Partiel Finance : Mercredi 19 janvier 2022 (durée de l'épreuve 1h30)

Calculatrices autorisées dans les mêmes conditions qu'au bac

Exercice 1 : Spéculation et apparitions de motifs boursiers (détails du corrigé dans les transparents présentés en cours ; 10 points + 1 point question bonus).

On considère des suites d'évolution de hausses ou de baisses des marchés boursiers. On note H, une hausse, B une baisse. On suppose que hausses ou baisses sont indépendantes du passé et qu'elles sont équiprobables. On se place un jour donné.

1) Quelle est la probabilité d'apparition des motifs HH, HB, BH, BB au cours des deux jours suivants ?

0,5 pt. Probabilité égale à $1/4$ pour chacun des quatre motifs.

2) Quelle est la probabilité que l'on observe une hausse après une baisse ?

0,5 pt. Probabilité égale à $1/2$.

3) Une baisse après une hausse ?

0,5 pt. Probabilité égale à $1/2$.

4) Vous apprenez qu'il y aura une hausse au cours de l'un des deux jours suivants. Quelle est alors la probabilité d'une baisse pendant l'autre journée ?

1 pt. Probabilité d'une baisse égale à $2/3$.

5) Et pourquoi ?

1pt. L'information donnée conduit à éliminer le motif BB. Il reste donc les motifs HH, HB, BH. Le motif B apparaît deux fois sur trois.

On va maintenant s'intéresser à la première apparition des 4 motifs précédents.

6) Quelle est la probabilité que le motif HB apparaisse avant le motif BB ?

1 pt. Probabilité que HB arrive avant BB égale à $3/4$.

7) Pourquoi ?

1 pt.

- Supposons que l'on observe d'abord une hausse H.
- Tant que des hausses suivent, on continue à observer le marché.
- A la première observation d'une baisse B, on observe le motif HB.
- Si l'on observe d'abord une baisse B puis une hausse H, on se retrouve dans la même situation que précédemment, on observera toujours le motif HB en premier.
- La seule possibilité que BB apparaisse en premier est d'avoir BB aux deux premiers lancers : probabilité $= 1/4$

8) Quelle est la probabilité que le motif HB apparaisse avant le motif HH ?

0 ,5 pt Probabilité que le motif HB apparaisse avant le motif HH égale à $1/2$.

9) Pourquoi ?

1 pt.

- Si l'on commence par une hausse. Elle est suivie d'une baisse ou d'une hausse de manière équiprobable.
- Si l'on commence par une baisse, il faut continuer à observer le marché jusqu'à ce qu'une hausse apparaisse. Ensuite, hausse et baisse sont équiprobables.

On étend le problème précédent :

10) Quelle est la probabilité que l'on observe le motif HB les deuxième et troisième jours suivant la date courante sachant que l'on a observé une hausse le premier jour ?

0,5 pt. Probabilité égale à $1/4$

11) Quelle est la probabilité que l'on observe le motif BB les deuxième et troisième jours suivant la date courante sachant que l'on a observé une hausse le premier jour ?

0,5 pt. Probabilité égale à $1/4$

12) Quelle est la probabilité que le motif HHB survienne avant le motif HBB ?

1 pt. Probabilité égale à $2/3$

13) Pourquoi ?

1 pt. On remarque que les deux motifs commencent par une hausse H. On va donc raisonner conditionnellement à la réalisation d'une hausse. Notons p la probabilité que H soit suivi (aux deuxième et troisième jours ou plus tard) de HB et $1 - p$ la probabilité que H soit suivi (aux deuxième et troisième jours ou plus tard) de BB. Si H est suivi de H (probabilité conditionnelle égale à $1/2$, alors on est certain que le motif HHB apparaîtra en premier (il suffit d'attendre une baisse). On peut aussi observer le motif HHB en premier si H est suivi de BH (mais jamais si H est suivi de BB, car alors HBB « a gagné la course »). Cela arrive avec une probabilité $1/4$ et sachant que l'on a suivi le chemin HBH, on une probabilité p que HHB gagne. Ceci permet d'écrire l'équation $p = 1/2 + 1/4\, p$, ce qui donne $p = 2/3$

Questions bonus : Quelle est la probabilité que le motif BBH survienne avant le motif HHB ? Pourquoi ?

1 pt. La probabilité est égale à $1/2$, par symétrie entre B et H.

Exercice 2 : risque de marché et risque idiosyncratique. **Détails du corrigé dans les transparents présentés en cours ; 10 points.**
On considère $i = 1, \dots, n$ actions. On note $r_1, \dots, r_n$: rentabilités (supposées centrées), $\sigma_1, \dots, \sigma_n$: écarts-types des rentabilités (supposés positifs), ρ_{ij} : coefficient de corrélation linéaire entre r_i et r_j ; $\omega_1, \dots, \omega_n$: poids des actions dans un indice boursier de référence. Ces poids sont supposés positifs. $r = \omega_1 r_1 + \dots + \omega_n r_n$: rentabilité du portefeuille. On notera σ, l'écart-type de la rentabilité de l'indice.

1) Donner l'expression du Bêta du titre i, β_i, par rapport à l'indice de référence.

1 pt. $\beta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma^2} \times (\omega_1 \rho_{i1} \sigma_1 + \dots + \omega_n \rho_{in} \sigma_n)$

2) On suppose que les $\rho_{ij} \geq 0$. Montrer que les β_i sont > 0.

0,5 pt. Tous les termes de l'expression précédente sont positifs ou nuls et $\rho_{ii} = 1$, $\sigma_i > 0, \omega_i > 0$ (par hypothèse), donc $\beta_i > 0$.

3) A quoi est égal $\omega_1 \beta_1 + \dots + \omega_n \beta_n$?

1 pt. $\omega_1 \beta_1 + \dots + \omega_n \beta_n = 1$

4) On définit le risque idiosyncratique comme $\varepsilon_i = r_i - \beta_i r$. Quel est le coefficient de corrélation linéaire entre ε_i et r ?

0,5 pt. le coefficient de corrélation linéaire entre ε_i et r est nul.

5) Décomposer le risque total du titre i

1 pt. $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$

6) Décomposer le risque de l'indice en fonction des risques de marché des différents titres.

1 pt. $\sigma = \omega_1(\beta_1 \sigma) + \dots + \omega_n(\beta_n \sigma)$

7) En déduire une inégalité.

1 pt. $\omega_1 \sigma_1 + \dots + \omega_n \sigma_n \geq \sigma$

8) Donner une signification au ratio $\beta_i \sigma / \sigma_i$.

1 pt. $\rho_i = \beta_i \sigma / \sigma_i$ coefficient de corrélation linéaire entre r_i et r.

9) Calculer le risque idiosyncratique de l'indice, puis son écart-type (ici on ne fait aucune hypothèse sur les corrélations entre les risques idiosyncratiques).

0,5 pt. Le risque idiosyncratique de l'indice est nul.
0,5 pt. Son écart-type est nul

10) Supposons maintenant que les risques idiosyncratiques sont non-corrélés, calculer le risque idiosyncratique du portefeuille.

1pt. Supposons les risques idiosyncratiques ε_i non corrélés. Alors, le carré du risque idiosyncratique du portefeuille est égal à $\omega_1^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 + \dots + \omega_n^2 \sigma_{\varepsilon_n}^2$

11) Que conclure des résultats des questions 9 et 10 ?

1pt. Il résulte de la question 9) que l'écart-type du risque idiosyncratique serait positif, en supposant les risques idiosyncratiques non corrélés. Or, ce n'est pas le cas. Les risques idiosyncratiques sont donc nécessairement corrélés.

Exercice 3 : coût moyen pondéré du capital **(10 points)** La *Française des Granulats Responsables*, nouvelle entreprise à mission, va prochainement être introduite en Bourse. Vous avez les données suivantes : résultat d'exploitation attendu $\bar{F}_A = 30$ millions d'€ (perpétuité), dette : $D = 60$ millions d'euros (perpétuité), taux d'IS $T_C = 40\%$, rentabilité exigée en l'absence d'endettement $r = 10\%$, taux d'intérêt sans risque $r_f = 4\%$

1) Calculez la valeur de l'entreprise non endettée A_U.

1pt. (0,5 pt pour la formule et 0,5 pt pour le résultat numérique) $A_U = \frac{(1-T_C)\bar{F}_A}{r} = \frac{30(1-0{,}40)}{10\%} = 180$ millions €

2) Déterminez l'économie fiscale annuelle résultant de l'endettement.

1 pt. (0,5 pt pour la formule et 0,5 pt pour le résultat numérique) $T_c r_f D = 4\% \times 60 \times 40\% = 0{,}96$ millions €

3) Déterminer la valeur actuelle de l'avantage fiscal.

1 pt. (0,5 pt pour la formule et 0,5 pt pour le résultat numérique) $T_c D = 24$ millions €

4) Quelles sont les valeurs de l'entreprise $\boldsymbol{V}$ et des actions $\boldsymbol{E}$.

2 pts. (2 x 0,5 pt avec les mêmes principes, 0,5 pt par formule et 0,5 pt par résultat numérique)

- $V = A_U + T_c \times D = 180 + 24 = 204$ millions €
- $E = V - D = 204 - 60 = 144$ millions €

5) Quelle est la rentabilité attendue des actions $E[\tilde{r}_E]$?

1 pt. (0,5 pt pour la formule et 0,5 pt pour le résultat numérique) $E[r_{E,t+1}] = r + (r - r_f)\frac{D(1-T_C)}{E} = 11{,}50\%$

6) Calculer $E[\tilde{r}_E]$ par une autre méthode.

2 pts. (2 x 0,5 pt avec les mêmes principes, 0,5 pt par formule et 0,5 pt par résultat numérique)

- $\bar{F}_E = (\bar{F}_A - r_f D) \times (1 - T_C) = 16{,}56$ millions €
- $E[r_{E,t+1}] = \bar{F}_E / E = \frac{16{,}56}{144} = 11{,}50\%$

7) Calculez le coût moyen pondéré du capital.

1 pt. (0,5 pt pour la formule et 0,5 pt pour le résultat numérique) $r^* = \text{CMPC} = \frac{E}{E+D} E[r_E] + \frac{D}{E+D}(1 - T_c) r_f = 8{,}82\%$

8) Calculez le coût moyen pondéré du capital par une autre méthode.

1 pt. (0,5 pt pour la formule et 0,5 pt pour le résultat numérique) $r^* = \frac{\bar{F}_A \times (1-T_C)}{V} = \frac{30 \times (1-0{,}40)}{204} = 8{,}82\%$