Partiel Finance : Mercredi 18 janvier 2023 (durée de l'épreuve 1h30)
Eléments de corrigé

Barème : exercice 1 (9 pts), exercice 2 (10 pts), exercice 3 (8 pts)

Exercice 1 : Marchés *Momentum* et corrélation

On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t :

- $I_t = 1$, *si hausse des cours boursiers entre* $t-1$ *et* t
- $I_t = 0$, *sinon*

On suppose que I_{t-1} et I_t sont de même loi et on note $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$ avec $0 < p < 1$. On note $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1)$ la probabilité conditionnelle d'une hausse en t sachant que l'on a observé une hausse en $t-1$.

1. Rappeler la définition de la probabilité conditionnelle (0,5 pt)

$P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = \frac{P(I_t=1, I_{t-1}=1)}{P(I_{t-1}=1)} = \frac{P(I_t=1, I_{t-1}=1)}{p}$ où $P(I_t = 1, I_{t-1} = 1)$ est la probabilité jointe de hausse aux dates $t-1$ et t

2. Écrire la covariance entre I_{t-1} et I_t (0,5 pt)

$\mathrm{Cov}(I_{t-1}, I_t) = E[I_{t-1}I_t] - E[I_t]E[I_{t-1}]$

3. Écrire cette covariance en fonction des probabilités (0,5 pt)

$\mathrm{Cov}(I_{t-1}, I_t) = P(I_t = 1, I_{t-1} = 1) - p^2$

4. Donner une condition sur $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1)$ pour le coefficient de corrélation linéaire entre I_{t-1} et I_t soit positif (marché *Momentum*) (0,5 pt)

$P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) > p$

5. Montrer qu'alors $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) > 1 - p$ (1,5 pts)
   - $\mathrm{Cov}(I_{t-1}, I_t) = \mathrm{Cov}(1 - I_{t-1}, 1 - I_t) > 0$ *de par les propriétés de la covariance (bilinéarité, covariance avec une constante* $= 0$*)*
   - $\mathrm{Cov}(1 - I_{t-1}, 1 - I_t) = E[(1 - I_{t-1})(1 - I_t)] - E[1 - I_{t-1}]E[1 - I_t] = P(I_{t-1} = 0, I_t = 0) - (1-p)^2 > 0$
   - $P(I_{t-1} = 0, I_t = 0) = P(I_t = 0|I_{t-1} = 0)P(I_{t-1} = 0)$
   - $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0)(1 - p) > (1 - p)^2$, *d'où l'inégalité annoncée*
6. Interpréter le résultat (1 pt)
   - *On a montré l'équivalence entre corrélation positive des indicatrices et les conditions* $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) > p$ *ou* $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) > 1 - p$
   - *Comme* $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) > p$ *et* $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) > 1 - p$ *sont vraies simultanément, on peut effectivement parler de marché Momentum.*
7. Supposons que $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = p$. Montrer qu'alors $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) = 1 - p$ (1 pt)

Si $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = p$, *alors* $\mathrm{Cov}(I_{t-1}, I_t) = \mathrm{Cov}(1 - I_{t-1}, 1 - I_t) = 0$ *et donc* $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) = 1 - p$

8. En déduire l'indépendance des indicatrices de hausse (1,5 pts)
   - $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = P(I_t = 1)$
   - $P(I_t = 0|I_{t-1} = 1) = 1 - P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = 1 - P(I_t = 1) = P(I_t = 0)$
   - $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) = P(I_t = 0)$
   - $P(I_t = 1|I_{t-1} = 0) = 1 - P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) = 1 - P(I_t = 0) = P(I_t = 1)$
   - *Les probabilités conditionnelles étant égales aux marginales, l'indépendance des indicatrices est établie.*

Exercice 2 : risque de marché et risque idiosyncratique. Détails du corrigé dans les transparents présentés en cours ; 10 points.

On considère $i = 1, \dots, n$ actions. On note $r_1, \dots, r_n$: rentabilités (supposées centrées), $\sigma_1, \dots, \sigma_n$: écarts-types des rentabilités (supposés positifs), ρ_{ij} : coefficient de corrélation linéaire entre r_i et r_j ; $\omega_1, \dots, \omega_n$: poids des actions dans un indice boursier de référence. Ces poids sont supposés positifs. $r = \omega_1 r_1 + \cdots + \omega_n r_n$: rentabilité du portefeuille. On notera σ, l'écart-type de la rentabilité de l'indice.

1) Donner l'expression du Bêta du titre i, β_i, par rapport à l'indice de référence.

1 pt. $\beta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma^2} \times (\omega_1\rho_{i1}\sigma_1 + \cdots + \omega_n\rho_{in}\sigma_n)$

2) On suppose que les $\rho_{ij} \geq 0$. Montrer que les β_i sont > 0.

0,5 pt. Tous les termes de l'expression précédente sont positifs ou nuls et $\rho_{ii} = 1$, $\sigma_i > 0, \omega_i > 0$ (par hypothèse), donc $\beta_i > 0$.

3) A quoi est égal $\omega_1\beta_1 + \cdots + \omega_n\beta_n$?

1 pt. $\omega_1\beta_1 + \cdots + \omega_n\beta_n = 1$

4) On définit le risque idiosyncratique comme $\varepsilon_i = r_i - \beta_i r$. Quel est le coefficient de corrélation linéaire entre ε_i et r ?

0,5 pt. le coefficient de corrélation linéaire entre ε_i et r est nul.

5) Décomposer le risque total du titre i

1 pt. $\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$

6) Décomposer le risque de l'indice en fonction des risques de marché des différents titres.

1 pt. $\sigma = \omega_1(\beta_1\sigma) + \cdots + \omega_n(\beta_n\sigma)$

7) En déduire une inégalité.

1 pt. $\omega_1\sigma_1 + \cdots + \omega_n\sigma_n \geq \sigma$

8) Donner une signification au ratio $\beta_i\sigma/\sigma_i$.

1 pt. $\rho_i = \beta_i\sigma/\sigma_i$ coefficient de corrélation linéaire entre r_i et r.

9) Calculer le risque idiosyncratique de l'indice, puis son écart-type (ici on ne fait aucune hypothèse sur les corrélations entre les risques idiosyncratiques).

0,5 pt. Le risque idiosyncratique de l'indice est nul.

0,5 pt. Son écart-type est nul

10) Supposons maintenant que les risques idiosyncratiques sont non-corrélés, calculer le risque idiosyncratique du portefeuille.

1 pt. Supposons les risques idiosyncratiques ε_i non corrélés. Alors, le carré du risque idiosyncratique du portefeuille est égal à $\omega_1^2\sigma_{\varepsilon_1}^2 + \cdots + \omega_n^2\sigma_{\varepsilon_n}^2$

11) Que conclure des résultats des questions 9 et 10 ?

1 pt. Il résulte de la question 9) que l'écart-type du risque idiosyncratique serait positif, en supposant les risques idiosyncratiques non corrélés. Or, ce n'est pas le cas. Les risques idiosyncratiques sont donc nécessairement corrélés.

Exercice 3 : Valeur d'une entreprise endettée

Vous disposez d'informations financières sur une société dont vous aimeriez déterminer la valeur : résultat d'exploitation attendu : $\bar{F}_A = 300$ millions d'€ (perpétuité), taux d'IS $T_C = 40\%$, taux de rentabilité cible en l'absence d'endettement (coût du capital) $r = 10\%$, taux d'intérêt sans risque $r_f = 4\%$. Le conseil d'administration a fixé le taux d'endettement : $L = \frac{D}{V} = 25\%$.

Barème exercice : 8 points

1. Calculez le coût moyen pondéré du capital

(1 pt formule, 0,5 pt valeur numérique)

- $r^* = r \times (1 - T_c L) = 10\% \times (1 - 0{,}40 \times 25\%) = 9\%$

2. Calculez le coût moyen pondéré du capital par une autre méthode

(0,5 pt formule, 1 pt raisonnement)

- $r^* = \frac{E}{V} \times E[r_E] + \frac{D}{V}(1 - T_c)r_f$
- *Détermination de D/E*
- $L = D/V \Rightarrow E/V = 1 - L \Rightarrow D/E = \frac{L}{(1-L)} = \frac{0{,}25}{0{,}75}$
- $r^* = (1 - L) \times E[r_E] + L(1 - T_c)r_f$
- *Détermination de $E[r_E]$*
- $E[r_E] = r + (r - r_f)\frac{D(1-T_c)}{E} = 10\% + (10\% - 4\%) \times (1 - 0{,}40) \times \frac{0{,}25}{0{,}75} = 11{,}20\%$
- $r^* = 0{,}75 \times 11{,}20\% + 0{,}25 \times (1 - 0{,}40) \times 4\% = 9\%$

3. Déterminer la valeur de l'entreprise

(1 pt formule, 0,5 pt valeur numérique)

$V = \frac{\bar{F}_A \times (1-T_c)}{r^*} = \frac{300 \times (1-0{,}40)}{9\%} = 2000$ millions €

4. Quelles sont les valeurs de la dette et des actions ?

(0,5 pt valeur numérique D, 0,5 pt valeur numérique E)

- $D = L \times V = 25\% \times 2000 = 500$ millions €
- $E = V - D = 2000 - 500 = 1500$ millions €

5. Quelle est la valeur actuelle de l'avantage fiscal de la dette ?

(0,5 pt formule, 0,5 pt valeur numérique)

- $T_c \times D = 0{,}40 \times 500 = 200$ millions €

6. Calculer la valeur actuelle de l'avantage fiscal par une autre méthode.

(1,5 pt méthode)

- $V - A_U$
- $A_U = \frac{(1-T_c)\bar{F}_A}{r} = \frac{300(1-0{,}40)}{10\%} = 1800$ millions €
- $V - A_U = 200 - 180 = 200$ millions €