Partiel Finance : Vendredi 6 mars 2020 (durée de l'épreuve 1h30)
Les calculatrices sont autorisées

Afin de faciliter tri et consultation des copies, indiquez votre groupe de TD ou salle, jour et horaire en clair sur votre copie

Problème 1 : choix de portefeuille, corrélations constantes (barème : 9 points soit $1/2$ point par question)

On considère n actifs risqués. Les écarts types des taux de rentabilité sont tous égaux à σ ($\sigma > 0$). Les coefficients de corrélation entre les rentabilités de titres différents sont tous égaux à ρ ($\rho < 1$).

1) Rappeler le lien entre le coefficient de corrélation (linéaire) entre les taux de rentabilité de deux titres, leur covariance et les écarts types.

On note c la covariance entre les taux de rentabilité de deux titres différents. $\rho = \frac{c}{\sigma^2}$ (on remarque que la covariance entre les taux de rentabilité de deux titres différents ne dépend du couple de titres).

2) Quel est le coefficient de corrélation linéaire entre le taux de rentabilité d'un titre et le taux de rentabilité du même titre ?

$\rho = 1$.

3) Calculer l'écart-type de la rentabilité d'un portefeuille équipondéré en fonction de σ, ρ et n.

$\sigma_P = \sigma \times \sqrt{\rho + \frac{1}{n}(1-\rho)}$ (voir cours 13 et 20 décembre).

4) On suppose $\rho < 1$. Quelle est la limite de l'écart type du taux de rentabilité d'un portefeuille équipondéré quand le nombre de titres n tend vers l'infini ?

$\sigma\sqrt{\rho}$.

5) Pour quelles valeurs du coefficient de corrélation ρ cette limite est-elle positive ou nulle ?

La limite est bien définie et positive ou nulle si $\rho \geq 0$. Si l'on considère des portefeuilles équicorrélés avec un nombre quelconque d'actifs, il faut que la corrélation commune soit positive ou nulle.

6) On suppose que $0 \leq \rho < 1$ et que l'on a $n = 2$ actifs risqués. On note ω_1, ω_2 les allocations dans les actifs 1 et 2, exprimés en pourcentage de la richesse investie. A quoi est égal $\omega_1 + \omega_2$?

$\omega_1 + \omega_2 = 1$.

7) On cherche la composition du portefeuille de variance minimale. Ecrire le lagrangien associé à ce problème. On notera λ le multiplicateur de Lagrange.

$\mathcal{L}(\omega_1, \omega_2, \lambda) = \omega_1^2\sigma^2 + \omega_2^2\sigma^2 + 2\omega_1\omega_2\rho\sigma^2 - \lambda \times (\omega_1 + \omega_2)$.

8) Ecrire les conditions du premier ordre sous la forme d'un système de deux équations à deux inconnues ω_1 et ω_2.

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1} = 0 \Leftrightarrow \sigma^2\omega_1 + \rho\sigma^2\omega_2 = \frac{\lambda}{2}$.
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_2} = 0 \Leftrightarrow \rho\sigma^2\omega_1 + \sigma^2\omega_2 = \frac{\lambda}{2}$.

9) Soustraire la seconde équation de la première et en déduire une condition sur ω_1 et ω_2.

$\sigma^2(1-\rho)\omega_1 - \sigma^2(1-\rho)\omega_2 = 0$. Comme $\sigma > 0, \rho < 1, \omega_1 = \omega_2$

10) Quelle est la composition du portefeuille de variance minimale ?

Comme $\omega_1 + \omega_2 = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = 50\%$. Le portefeuille de variance minimale est le portefeuille équipondéré.

11) On suppose que $\sigma = 20\%$ et que $\rho = 0$. Quel est l'écart-type de la rentabilité du portefeuille de variance minimale ?

$\frac{\sigma}{\sqrt{2}} = \frac{20\%}{\sqrt{2}} \approx 14{,}14\%.$

12) On note E_1 et E_2 les espérances de rentabilité des deux actifs risqués. On suppose que $E_1 = E_2 = 10\%$. Comme précédemment $\sigma = 20\%$ et $\rho = 0$. Représenter graphiquement l'ensemble des portefeuilles efficients, au sens moyenne variance, dans le plan (écart type, espérance) des rentabilités.

L'ensemble des portefeuilles combinant les actifs risqués 1 et 2 est une demi-droite, dans le plan écart-type, espérance des rentabilités (si les ventes à découvert sont autorisées, sinon c'est un segment de droite) horizontale, d'extrémité le portefeuille de variance minimale et d'ordonnée égale à 10%. La frontière efficiente se limite au portefeuille de variance minimale de coordonnées $(14{,}14\%, 10\%)$, ce portefeuille dominant les autres portefeuilles atteignables.

13) On suppose maintenant que le taux sans risque est nul. Les caractéristiques des deux actifs risqués restent inchangées. Représenter graphiquement la capital market line (CML).

La CML est la demi-droite, dans le plan écart type, espérance des rentabilités, issue de l'origine et passant par le portefeuille de variance minimale.

14) Quel est le ratio de Sharpe des portefeuilles sur la CML (les données relatives aux actifs risqués et à l'actif sans risque restent identiques) ?

$s = \frac{10\% - 0\%}{20\%/\sqrt{2}} \approx 0{,}71.$

15) On suppose que le portefeuille tangent et le portefeuille de marché sont identiques (les données relatives aux actifs risqués et à l'actif sans risque restent identiques). Calculer les covariances entre les taux de rentabilité des deux actifs risqués.

La question est mal posée car tronquée (deux réponses valables) :

- 0, puisque le coefficient de corrélation entre les taux de rentabilité des actifs risqués est nul.
- Il fallait comprendre entre les taux de rentabilité des deux actifs *risqués et le portefeuille tangent*. Dans ce cas, la réponse est $\frac{\sigma^2}{2} = \frac{(0{,}2)^2}{2}$ pour les deux actifs risqués.

16) Calculer les betas des deux actifs risqués.

La variance du portefeuille tangent/de marché est égale à $\frac{\sigma^2}{2}$. Les betas des deux titres risqués sont égaux à 1.

17) Représenter la SML et positionner les deux actifs risqués.

La SML est une demi-droite dans le plan Beta, espérance de rentabilité, issue de l'origine et passant par le point (1,10%). Ce point correspond à la fois au portefeuille de marché et aux deux actifs risqués.

18) Retrouver le Beta des deux actifs en utilisant l'équation de la SML.

$E_1 = r_f + \beta_1 (E_M - r_f) E_M$. D'où $\beta_1 = \frac{E_1}{E_M} = 1$. De même pour E_2.

Problème 2 : grands risques et petites probabilités (8 points)

1) On suppose le taux sans risque nul. On considère le contrat suivant, placement en début d'année de 100 euros, paiement en fin d'année de 100,1 euros avec une probabilité de $1 - \frac{1}{2^{10}} \approx 1 - 10^{-3}$, paiement de 0,1 euro en fin d'année, avec une probabilité de $\frac{1}{2^{10}} \approx 10^{-3}$.
   a. Quelle la rentabilité du placement dans le cas favorable ? (0,5 point)
   b. Dans le cas défavorable ? (0,5 point)
   c. Quelle est l'espérance de gain (net de l'investissement initial de 100 euros) de l'investisseur ? (0,5 point)
   d. Quelle est l'espérance du taux de rentabilité de l'investissement ? (0,5 point)
   e. Quel est l'écart-type du gain de l'investisseur ? (1 point)
2) Montrer que le placement précédent est la combinaison d'un placement sans risque et d'un contrat financier dont on explicitera les cash-flows. (1 point)
3) On suppose que l'investisseur renouvelle un tel placement tous les ans, dans la mesure où le cas défavorable n'est pas apparu.
   a. Quelle est la probabilité que l'investisseur soit resté dans la configuration favorable au cours des 10 prochaines années ? (1point)
   b. Quel est alors le gain cumulé de l'investisseur au cours de ces dix années. (1 point)
4) On considère maintenant un vendeur de paris, c'est-à-dire une entité juridique assurant contre le risque d'occurrence du cas défavorable : Le vendeur de paris assure l'acheteur de protection vis-à-vis de la réalisation d'un événement extrême. La prime versée pour l'assurance est de 0,001 euros par euro assuré. Dans le cas défavorable survenant avec une probabilité de 0,1%, l'assureur ou vendeur de protection verse 1 euro à l'acheteur de protection
   a. De quelle réserve financière le vendeur de protection devrait-il disposer par euro de contrat assuré ? (1 point)
   b. Si le vendeur de protection ne dispose d'aucune réserve financière, quelle est la probabilité d'un défaut du vendeur de protection avant 10 ans ? Quel est le gain en cas de non-défaut ? (1 point)

Question de cours 1 : finance et probabilités, paradoxe d'Ellsberg (deux points, soit 1 point pour poser la problématique, 1 point pour l'explicitation du paradoxe).

Reprendre l'exemple donné en cours, illustrant les limites du raisonnement probabiliste en présence d'incertitude (ou d'ambiguïté).

Ellsberg's Paradox

Imagine an urn known to contain 90 balls. Thirty of the balls are red, the remaining 60 are black and yellow in unknown proportions. One ball is to be drawn at random from the urn. Consider the following actions and payoffs:

Situation X

	30 Red	Black	60 Yellow
Act 1. Bet on red	\$100	\$0	\$0
Act 2. Bet on black	\$0	\$100	\$0

Situation Y

Act 3. Bet on red or yellow	\$100	\$0	\$100
Act 4. Bet on black or yellow	\$0	\$100	\$100

Considérons un investisseur raisonnant en espérance (le raisonnement est le même si on considère une espérance d'utilité).

- p_y compris entre 0 et 2/3 (1/3 si le principe d'indifférence s'appliquait) ; les deux bornes correspondent à 0 et 100% de boules jaunes parmi les 60 dont on ne connait pas la couleur.
- 1 est préféré à 2 (aversion à l'ambiguïté) : $p_r = \frac{1}{3}, p_r > p_b$
- 4 est préféré à 3 (aversion à l'ambiguïté) : $p_r + p_y < p_b + p_y \Rightarrow p_r < p_b$
- Pas de probabilité qui permette de justifier la cohérence des deux choix précédents

Question de cours 2 : finance comportementale et appréhension du risque (trois points : un point par question)

1) Rappeler en quoi consiste le « gambler's fallacy ».

Si un parieur constante une longue suite de pile, il aura tendance à penser que le prochain tirage a plus de chances d'être face, afin de rétablir un « équilibre » entre les piles et les faces. Il pense qu'un échantillon doit être représentatif de la loi, donc comporter à peu près autant de piles que de faces ; un tirage nouveau pile accentuerait, de son point de vue, l'anomalie (transparents cognition et risque).

"To the untrained eye, randomness appears as regularity or tendency to cluster". William Feller

2) Rappeler en quoi consiste le hot hand fallacy

Un parieur qui a gagné plusieurs fois de suite à un fair game, a tendance à penser que son espérance de gain au coup suivant est positive (il a « la main chaude »).

3) On présente les deux suites de tirages ci-dessous. Expliquer la méthode de Ville permettant de détecter celle qui serait produite par un humain cherchant à simuler le hasard.

Pour une suite aléatoire, on devrait avoir : $0{,}5 = P(1) = P(1|1) = P(1|0) = P(1|11) = P(1|01) = P(1|10) = P(1|00) = P(1|011)$. Un humain qui cherche à reproduire le hasard ne va pas générer suffisamment de longues suites de 0 et de 1 (« gambler's fallacy »). Pour distinguer la suite générée par un humain, on va repérer celle qui a moins de longs motifs répétitifs (a priori celle de droite).

00111000110010000100	01000101001100010100
00100010001000000001	11101001100011110100
00110010101100001111	01110100011000110111
11001100010101100100	10001001011011011100
10001000000011111001	01100100010010000100

Ce résultat n'est pas contradictoire avec l'équiprobabilité des deux trajectoires précédentes, si elles résultent des tirages aléatoires équiprobables et indépendants.