Examen Gestion Financière II
Mardi 3 Janvier 2012

Examen terminal
Calculatrices, « smartphones », ordinateurs, notes de cours, ouvrages non autorisés

Éléments de correction
Ce document ne constitue pas un corrigé officiel

Remarques à l'intention des étudiants (année 2012-2013)
Les problèmes 2 (sauf 2.f) et 3 avaient été traités lors des séances de cours l'année dernière.
Il avait été convenu qu'il n'y aurait pas de calculs numériques. Ce ne sera pas le cas cette année.

Problème 1 : Contraintes sur les choix d'investissement.

On considère 3 actifs risqués, mettons des obligations émises par des états de la zone euro, notés 1, 2, 3. On suppose connues leurs espérances de rentabilité, notées E_1, E_2, E_3. Pour simplifier les notations par la suite, on supposera que : $E_1 < E_2 < E_3$. On s'intéressera aux portefeuilles constitués de de ces trois actifs. On notera X_1, X_2, X_3 les fractions de la richesse investies dans ces trois titres.

a) Cherchant à limiter la spéculation, les autorités de la zone euro décident d'interdire les ventes à découvert sur ces titres. Écrire mathématiquement les contraintes sur X_1, X_2, X_3, induites par cette nouvelle réglementation.
$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0$

b) Démontrer que : $X_1 \leq 1, X_2 \leq 1, X_3 \leq 1$; la démonstration étant identique pour les trois actifs, vous pouvez démontrer uniquement que $X_1 \leq 1$.
Raisonnons par l'absurde. On rappelle que $X_1 + X_2 + X_3 = 1$. Si $X_1 > 1$, comme $X_2 \geq 0, X_3 \geq 0$, alors $X_1 + X_2 + X_3 > 1$. D'où une impossibilité et $X_1 \leq 1$.

c) Écrire l'espérance de rentabilité d'un portefeuille en fonction de X_1, X_2, X_3 et de E_1, E_2, E_3.
$X_1E_1 + X_2E_2 + X_3E_3$, de par les propriétés de linéarité de l'espérance.

d) Montrer qu'il existe un portefeuille d'espérance de rentabilité maximale : donner son espérance de rentabilité et sa composition.
Comme $E_1 < E_2 < E_3$ et $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0$, $X_1E_1 + X_2E_2 + X_3E_3 \leq (X_1 + X_2 + X_3) \times E_3 = E_3$. Un portefeuille tel que $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1$ satisfait les contraintes de vente à découvert et permet d'atteindre la borne supérieure E_3. Le portefeuille d'espérance de rentabilité maximale est donc investi à 100% dans le titre d'espérance de rentabilité maximale.

e) Les autorités décident de durcir la réglementation en imposant aux investisseurs qu'une proportion minimale de leur richesse (en actifs risqués) soit investie dans chacun des trois titres afin de contribuer au financement des administrations publiques. Plus précisément, on impose aux investisseurs de détenir au moins $c\%$ ($c \geq 0$) de la richesse dans chacun des trois titres. Quelle est la valeur maximale de c pour qu'il puisse y avoir une demande en actifs risqués ?
$c \leq \dfrac{100}{3}\%$.

f) Montrer qu'il existe un portefeuille d'espérance de rentabilité maximale : donner son espérance de rentabilité et sa composition.

Avec le même raisonnement que précédemment, $X_1 = c, X_2 = c, X_3 = 1-2c$ et l'espérance de rentabilité maximale est égale à $cE_1 + cE_2 + (1-2c)E_3 = E_3 + c(E_1 - E_3) + c(E_2 - E_3)$.

g) Étudier l'impact d'une augmentation de ce plancher de détention c sur le portefeuille d'espérance de rentabilité maximale.

Comme $E_1 < E_3, E_2 < E_3$, l'espérance de rentabilité maximale $E_3 + c(E_1 - E_3) + c(E_2 - E_3)$ décroit avec *c*, ce qui est logique, puisqu'une augmentation de *c* réduit l'ensemble des portefeuilles admissibles.

h) On va maintenant s'intéresser au risque de ce portefeuille d'espérance de rentabilité maximale. On note R_1, R_2, R_3 les rentabilités (aléatoires) des obligations d'état. Écrire la rentabilité aléatoire du portefeuille (notée R) en fonction de R_1, R_2, R_3 et de c. Il est utile pour la suite d'isoler l'effet de c dans l'écriture de R.

$R = cR_1 + cR_2 + (1-2c)R_3 = R_3 + c(R_1 + R_2 - 2R_3)$.

i) On note $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les écart-types des rentabilités R_1, R_2, R_3. On supposera que $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$. Pour simplifier la suite de l'analyse, on supposera que les trois coefficients de corrélation entre les rentabilités (entre 1 et 2, entre 1 et 3, entre 2 et 3) sont égaux à ρ et que $\rho > 0$. Ce coefficient ρ est associé à un risque systémique dans la zone euro. Une augmentation de ρ signifie que la diversification au sein de la zone euro est moins efficace. Montrer que la variance du portefeuille de rentabilité maximale s'écrit comme la somme de trois termes, le premier ne dépendant pas de c, le deuxième étant proportionnel à c, le troisième étant proportionnel à c^2. Pour simplifier les notations, on pourra poser $X = R_3$ et $Y = R_1 + R_2 - 2R_3$ et noter $\bar{\rho}$ la corrélation entre X et Y.

En appliquant les règles de calcul de la variance à $R = R_3 + c(R_1 + R_2 - 2R_3)$, on écrit la variance de *R* comme un trinôme en c : $\mathrm{Var}[R] = \mathrm{Var}[R_3] + 2c \times \mathrm{Cov}(R_3, R_1 + R_2 - 2R_3) + c^2 \mathrm{Var}[R_1 + R_2 - 2R_3]$. En notant σ_X, σ_Y les écarts-types de X et de Y, $\mathrm{Var}[R] = \sigma_X^2 + c \times (2\bar{\rho}\sigma_X\sigma_Y) + c^2\sigma_Y^2$

j) Écrire le terme proportionnel à c en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et de ρ.

Le coefficient du terme proportionnel à c est égal à $2 \times \mathrm{Cov}(R_3, R_1 + R_2 - 2R_3)$. Au coefficient multiplicatif 2 près, il s'écrit $\mathrm{Cov}(R_3, R_1 + R_2 - 2R_3) = \mathrm{Cov}(R_3, R_1) + \mathrm{Cov}(R_3, R_2) - 2\mathrm{Cov}(R_3, R_3) = (\rho\sigma_1 + \rho\sigma_2 - 2\sigma_3)\sigma_3$.

k) En utilisant le fait que $\sigma_1 < \sigma_3$ et $\sigma_2 < \sigma_3$, montrer que ce terme est négatif.

Le terme précédent est négatif puisque $\rho\sigma_1 + \rho\sigma_2 - 2\sigma_3 < \sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3 < 0$.

l) En déduire que, quand c passe de zéro (interdiction des ventes à découvert) à une petite valeur positive (détention obligatoire de titres), le risque du portefeuille de rentabilité maximale diminue.

L'effet d'une augmentation d'une petite augmentation de *c* à partir de zéro, sur la variance du portefeuille de rentabilité maximale se mesure à partir de la dérivée en zéro de la variance. Cette dérivée est égale au coefficient du terme proportionnel dont on vient de vérifier qu'il est négatif. Une petite augmentation de *c* diminue donc le risque du portefeuille de rentabilité maximale, risque mesuré par sa variance ou par son écart-type.

Problème 2 : portefeuilles anticorrélés.

On considère deux titres, notés 1 et 2, de rentabilités R_1, R_2, d'espérance de rentabilité E_1, E_2, d'écart-type σ_1, σ_2. On suppose que le coefficient de corrélation entre les rentabilités des titres 1 et 2 égal à – 1.

a) Écrire l'espérance de la rentabilité d'un portefeuille constitué des titres 1 et 2 en fonction de E_1, E_2 et de X, la proportion de la richesse investie dans le titre 1.

$E_P = XE_1 + (1-X)E_2$.

b) Écrire l'écart-type de la rentabilité d'un portefeuille constitué des titres 1 et 2 en fonction de σ_1, σ_2 et de X, la proportion de la richesse investie dans le titre 1.

$\sigma_P^2 = X^2\sigma_1^2 - 2X\sigma_1(1-X)\sigma_2 + (1-X)^2\sigma_2^2 = (X\sigma_1 - (1-X)\sigma_2)^2$, d'où $\sigma_P = |X\sigma_1 - (1-X)\sigma_2|$.

c) Montrer qu'il existe une allocation en titres 1 et 2 que l'on déterminera, telle que l'écart-type de la rentabilité du portefeuille est nulle.

L'écart-type de la rentabilité du portefeuille est nulle si et seulement si $X\sigma_1 - (1-X)\sigma_2 = 0$, soit $X = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$, $1-X = \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}$.

d) On suppose qu'il existe un actif sans risque, de rentabilité R_f. Indiquer le lien entre R_f et les caractéristiques des titres E_1, E_2, σ_1, σ_2 ainsi que le raisonnement utilisé pour parvenir au résultat.

Le portefeuille précédent ayant une rentabilité d'écart-type nulle a une rentabilité (presque-sûrement) constante. Qu'on invoque la loi du prix unique ou mieux, l'absence d'opportunité d'arbitrage, les deux actifs sans risque doivent avoir le même taux de rentabilité, ce qui donne : $R_f = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}E_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}E_2$.

e) Écrire R_f en fonction de R_1, R_2 et σ_1, σ_2.

$$R_f = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}R_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}R_2$$

f) En déduire que le titre 2 était en fait un portefeuille constitué de titre 1 et d'actif sans risque, en précisant les proportions investies dans le titre 1, l'actif sans risque et leur signe.

On peut écrire l'équation précédente comme $R_2 = \left(1+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)R_f - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}R_1$, soit $R_2 = X^*R_f + (1-X^*)R_1$ avec $X^* = 1+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. On remarque que $X^* > 0$ et $1-X^* < 0$ (position longue en actif sans risque et courte en titre 1).

Problème 3 : TRI de projet de type « développement durable »

On considère l'échéancier de flux ci-dessous :

dates	0	1	2
flux	- 1	+ 1	- 1

a) Écrire l'équation à résoudre pour obtenir les TRI.

On cherche $r > -1$, $-1 + \frac{1}{1+r} - \frac{1}{(1+r)^2} = 0$.

b) Montrer que la recherche de TRI pour cet échéancier revient à résoudre une équation du second degré.

Posons $z = \frac{1}{1+r}$ ($r > -1 \Leftrightarrow z > 0$), on obtient les TRI en cherchant les racines (positives) du polynôme $-z^2 + z - 1$ et en faisant le changement de variable $z \to r = 1/z - 1$.

c) En déduire que l'échéancier précédent n'admet pas de TRI.

Pour $z > 0$, $-z^2 + z - 1 < -z^2 + 2z - 1 = -(z-1)^2 \leq 0$. Il n'existe donc pas de racine positive et pas de TRI. La VAN reste strictement négative pour tout taux d'actualisation.

Problème 4 : structure financière

Écrire la rentabilité des actions, $R_{E,t+1}$ en fonction de la rentabilité des actifs, $R_{A,t+1}$ et de la rentabilité de la dette. On suppose ici qu'il n'y a pas d'impôt sur les bénéfices des sociétés et que les hypothèses de Modigliani et Miller sont vérifiées. On notera A_t, E_t, D_t, les valeurs de marché des actifs, des actions et de la dette à la date courante *t*. Il n'est pas nécessaire de donner le détail de la démonstration ; quelques indications sur la manière d'obtenir le résultat suffisent.

Il suffit de partir de $E_t = A_t - D_t$, ce qui montre que les actions sont un portefeuille formé d'une position longue en actif et d'une position courte en dette. La rentabilité des actions s'écrit comme une moyenne pondérée de la rentabilité de l'actif et de la rentabilité de la dette (résultat de base de théorie du portefeuille) : $R_{E,t+1} = \frac{A_t}{E_t} R_{A,t+1} - \frac{D_t}{E_t} R_{D,t+1}$, où $R_{D,t+1}$ est le taux de rentabilité de la dette. Si la dette est non risquée, avec les notations du cours $R_{D,t+1} = R_F$. Comme $A_t = E_t + D_t$, on obtient, $R_{E,t+1} = R_{A,t+1} + \frac{D_t}{E_t}\left(R_{A,t+1} - R_F\right)$, qui fait apparaître l'effet de levier de l'endettement.

Problème 5 : Modigliani et Miller.

On se place dans le cadre du modèle de Modigliani et Miller en présence d'impôt sur les bénéfices des sociétés. On note T_c le taux d'imposition. On considère une entreprise dont la valeur de marché des actions et des dettes sont notées respectivement E_t et D_t (à la date courante *t*).

a) Rappeler la valeur actuelle de l'économie fiscale de la dette.

   $T_c \times D_t$

b) écrire le lien entre la valeur d'une entreprise non endettée et E_t, D_t, T_c. On notera $A_{U,t}$ la valeur de l'entreprise non endettée.

   $A_{U,t} = E_t + D_t - T_c D_t = E_t + \left(1 - T_c\right) D_t$.

c) Montrer que la valeur de l'entreprise non endettée est égale à la valeur d'un portefeuille constitué d'actions et de dette émise par l'entreprise, dont on précisera les quantités.

   La valeur de l'entreprise non endettée est celle d'un portefeuille constitué de la totalité des actions et de $1 - T_c$ x la dette de l'entreprise (endettée).

d) On suppose que la dette est sans risque de défaut et on notera R_f son taux de rentabilité. Écrire la rentabilité de l'entreprise non endettée, $R_{U,t+1}$ en fonction de la rentabilité des actions, $R_{E,t+1}$, du taux sans risque R_f et de E_t, D_t, T_c en utilisant le résultat précédent.

   On peut utiliser les résultats du cours donnant la rentabilité d'un portefeuille, ce qui donne immédiatement :

$$R_{U,t+1} = \frac{E_t}{E_t + \left(1 - T_c\right) D_t} R_{E,t+1} + \frac{\left(1 - T_c\right) D_t}{E_t + \left(1 - T_c\right) D_t} R_F$$

Questions à choix multiples

Pour le QCM toute absence de réponse ou réponse erronée retire un point. Indiquez si les assertions ci-dessous sont vraies ou fausses. Sur votre copie, reportez le tableau ci-dessous en complétant les cases vides par des O et des N. O signifie « vraie » et N signifie « fausse ».

Assertion	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse	N	O	N	O	N	N	N	O	N	O

1) La « security market line » se situe dans un plan où les betas des titres sont en ordonnée et les espérances de rentabilité en abscisse.
2) La « capital market line » et la « security market line » relient toutes les deux le portefeuille de marché et l'actif sans risque.
3) Le taux actuariel des obligations d'état italiennes est d'environ 7%, celui des obligations d'état allemandes est d'environ 2%. Le critère du TRI aboutit-il à investir dans les obligations d'état italiennes ?
4) Pour deux investissements simples incompatibles, les critères de la VAN et du TRI peuvent conduire à des décisions d'investissements différentes.
5) Pour établir la formule de Miles-Ezzell, il est supposé que le montant de l'endettement est constant et que le projet d'investissement a une durée de vie infinie.
6) Quand on interdit les ventes à découvert, la frontière efficiente des actifs risqués n'est plus forcément concave.
7) Soit deux entreprises dont les actions sont cotées en bourse, les risques systématiques des actions émises par ces entreprises sont toujours positivement corrélés.
8) On considère une dette contractée à la date courante t et devant être remboursée en t+1. la probabilité de faire défaut est nulle. Alors, le beta de la dette est nul.
9) l'écart-type de la rentabilité d'un portefeuille est une moyenne pondérée des écart-types des titres le constituant.
10) Le risque spécifique d'une action est toujours non corrélé avec son risque systématique.