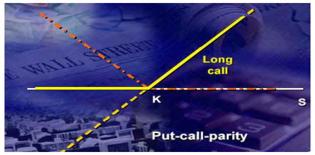
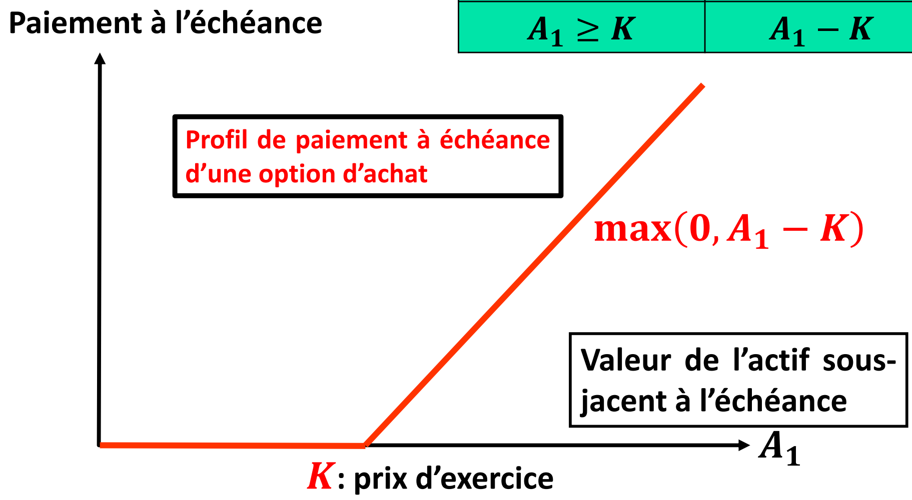
Achat d'options d'achat (calls) et de vente (puts)



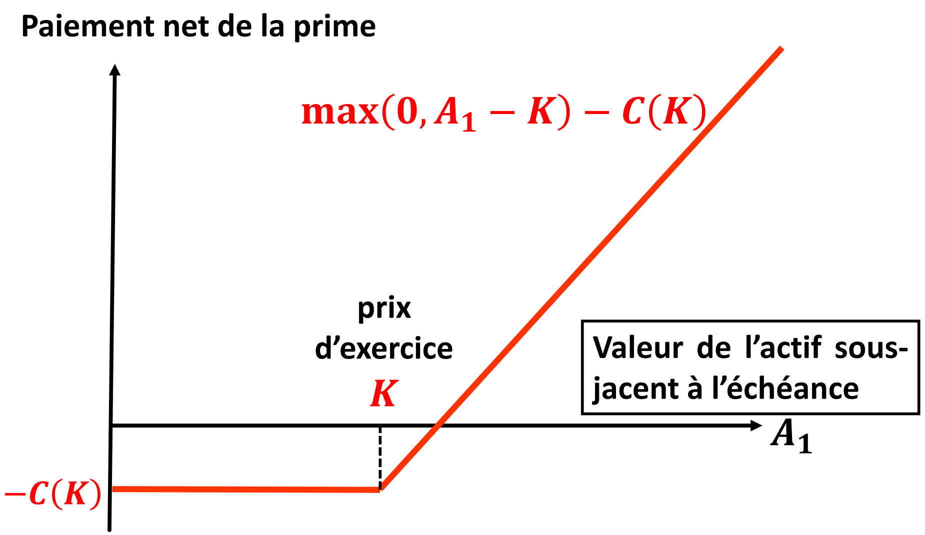
- Options d'achat et de vente de date d'exercice donnée
  - Ici $\boldsymbol{t = 1}$
  - On parlera de date d'exercice ou d'échéance
- De <u>même</u> prix d'exercice $\boldsymbol{K = D_0 \times (1 + i)} \in \mathbb{R}^+$
- Sous-jacent, valeur de l'actif de l'entreprise $\boldsymbol{A_1} \in \mathbb{R}^+$
- Option d'achat (call) :
  - Paiement en $\boldsymbol{t = 1}$: $(\boldsymbol{A_1 - K})^+ \triangleq \mathbf{max}(\boldsymbol{A_1 - K}, \mathbf{0})$
  - Prime (valeur de l'option) en $\boldsymbol{t = 0}$: $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$
- Option de vente (put) de prix d'exercice $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^+$
  - Paiement $(\boldsymbol{K - A_1})^+ \triangleq \mathbf{max}(\boldsymbol{K - A_1}, \mathbf{0})$
  - Prime (valeur de l'option) en $\boldsymbol{t = 0}$: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K})$

Achat de Call : profil de paiement à échéance

Condition d'exercice	Revenu du call à l'échéance
$\boldsymbol{A_1 \leq K}$	$\mathbf{0}$
$\boldsymbol{A_1 \geq K}$	$\boldsymbol{A_1 - K}$

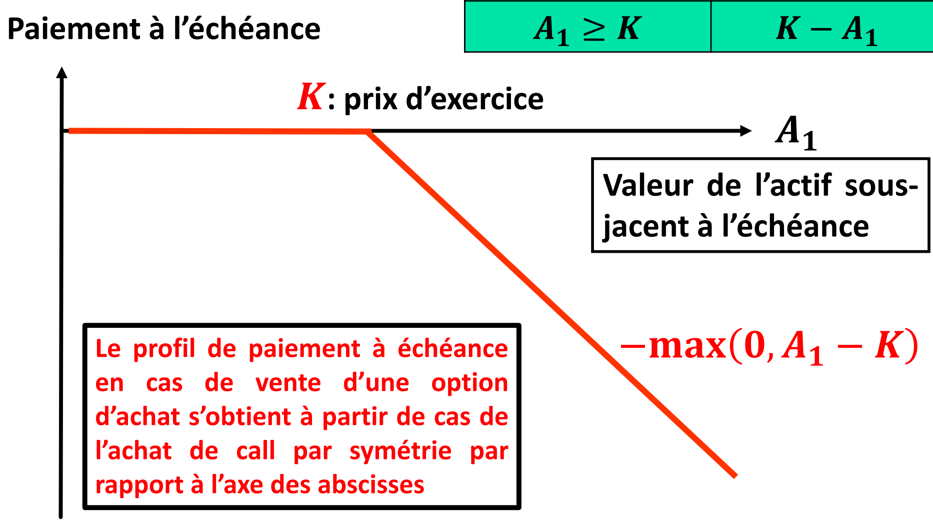


Achat de Call : profil de gain



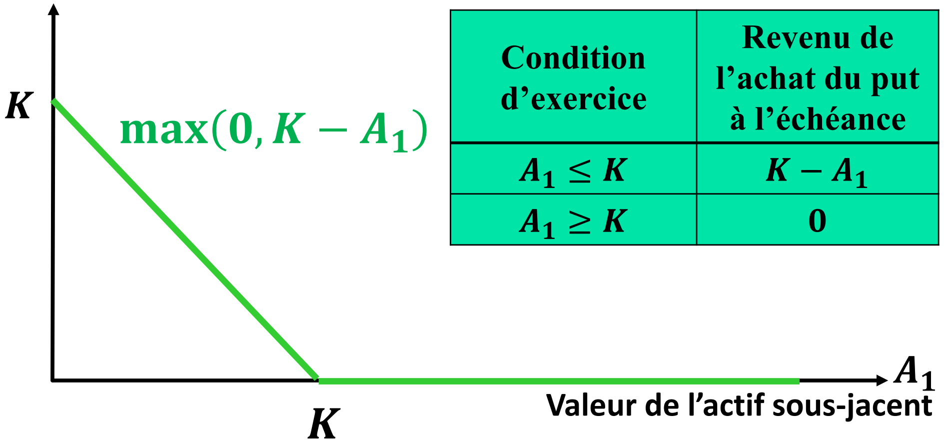
Vente de Call : profil de paiement à échéance

Condition d'exercice	Revenu de la vente du call à l'échéance
$\boldsymbol{A_1 \leq K}$	$\mathbf{0}$
$\boldsymbol{A_1 \geq K}$	$\boldsymbol{K - A_1}$



Achat de put

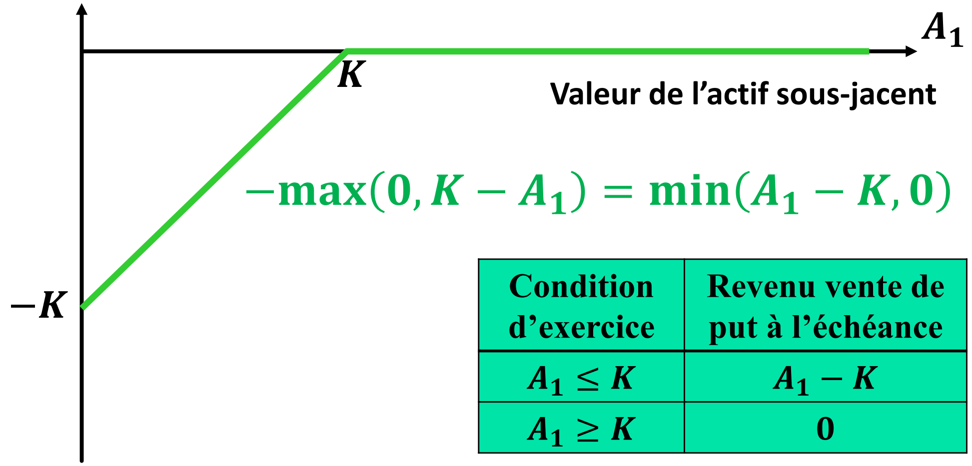
- Représentation graphique : profil de paiement de l'achat du put à l'échéance $t = 1$



Condition d'exercice	Revenu de l'achat du put à l'échéance
$A_1 \leq K$	$K - A_1$
$A_1 \geq K$	0

Vente de put

- Profil de paiement de la **vente du put** à l'échéance $t = 1$



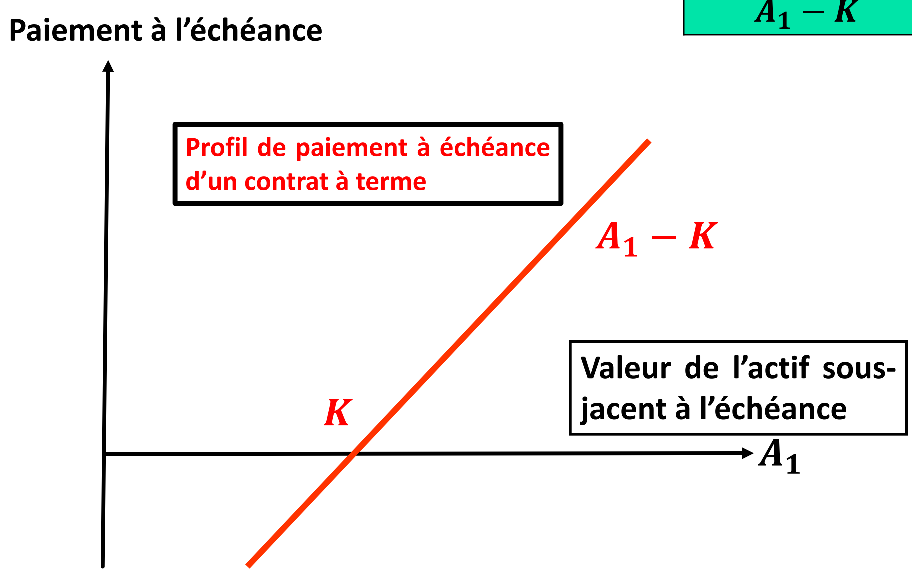
Condition d'exercice	Revenu vente de put à l'échéance
$A_1 \leq K$	$A_1 - K$
$A_1 \geq K$	0

Contrat à terme

- On suppose par la suite que l'actif sous-jacent ne verse pas de dividende entre la date courante et l'échéance du contrat
- On ne prend pas en compte d'éventuels dépôts de garantie ou appels de marge en vue de gérer le risque de contrepartie

Contrat à terme : paiement à échéance

Revenu du contrat à terme à l'échéance
$A_1 - K$

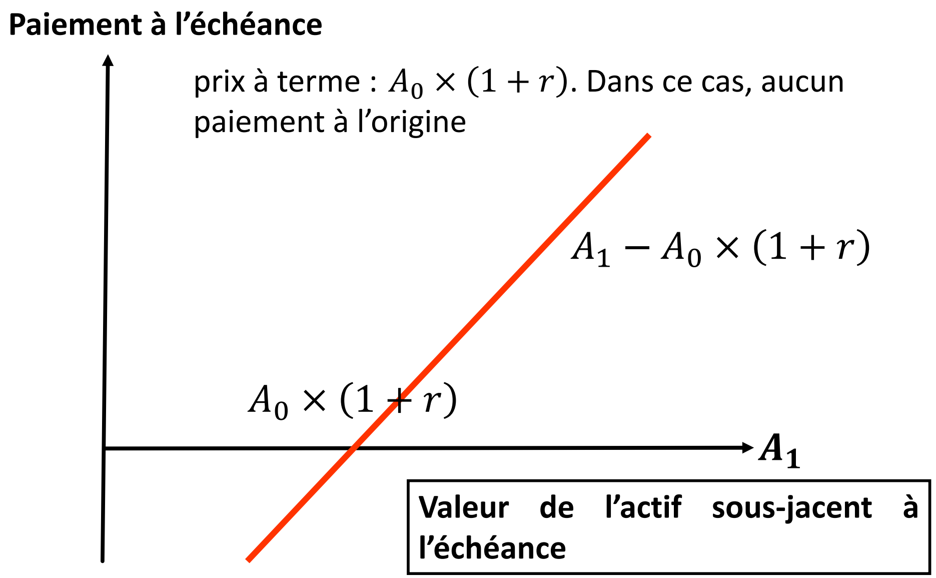


Contrat à terme : évaluation

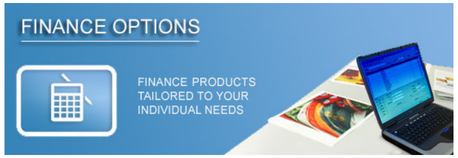
- *On parle aussi de contrat « forward »*
- *On suppose que l'actif sous-jacent ne verse pas de dividende entre les dates* 0 *et* 1.
- Le paiement du contrat à terme peut être dupliqué en achetant l'actif sous-jacent et en empruntant $\frac{K}{1+r}$
  - *r est le taux d'intérêt entre la date courante et l'échéance (ou maturité) du contrat à terme*
  - *En effet, en revendant l'actif sous-jacent à échéance, on reçoit A_1*
  - *En remboursant l'emprunt, on paye $\frac{K}{1+r} \times (1+r) = K$*
  - *On reçoit en net, à l'échéance $A_1 - K$*
- Le coût de duplication du paiement du contrat à terme est $A_0 - K/(1+r)$

Contrat à terme : prix à terme

Revenu du contrat à terme à l'échéance
$A_1 - A_0 \times (1+r)$



Exercice : call spread



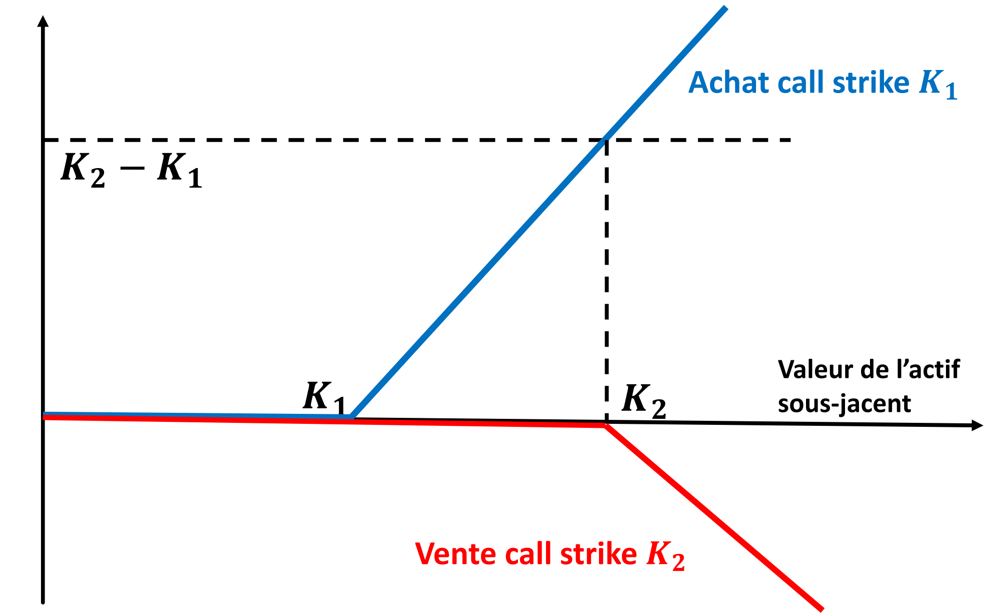
- Achat d'un call de strike K_1 et vente d'un call de strike $K_2, K_2 > K_1$
  - *Les deux calls ont la même date d'exercice*
  - *Le paiement à l'échéance du call spread est égal à* $\max(A_1 - K_1, 0) - \max(A_1 - K_2, 0)$
  - *Représenter de manière algébrique et graphique les profils de gain à échéance*

Exercice : call spread

- Achat d'un call de strike K_1 et vente d'un call de strike $K_2, K_2 > K_1$
  - *Les deux calls ont la même date d'exercice*
  - *Le paiement à l'échéance du call spread est égal à* $\max(A_1 - K_1, 0) - \max(A_1 - K_2, 0)$
  - *Représentation algébrique du gain à échéance*

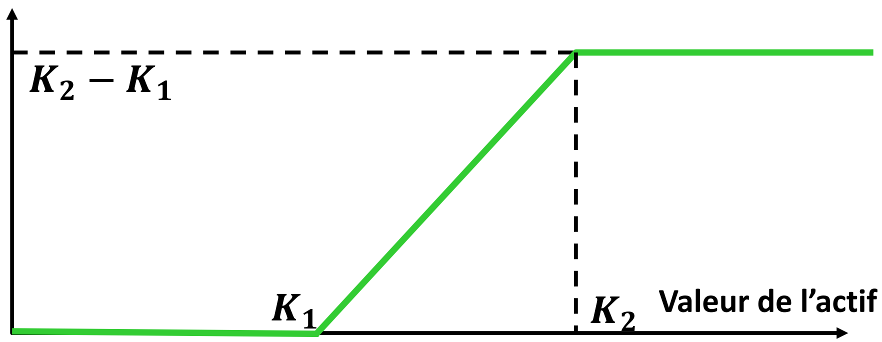
Prix d'exercice	Revenu du call acheté à l'échéance	Revenu du call vendu à l'échéance	Revenu global à l'échéance
$A_1 \leq K_1$	0	0	0
$K_1 < A_1 < K_2$	$A_1 - K_1$	0	$A_1 - K_1$
$A_1 \geq K_2$	$A_1 - K_1$	$-A_1 + K_2$	$K_2 - K_1$

call spread : approche géométrique



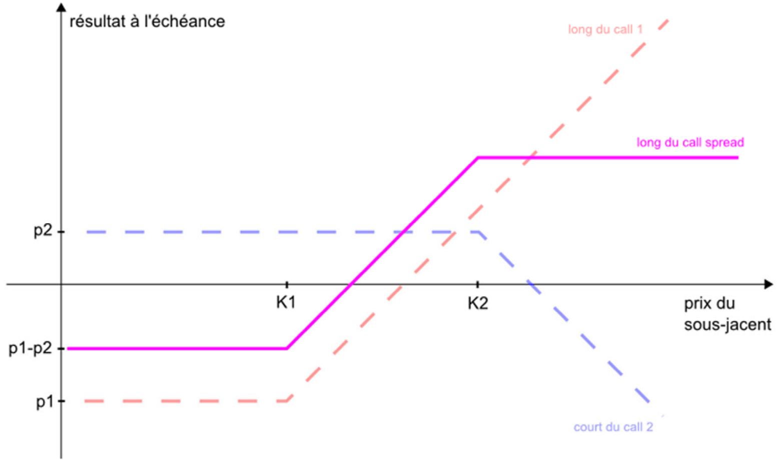
Exercice : call spread

- Profil de risque du call spread
  - *Représentation graphique, approche géométrique*

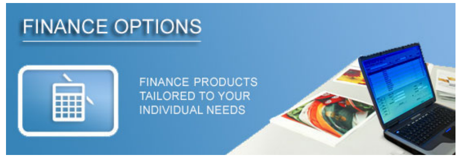


Exercice : call spread

- Call spread : achat de call, vente de call de strike supérieur
  - *Source du graphique : Wikipedia (le graphique représente les paiements nets des primes payées ou encaissées)*



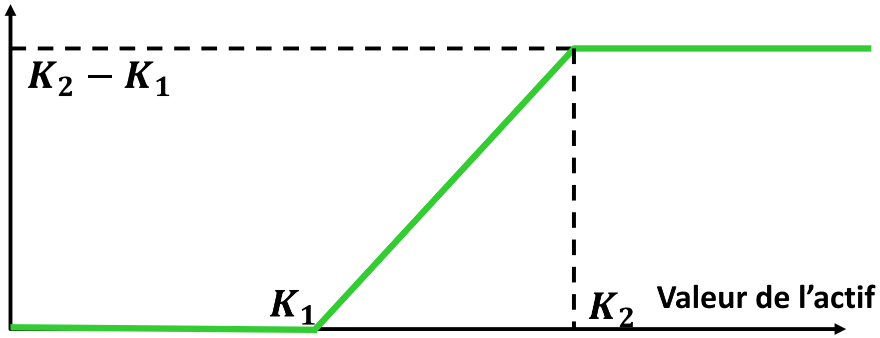
Exercice sur les options



- Exercice sur les options
  - *Montrer que la fonction* $K \rightarrow C(K)$ *est décroissante*
  - $C(K)$ *est la prime d'une option d'achat de strike* K
    - La date d'exercice est donnée.

Exercice sur les options

- Profil de risque du call spread



  - *Comme le paiement de ce portefeuille est positif, le prix de constitution de ce portefeuille également*
  - *Prix du call spread* $C(K_1) - C(K_2) \geq 0$, *soit* $C(K_1) \geq C(K_2)$
  - *Le profil de paiement est celui de la dette mezzanine*

Exercice : Dette subordonnée

- Dettes junior et senior
  - *La dette junior (ou subordonnée) est remboursée avant les actions, mais après la dette senior.*
  - *Priorité de paiement pour les créances senior par rapport aux créances subordonnées.*
  - D_0^S, i_S *montant et taux nominal de la dette senior*
  - D_0^J, i_J *montant et taux nominal de la dette subordonnée*
  - $\boldsymbol{K_1 = \max\left(0, A_1 - D_0^S \times (1+i_S) - D_0^J \times (1+i_J)\right)}$
  - *Les actionnaires récupèrent les actifs, après remboursement des dettes senior et junior, si cette somme nette est positive. Ils ne récupèrent rien si l'actif ne permet pas de rembourser les créanciers en priorité*

Dette subordonnée

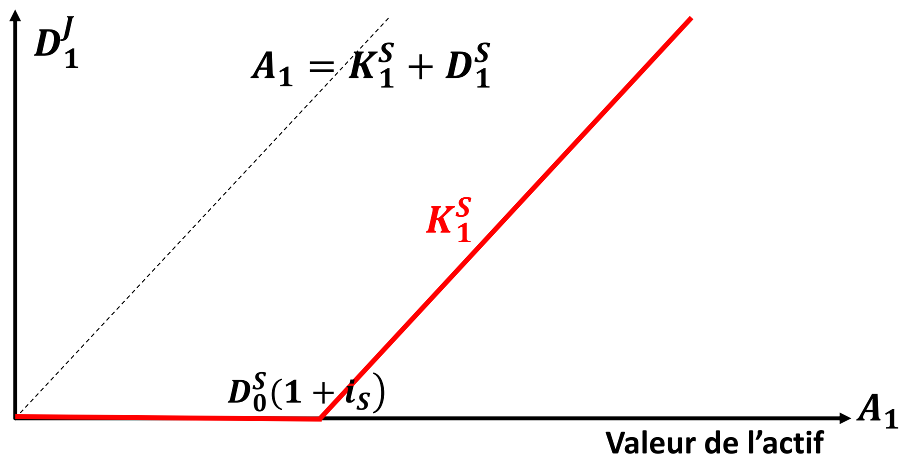
- Dette senior
  - *La dette senior est remboursée normalement dès que la valeur de l'actif* $\boldsymbol{A_1}$ *est supérieure à* $\boldsymbol{D_0^S \times (1+i_S)}$
  - *Sinon les créanciers seniors récupèrent* $\boldsymbol{A_1}$
  - $\boldsymbol{D_1^S = \min\left(A_1, D_0^S \times (1+i_S)\right)}$
- Dette junior
  - *La dette junior peut commencer à être remboursée quand la dette senior est totalement remboursée*
    - Si $\boldsymbol{A_1 > D_0^S \times (1+i_S)}$
  - *La dette junior est totalement remboursée quand les actionnaires commencent à recevoir une somme positive*
    - Si $\boldsymbol{A_1 > D_0^S \times (1+i_S) + D_0^J \times (1+i_J)}$

Dette subordonnée

- Dette junior
  - *Si* $\boldsymbol{A_1 < D_0^S(1+i_S)}$,
    - $\boldsymbol{D_1^J = 0}$ La valeur de l'actif est insuffisante pour rembourser la dette senior
  - $\boldsymbol{A_1 > D_0^S(1+i_S) + D_0^J(1+i_J)}$,
    - $\boldsymbol{D_1^J = D_0^J(1+i_J)}$ La valeur de l'actif est suffisante pour rembourser toutes les dettes
  - $\boldsymbol{D_0^S(1+i_S) < A_1 < D_0^S(1+i_S) + D_0^J(1+i_J)}$
    - On est dans une tranche intermédiaire (mezzanine) de valeurs de l'actif $\boldsymbol{A_1}$
    - $\boldsymbol{D_1^J = A_1 - D_0^S(1+i_S)}$ Les créanciers juniors reçoivent l'actif $\boldsymbol{A_1}$ après remboursement de la dette senior

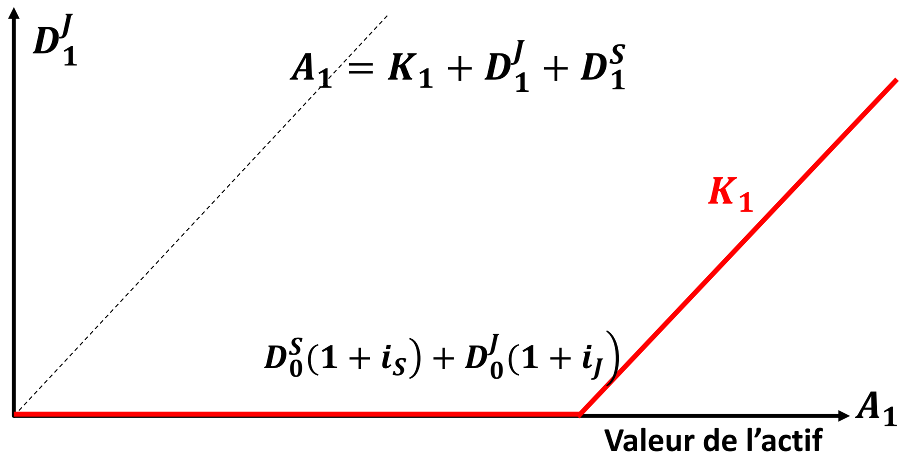
Dette subordonnée

- Profil de risque des actions $\boldsymbol{K_1^S}$ avec uniquement de la dette senior en fonction de valeur de l'actif $\boldsymbol{A_1}$



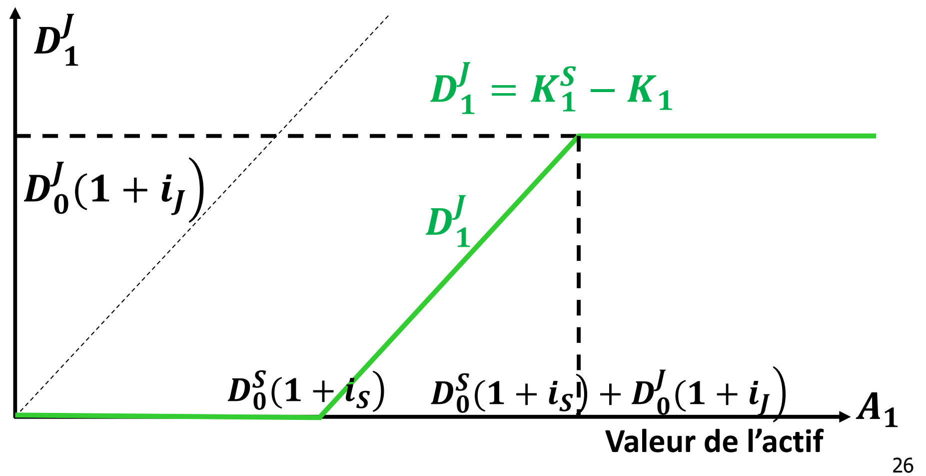
Dette subordonnée

- Profil de risque des actions en présence de dette mezzanine A_1



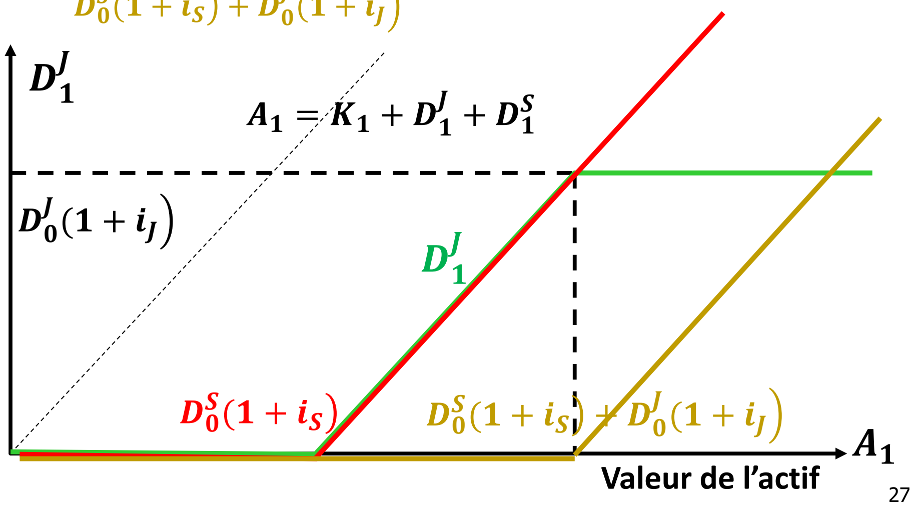
Dette subordonnée

- Profil de risque de la dette mezzanine D_1^J en fonction de valeur de l'actif A_1



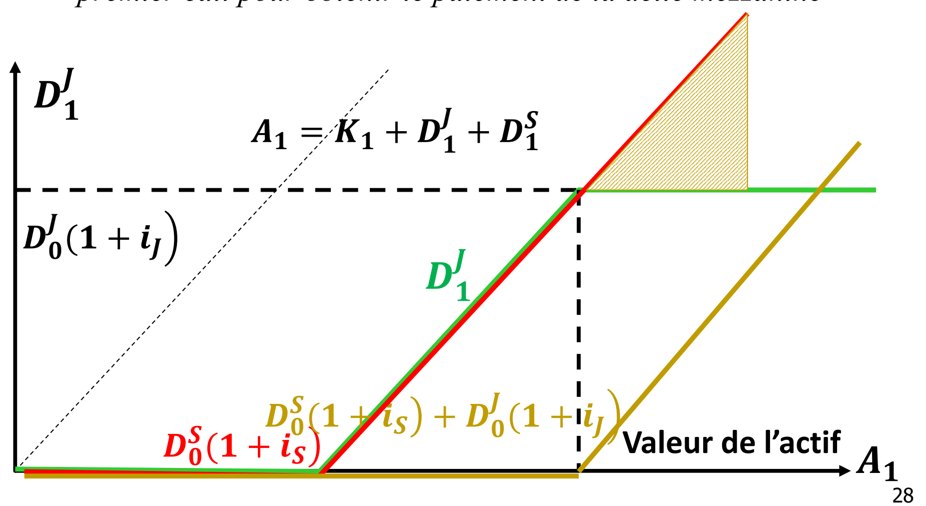
Dette subordonnée

- Dette mezzanine différence de deux calls
  - *Achat du call de strike* $D_0^S(1+i_S)$, *vente du call de strike* $D_0^S(1+i_S) + D_0^J(1+i_J)$



Dette subordonnée

- Dette mezzanine différence de deux calls (call spread)
  - *La zone hachurée correspond au paiement à soustraire au premier call pour obtenir le paiement de la dette mezzanine*



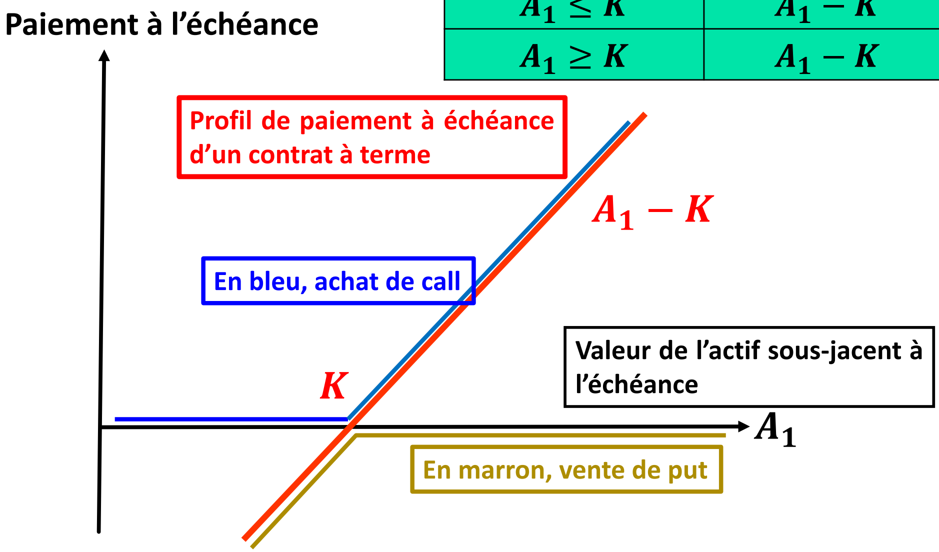
Exercice : relation de parité call – put (conversion)

Exercice : relation de parité call – put (conversion)

- Démontrer la relation de parité call-put :
- $\boldsymbol{C(K) - P(K) = A_0 - K/(1+r)}$
  - *Taux sans risque de défaut entre* $\boldsymbol{t=0}$ *et* $\boldsymbol{t=1}$ *noté* $\boldsymbol{r}$
  - $\boldsymbol{C(K) - P(K)}$ *correspond au montant à investir pour constituer un portefeuille constitué de l'achat d'une option d'achat et de la vente d'une option de vente*
  - $\boldsymbol{A_0 - K/(1+r)}$ *correspond au montant à investir pour constituer un portefeuille constitué de l'achat du sous-jacent et d'un emprunt dont le montant à rembourser en* $\boldsymbol{t=1}$ *est égal à* $\boldsymbol{K}$

Relation de parité call-put

(Pas de) condition d'exercice	Revenu du contrat à terme à l'échéance
$A_1 \leq K$	$A_1 - K$
$A_1 \geq K$	$A_1 - K$



Achat de call, vente de put

	Date 0		Date 1
Prime du Call	$C(K)$	Paiement du call à échéance	$(A_1 - K)^+$
Prime du Put	$P(K)$	Paiement du put à échéance	$(K - A_1)^+$
Prime achat call, vente put	$C(K) - P(K$	Achat call, vente put : paiement à échéance	$(A_1 - K)^+ - (K - A_1)^+ = A_1 - K$

- ***En rouge, paiements connus à la date 0***
- ***En bleu, paiements aléatoires (*** A_1 ***est une variable aléatoire)***
- $(A_1 - K)^+ - (K - A_1)^+ = A_1 - K$ ***(voir graphique)***

Exercice : relation de parité call – put

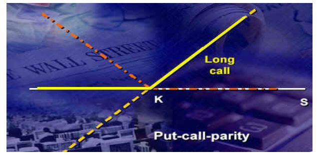
- Tableau des paiements à échéance
  - *Achat du call, vente du put*

Condition d'exercice	Achat du call	Vente du put	Revenu global à l'échéance
$A_1 \leq K$	0	$-K + A_1$	$A_1 - K$
$A_1 \geq K$	$A_1 - K$	0	$A_1 - K$

  - *Achat de l'action, emprunt de* $K/(1+r)$

	Achat de l'action	Emprunt de $K/(1+r)$	Revenu global à l'échéance
$A_1 \leq K$	A_1	$-K$	$A_1 - K$
$A_1 \geq K$	A_1	$-K$	$A_1 - K$

Exercice : relation de parité call – put



- Exercice : relation de parité call – put (suite)
  - $C(K) - P(K)$ *correspond au montant à investir pour constituer un portefeuille constitué de l'achat d'une option d'achat et de la vente d'une option de vente*
  - *Le paiement associé à ce portefeuille est* $(A_1 - K)^+ - (K - A_1)^+ = A_1 - K$
  - *Un portefeuille constitué de l'achat du sous-jacent et d'un emprunt au taux risque r d'un montant* $K/(1+r)$ *génère au moment de sa liquidation un flux net de* $A_1 - K$
    - Identique au flux précédent
  - *Le flux net à décaisser en* $t = 0$ *est* $A_0 - K/(1+r)$
  - *Les deux portefeuilles générant le même paiement en* $t = 1$ *doivent avoir la même valeur en* $t = 0$, *d'où le résultat*

Relation de parité call-put

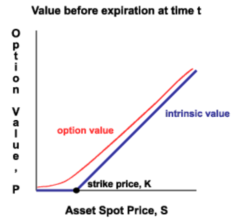
- Pourquoi parle-t-on de relation de « parité » ?
- Si $K = A_0 \times (1 + r)$
  - $A_0 \times (1 + r)$ *prix à terme du sous-jacent en l'absence de paiement de dividende*
  - $K = A_0 \times (1 + r)$ $\Leftrightarrow$ *Prix d'exercice = prix à terme du sous-jacent*
  - *Alors* $C(K) = P(K)$
  - *« Parité » entre les primes des calls et des puts quand le prix d'exercice (strike) est égal au prix à terme*

relation de parité call – put

- La relation de parité call – put est liée à la décomposition du passif en actions et dette
  - $C(K) - P(K) = A_0 - K/(1+r)$ *peut se réécrire* $C(K) + K/(1+r) - P(K) = A_0$
  - $C(K) = E_0$
    - Option d'achat sur les actifs = fonds propres
    - Ici, $K = D_0 \times (1 + i)$
  - $K/(1+r) - P(K) = D_0$
    - Valeur de marché de la dette risquée D_0 = dette sans risque $K/(1+r)$ - valeur du put ($P(K)$)
    - Relation entre actions, dette et actif à la date $t = 0$
  - *À la date* $t = 1$ *:*
  - $A_1 = \max(0, A_1 - K) + \min(A_1, K) = E_1 + D_1$

Exercice : Valeur intrinsèque et valeur temps

Exercice : Valeur intrinsèque et valeur temps



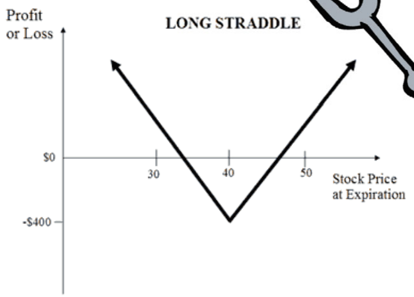
- Considérons une option d'achat de strike K
  - *Le paiement à l'échéance est* $(\boldsymbol{A_1} - \boldsymbol{K})^+ = \mathbf{max}(\boldsymbol{A_1} - \mathbf{K}, \mathbf{0})$
  - *Si l'option pouvait être exercée immédiatement, le paiement serait* $(\boldsymbol{A_0} - \boldsymbol{K})^+ = \mathbf{max}(\boldsymbol{A_0} - \boldsymbol{K}, \mathbf{0})$
  - *On appelle cette quantité la* ***valeur intrinsèque*** *de l'option*
  - *La différence entre la prime de l'option* $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$ *et la valeur intrinsèque* $(\boldsymbol{A_0} - \boldsymbol{K})^+$ *est la* ***valeur temps****.*
  - *Montrer que la valeur temps d'une option d'achat est toujours (strictement) positive*
    - Dans les exercices sur les options, il n'y a pas de distributions de dividende avant ou à la date d'exercice
    - Conseil : utiliser la relation de parité call - put

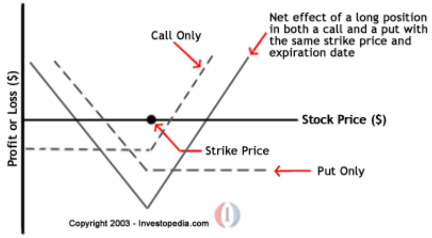
La valeur temps d'une option d'achat est positive (si le taux sans risque est positif)

- Démonstration
  - *La prime de l'option est positive* $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K}) \geq \mathbf{0}$
  - *D'après la relation de parité* $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{A_0} - \boldsymbol{K}/(\mathbf{1} + \boldsymbol{r})$
  - *Comme* $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}) \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K}) \geq \boldsymbol{A_0} - \boldsymbol{K}/(\mathbf{1} + \boldsymbol{r})$
  - ***Supposons que le taux sans risque*** $\boldsymbol{r}$ ***est positif***
  - *Alors,* $\boldsymbol{A_0} - \boldsymbol{K}/(\mathbf{1} + \boldsymbol{r}) \geq \boldsymbol{A_0} - \boldsymbol{K}$
  - $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K}) \geq \boldsymbol{A_0} - \boldsymbol{K} \Rightarrow \boldsymbol{C}(\boldsymbol{K}) \geq \mathbf{max}(\boldsymbol{A_0} - \boldsymbol{K}, \mathbf{0}) = (\boldsymbol{A_0} - \boldsymbol{K})^+$
  - *Le terme de droite est la valeur intrinsèque de l'option d'achat*
    - On peut montrer que la valeur temps augmente avec le **risque total** de l'actif (voir transparents sur augmentation du risque)
    - Si les actionnaires peuvent augmenter ce risque, ils augmentent la valeur de marché des actions (aléa moral, conflits d'agence de l'endettement)

Combinaisons d'options, straddle

- Quelques combinaisons classiques d'options
  - *Valeur de l'actif sous-jacent à échéance de l'option A_1*
- Straddle (« fourche »)
  - *Option d'achat + option de vente de même prix d'exercice K*
  - *Paiement à maturité :* $\max(A_1 - K, 0) + \max(K - A_1, 0)$
  - *Le graphique de droite représente un straddle en position longue*
  - *Le P&L (Profit & Loss) prend en compte le paiement de la prime*
  - *Stratégie gagnante pour de grandes variations du sous-jacent autour du prix d'exercice*



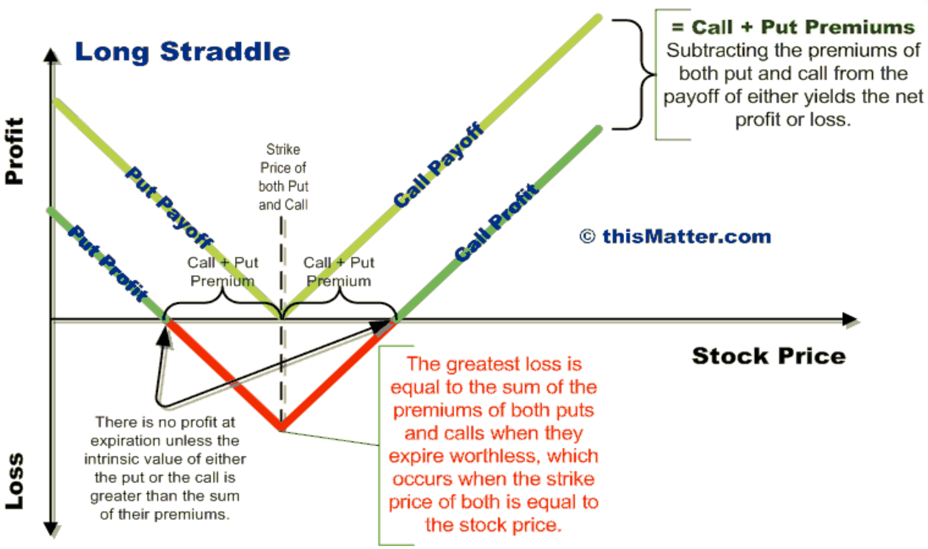


Combinaisons d'options, straddle

- Straddle
  - *Achat d'un call et d'un put de même date d'exercice*
  - *Et de même prix d'exercice K*
  - *Paiement à échéance*
  - $\max(A_1 - K, 0) + \max(K - A_1, 0)$
  - *Ou* $(A_1 - K)^+ + (A_1 - K)^- = |A_1 - K|$
    - Rappel : $X^+ = \max(X, 0)$, $X^- = \max(-X, 0)$

Prix d'exercice	Revenu du call à l'échéance	Revenu du put à l'échéance	Revenu global à l'échéance
$A_1 \le K$	0	$K - A_1$	$K - A_1$
$A_1 \ge K$	$A_1 - K$	0	$A_1 - K$

Combinaisons d'options, straddle



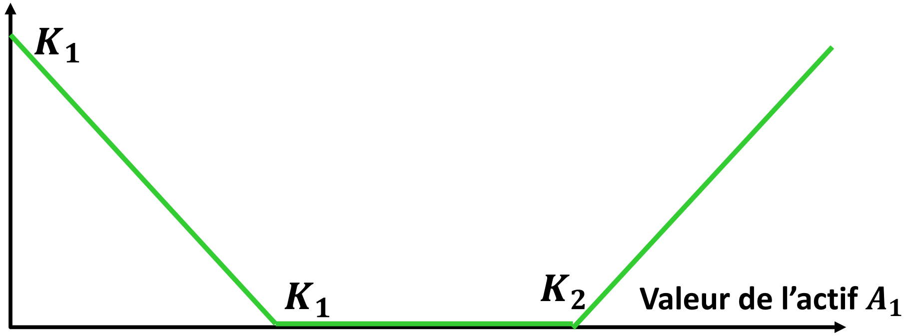
Combinaisons d'options : strangle

- Strangle
  - *Achat d'un call et d'un put de même date d'exercice*
  - *mais de prix d'exercice différents*
    - Contrairement au straddle
  - *Prix d'exercice du call K_2 supérieur à celui du put K_1*
  - *Paiement à échéance* $(A_1 - K_2)^+ + (A_1 - K_1)^-$

Prix d'exercice	Revenu du call à l'échéance	Revenu du put à l'échéance	Revenu global à l'échéance
$A_1 \le K_1$	0	$K_1 - A_1$	$K_1 - A_1$
$K_1 < A_1 < K_2$	0	0	0
$A_1 \ge K_2$	$A_1 - K_2$	0	$A_1 - K_2$

Combinaisons d'options, strangle

- Profil de risque du strangle

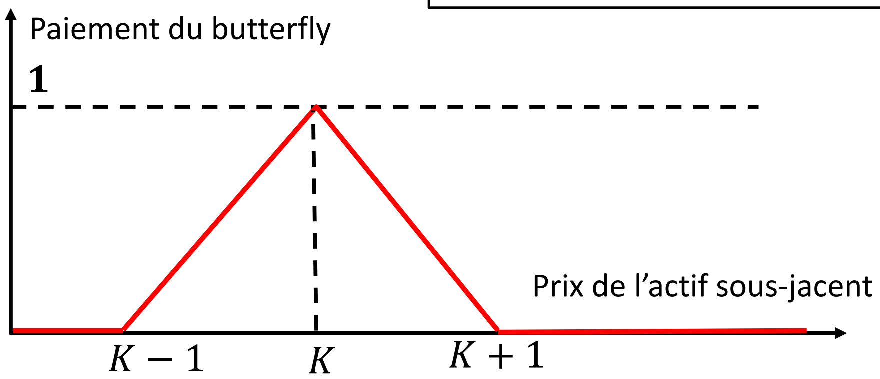


- Ici, on a représenté le paiement à échéance
  - *L'impact du paiement des primes à l'origine n'est pas représenté*
  - *Si $K_1 = K_2$, le strangle devient un straddle*

Butterfly : exemple

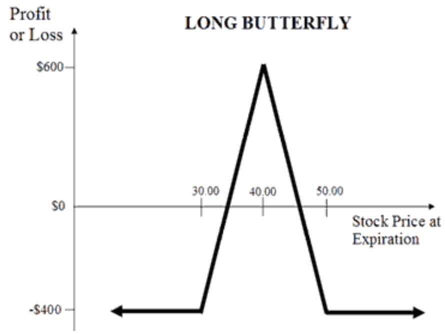
- Profil de risque

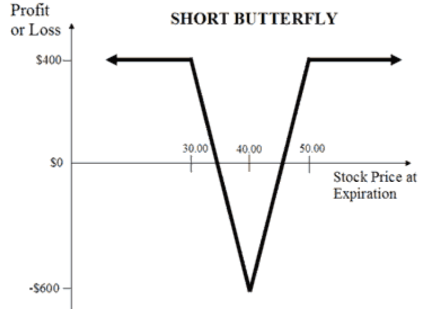
On remarque que le paiement du butterfly est identique à celui de l’actif contingent à l’état K



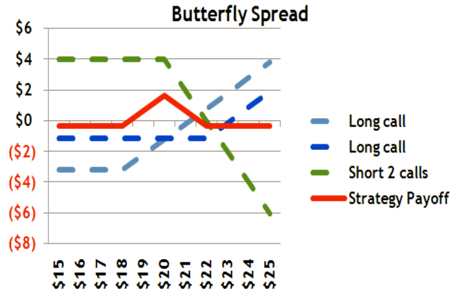
Butterfly (papillon)

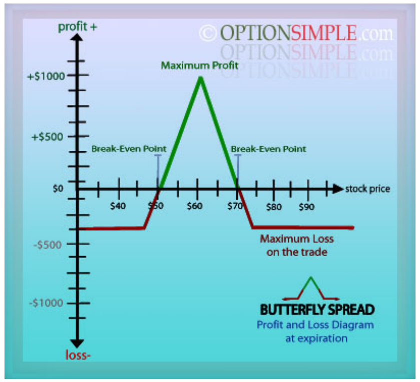
- *Profils de paiement (prime incluse) pour des papillons en position longue et courte*
  - On peut parier soit sur le fait que le sous-jacent vaudra 40 (long butterfly), soit qu’il sera différent de 40 (short butterfly)

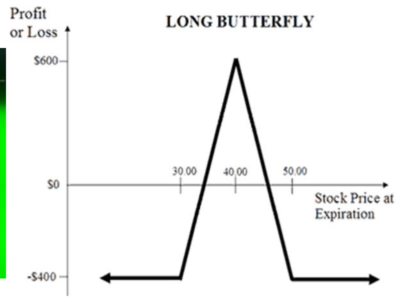




- Butterfly spread







Butterfly : construction à partir de calls

- 3 calls de prix d’exercice $K-1, K, K+1$ et de même date d’exercice

- Achat d’un call de strike $K-1$,
- Vente de deux calls de strike K,
- Achat d’un call de strike $K+1$

- On va vérifier que le portefeuille précédent duplique le paiement d’un long butterfly

Butterfly : exemple

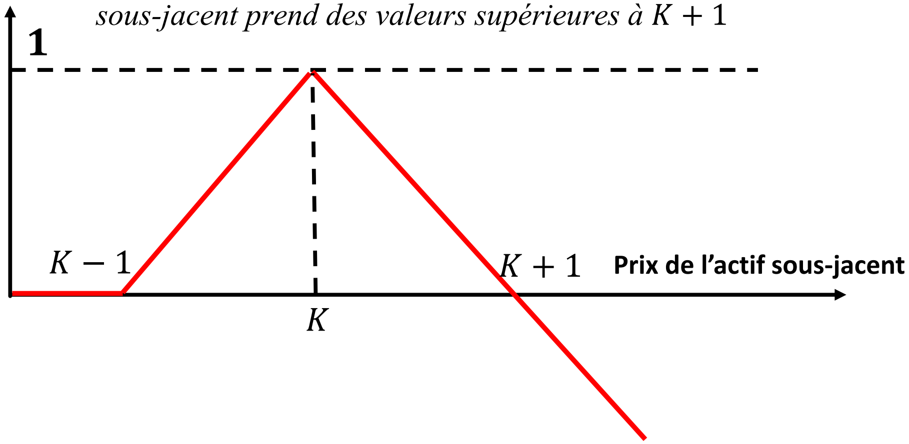
- Paiements associés à un butterfly
  - *On utilise 3 calls de prix d'exercice $K-1$, $K, K+1$*
  - *De même date d'exercice*
  - *Achat d'un call de strike $K-1$, vente de deux calls de strike K, achat d'un call de strike $K+1$*

Prix d'exercice	Revenu de l'achat du premier call	Revenu de la vente des deux calls	Revenu de l'achat du troisième call	Revenu global à l'échéance
$A_1 \leq K-1$	0	0	0	0
$K-1 < A_1 \leq K$	$A_1-(K-1)$	0	0	$A_1-(K-1)$
$K < A_1 < K+1$	$A_1-(K-1)$	$-2(A_1-K)$	0	$K+1-A_1$
$A_1 \geq K+1$	$A_1-(K-1)$	$-2(A_1-K)$	$A_1-(K+1)$	0

  - *Paiements :* 0 *si* $A_1 = K-1$, 1 *si* $A_1 = K$, 0 *si* $A_1 = K+1$

Butterfly : remarque

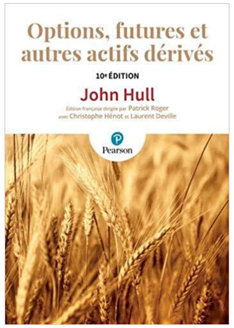
- Profil de risque si on achète un call de strike $K-1$ et on vend 2 calls de strike K
  - *On économise l'achat du call de strike $K+1$, mais pertes si le sous-jacent prend des valeurs supérieures à $K+1$*



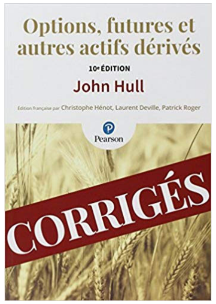
Butterfly

- Prix (prime) du butterfly : $C(K-1) - 2C(K) + C(K+1) \geq 0$
- Exercice : duplication d'un butterfly à partir de puts
  - *Utilisation de la relation de parité*
  - $C(K) = P(K) + A_0 - \frac{K}{1+r}$
  - *Les termes en A_0 dans $C(K-1) - 2C(K) + C(K+1)$:* $A_0 - 2A_0 + A_0 = 0$
  - *Les termes en K (on laisse de côté le dénominateur $1+r$)*
  - $-(K-1) + 2K - (K+1) = 0$
  - $C(K-1) - 2C(K) + C(K+1) = P(K-1) - 2P(K) + P(K+1)$

Bibliographie



- Ouvrage sur les options
  - *Hull : options, futures et autres actifs dérivés*
  - *Traduction en français*
  - *Présentation pédagogique*
  - *Voir chapitres 9, 10, 11, puis le chapitre 14 sur les stock-options*
    - Certains exercices en fin de chapitre sont repris dans les transparents
- Cours de Thomas Bouvet - M1 Finance « Options en finance d'entreprise » :
  - *http://tbouvetm1.blogspot.com/*



Exercices sur les options

- Tirés de l'ouvrage précédent
  - *Construisez un graphique présentant les gains et pertes d'un investisseur en fonction de la valeur du sous-jacent à l'échéance pour les portefeuilles suivants*
    - Une action et une position courte sur un call
    - Deux actions et une position courte sur un call
    - Une action et une position courte sur deux calls
    - Une action et une position courte sur quatre calls
  - *Dans chaque cas, vous supposerez que le call a un prix d'exercice égal à la valeur du sous-jacent au moment de la prise de position*
    - On notera A_1, la valeur du sous-jacent à l'échéance
    - A_1 la valeur du sous-jacent au moment de la prise de position
    - On ne prend en compte que les gains / pertes à l'échéance

Quatre exercices sur les options

Condor Options has been seen on:

BARRON'S Bloomberg The Street REUTERS THE WALL STREET JOURNAL CNBC

- Trois options *de vente* sur une action ont la même date d'échéance et des prix d'exercice de 55 €, 60 € et 65 €. Leurs primes sont respectivement de 3 €, 5 € et 8 €.
  - *Expliquez de quelle manière réaliser un butterfly spread.*
  - *Construisez un tableau présentant les bénéfices de cette stratégie.*
  - *Pour quelles valeurs de l'action le butterfly spread entraînera-t-il une perte ?*
- Quelle est la différence entre un straddle et un strangle ?
- Quel est le résultat engendré par un strangle dont le prix d'exercice du put serait plus élevé que celui du call ?
- Un investisseur vend un call de prix d'exercice K et achète un put de même prix d'exercice et de même date d'exercice. Décrivez la position de l'investisseur.

Deux exercices sur les options

Condor Options has been seen on:

BARRON'S Bloomberg The Street REUTERS THE WALL STREET JOURNAL CNBC

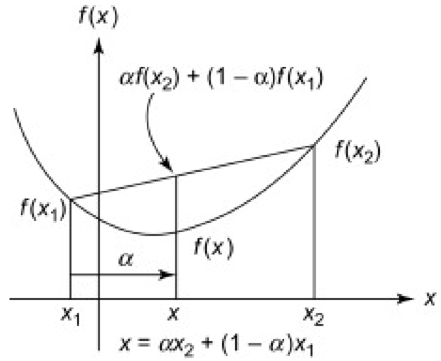
- Décrire la position créée par l'achat d'un call de prix d'exercice K_2 et la vente d'un put de prix d'exercice K_1 lorsque les deux options ont la même maturité et que $K_2 > K_1$. Que devient cette position si $K_2 = K_1$?
- Des calls sur action sont disponibles pour des prix d'exercice de 15 €, 17,50 €, 20 € et des échéances à trois mois. Les primes sont respectivement de 4 €, 2 € et 0,50 €.
  - *Expliquez de quelle manière les options peuvent être utilisées pour construire un butterfly spread*
  - *Construisez un tableau montrant les revenus (nets des primes) de ce butterfly spread en fonction du cours de l'action.*

Exercice : convexité de $K \to C(K)$

Exercice : convexité de $K \to C(K)$

- Soit $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$, $K_1 < K_2$ et $0 < \alpha < 1$. Montrer que :
- $\alpha C(K_1) + (1-\alpha)C(K_2) \geq C(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2)$
- On aura ainsi montré que la fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ est convexe (on sait déjà qu'elle est décroissante)

la fonction f est convexe si sa courbe représentative est en-dessous de ses cordes



Exercice : convexité de $K \to C(K)$

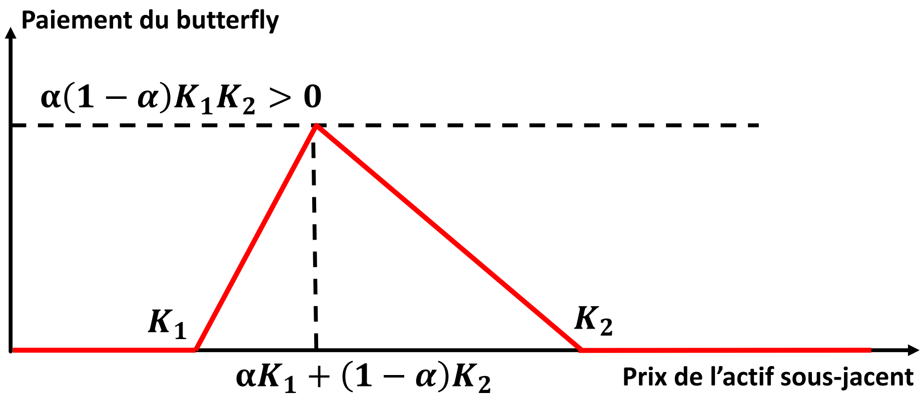
- *3 calls de prix d'exercice $K_1, \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2, K_2$, de même date d'exercice, $\alpha \in]0,1[$*
- *Achat de α call de strike K_1, vente d'un call de strike $\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$, achat de $1-\alpha$ call de strike K_2*

Prix d'exercice	Revenu achat du premier call	Revenu vente du call de strike intermédiaire	Revenu achat du troisième call	Revenu global à l'échéance
$A_1 \leq K_1$	0	0	0	0
$K_1 < A_1 \leq \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$	$\alpha(A_1 - K_1)$	0	0	$\alpha(A_1 - K_1)$
$\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2 < A_1 < K_2$	$\alpha(A_1 - K_1)$	$-(A_1 - \alpha K_1 - (1-\alpha)K_2)$	0	$-(1-\alpha)(A_1 - K_2)$
$A_1 \geq K_2$	$\alpha(A_1 - K_1)$	$-(A_1 - \alpha K_1 - (1-\alpha)K_2)$	$(1-\alpha)(A_1 - K_2)$	0

- *Le revenu global à échéance est toujours ≥ 0*
- $\alpha C(K_1) + (1-\alpha)C(K_2) - C(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2) \geq 0$

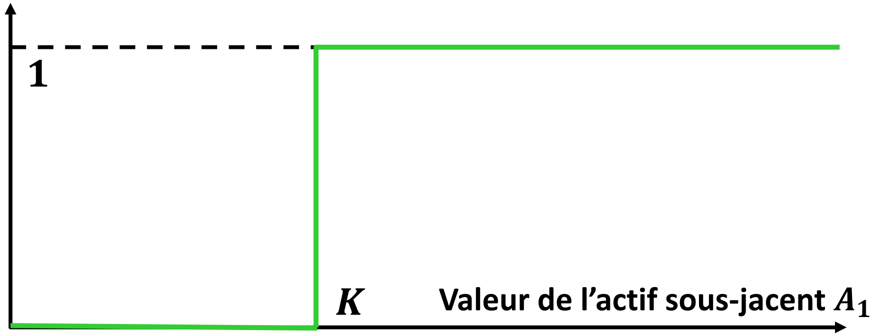
Exercice : convexité de $K \to C(K)$

- Profil de paiement du portefeuille précédent : étant positif, la prime correspondante est positive
- D'où $\alpha C(K_1) + (1-\alpha)C(K_2) \geq C(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2)$



Option digitale (binary option)

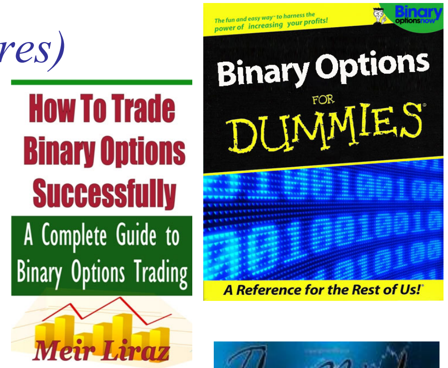
- Profil de risque du call digital

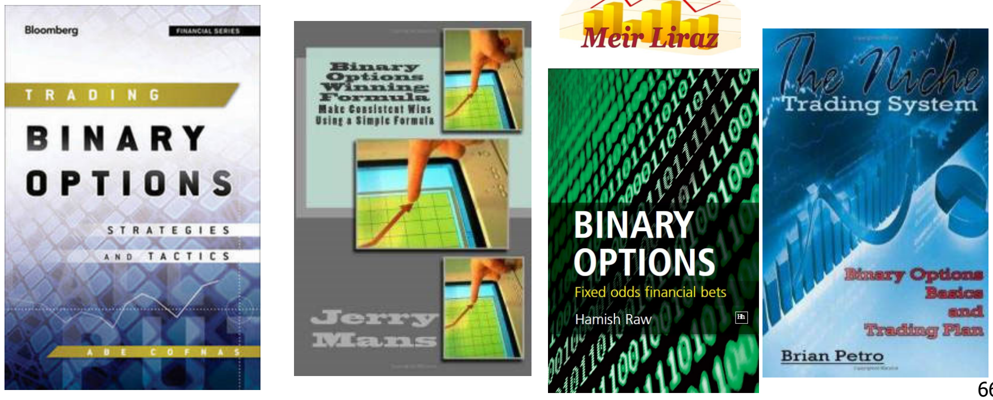


- Le paiement associé est $1_{A_1 \geq K}$ ou $1_{A_1 > K}$
- $1_{A_1 \geq K} = 1_{A_1 > K} + 1_{A_1 = K}$

Options digitales (binaires)

- Stratégie de base, pari à la hausse ou à la baisse du sous-jacent
- Lien avec la passion du jeu et les probabilités…

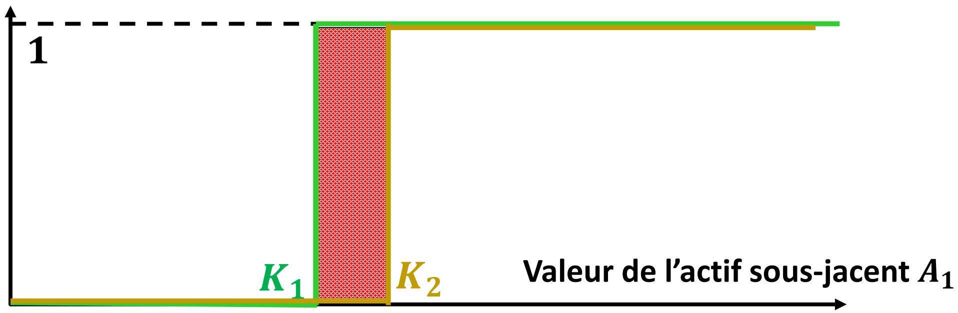




Outil théorique et/ou paradis du spéculateur ?

Call spread digital

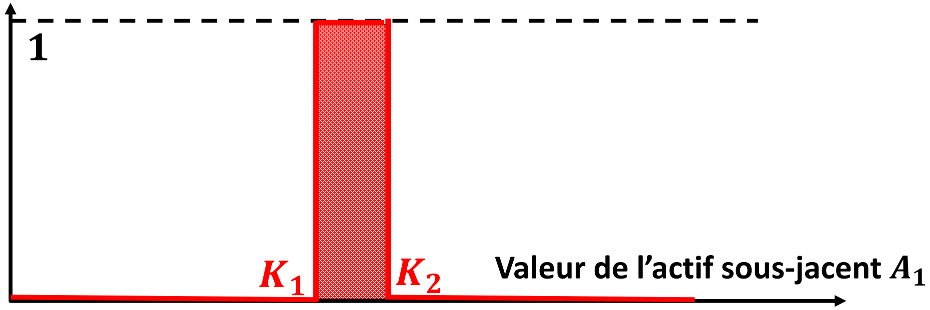
- Paiement du call spread digital



- *En vert le profil du call digital de strike K_1*
- *En marron, le paiement du call digital de strike K_2*
- *La surface hachurée rouge correspond au paiement du call spread digital*

Call spread digital

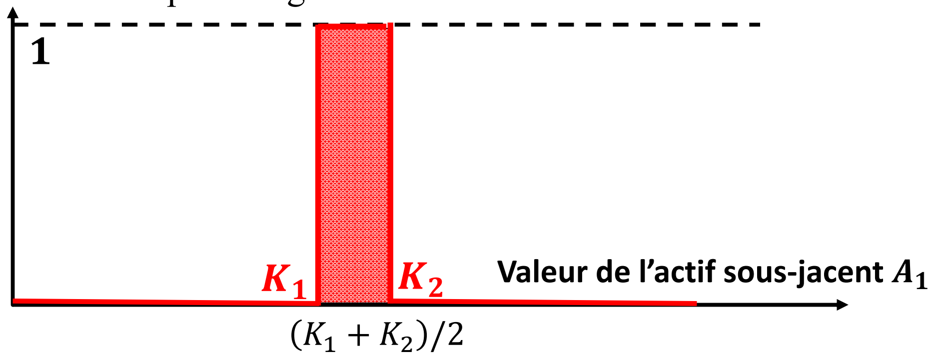
- Paiement du call spread digital



  - *Le call spread digital précédent paye 1 € si le prix de l'actif sous-jacent à échéance est compris entre K_1 et K_2*
  - *La prime est égale à $C_b(K_1) - C_b(K_2) \geq 0$*

Call spread digital

- Call spread digital

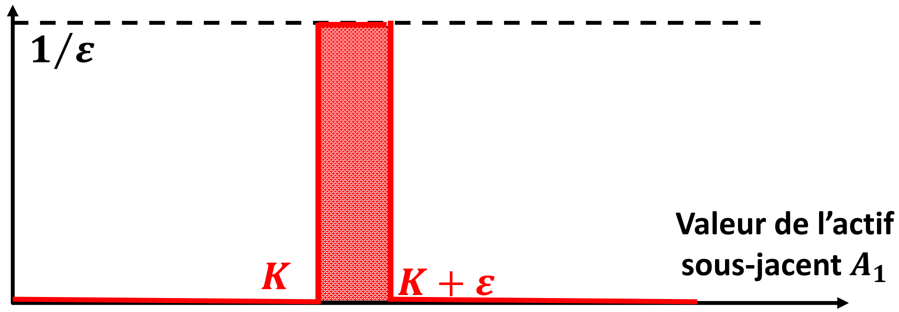


  - *Comme $K_1 < K_2 \Rightarrow C_b(K_1) - C_b(K_2) \geq 0 \Leftrightarrow C_b(K_1) \geq C_b(K_2)$,*
  - *La fonction $K \to C_b(K)$ est décroissante*
  - *$C_b(K) = -C'(K)$ si $K \to C(K)$ est dérivable et $\bar{C}_b(K) = C_b(K)$*
  - *$K \to C'(K)$ est croissante : $K \to C(K)$ est donc une fonction convexe*
  - *$C''(K) \geq 0$*

Option digitale : convexité de $K \to C(K)$

- $K \to C(K)$ est dérivable en K si les dérivées à droite et à gauche sont égales
- Dans ce cas, $C'(K) = -C_b(K)$
- Comme $K \to C_b(K)$ est décroissante, $K \to C'(K)$ est croissante, ce qui veut dire que $K \to C(K)$ est convexe
  - *On rappelle qu'une fonction dérivable est convexe si sa dérivée est croissante*
  - *Si la dérivée est décroissante, la fonction est concave*
- Remarque : La convexité reste vraie, même s'il existe des points de non-dérivabilité
  - *Voir supra, sur la convexité de $K \to C(K)$*

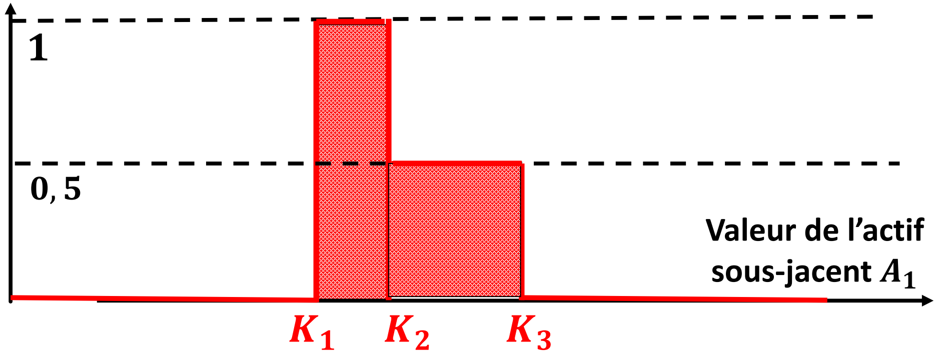
Call spread digital



- Paiement associé à l'achat de $1/\varepsilon$ call digital de strike K et la vente de $1/\varepsilon$ call digital de strike $K + \varepsilon$
- Actif contingent à l'état K
- Prime correspondante : $\frac{C_b(K) - C_b(K+\varepsilon)}{\varepsilon} \to -C'_b(K)$ quand $\varepsilon \to 0$
  - *$C'_b(K)$: dérivée de $K \to C_b(K)$*

Call spread digital

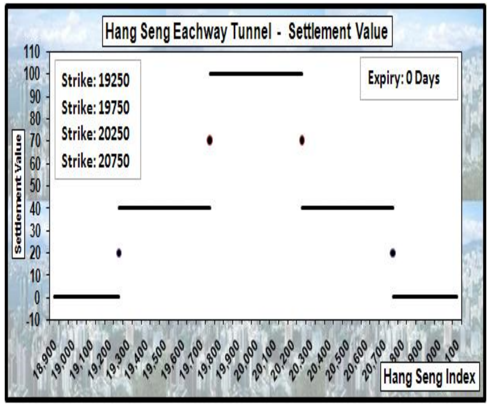
- À partir de call digitaux, on peut reconstituer n'importe quel paiement, fonction constante par morceaux (fonction en escalier) de l'actif sous-jacent



Prime égale à $\mathbf{1} \times \left(\boldsymbol{C_b(K_1)} - \boldsymbol{C_b(K_2)}\right) + \mathbf{0,5} \times \left(\boldsymbol{C_b(K_2)} - \boldsymbol{C_b(K_3)}\right)$

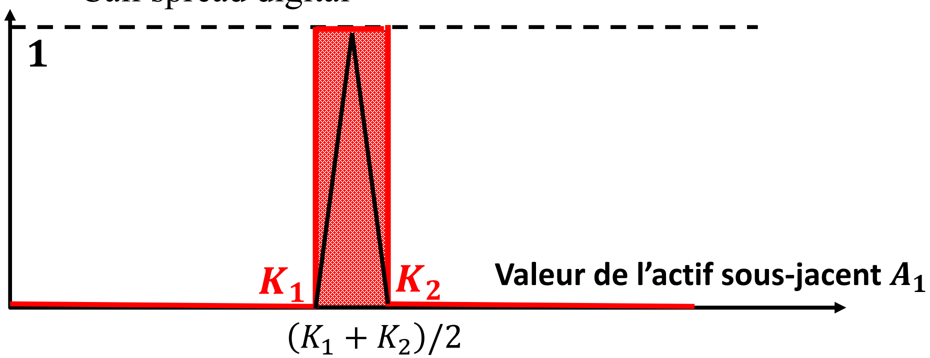
Call spread digital

- Ci-dessous un profil de paiement combinant des options digitales sur l'indice Hang Seng



Call spread digital et butterfly

- Call spread digital

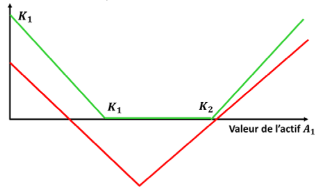


  - *Profil de risque du call spread digital et du butterfly*
  - *Surface :* $\times 2$
  - *Pour* $K_1 \approx K_2$*, prime du call spread digital* $\approx 2 \times$ *prime du butterfly*

Exercice : straddle et strangle

Exercice : straddle et strangle

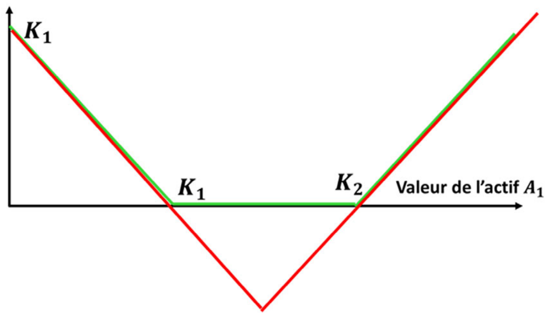
- 1) Montrer que la prime du strangle $[K_1, K_2]$ est minorée par la prime d'un straddle dont on déterminera le prix d'exercice
  - *On cherchera des paiements de straddle inférieurs au paiement du strangle*
  - *Dans le profil du paiement des straddles, on pourra inclure de l'actif sans risque. On supposera par la suite que le taux sans risque est nul*
  - *Procéder graphiquement pour représenter de tels profils de paiement majorés par celui du strangle (voir graphique ci-dessous)*



  - *On cherche le meilleur minorant, c'est-à-dire le profil de paiement majoré par celui du straddle (plus éventuellement de l'actif sans risque) de prime maximale*
  - *Pour déterminer le meilleur minorant, il faudra distinguer **deux cas**, selon les strikes K_1, K_2*
- 2) Que représente l'écart entre la prime de ce straddle et la prime du strangle ?
  - *Procéder en représentant graphiquement la différence entre le profil de paiement du strangle et celui du meilleur straddle*

Corrigé : 1) Recherche du meilleur straddle minorant

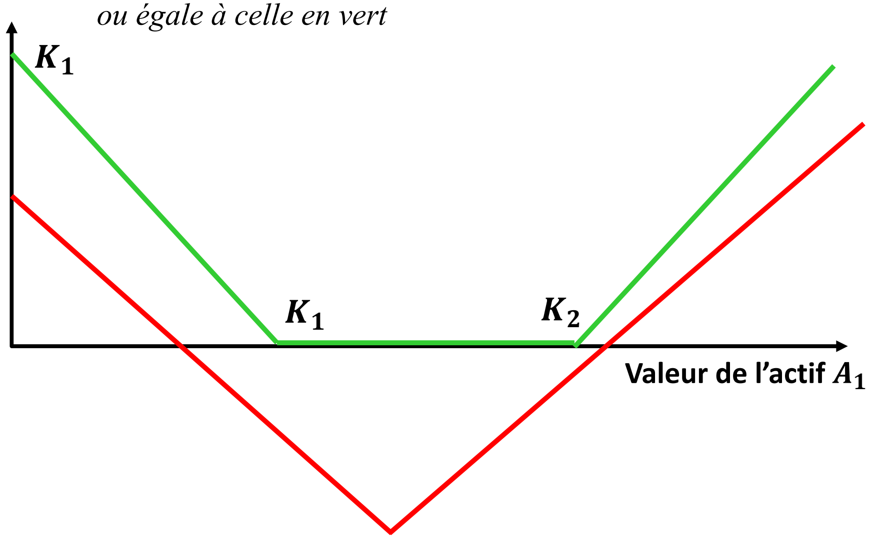
- Etant donné le profil de paiement du strangle (en vert) , on remarque qu'il est naturellement associé au straddle ci-dessous, en rouge.



- Par symétrie, le strike du straddle est égal à $\frac{K_1+K_2}{2}$
- On va donc chercher à valider et/ou préciser cette intuition

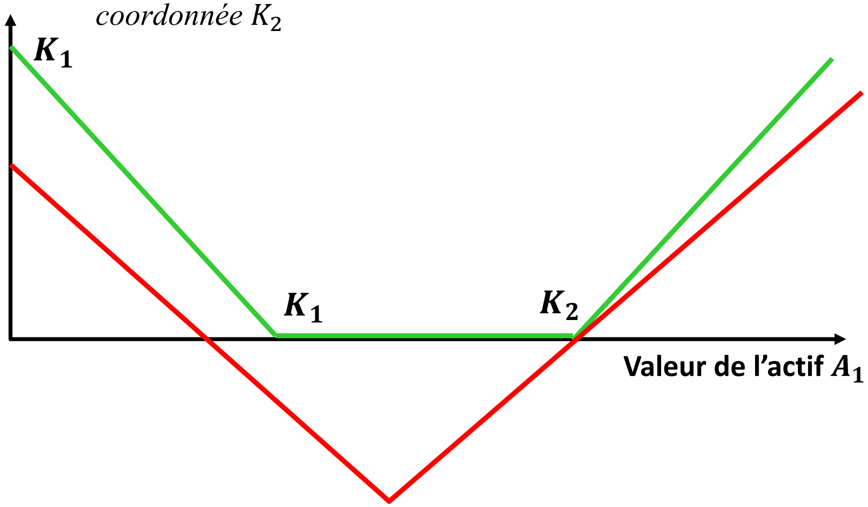
Corrigé : 1) Recherche du meilleur straddle minorant

- *Les deux demi-droites rouges doivent être en-dessous de la courbe verte ⇒ La pente à droite en rouge doit être inférieure ou égale à celle en vert*



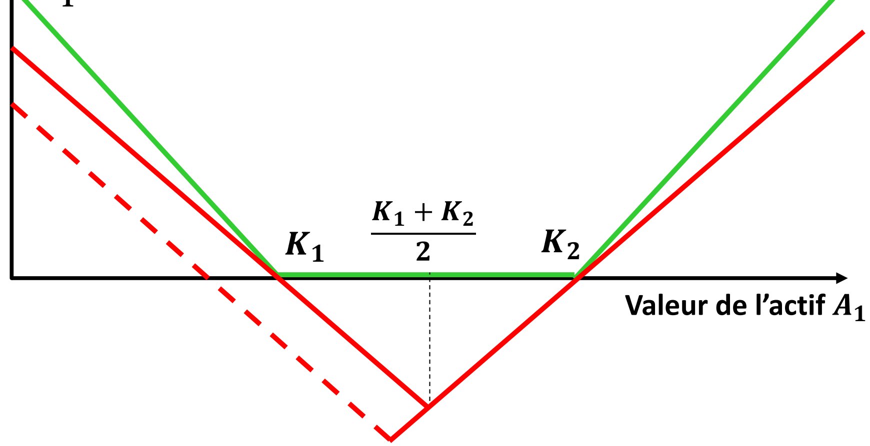
Corrigé : 1) Recherche du meilleur straddle minorant

- *On peut améliorer le profil rouge par* ***translation vers le haut***
- *Ici, on « bute » sur le point de l'axe des abscisses et de coordonnée K_2*



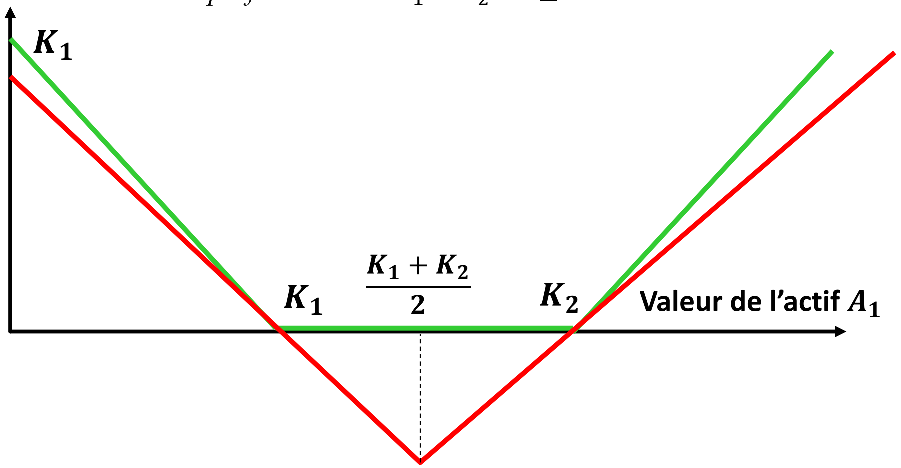
Corrigé : 1) Recherche du meilleur straddle minorant

- *On peut améliorer le profil rouge en faisant glisser la partie gauche du straddle*
- *On bute sur le point de l'axe des abscisses et de coordonnée K_1*
- *Par symétrie, l'extrémité du straddle a pour abscisse $\frac{K_1+K_2}{2}$*



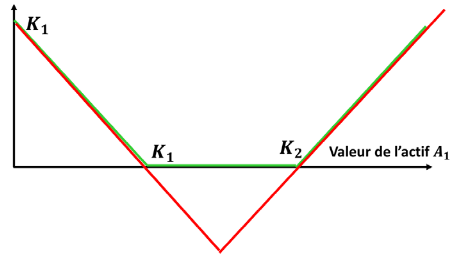
Recherche du meilleur straddle minorant

- *La pente à droite en rouge doit être inférieure ou égale à celle en vert*
- *La pente du strangle est égale à* 1*. Notons α la pente du straddle :* $\alpha \leq 1$
- *La pente du straddle doit être positive ou nulle (sinon le profil rouge est au-dessus du profil vert entre K_1 et K_2 :* $0 \leq \alpha$



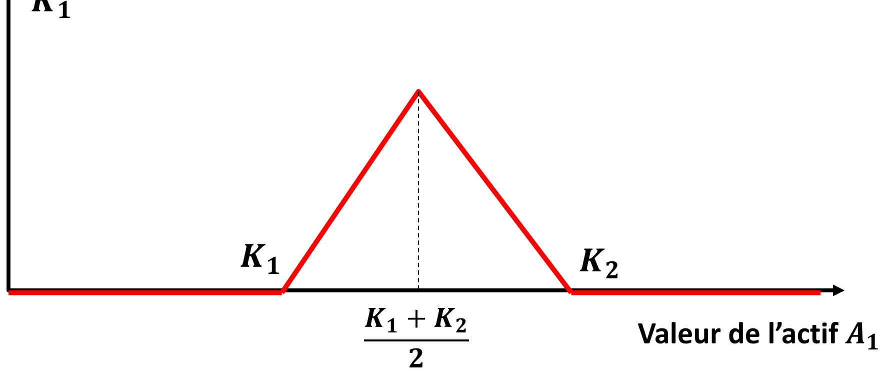
Recherche du meilleur straddle minorant

- Les primes des straddles précédents peuvent s'écrire comme $\alpha \times \left(C\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) + P\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) - \frac{K_2-K_1}{2}\right)$ où $0 \leq \alpha \leq 1$
- Le graphique représente le cas où les pentes sont égales, soit $\alpha = 1$
- Notons $\overline{K} = \frac{K_1+K_2}{2}$. La relation de parité implique $P(\overline{K}) = C(\overline{K}) + \overline{K} - A_0$
- Primes de straddles : $\alpha \times (2C(\overline{K}) + K_1 - A_0)$
- Si $C\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) \geq \frac{A_0-K_1}{2}$, le meilleur minorant est $2C\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) + K_1 - A_0$, 0 sinon.



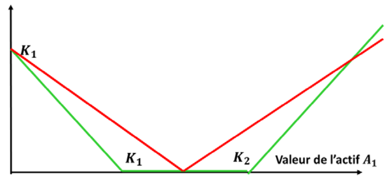
Écart entre le meilleur straddle minorant et le strangle

- Le cas $\alpha = 0$ est dégénéré : le meilleur straddle minorant est l'absence de position
- Si $\alpha = 1$, la difference entre le profil vert (strangle) et le profil rouge (straddle) est un butterfly de strikes $K_1, \frac{K_1+K_2}{2}, K_2$



Meilleur straddle majorant

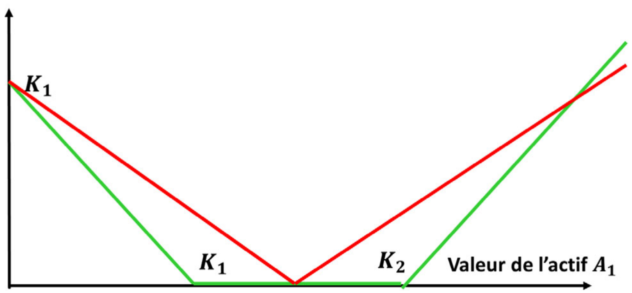
- 3) Montrer que la prime d'un strangle est majorée par des primes de straddle dont on déterminera le prix d'exercice
  - *On procédera à nouveau à partir des profils de paiement*
  - *Voir graphique ci-dessous : le profil du straddle ne majore pas celui du strangle*



- 4) Utiliser le théorème des valeurs extrêmes pour montrer l'existence d'un meilleur majorant
  - *Le théorème des valeurs extrêmes exprime que toute fonction continue définie sur un intervalle fermé atteint son maximum et son minimum*
- 5) On suppose que $K \to C(K)$ est dérivable. Caractériser et interpréter le straddle majorant de prime minimale (distinguer trois cas)
  - *Utiliser les résultats standards de l'analyse pour caractériser le maximum d'une fonction.*

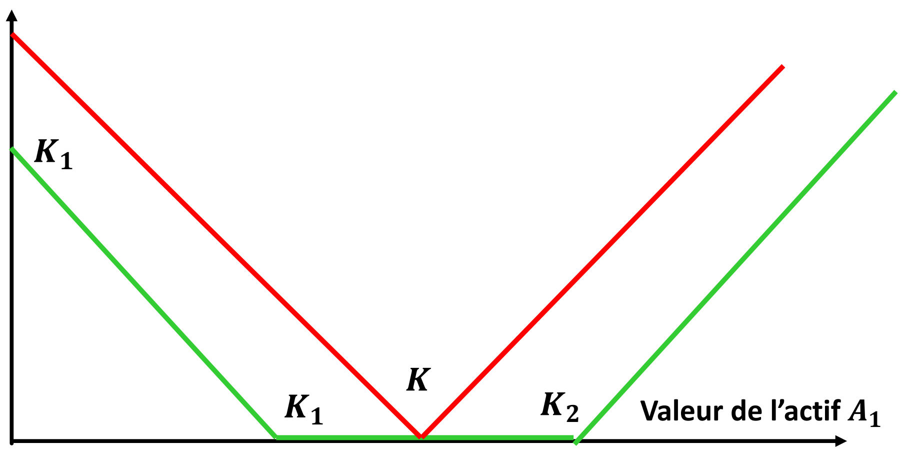
Meilleur straddle majorant

- On voit que la pente à droite en rouge doit être supérieure ou égale à la pente à droite en vert (soit 1)
- Par ailleurs, il n'est pas nécessaire que la pente soit strictement supérieure à 1 : on peut toujours se ramener à un straddle majorant, moins coûteux de pente 1.



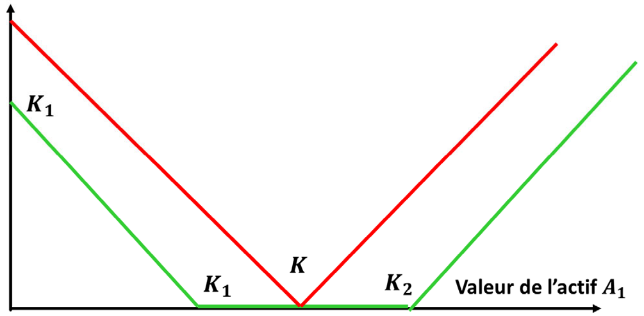
Meilleur straddle majorant

- Il faut donc chercher le strike $K \in [K_1, K_2]$ tel que le prix du straddle soit minimal



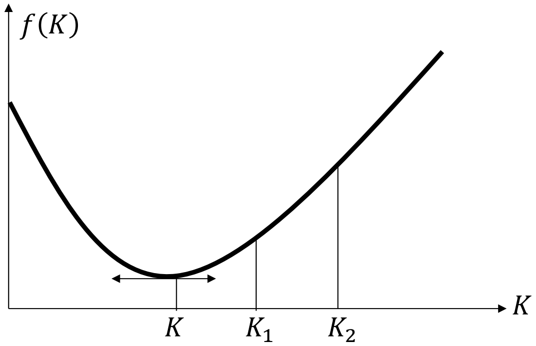
Meilleur straddle majorant

- Il faut donc chercher le strike $K \in [K_1, K_2]$ tel que le prix du straddle soit minimal
- Par la relation de parité, $C(K) + P(K) = 2C(K) + K - A_0$
- $K \to f(K) = 2C(K) + K - A_0$ est continue. Par le théorème des valeurs extrêmes, elle atteint son minimum sur $[K_1, K_2]$: $\exists\, \overline{K} \in [K_1, K_2]$, tel que $\forall K \in [K_1, K_2]$, $f(K) \geq f(\overline{K})$.



Meilleur straddle majorant

- Il faut donc chercher $\overline{K} \in [K_1, K_2]$ tel que le prix du straddle soit minimal
- $K \to f(K) = 2C(K) + K - A_0$ est convexe. $f(0) = A_0$, $\lim_{K\to\infty} f(K) = \infty \Rightarrow$ la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}^+$.
- Supposons que $K \to C(K)$ est dérivable. Pour chercher le minimum de f, on résout l'équation $f'(K) = 0$, ce qui donne $-C'(K) = 1/2$
- $-C'(K) = Q(A_1 \geq K)/(1 + r_f) = Q(A_1 \geq K) = 1/2$ puisque r_f est supposé nul



Meilleur straddle majorant

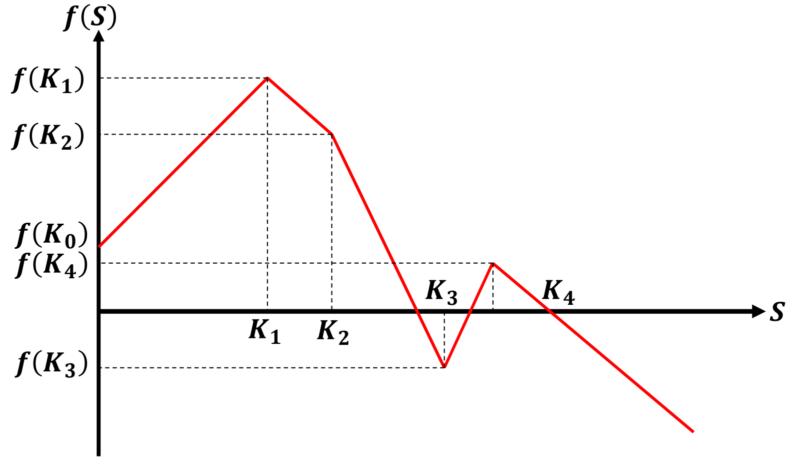
- On rappelle que la dérivabilité de $K \to C(K)$ implique qu'il n'y a pas de masse de probabilité $Q(A_1 = K) = 0, \forall K$
- $-C'(K)$ est la prime du call digital de strike K
- C'est aussi la probabilité risque-neutre que le sous-jacent soit supérieur à K : $S(K) = Q(A_1 \geq K)$ où $S = 1 - F$ est la fonction de survie.

Duplication (statique) à partir d'options.

- On s'intéresse à la duplication d'un profil de paiement à partir d'options.
- Deux démarches possibles
  - *Commencer par utiliser les options pour reconstituer des butterflys (associés à des paiements d'actifs contingents aux prix de l'actifs sous-jacent). Puis, assembler les actifs contingents.*
  - *Ou approche directe, illustrée dans les transparents suivants*
- Cas discret peut se généraliser au cas continu
  - *Voir ci-dessous : Breeden, & Litzenberger (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. Journal of business.*
  - *Annales corrigées : Carr & Madan (2001). Towards a theory of volatility trading.*
  - *Green & Jarrow (1987). Spanning and completeness in markets with contingent claims. Journal of Economic Theory.*

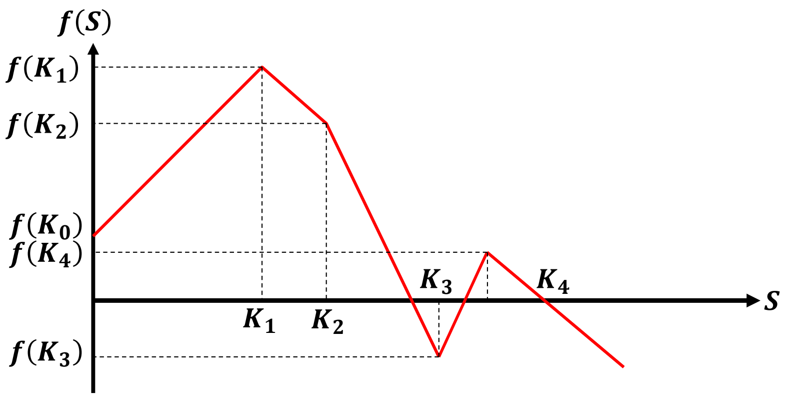
Duplication (statique) à partir d'options.

- Profil de paiement affine par morceaux
  - *S : prix de l'actif sous-jacent à la date (future) de paiement*



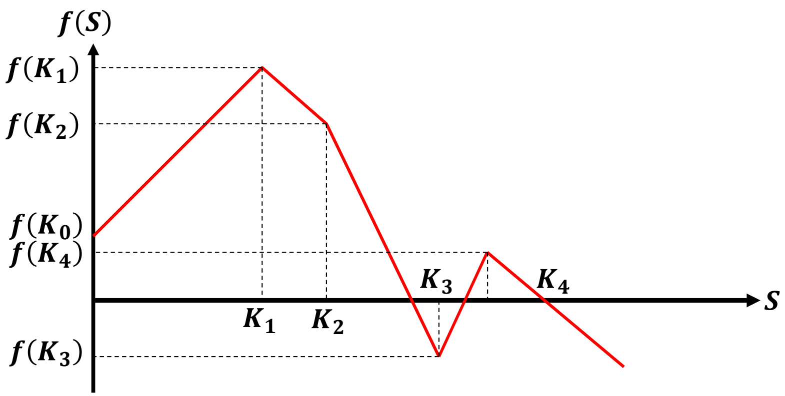
Duplication (statique) à partir d'options.

- Profil de paiement caractérisé par un ensemble de points de coordonnées $(K_0, f(K_0)), (K_1, f(K_1)) \dots, (K_n, f(K_n))$, où $K_0 = 0$ et par la pente après K_n



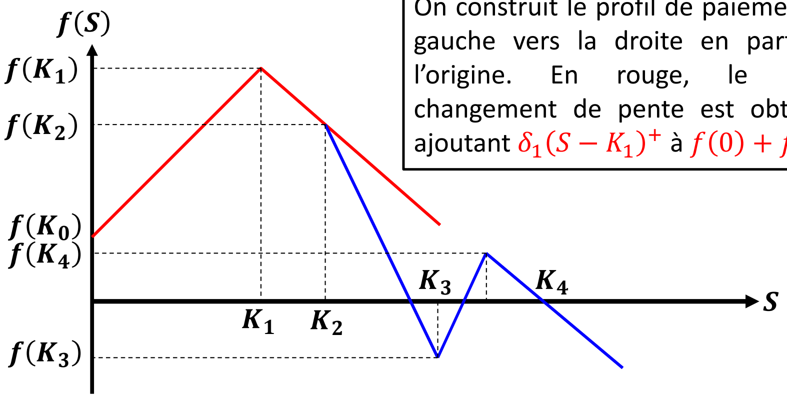
Duplication (statique) à partir d'options.

- Profil de paiement caractérisé par $f(0), f'(0)$ et par les changements de pente en $K_1, \dots, K_n$.
  - *Changement de pente en K_i : $\alpha_i = \frac{f(K_{i+1})-f(K_i)}{K_{i+1}-K_i} - \frac{f(K_i)-f(K_{i-1})}{K_i-K_{i-1}}$*



Duplication (statique) à partir d'options.

- Profil de paiement caractérisé par $f(0), f'(0)$ et par les changements de pente : $\alpha_i = \frac{f(K_{i+1})-f(K_i)}{K_{i+1}-K_i} - \frac{f(K_i)-f(K_{i-1})}{K_i-K_{i-1}}, i = 1, \dots n$
- D'où : $\forall S \in \mathbb{R}^+, f(S) = f(0) + f'(0)S + \delta_1(S-K_1)^+ + \cdots + \delta_n(S-K_n)^+$



On construit le profil de paiement de la gauche vers la droite en partant de l'origine. En rouge, le premier changement de pente est obtenu en ajoutant $\delta_1(S-K_1)^+$ à $f(0) + f'(0)S$

Duplication (statique) à partir d'options.

- Exemple : $f(K) = K^2, K \in \mathbb{N}$
  - $\alpha_K = \frac{f(K+1)-f(K)}{K+1-K} - \frac{f(K)-f(K-1)}{K-(K-1)} = 2$
  - *D'où :* $\forall S \in \mathbb{R}^+,$
- $f(S) = 2 \times \left((S-1)^+ + \cdots + (S-K)^+ + \cdots\right)$
  - *Combinaison de calls*
- Prix de duplication : $2(C(1) + \cdots + C(K) + \cdots)$
  - *Où* $C(K)$ *est la prime du call de strike K*
  - *Fini si la série de terme* $C(K)$ *est convergente*
- Cas général : prix de duplication
- $f(0) + f'(0)S_0 + \delta_1 C(K_1) + \cdots + \delta_n C(K_n) + \cdots$
  - *Où* S_0 *prix du sous-jacent à la date courante*