

Examen cours « Théorie et évaluation des options »

Mercredi 30 avril 2014

14h – 16h

Jean-Paul LAURENT & Pierre-Alain PATARD

Partie 1 : utiliser une copie séparée pour cette partie comptant pour 10 points. Cherchez à être précis, clair et concis. En italique, questions complémentaires donnant droit à des « points bonus ».

1) Delta dans la formule de Black et Scholes

On considère une option d'achat et l'on se place dans le cadre d'évaluation standard. Les notations sont celles vues en cours.

- Rappeler la formule de Black et Scholes et ses divers « ingrédients ».
- Donner le delta de l'option d'achat.
- Calculer ce delta. Vous pouvez vous appuyer sur le lemme intermédiaire vu en cours, qu'il n'est pas nécessaire de redémontrer.

2) Option d'échange (Margrabe)

On considère une option d'échange à une échéance T entre deux actifs de prix respectifs à l'échéance S_T et X_T . Les dynamiques des deux actifs sont log-normales de volatilité respectivement σ_S et σ_X . Le coefficient de corrélation entre les rentabilités instantanées est noté ρ . Le taux d'intérêt sans risque est noté r . Le paiement à échéance est $(S_T - X_T)^+$. On notera Q la probabilité risque-neutre habituelle, Q^X la probabilité risque-neutre associée au numéraire X .

- Écrire le paiement à échéance en unités du numéraire X . À quoi correspond-il ?
- Écrire la dérivée de Radon-Nykodim $\frac{dQ^X}{dQ}$
- Écrire la prime de l'option d'échange comme une espérance sous Q d'une quantité à déterminer, puis comme une espérance sous Q^X d'une quantité à déterminer.

- d) Quelle est la tendance du prix relatif $\frac{S_t}{X_t}$ sous Q^x ?
- e) Quelle est la volatilité du prix relatif $\frac{S_t}{X_t}$? Vous pouvez donner le résultat directement et/ou donner quelques indications sur la manière de l'obtenir ?
- f) En déduire l'expression de la prime d'option d'échange.
- g) *Considérez une option « best-of » payant à échéance $\max(S_T, X_T)$. Comment peut-on utiliser le résultat précédent pour déterminer la prime de l'option « best-of » ?*
- h) *X_T est maintenant un taux de change. Considérez le numéraire associé au compte d'épargne en devise. On notera sa valeur en T , X_T^* . Écrire le paiement de l'option d'échange en unités de ce numéraire. En déduire la valeur de l'option d'échange en adaptant le raisonnement précédent.*

3) Option « puissance »

Les notations sont toujours celles du cours. Le paiement à échéance d'une option puissance est égal à $(S_T^\alpha - K)^+$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$

- a) Écrire la tendance de S_t^α sous Q (probabilité risque-neutre) à partir du lemme d'Itô.
- b) Écrire la volatilité de S_t^α .
- c) Rappeler la formule de Merton (option d'achat avec paiement continu de dividende).
- d) Déduire des points précédents une méthode de calcul de la prime de l'option puissance.
- e) *Écrire directement la loi de S_t^α sous Q . Reprenez l'analogie avec le modèle de Merton et déterminer le taux de dividende à appliquer dans la formule.*