total** de l'actif (voir transparents sur augmentation du risque)
    - Si les actionnaires peuvent augmenter ce risque, ils augmentent la valeur de marché des actions (aléa moral, conflits d'agence de l'endettement)

Exercice : dette subordonnée

Exercice : Dette subordonnée

- Dettes junior et senior
  - *La dette junior (ou subordonnée) est remboursée avant les actions, mais après la dette senior.*
  - *Priorité de paiement pour les créances senior par rapport aux créances subordonnées.*
  - D_0^S, i_S *montant et taux nominal de la dette senior*
  - D_0^J, i_J *montant et taux nominal de la dette subordonnée*
  - $\boldsymbol{K_1 = \max\left(0, A_1 - D_0^S \times (1 + i_S) - D_0^J \times (1 + i_J)\right)}$
  - *Les actionnaires récupèrent les actifs, après remboursement des dettes senior et junior, si cette somme nette est positive. Ils ne récupèrent rien si l'actif ne permet pas de rembourser les créanciers en priorité*

Dette subordonnée

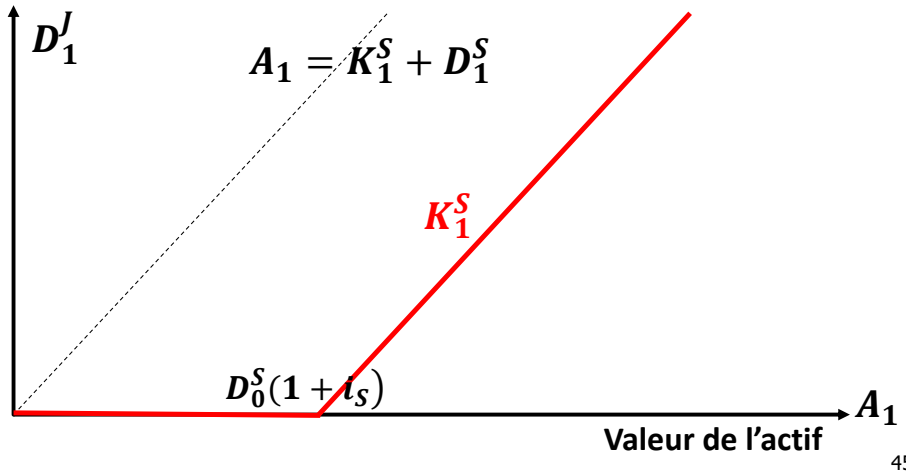
- Dette senior
  - *La dette senior est remboursée normalement dès que la valeur de l'actif* $\boldsymbol{A_1}$ *est supérieure à* $\boldsymbol{D_0^S \times (1 + i_S)}$
  - *Sinon les créanciers seniors récupèrent* $\boldsymbol{A_1}$
  - $\boldsymbol{D_1^S = \min\left(A_1, D_0^S \times (1 + i_S)\right)}$
- Dette junior
  - *La dette junior peut commencer à être remboursée quand la dette senior est totalement remboursée*
    - Si $\boldsymbol{A_1 > D_0^S \times (1 + i_S)}$
  - *La dette junior est totalement remboursée quand les actionnaires commencent à recevoir une somme positive*
    - Si $\boldsymbol{A_1 > D_0^S \times (1 + i_S) + D_0^J \times (1 + i_J)}$

Dette subordonnée

- Dette junior
  - *Si* $\boldsymbol{A_1 < D_0^S(1 + i_S)}$,
    - $\boldsymbol{D_1^J = 0}$ La valeur de l'actif est insuffisante pour rembourser la dette senior
  - $\boldsymbol{A_1 > D_0^S(1 + i_S) + D_0^J(1 + i_J)}$,
    - $\boldsymbol{D_1^J = D_0^J(1 + i_J)}$ La valeur de l'actif est suffisante pour rembourser toutes les dettes
  - $\boldsymbol{D_0^S(1 + i_S) < A_1 < D_0^S(1 + i_S) + D_0^J(1 + i_J)}$
    - On est dans une tranche intermédiaire (mezzanine) de valeurs de l'actif $\boldsymbol{A_1}$
    - $\boldsymbol{D_1^J = A_1 - D_0^S(1 + i_S)}$ Les créanciers juniors reçoivent l'actif $\boldsymbol{A_1}$ après remboursement de la dette senior

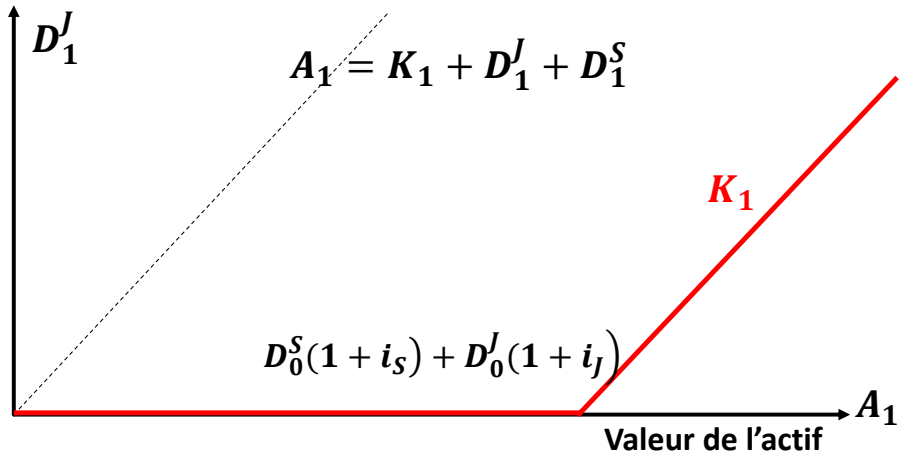
Dette subordonnée

- Profil de risque des actions K_1^S avec uniquement de la dette senior en fonction de valeur de l'actif A_1



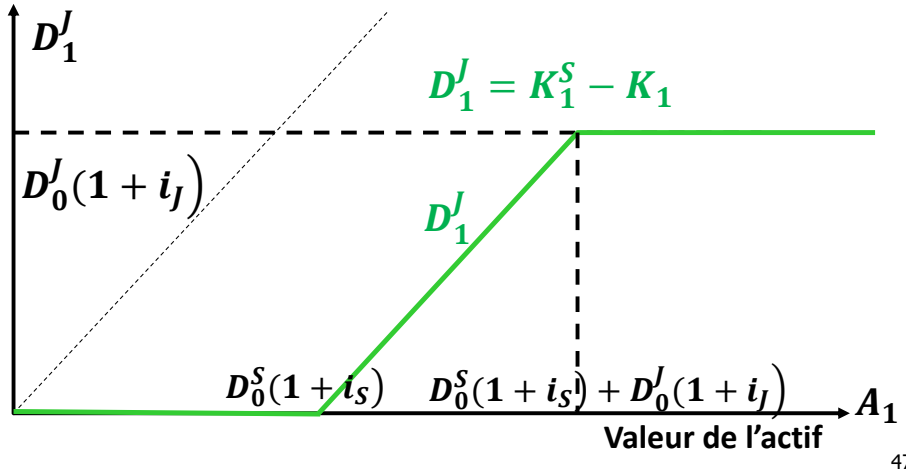
Dette subordonnée

- Profil de risque des actions en présence de dette mezzanine A_1



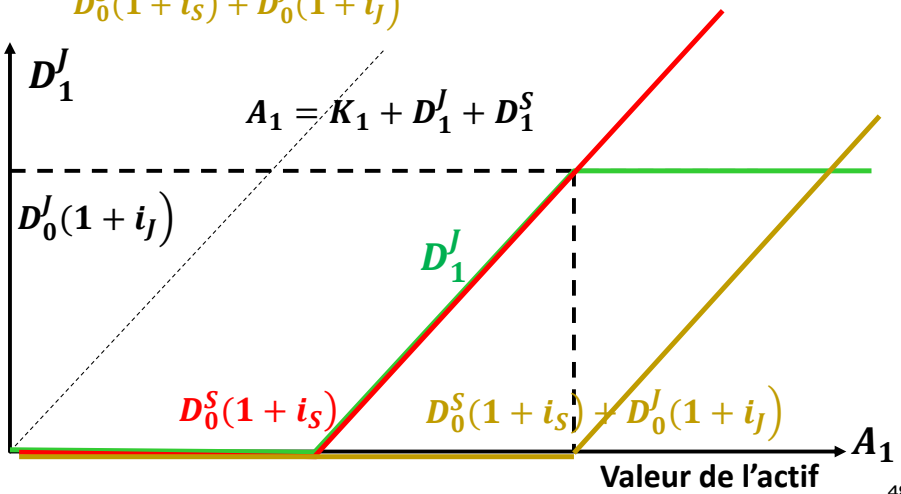
Dette subordonnée

- Profil de risque de la dette mezzanine D_1^J en fonction de valeur de l'actif A_1



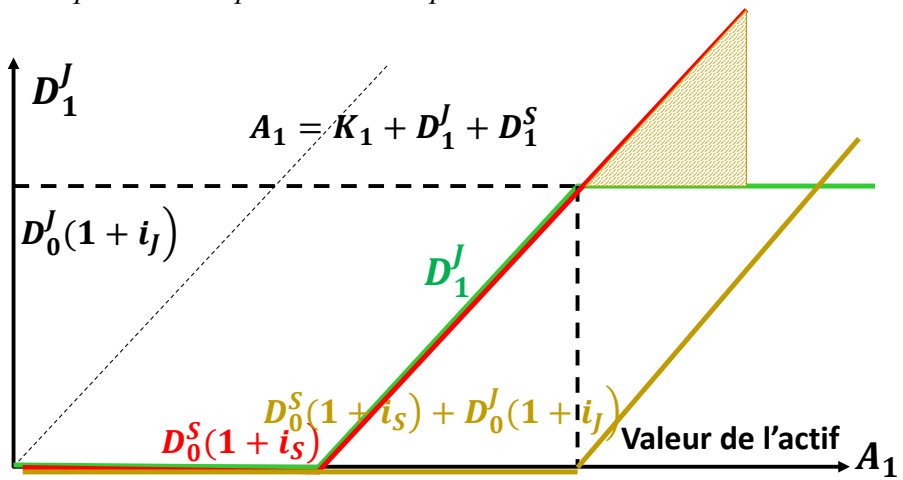
Dette subordonnée

- Dette mezzanine différence de deux calls
  - *Achat du call de strike* $D_0^S(1+i_S)$, *vente du call de strike* $D_0^S(1+i_S) + D_0^J(1+i_J)$



Dette subordonnée

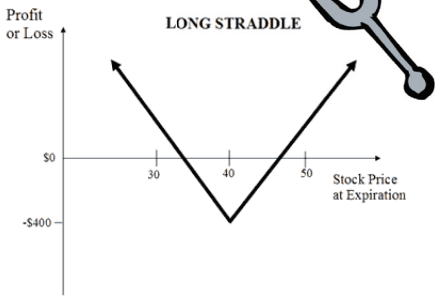
- Dette mezzanine différence de deux calls (call spread)
  - *La zone hachurée correspond au paiement à soustraire au premier call pour obtenir le paiement de la dette mezzanine*

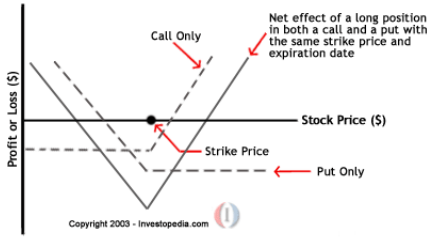


Straddle et strangle

Combinaisons d'options, straddle

- Quelques combinaisons classiques d'options
  - *Valeur de l'actif sous-jacent à échéance de l'option* A_1
- Straddle (« fourche »)
  - *Option d'achat + option de vente de même prix d'exercice K*
  - *Paiement à maturité :* $\max(A_1 - K, 0) + \max(K - A_1, 0)$
  - *Le graphique de droite représente un straddle en position longue*
  - *Le P&L (Profit & Loss) prend en compte le paiement de la prime*
  - *Stratégie gagnante pour de grandes variations du sous-jacent autour du prix d'exercice*



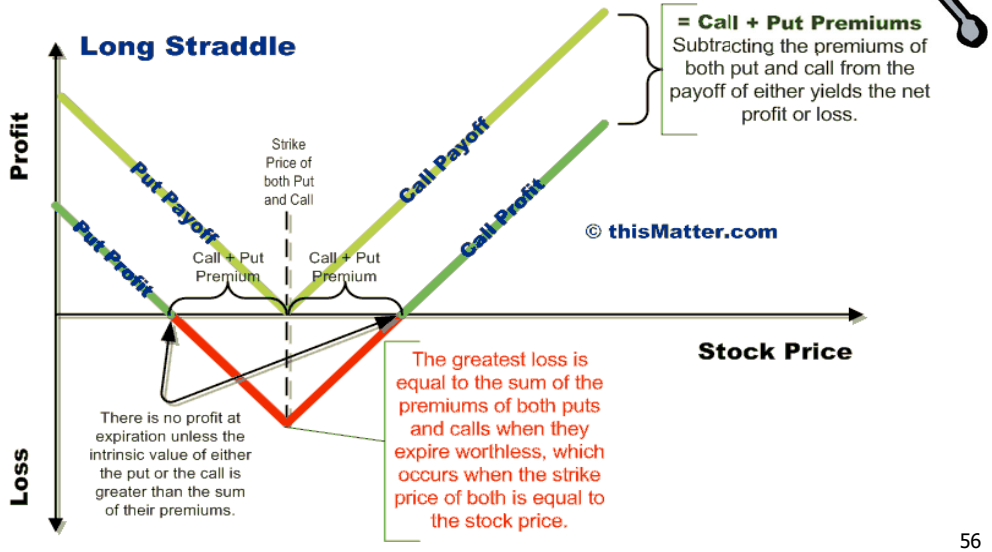


Combinaisons d'options, straddle

- Straddle
  - *Achat d'un call et d'un put de même date d'exercice*
  - *Et de même prix d'exercice K*
  - *Paiement à échéance*
  - $\max(A_1 - K, 0) + \max(K - A_1, 0)$
  - *Ou* $(A_1 - K)^+ + (A_1 - K)^- = |A_1 - K|$
    - Rappel : $X^+ = \max(X, 0), X^- = \max(-X, 0)$

Prix d'exercice	Revenu du call à l'échéance	Revenu du put à l'échéance	Revenu global à l'échéance
$A_1 \leq K$	0	$K - A_1$	$K - A_1$
$A_1 \geq K$	$A_1 - K$	0	$A_1 - K$

Combinaisons d'options, straddle



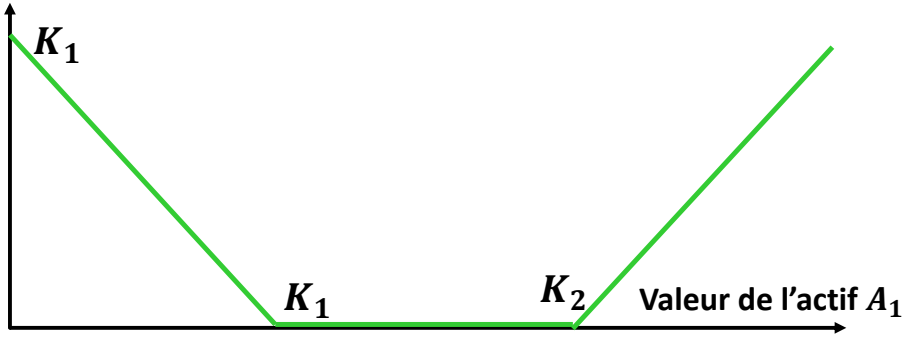
Combinaisons d'options : strangle

- Strangle
  - *Achat d'un call et d'un put de même date d'exercice*
  - *mais de prix d'exercice différents*
    - Contrairement au straddle
  - *Prix d'exercice du call K_2 supérieur à celui du put K_1*
  - *Paiement à échéance* $(A_1 - K_2)^+ + (A_1 - K_1)^-$

Prix d'exercice	Revenu du call à l'échéance	Revenu du put à l'échéance	Revenu global à l'échéance
$A_1 \leq K_1$	0	$K_1 - A_1$	$K_1 - A_1$
$K_1 < A_1 < K_2$	0	0	0
$A_1 \geq K_2$	$A_1 - K_2$	0	$A_1 - K_2$

Combinaisons d'options, strangle

- Profil de risque du strangle



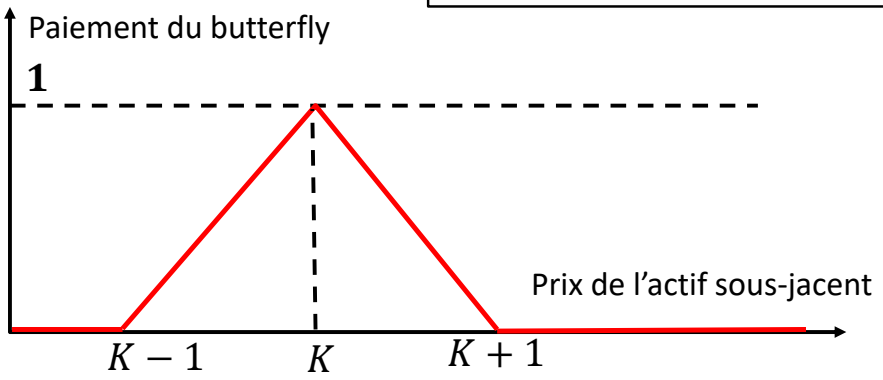
- Ici, on a représenté le paiement à échéance
  - *L'impact du paiement des primes à l'origine n'est pas représenté*
  - *Si $K_1 = K_2$, le strangle devient un straddle*

Butterflys

Butterfly : exemple

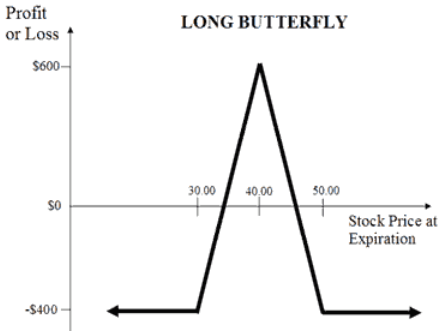
- Profil de risque

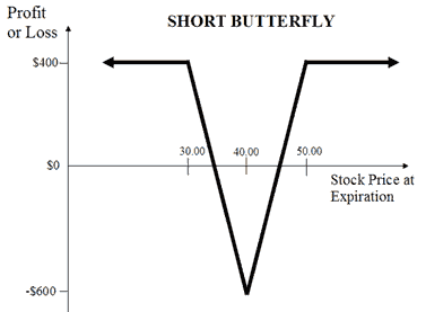
On remarque que le paiement du butterfly est identique à celui de l'actif contingent à l'état K



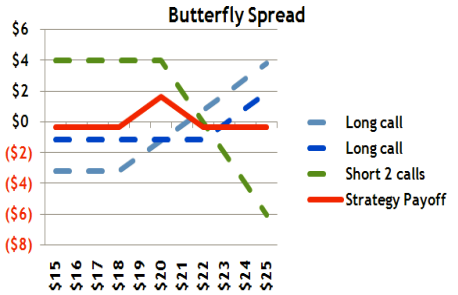
Butterfly (papillon)

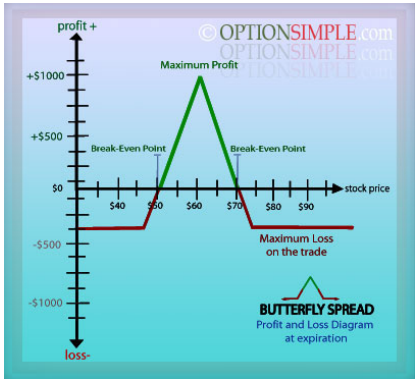
- *Profils de paiement (prime incluse) pour des papillons en position longue et courte*
  - On peut parier soit sur le fait que le sous-jacent vaudra 40 (long butterfly), soit qu'il sera différent de 40 (short butterfly)

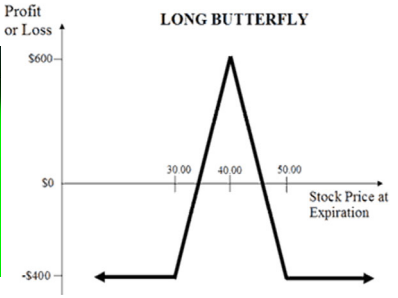




- Butterfly spread







Butterfly : construction à partir de calls

- 3 calls de prix d'exercice $K-1, K, K+1$ et de même date d'exercice
- Achat d'un call de strike $K-1$,
- Vente de deux calls de strike K,
- Achat d'un call de strike $K+1$
- On va vérifier que le portefeuille précédent duplique le paiement d'un long butterfly

Butterfly : exemple

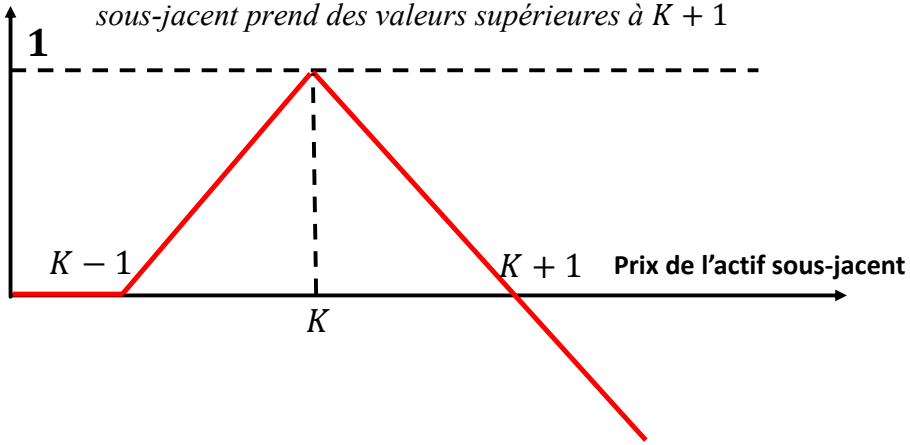
- Paiements associés à un butterfly
  - *On utilise 3 calls de prix d'exercice $K-1, K, K+1$*
  - *De même date d'exercice*
  - *Achat d'un call de strike $K-1$, vente de deux calls de strike K, achat d'un call de strike $K+1$*

Prix d'exercice	Revenu de l'achat du premier call	Revenu de la vente des deux calls	Revenu de l'achat du troisième call	Revenu global à l'échéance
$A_1 \leq K-1$	0	0	0	0
$K-1 < A_1 \leq K$	$A_1-(K-1)$	0	0	$A_1-(K-1)$
$K < A_1 < K+1$	$A_1-(K-1)$	$-2(A_1-K)$	0	$K+1-A_1$
$A_1 \geq K+1$	$A_1-(K-1)$	$-2(A_1-K)$	$A_1-(K+1)$	0

  - *Paiements :* 0 *si* $A_1 = K-1$, 1 *si* $A_1 = K$, 0 *si* $A_1 = K+1$

Butterfly : remarque

- Profil de risque si on achète un call de strike $K-1$ et on vend 2 calls de strike K
  - *On économise l'achat du call de strike $K+1$, mais pertes si le sous-jacent prend des valeurs supérieures à $K+1$*



Butterfly

- Prix (prime) du butterfly : $C(K-1) - 2C(K) + C(K+1) \geq 0$
- Exercice : duplication d'un butterfly à partir de puts
  - *Utilisation de la relation de parité*
  - $C(K) = P(K) + A_0 - \frac{K}{1+r}$
  - *Les termes en A_0 dans $C(K-1) - 2C(K) + C(K+1)$:* $A_0 - 2A_0 + A_0 = 0$
  - *Les termes en K (on laisse de côté le dénominateur $1+r$)*
  - $-(K-1) + 2K - (K+1) = 0$
  - $C(K-1) - 2C(K) + C(K+1) = P(K-1) - 2P(K) + P(K+1)$

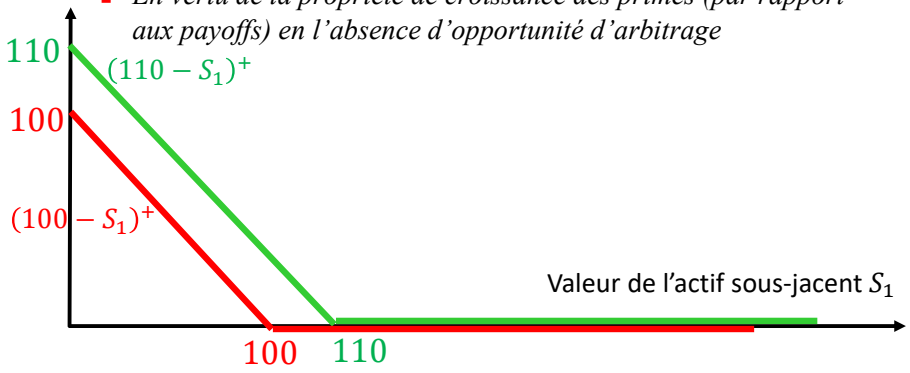
Exercice : primes de puts

Exercice : primes de puts

- On considère deux puts (européens) de strike 110 et de strike 100 de même date d'exercice et de nominal 50. On note $P(110)$ et $P(100)$, les primes correspondantes
- Représenter graphiquement le payoff (à échéance) des deux puts. Que remarque-t-on ?
- En déduire que $P(110) \geq P(100)$
- On considère maintenant un put spread, consistant en l'achat d'un put de strike K_1 et la vente d'un put de strike K_2 avec $K_1 > K_2$. Le nominal de chacun des puts est égal à 1.
- Représenter graphiquement le payoff à échéance. Que remarque-t-on ?
- En déduire que $P(K_1) \geq P(K_2)$ et que la prime du put est une fonction croissante du strike.

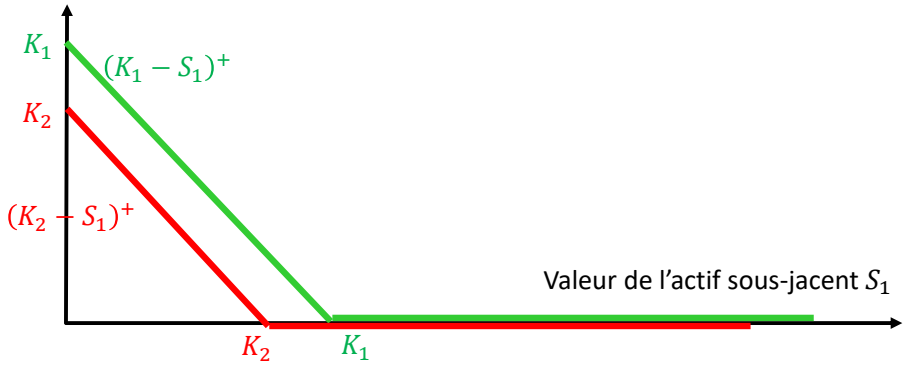
Exercice : primes de puts (indications de correction)

- Représentation graphique des profils de paiement
- Le graphe du profil de paiement du put de strike 110 est au-dessus de celui du put de strike 100
- $(110 - S_1)^+ \geq (100 - S_1)^+, \forall S_1 \Rightarrow P(110) \geq P(100)$
  - *En vertu de la propriété de croissance des primes (par rapport aux payoffs) en l'absence d'opportunité d'arbitrage*



Exercice : primes de puts (indications de correction)

- Même raisonnement que précédemment dans le cas général en remplaçant 110 par K_1 et par
- $\forall K_1, K_2, K_1 > K_2, (K_1 - S_1)^+ \geq (K_2 - S_1)^+, \forall S_1 \Rightarrow P(K_1) \geq P(K_2)$
- Soit la croissance des primes de put (d'échéance donnée) en fonction du strike.



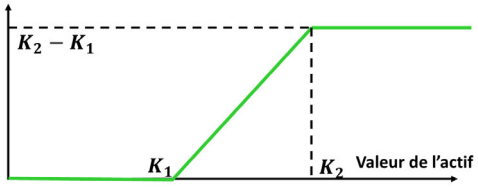
Exercices : primes de calls et de puts

Exercice : primes de calls et de puts

- On considère deux calls (européens, même échéance, nominal $= 1$), de strike K_1, K_2 avec $K_1 < K_2$
- Représenter graphiquement le payoff (à échéance) du call spread (achat call strike K_1, vente call strike K_2).
- En déduire que $(S_1 - K_1)^+ - (S_1 - K_2)^+ \leq K_2 - K_1$, pour toute valeur de S_1
- En déduire une propriété de la fonction $K \to C(K) + \frac{K}{1+r}$, où r est le taux d'actualisation entre la date d'exercice et la date courante.
- Retrouver cette propriété en utilisant la relation de parité call-put et le résultat de l'exercice précédent sur les puts.

Exercice : primes de calls et de puts (éléments de correction)

- Le payoff du call spread (en vert) est en dessous de la ligne horizontale en pointillés d'ordonnée $K_2 - K_1$
- Soit : $\forall\, S_1, (S_1 - K_1)^+ - (S_1 - K_2)^+ \leq K_2 - K_1$



- En vertu du principe de monotonie des primes par rapport aux payoffs, $C(K_1) - C(K_2) \leq \frac{K_2}{1+r} - \frac{K_1}{1+r} \Leftrightarrow C(K_1) + \frac{K_1}{1+r} \leq C(K_2) + \frac{K_2}{1+r}$
- L'inégalité étant vraie pour tout K_1, K_2 tels que $K_1, K_2, K \to C(K) + \frac{K}{1+r}$ est une fonction croissante.
- D'après la relation de parité, $C(K) + \frac{K}{1+r} = P(K) + S_0$. Or, on vient de démontrer que $K \to P(K)$ est croissante …

Exercice : primes de calls (européens), calls couverts

- On considère un call (européen, nominal égal à 1) de strike K. On note S_0, le prix du sous-jacent à la date courante. On considère la stratégie, dite de call couvert, consistant à acheter le sous-jacent à vendre le call précédent.
- Représenter graphiquement le paiement à échéance (de cette stratégie).
- En déduire une borne supérieure pour la prime du call $C(K)$
- Montrer que ce résultat est un cas particulier de celui déjà établi pour les calls spreads.

Exercice : primes de calls et de puts

- On considère deux calls de strike K_1, K_2 (même échéance, nominal unitaire) avec $K_1 < K_2$.
- On considère le call spread suivant : vente du call de strike K_1, achat du call de strike K_2.
- Représenter le paiement à échéance. Que remarque-t-on ?
- En déduire une relation entre les primes $C(K_1), C(K_2)$. Montrer que l'on retrouve la propriété de décroissance de la prime (du call) en fonction du prix d'exercice.
- Comparer le profil de paiement précédent à celui du put spread (achat d'un put de strike K_2, vente d'un put de strike K_1).
- En déduire une relation entre primes de calls et de puts spreads
- Retrouver cette relation à partir de la relation de parité call-put

Exercice : primes de butterfly, calls et puts

- On considère un butterfly de strikes $K-1, K, K+1$
- Rappeler comment le paiement peut être représenté graphiquement, comment il peut être synthétisé à partir de calls et la relation entre les primes qui en découle.
- Rappeler comment le paiement à échéance peut être synthétisé à partir de puts.
- En déduire une relation entre les primes de puts.
- Mettre en relation les deux expressions précédentes.
- Montrer que ceci pouvait être obtenu à partir de la relation de parité call-put.
- De manière plus générale, montrer que, du fait de la relation de parité call-put, la propriété de convexité de la fonction $K \to C(K)$ se transpose à la fonction $K \to P(K)$

Exercices sur les options

- Tirés du livre de Hull
  - *Construisez un graphique présentant les gains et pertes d'un investisseur en fonction de la valeur du sous-jacent à l'échéance pour les portefeuilles suivants*
    - Une action et une position courte sur un call
    - Deux actions et une position courte sur un call
    - Une action et une position courte sur deux calls
    - Une action et une position courte sur quatre calls
  - *Dans chaque cas, vous supposerez que le call a un prix d'exercice égal à la valeur du sous-jacent au moment de la prise de position*
    - On notera A_1, la valeur du sous-jacent à l'échéance
    - A_1 la valeur du sous-jacent au moment de la prise de position
    - On ne prend en compte que les gains / pertes à l'échéance

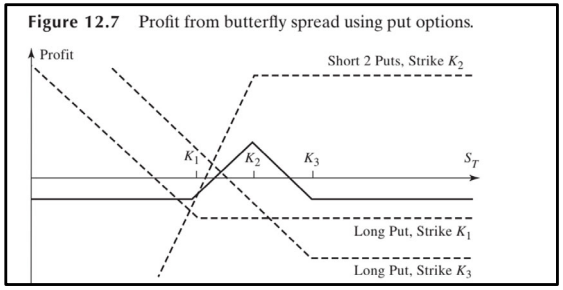
Exercice sur les options (Hull –suite)

- Trois options *de vente* sur une action ont la même date d'échéance et des prix d'exercice de 55 €, 60 € et 65 €. Leurs primes sont respectivement de 3 €, 5 € et 8 €.
  - *Expliquez de quelle manière réaliser un butterfly spread.*
  - *Construisez un tableau présentant les bénéfices de cette stratégie.*
  - *Pour quelles valeurs de l'action le butterfly spread entraînera-t-il une perte ?*

> Butterfly spreads can be created using put options. The investor buys two European puts, one with a low strike price and one with a high strike price, and sells two European puts with an intermediate strike price, as illustrated in Figure 12.7. The butterfly spread in the example considered above would be created by buying one put with a strike price of $55, another with a strike price of $65, and selling two puts with a strike price of $60. The use of put options results in exactly the same spread as the use of call options. Put–call parity can be used to show that the initial investment is the same in both cases.

Exercice sur les options (suite)

- Ici, $K_1 = 55, K_2 = 60, K_3 = 65$
- $P(K_1) = 3, P(K_2) = 5, P(K_3) = 8$
- Prime du butterfly : $P(K_3) - 2P(K_2) + P(K_1) = 1$



- La perte potentielle est donc égale à 1. En observant le payoff du butterfly et en se souvenant que les pentes (non nulles) sont de ± 1, l'intervalle où le profit est positif est $]56,64[$.
- Voir aussi le corrigé de l'exercice 2 du partiel du 19 janvier 2022.

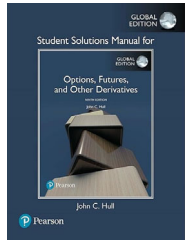
Exercices sur stratégies et payoffs (tirés du livre de Hull)

- Quelle est la différence entre un straddle et un strangle ?
- Quel est le résultat engendré par un strangle dont le prix d'exercice du put serait plus élevé que celui du call ?
- Un investisseur vend un call de prix d'exercice K et achète un put de même prix d'exercice et de même date d'exercice. Décrivez la position de l'investisseur.

Deux exercices sur les options

- Décrire la position créée par l'achat d'un call de prix d'exercice K_2 et la vente d'un put de prix d'exercice K_1 lorsque les deux options ont la même maturité et que $K_2 > K_1$. Que devient cette position si $K_2 = K_1$?
- Des calls sur action sont disponibles pour des prix d'exercice de 15 €, 17,50 €, 20 € et des échéances à trois mois. Les primes sont respectivement de 4 €, 2 € et 0,50 €.
  - *Expliquez de quelle manière les options peuvent être utilisées pour construire un butterfly spread*
  - *Construisez un tableau montrant les revenus (nets des primes) de ce butterfly spread en fonction du cours de l'action.*

Exercice sur les options



- Butterfly (exercice précédent : corrigé tiré du livre d'exercices de John Hull)

Problem 12.4.
Call options on a stock are available with strike prices of \$15,\$17.5 , and \$20 and expiration dates in three months. Their prices are \$4, \$2, and,\$0.5 respectively. Explain how the options can be used to create a butterfly spread. Construct a table showing how profit varies with stock price for the butterfly spread.

An investor can create a butterfly spread by buying call options with strike prices of \$15 and \$20 and selling two call options with strike prices of $\$17\frac{1}{2}$. The initial investment is $4+\frac{1}{2}-2\times 2=\$\frac{1}{2}$. The following table shows the variation of profit with the final stock price:

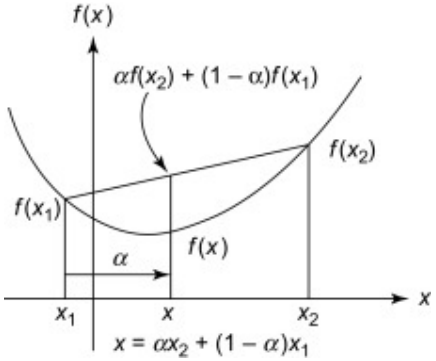
Stock Price, S_T	*Profit*
$S_T < 15$	$-\frac{1}{2}$
$15 < S_T < 17\frac{1}{2}$	$(S_T - 15) - \frac{1}{2}$
$17\frac{1}{2} < S_T < 20$	$(20 - S_T) - \frac{1}{2}$
$S_T > 20$	$-\frac{1}{2}$

Exercice : convexité de $K \to C(K)$

Exercice : convexité de $K \to C(K)$

- Soit $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$, $K_1 < K_2$ et $0 < \alpha < 1$. Montrer que :
- $\alpha C(K_1) + (1-\alpha)C(K_2) \geq C(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2)$
- On aura ainsi montré que la fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ est convexe (on sait déjà qu'elle est décroissante)

la fonction f est convexe si sa courbe représentative est en-dessous de ses cordes



Exercice : convexité de $K \to C(K)$

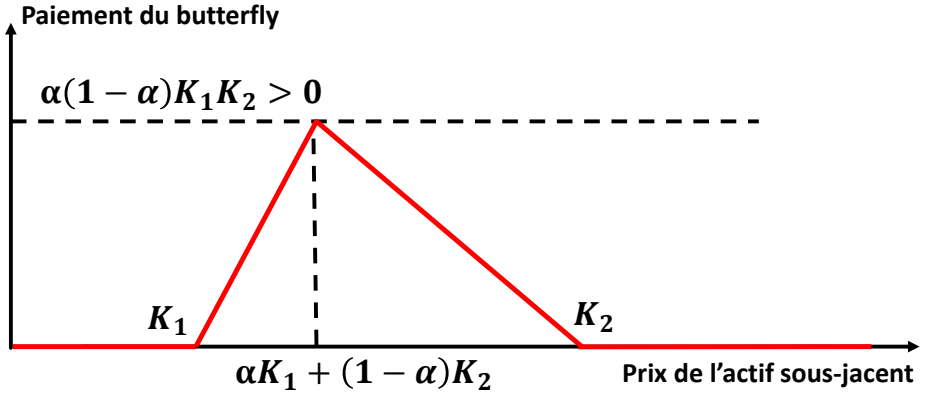
- *3 calls de prix d'exercice $K_1, \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2, K_2$, de même date d'exercice, $\alpha \in]0,1[$*
- *Achat de α call de strike K_1, vente d'un call de strike $\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$, achat de $1-\alpha$ call de strike K_2*

Prix d'exercice	Revenu achat du premier call	Revenu vente du call de strike intermédiaire	Revenu achat du troisième call	Revenu global à l'échéance
$A_1 \leq K_1$	0	0	0	0
$K_1 < A_1 \leq \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$	$\alpha(A_1 - K_1)$	0	0	$\alpha(A_1 - K_1)$
$\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2 < A_1 < K_2$	$\alpha(A_1 - K_1)$	$-(A_1 - \alpha K_1 - (1-\alpha)K_2)$	0	$-(1-\alpha)(A_1 - K_2)$
$A_1 \geq K_2$	$\alpha(A_1 - K_1)$	$-(A_1 - \alpha K_1 - (1-\alpha)K_2)$	$(1-\alpha)(A_1 - K_2)$	0

- *Le revenu global à échéance est toujours ≥ 0*
- $\alpha C(K_1) + (1-\alpha)C(K_2) - C(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2) \geq 0$

Exercice : convexité de $K \to C(K)$

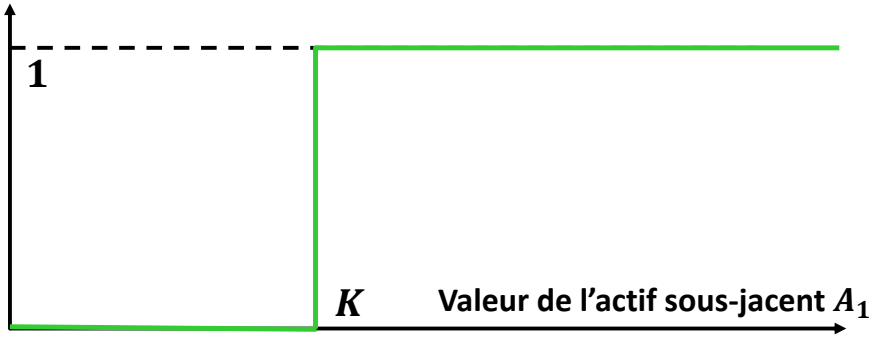
- Profil de paiement du portefeuille précédent : étant positif, la prime correspondante est positive
- D'où $\alpha C(K_1) + (1-\alpha)C(K_2) \geq C(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2)$



Options digitales

Option digitale (binary option)

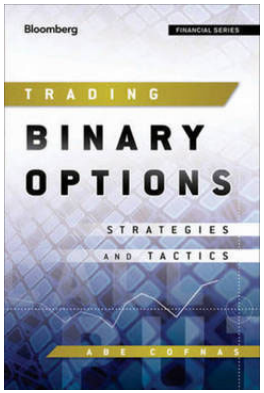
- Profil de risque du call digital

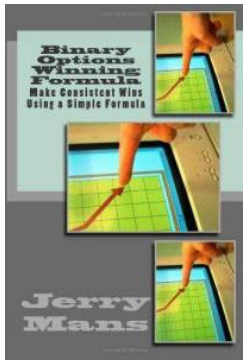


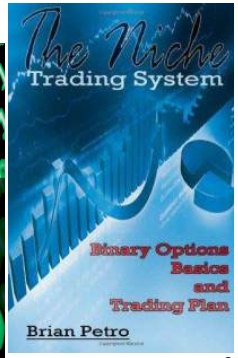
- Le paiement associé est $1_{A_1 \geq K}$ ou $1_{A_1 > K}$
- $1_{A_1 \geq K} = 1_{A_1 > K} + 1_{A_1 = K}$

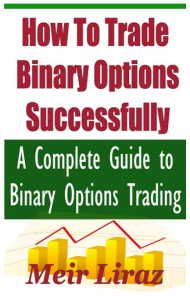
Options digitales (binaires)

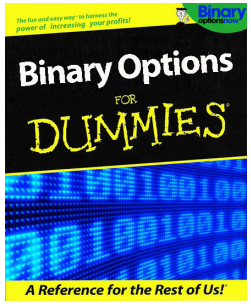
- Stratégie de base, pari à la hausse ou à la baisse du sous-jacent
- Lien avec la passion du jeu et les probabilités…



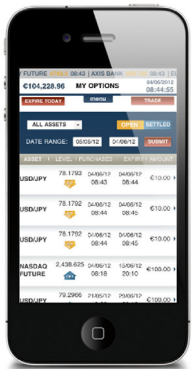








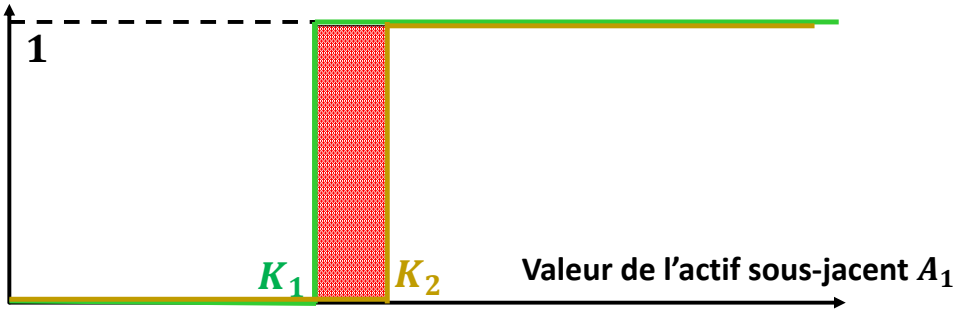
Outil théorique et/ou paradis du spéculateur ?



Call spread digital

Options Binaires en ligne
Le guide francophone des options binaires

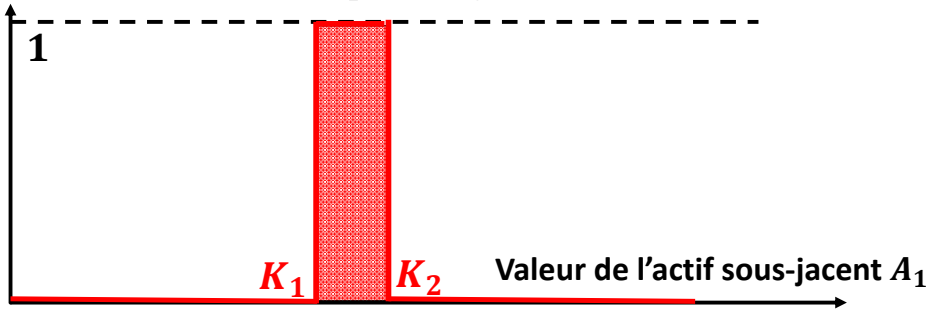
- Paiement du call spread digital



- *En vert le profil du call digital de strike K_1*
- *En marron, le paiement du call digital de strike K_2*
- *La surface hachurée rouge correspond au paiement du call spread digital*

Call spread digital

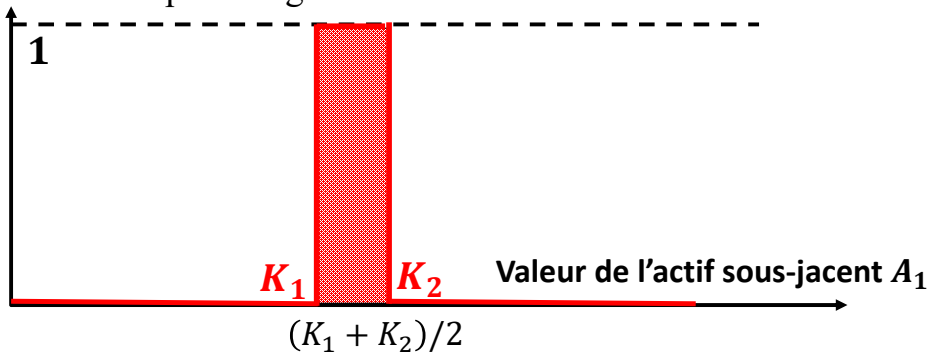
- Paiement du call spread digital



- *Le call spread digital précédent paye 1 € si le prix de l'actif sous-jacent à échéance est compris entre K_1 et K_2*
- *La prime est égale à $C_b(K_1) - C_b(K_2) \geq 0$*

Call spread digital

- Call spread digital

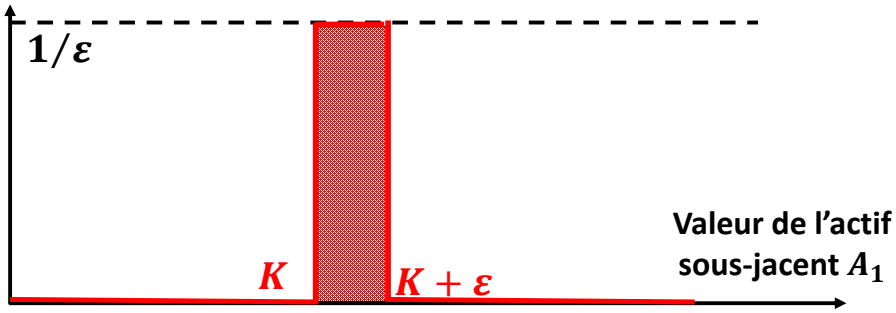


- *Comme $K_1 < K_2 \Rightarrow C_b(K_1) - C_b(K_2) \geq 0 \Leftrightarrow C_b(K_1) \geq C_b(K_2)$,*
- *La fonction $K \to C_b(K)$ est décroissante*
- *$C_b(K) = -C'(K)$ si $K \to C(K)$ est dérivable et $\bar{C}_b(K) = C_b(K)$*
- *$K \to C'(K)$ est croissante : $K \to C(K)$ est donc une fonction convexe*
- *$C''(K) \geq 0$*

Option digitale : convexité de $K \to C(K)$

- $K \to C(K)$ est dérivable en K si les dérivées à droite et à gauche sont égales
- Dans ce cas, $C'(K) = -C_b(K)$
- Comme $K \to C_b(K)$ est décroissante, $K \to C'(K)$ est croissante, ce qui veut dire que $K \to C(K)$ est convexe
  - *On rappelle qu'une fonction dérivable est convexe si sa dérivée est croissante*
  - *Si la dérivée est décroissante, la fonction est concave*
- Remarque : La convexité reste vraie, même s'il existe des points de non-dérivabilité
  - *Voir supra, sur la convexité de $K \to C(K)$*

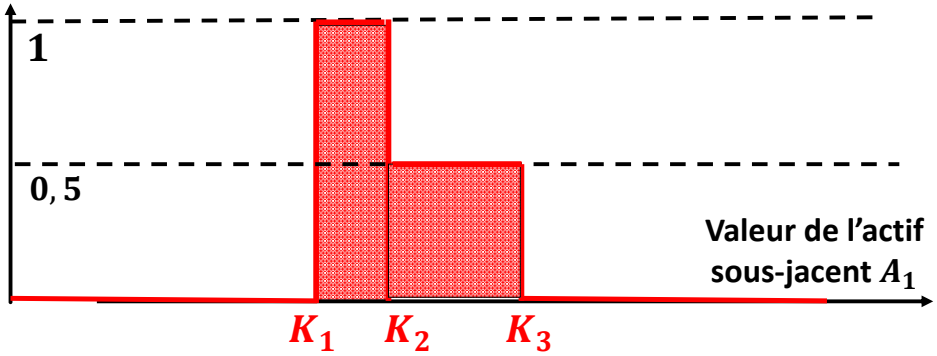
Call spread digital



- Paiement associé à l'achat de $1/\varepsilon$ call digital de strike K et la vente de $1/\varepsilon$ call digital de strike $K + \varepsilon$
- Actif contingent à l'état K
- Prime correspondante : $\frac{C_b(K)-C_b(K+\varepsilon)}{\varepsilon} \to -C'_b(K)$ quand $\varepsilon \to 0$
  - $C'_b(K)$: *dérivée de* $K \to C_b(K)$

Call spread digital

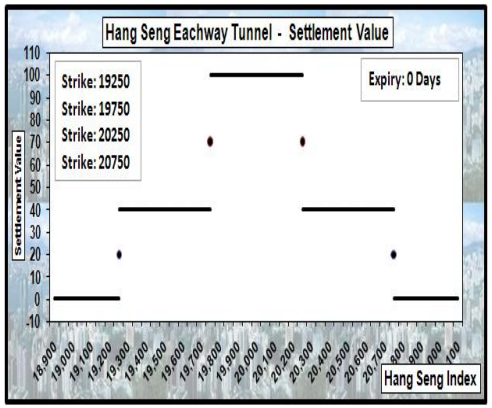
- À partir de call digitaux, on peut reconstituer n'importe quel paiement, fonction constante par morceaux (fonction en escalier) de l'actif sous-jacent



Prime égale à $\mathbf{1} \times \left(C_b(K_1) - C_b(K_2)\right) + \mathbf{0,5} \times \left(C_b(K_2) - C_b(K_3)\right)$

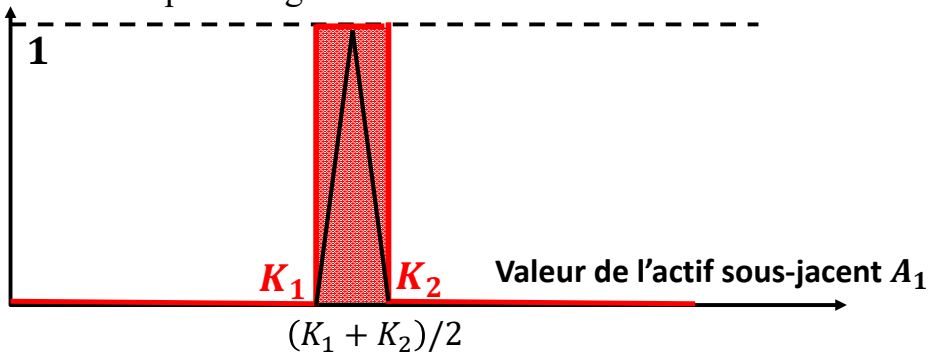
Call spread digital

- Ci-dessous un profil de paiement combinant des options digitales sur l'indice Hang Seng



Call spread digital et butterfly

- Call spread digital

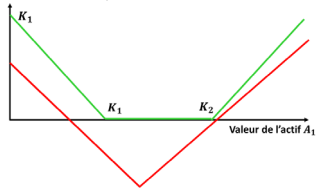


- *Profil de risque du call spread digital et du butterfly*
- *Surface :* $\times 2$
- *Pour* $K_1 \approx K_2$*, prime du call spread digital* $\approx 2 \times$ *prime du butterfly*

Exercice : straddle et strangle

Exercice : straddle et strangle

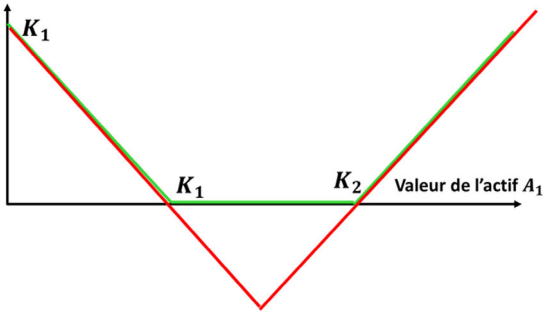
- 1) Montrer que la prime du strangle $[K_1, K_2]$ est minorée par la prime d'un straddle dont on déterminera le prix d'exercice
  - *On cherchera des paiements de straddle inférieurs au paiement du strangle*
  - *Dans le profil du paiement des straddles, on pourra inclure de l'actif sans risque. On supposera par la suite que le taux sans risque est nul*
  - *Procéder graphiquement pour représenter de tels profils de paiement majorés par celui du strangle (voir graphique ci-dessous)*



  - *On cherche le meilleur minorant, c'est-à-dire le profil de paiement majoré par celui du straddle (plus éventuellement de l'actif sans risque) de prime maximale*
  - *Pour déterminer le meilleur minorant, il faudra distinguer **deux cas**, selon les strikes K_1, K_2*
- 2) Que représente l'écart entre la prime de ce straddle et la prime du strangle ?
  - *Procéder en représentant graphiquement la différence entre le profil de paiement du strangle et celui du meilleur straddle*

Corrigé : 1) Recherche du meilleur straddle minorant

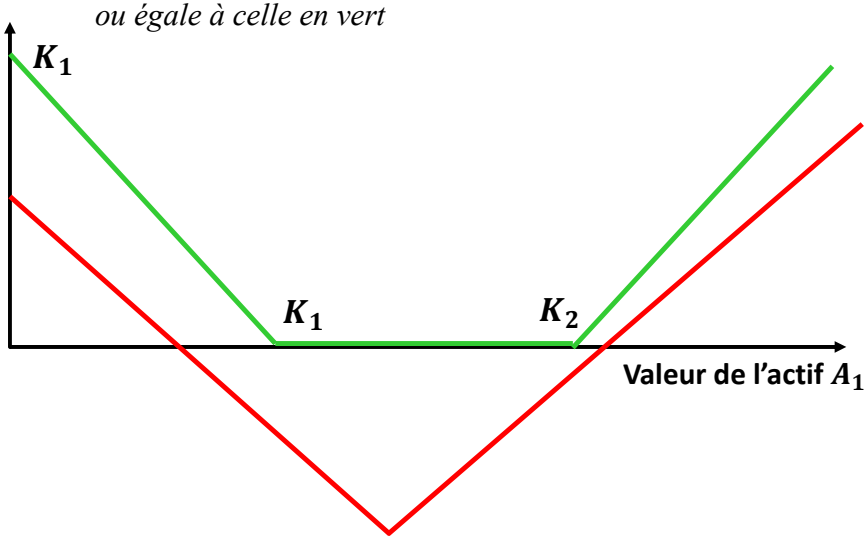
- Etant donné le profil de paiement du strangle (en vert) , on remarque qu'il est naturellement associé au straddle ci-dessous, en rouge.



- Par symétrie, le strike du straddle est égal à $\frac{K_1+K_2}{2}$
- On va donc chercher à valider et/ou préciser cette intuition

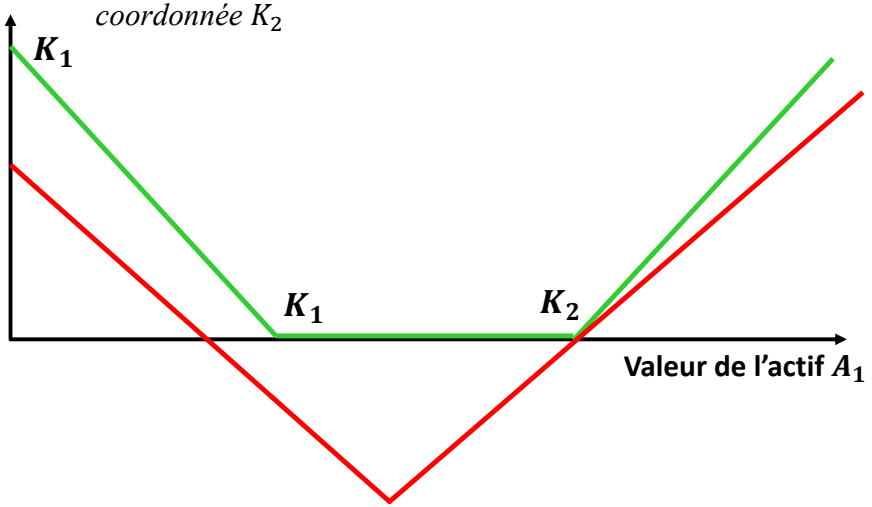
Corrigé : 1) Recherche du meilleur straddle minorant

  - *Les deux demi-droites rouges doivent être en-dessous de la courbe verte ⇒ La pente à droite en rouge doit être inférieure ou égale à celle en vert*



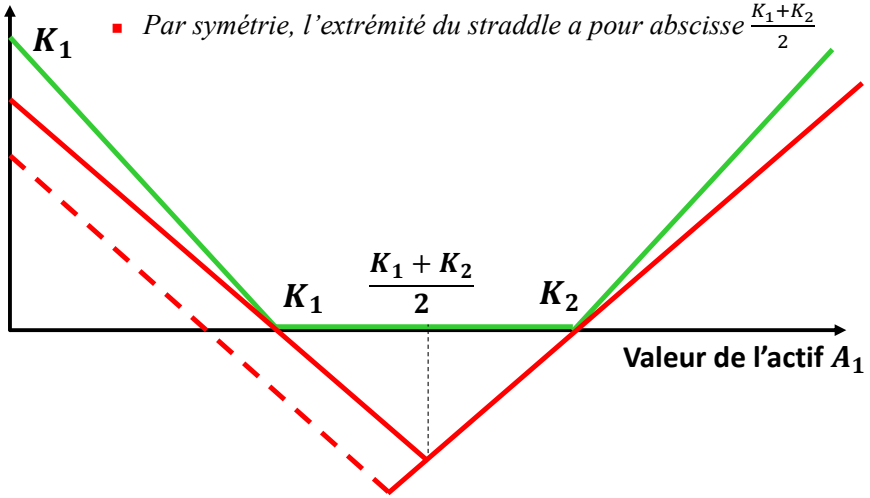
Corrigé : 1) Recherche du meilleur straddle minorant

- *On peut améliorer le profil rouge par **translation vers le haut***
- *Ici, on « bute » sur le point de l'axe des abscisses et de coordonnée K_2*



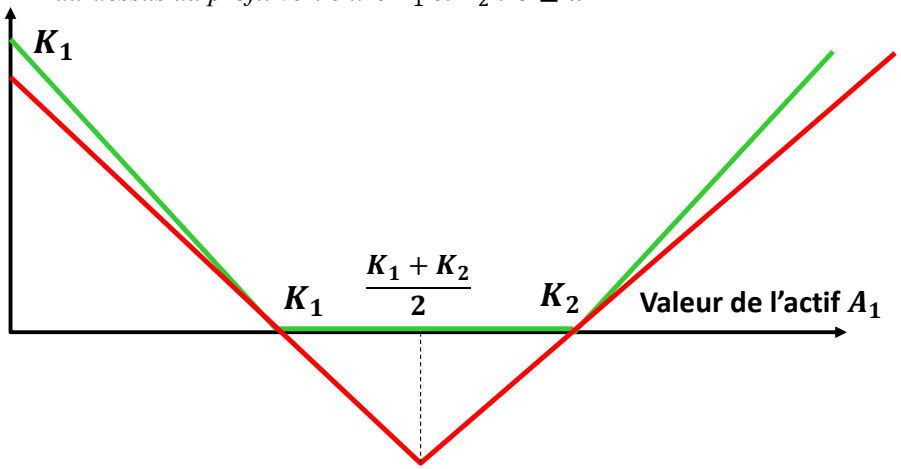
Corrigé : 1) Recherche du meilleur straddle minorant

- *On peut améliorer le profil rouge en faisant glisser la partie gauche du straddle*
- *On bute sur le point de l'axe des abscisses et de coordonnée K_1*
- *Par symétrie, l'extrémité du straddle a pour abscisse $\frac{K_1+K_2}{2}$*



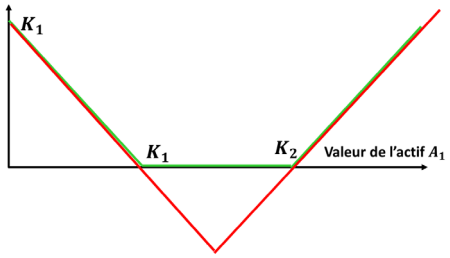
Recherche du meilleur straddle minorant

- *La pente à droite en rouge doit être inférieure ou égale à celle en vert*
- *La pente du strangle est égale à 1. Notons α la pente du straddle : $\alpha \leq 1$*
- *La pente du straddle doit être positive ou nulle (sinon le profil rouge est au-dessus du profil vert entre K_1 et K_2 : $0 \leq \alpha$*



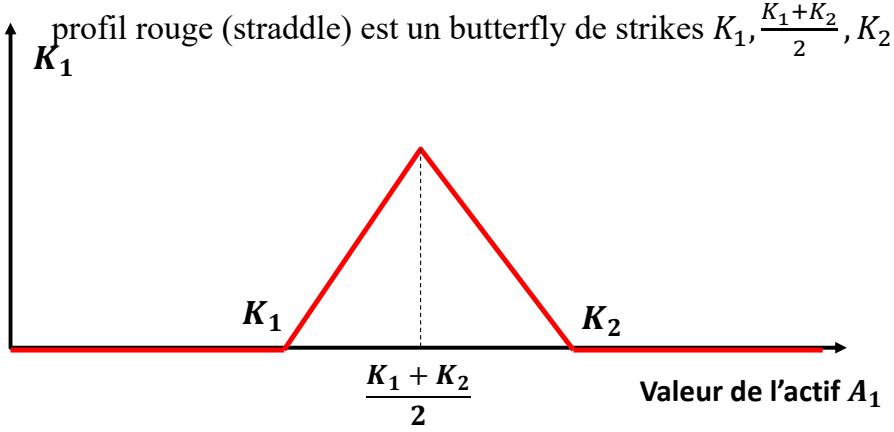
Recherche du meilleur straddle minorant

- Les primes des straddles précédents peuvent s'écrire comme $\alpha \times \left(C\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) + P\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) - \frac{K_2-K_1}{2}\right)$ où $0 \leq \alpha \leq 1$
- Le graphique représente le cas où les pentes sont égales, soit $\alpha = 1$
- Notons $\overline{K} = \frac{K_1+K_2}{2}$. La relation de parité implique $P(\overline{K}) = C(\overline{K}) + \overline{K} - A_0$
- Primes de straddles : $\alpha \times (2C(\overline{K}) + K_1 - A_0)$
- Si $C\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) \geq \frac{A_0-K_1}{2}$, le meilleur minorant est $2C\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) + K_1 - A_0$, 0 sinon.



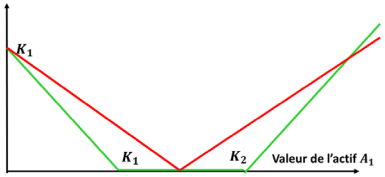
Écart entre le meilleur straddle minorant et le strangle

- Le cas $\alpha = 0$ est dégénéré : le meilleur straddle minorant est l'absence de position
- Si $\alpha = 1$, la difference entre le profil vert (strangle) et le profil rouge (straddle) est un butterfly de strikes $K_1, \frac{K_1+K_2}{2}, K_2$



Meilleur straddle majorant

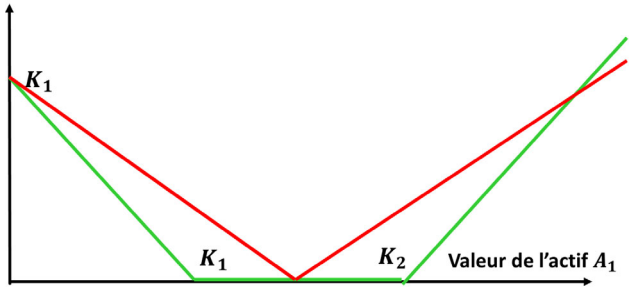
- 3) Montrer que la prime d'un strangle est majorée par des primes de straddle dont on déterminera le prix d'exercice
  - *On procédera à nouveau à partir des profils de paiement*
  - *Voir graphique ci-dessous : le profil du straddle ne majore pas celui du strangle*



- 4) Utiliser le théorème des valeurs extrêmes pour montrer l'existence d'un meilleur majorant
  - *Le théorème des valeurs extrêmes exprime que toute fonction continue définie sur un intervalle fermé atteint son maximum et son minimum*
- 5) On suppose que $K \to C(K)$ est dérivable. Caractériser et interpréter le straddle majorant de prime minimale (distinguer trois cas)
  - *Utiliser les résultats standards de l'analyse pour caractériser le maximum d'une fonction.*

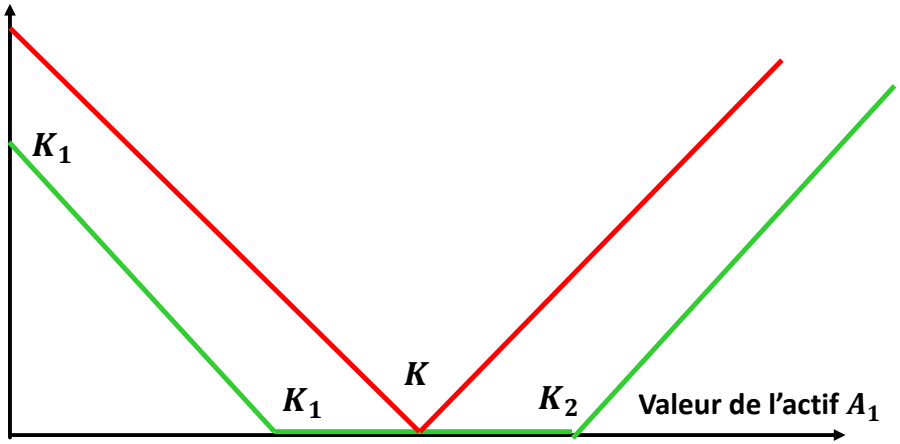
Meilleur straddle majorant

- On voit que la pente à droite en rouge doit être supérieure ou égale à la pente à droite en vert (soit 1)
- Par ailleurs, il n'est pas nécessaire que la pente soit strictement supérieure à 1 : on peut toujours se ramener à un straddle majorant, moins coûteux de pente 1.



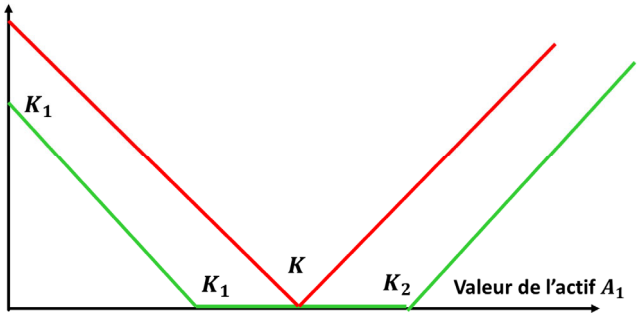
Meilleur straddle majorant

- Il faut donc chercher le strike $K \in [K_1, K_2]$ tel que le prix du straddle soit minimal



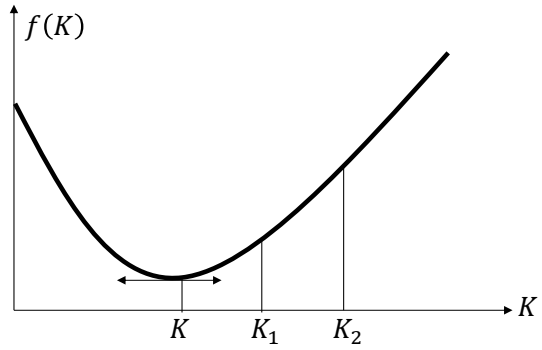
Meilleur straddle majorant

- Il faut donc chercher le strike $K \in [K_1, K_2]$ tel que le prix du straddle soit minimal
- Par la relation de parité, $C(K) + P(K) = 2C(K) + K - A_0$
- $K \to f(K) = 2C(K) + K - A_0$ est continue. Par le théorème des valeurs extrêmes, elle atteint son minimum sur $[K_1, K_2]$: $\exists\, \bar{K} \in [K_1, K_2]$, tel que $\forall K \in [K_1, K_2]$, $f(K) \geq f(\bar{K})$.



Meilleur straddle majorant

- Il faut donc chercher $\bar{K} \in [K_1, K_2]$ tel que le prix du straddle soit minimal
- $K \to f(K) = 2C(K) + K - A_0$ est convexe. $f(0) = A_0$, $\lim_{K\to\infty} f(K) = \infty \Rightarrow$ la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}^+$.
- Supposons que $K \to C(K)$ est dérivable. Pour chercher le minimum de f, on résout l'équation $f'(K) = 0$, ce qui donne $-C'(K) = 1/2$
- $-C'(K) = Q(A_1 \geq K)/(1 + r_f) = Q(A_1 \geq K) = 1/2$ puisque r_f est supposé nul



Meilleur straddle majorant

- On rappelle que la dérivabilité de $K \to C(K)$ implique qu'il n'y a pas de masse de probabilité $Q(A_1 = K) = 0$, $\forall K$
- $-C'(K)$ est la prime du call digital de strike K
- C'est aussi la probabilité risque-neutre que le sous-jacent soit supérieur à K : $S(K) = Q(A_1 \geq K)$ où $S = 1 - F$ est la fonction de survie.

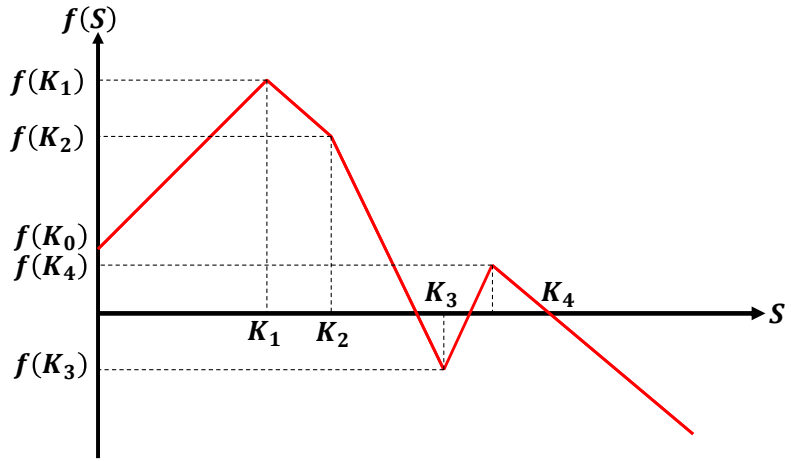
Duplication à partir de prix d'options

Duplication (statique) à partir d'options.

- On s'intéresse à la duplication d'un profil de paiement à partir d'options.
- Deux démarches possibles
  - *Commencer par utiliser les options pour reconstituer des butterflys (associés à des paiements d'actifs contingents aux prix de l'actifs sous-jacent). Puis, assembler les actifs contingents.*
  - *Ou approche directe, illustrée dans les transparents suivants*
- Cas discret peut se généraliser au cas continu
  - *Voir ci-dessous : Breeden, & Litzenberger (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. Journal of business.*
  - *Annales corrigées : Carr & Madan (2001). Towards a theory of volatility trading.*
  - *Green & Jarrow (1987). Spanning and completeness in markets with contingent claims. Journal of Economic Theory.*

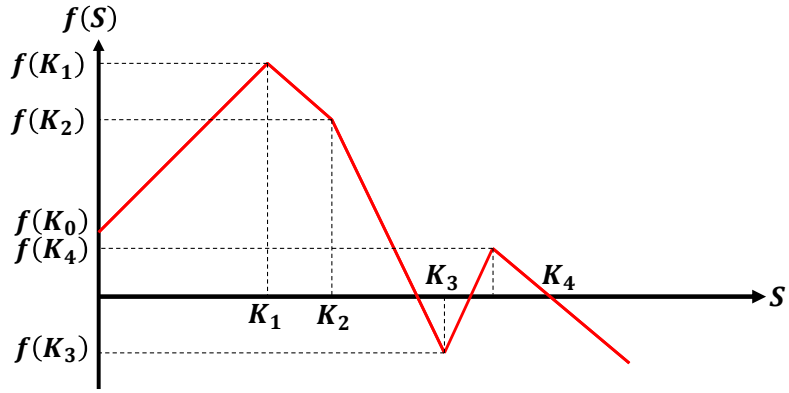
Duplication (statique) à partir d'options.

- Profil de paiement affine par morceaux
  - *S : prix de l'actif sous-jacent à la date (future) de paiement*



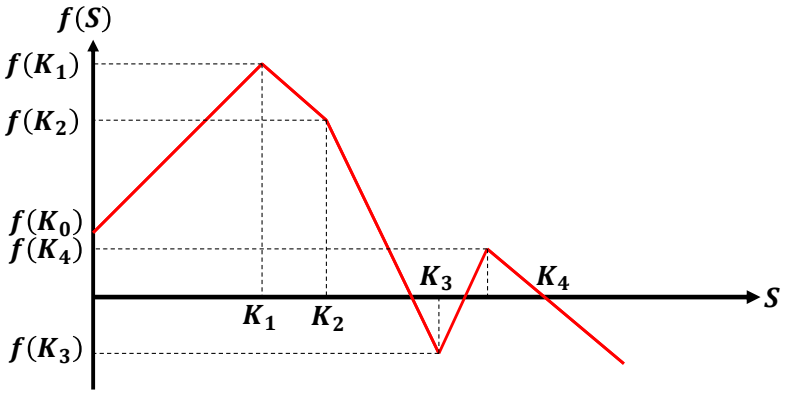
Duplication (statique) à partir d'options.

- Profil de paiement caractérisé par un ensemble de points de coordonnées $(K_0, f(K_0)), (K_1, f(K_1)) \ldots, (K_n, f(K_n))$, où $K_0 = 0$ et par la pente après K_n



Duplication (statique) à partir d'options.

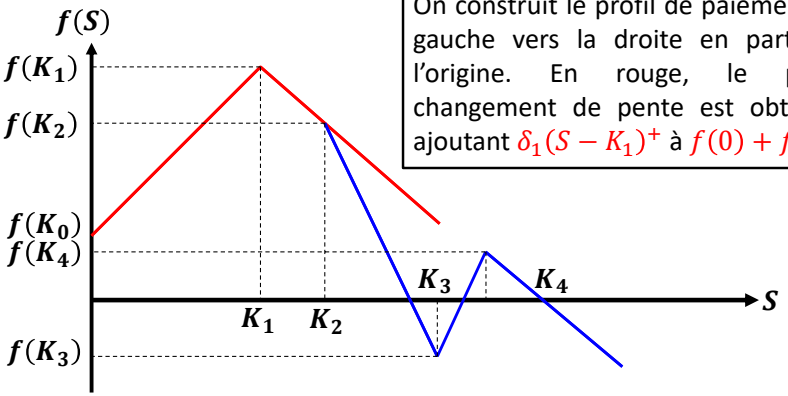
- Profil de paiement caractérisé par $f(0), f'(0)$ et par les changements de pente en $K_1, \dots, K_n$.
  - *Changement de pente en K_i : $\alpha_i = \frac{f(K_{i+1})-f(K_i)}{K_{i+1}-K_i} - \frac{f(K_i)-f(K_{i-1})}{K_i-K_{i-1}}$*



Duplication (statique) à partir d'options.

- Profil de paiement caractérisé par $f(0), f'(0)$ et par les changements de pente : $\alpha_i = \frac{f(K_{i+1})-f(K_i)}{K_{i+1}-K_i} - \frac{f(K_i)-f(K_{i-1})}{K_i-K_{i-1}}$, $i = 1, \dots n$
- D'où : $\forall S \in \mathbb{R}^+, f(S) = f(0) + f'(0)S + \delta_1(S-K_1)^+ + \cdots + \delta_n(S-K_n)^+$

On construit le profil de paiement de la gauche vers la droite en partant de l'origine. En rouge, le premier changement de pente est obtenu en ajoutant $\delta_1(S-K_1)^+$ à $f(0) + f'(0)S$



Duplication (statique) à partir d'options.

- Exemple : $f(K) = K^2, K \in \mathbb{N}$
  - $\alpha_K = \frac{f(K+1)-f(K)}{K+1-K} - \frac{f(K)-f(K-1)}{K-(K-1)} = 2$
  - *D'où :* $\forall S \in \mathbb{R}^+$,
- $f(S) = 2 \times \left((S-1)^+ + \cdots + (S-K)^+ + \cdots\right)$
  - *Combinaison de calls*
- Prix de duplication : $2(C(1) + \cdots + C(K) + \cdots)$
  - *Où $C(K)$ est la prime du call de strike K*
  - *Fini si la série de terme $C(K)$ est convergente*
- Cas général : prix de duplication
- $f(0) + f'(0)S_0 + \delta_1 C(K_1) + \cdots + \delta_n C(K_n) + \cdots$
  - *Où S_0 prix du sous-jacent à la date courante*