Partiel Finance : Vendredi 6 mars 2020 (durée de l'épreuve 1h30)
Les calculatrices sont autorisées

Afin de faciliter tri et consultation des copies, indiquez votre groupe de TD ou salle, jour et horaire en clair sur votre copie

Problème 1 : choix de portefeuille, corrélations constantes

On considère n actifs risqués. Les écarts types des taux de rentabilité sont tous égaux à σ ($\sigma > 0$). Les coefficients de corrélation entre les rentabilités de titres différents sont tous égaux à ρ ($\rho < 1$).

1) Rappeler le lien entre le coefficient de corrélation (linéaire) entre les taux de rentabilité de deux titres, leur covariance et les écarts types.
2) Quel est le coefficient de corrélation linéaire entre le taux de rentabilité d'un titre et le taux de rentabilité du même titre ?
3) Calculer l'écart-type de la rentabilité d'un portefeuille équipondéré en fonction de σ, ρ et n.
4) On suppose $\rho < 1$. Quelle est la limite de l'écart type du taux de rentabilité d'un portefeuille équipondéré quand le nombre de titres n tend vers l'infini ?
5) Pour quelles valeurs du coefficient de corrélation ρ cette limite est-elle positive ou nulle ?
6) On suppose que $0 \leq \rho < 1$ et que l'on a $n = 2$ actifs risqués. On note ω_1, ω_2 les allocations dans les actifs 1 et 2, exprimés en pourcentage de la richesse investie. A quoi est égal $\omega_1 + \omega_2$?
7) On cherche la composition du portefeuille de variance minimale. Ecrire le lagrangien associé à ce problème. On notera λ le multiplicateur de Lagrange.
8) Ecrire les conditions du premier ordre sous la forme d'un système de deux équations à deux inconnues ω_1 et ω_2.
9) Soustraire la seconde équation de la première et en déduire une condition sur ω_1 et ω_2.
10) Quelle est la composition du portefeuille de variance minimale ?
11) On suppose que $\sigma = 20\%$ et que $\rho = 0$. Quel est l'écart-type de la rentabilité du portefeuille de variance minimale ?
12) On note E_1 et E_2 les espérances de rentabilité des deux actifs risqués. On suppose que $E_1 = E_2 = 10\%$. Comme précédemment $\sigma = 20\%$ et $\rho = 0$. Représenter graphiquement l'ensemble des portefeuilles efficients, au sens moyenne variance, dans le plan (écart type, espérance) des rentabilités.
13) On suppose maintenant que le taux sans risque est nul. Les caractéristiques des deux actifs risqués restent inchangées. Représenter graphiquement la capital market line (CML).
14) Quel est le ratio de Sharpe des portefeuilles sur la CML (les données relatives aux actifs risqués et à l'actif sans risque restent identiques) ?
15) On suppose que le portefeuille tangent et le portefeuille de marché sont identiques (les données relatives aux actifs risqués et à l'actif sans risque restent identiques). Calculer les covariances entre les taux de rentabilité des deux actifs risqués.
16) Calculer les betas des deux actifs risqués.
17) Représenter la SML et positionner les deux actifs risqués
18) Retrouver le Beta des deux actifs en utilisant l'équation de la SML.

Problème 2 : grands risques et petites probabilités

1) On suppose le taux sans risque nul. On considère le contrat suivant, placement en début d'année de 100 euros, paiement en fin d'année de 100,1 euros avec une probabilité de $1 - \frac{1}{2^{10}} \approx 1 - 10^{-3}$, paiement de 0,1 euro en fin d'année, avec une probabilité de $\frac{1}{2^{10}} \approx 10^{-3}$.
   a. Quelle la rentabilité du placement dans le cas favorable ?
   b. Dans le cas défavorable ?

    c. Quelle est l'espérance de gain (net de l'investissement initial de 100 euros) de l'investisseur ?
    d. Quelle est l'espérance du taux de rentabilité de l'investissement ?
    e. Quel est l'écart-type du gain de l'investisseur ?
2) Montrer que le placement précédent est la combinaison d'un placement sans risque et d'un contrat financier dont on explicitera les cash-flows.
3) On suppose que l'investisseur renouvelle un tel placement tous les ans, dans la mesure où le cas défavorable n'est pas apparu.
    a. Quelle est la probabilité que l'investisseur soit resté dans la configuration favorable au cours des 10 prochaines années ?
    b. Quel est alors le gain cumulé de l'investisseur au cours de ces dix années.
4) On considère maintenant un vendeur de paris, c'est-à-dire une entité juridique assurant contre le risque d'occurrence du cas défavorable : Le vendeur de paris assure l'acheteur de protection vis-à-vis de la réalisation d'un événement extrême. La prime versée pour l'assurance est de 0,001 euros par euro assuré. Dans le cas défavorable survenant avec une probabilité de 0,1%, l'assureur ou vendeur de protection verse 1 euro à l'acheteur de protection
    a. De quelle réserve financière le vendeur de protection devrait-il disposer par euro de contrat assuré ?
    b. Si le vendeur de protection ne dispose d'aucune réserve financière, quelle est la probabilité d'un défaut du vendeur de protection avant 10 ans ? Quel est le gain en cas de non-défaut ?

Question de cours 1 : finance et probabilités, paradoxe d'Ellsberg

Reprendre l'exemple donné en cours, illustrant les limites du raisonnement probabiliste en présence d'incertitude (ou d'ambiguïté).

Question de cours 2 : finance comportementale et appréhension du risque

1) Rappeler en quoi consiste le « gambler's fallacy ».
2) Rappeler en quoi consiste le hot hand fallacy
3) On présente les deux suites de tirages ci-dessous. Expliquer la méthode de Ville permettant de détecter celle qui serait produite par un humain cherchant à simuler le hasard.

00111000110010000100	01000101001100010100
00100010001000000001	11101001100011110100
00110010101100001111	01110100011000110111
11001100010101100100	10001001011011011100
10001000000011111001	01100100010010000100