Risques de marché –
Master Finance de Marché et Gestion des Risques
Ecole de Management de la Sorbonne

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Version provisoire actualisée au 15 avril 2025.

Provisoire : en cours d'élaboration et/ou d'actualisation

Ne pas diffuser

Risques de marché

- Rappels : définition(s) de la VaR et de l'ES
  - *VaR absolue, en pourcentage*
  - *Propriétés et représentations*
- Des facteurs de risque aux pertes (pricing models)
  - *Data, validation dans le FRTB*
- VaR paramétrique : modélisation des covariances
  - *FRTB SA, ISDA SIM (initial margin models)*
- VaR historique et par scénarios
  - *VaR et ES historique, FRTB IMA*
  - *Stress-tests*
- Backtests

Risques de marché

- Cours orienté vers les risques de marché dans le trading book pour les banques : Bâle 2.5, Bâle 3 (FRTB)
- Méthodologies aussi utilisées pour le calcul des marges initiales bilatérales pour les dérivés de gré à gré (OTC) et pour les dérivés compensés centralement
  - *On précisera ultérieurement de quoi il s'agit*
- Dans une moindre mesure, quantification du risque de marché intervient pour le calcul du risque de contrepartie, via les modèles internes
  - *Calcul de l'Expected Positive Exposure (EPE) à un an*
  - *On précisera également de quoi il s'agit, le cas échéant*

Utilisation de ChatGPT

- Dans une approche Top-Down
  - *Pour faire des synthèses de documents*
  - *Rechercher de la bibliographie*
- Dans une approche Bottom-up (classe inversée)
  - *Rédaction de prompts*
    - Challenger ChatGPT
    - Valider les réponses
    - Mettre en forme
    - Présentation (graphiques, slides, tableaux)
  - *Produire du code*
  - *Rechercher des documents*

Utilisation de ChatGPT

- Synthèse de documents (exemple pédagogique)
- A propos des discussions sur les modèles de marge initiale
  - *Review of margining practices (BIS 2022)*
    - https://www.bis.org/bcbs/publ/d537.htm
  - *CCP initial margin models: A peek under the hood*
    - https://www.suerf.org/wp-content/uploads/2023/12/f_09d914fa78ad2c9bc534fead45b3d534_69999_suerf.pdf
  - *CCP initial margin models in Europe (ECB 2023)*
    - https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpops/ecb.op314~afc6d2980c.en.pdf
  - *Additional thoughts on margin practices (ISDA 2023)*
    - https://www.isda.org/a/Y1qgE/Additional-thoughts-on-margin-practices.pdf
  - *Cleared margin setting at selected CCPs (Chicago Fed 2016)*
    - https://www.chicagofed.org/publications/economic-perspectives/2016/4-heckinger-cox-marshall
- Prompt : I would like a two-page summary of these documents

- Site du cours (en cours d'actualisation)
  - *http://laurent.jeanpaul.free.fr/Enseignement/enseignement.htm*
- L'enseignant
  - *http://laurent.jeanpaul.free.fr/*
  - *https://www.linkedin.com/in/jeanpaullaurent/*

- Mots clés générés par theses.fr

Syllabus du cours « risques de marché » préparé pour le CFA

Market risks management: Concepts and practicalities

Prerequisites

Econometrics of Financial Markets
Financial and Banking Risks Management

Main goals

To provide the concepts and practicalities involved in the assessment, modelling and quantification of market risks.

Specific goals

The course aims at providing professional proficiency either as a market risk expert or when working in connexion with market risk managers.

Educational approach

Flipped classrooms for the basics, lectures on more topical or involved subjects.

Tutored projects on implementation and back-testing of VaR and ES.

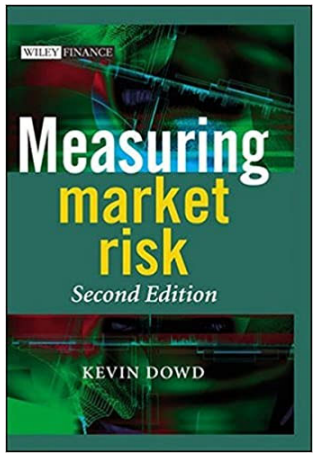
Contents

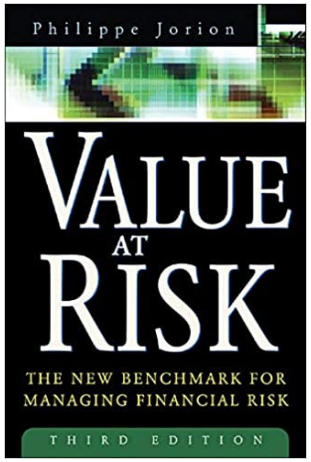
- *From risk factors to loss models: factor granularity, linear and non-linear models, implementation and calibration issues in the Gaussian case.*
- *Scenario modelling: historical, parametric and expert-based approaches. From single to multiple horizons. Issues with volatility and correlation models.*
- *Basics of risk measures: VaR, ES, Worst Case Scenario approach. Computation in the discrete and Gaussian cases for the single and multiple (GARCH, Filtered Historical Simulation) horizons.*
- *Properties of risk measures: sub-additivity, positive homogeneity, cash-invariance, comonotone additivity, ...*
- *Validation of risk models and back-testing risk measures: documentation, validation and monitoring processes, unconditional and conditional coverage approaches.*
- *Numerical and implementation issues related to risk models: discrepancies between front-office and risk department pricing models, discrepancies between factor granularity, costs of Monte Carlo simulation.*
- *Main features of (the Basel 2.5 and) the FRTB framework: stressed ES, partial ES, liquidity horizon, modellable and non-modellable risk factors, PnL attribution tests in the IMA approach, basics of the Standard Approach.*

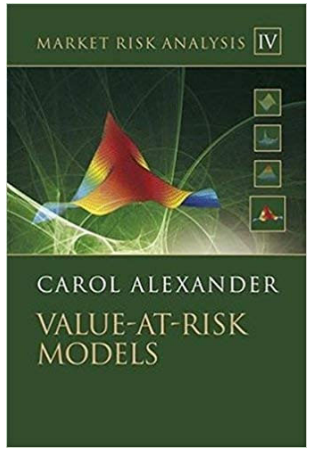
Bibliography

- Alexander, C. (2008). *Value-at-risk models*. John Wiley & Sons.
- Danielsson, J. (2011). *Financial risk forecasting: The theory and practice of forecasting market risk with implementation in R and Matlab* (Vol. 588). John Wiley & Sons.
- Dowd, K. (2007). *Measuring market risk*. John

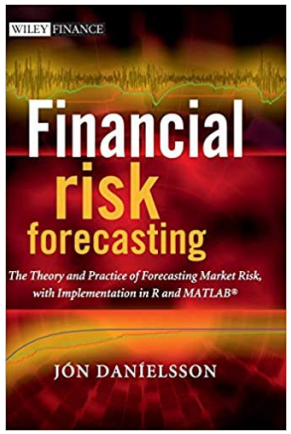
Trois « classiques » sur les modèles de risque de marché



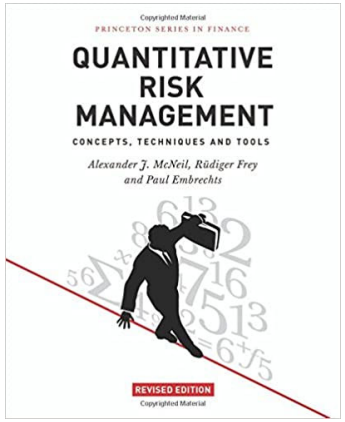




Très complet, bon compromis entre théorie et pratique

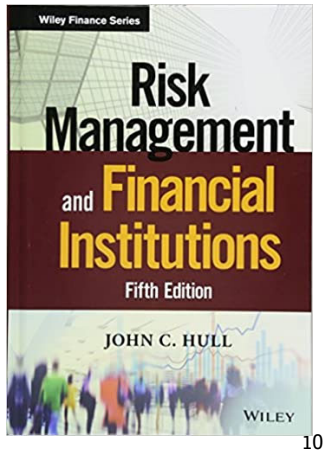


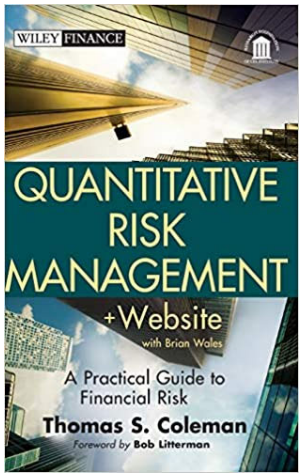
Utile pour la partie séries temporelles et les chapitres 4, 5 et 8, notamment sur le backtesting



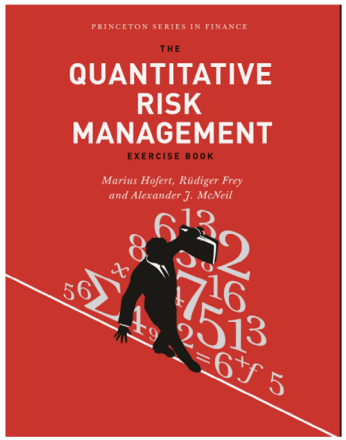
Champ plus large que le risque de marché, plus orienté vers la recherche académique

Chapitres 10, 12, 13 sur la modélisation pour une introduction à la modélisation des risques, mais surtout partie 3 sur le cadre réglementaire





Out of the box : peu formalisé, facilement abordable, des considérations intéressantes sur la pratique du risk management



Exercices variés, certains pratiques, d'autres plus théoriques

VaR et Expected Shortfall : définitions

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Eléments généraux pour le risque de marché

- Champ d'application de la modélisation ?
- Les portefeuilles de négociation des banques (trading book)
- Les positions des clearing members auprès des chambres de compensation (central counterparties)
- Les expositions bilatérales pour les produits dérivés traités sur les marchés de gré à gré (ou OTC) : options, swaps et produits apparentés (SFT – Security Financing Transactions : repos, …)
  - *Dans les deux derniers cas, il s'agit du risque de contrepartie qui dérive du risque de marché (via le calcul des expositions au risque)*

Eléments généraux pour la modélisation risque de marché

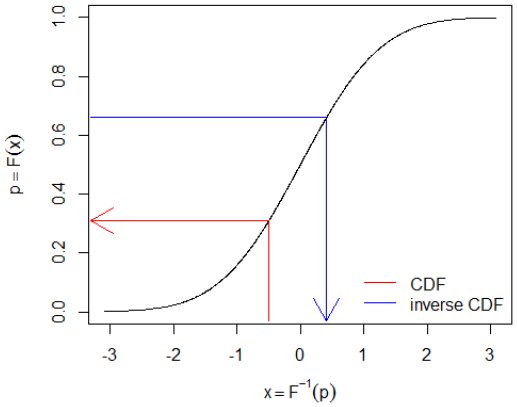
- Deux dates : aujourd'hui et « demain »
- Demain : en pratique dans un jour, dans dix jours, …
- On considère un portefeuille de produits financiers
- De composition donnée, évalué en valeur de marché
- La composition du portefeuille est figée
  - *On considère qu'on ne pourra pas réduire les expositions au risque d'ici à l'horizon*
  - *MPOR : margin period of risk (pour le calcul des marges initiales)*
  - *Horizon dépendant de la liquidité des marchés*
- $P_{t-1} - P_t$: opposé de la variation absolue de valeur du portefeuille entre $t-1$ et t
- $P_{t-1} - P_t$: perte (si valeur négative, gain)

VaR : cas général

- Pas d'hypothèse particulière sur la loi de $P_{t-1} - P_t$
  - *Du type loi gaussienne, distribution discrète.*
- $\bar{F}_{t-1}(x) = P(P_{t-1} - P_t \leq x | \mathcal{F}_{t-1})$ fonction de répartition conditionnelle. P : mesure de probabilité
- Supposons $\bar{F}_{t-1}$ inversible
  - *si $\bar{F}_{t-1}$ est continue et strictement croissante, alors $\bar{F}_{t-1}$ est inversible*
  - *$\bar{F}_{t-1}^{-1}$, fonction inverse de la fonction $\bar{F}_{t-1}$: $\bar{F}_{t-1}^{-1}(\bar{F}_{t-1}(x)) = x$*
- Définition $P\left(P_{t-1} - P_t > \mathrm{VaR}_{t-1,\alpha} | \mathcal{F}_{t-1}\right) \triangleq 1 - \alpha$
- Propriété : $\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha} = \bar{F}_{t-1}^{-1}(\alpha)$
  - $P\left(P_{t-1} - P_t > \mathrm{VaR}_{t-1,\alpha} | \mathcal{F}_{t-1}\right) = 1 - \bar{F}_{t-1}\left(\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha}\right) = 1 - \alpha$
  - $\alpha = \bar{F}_{t-1}\left(\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha}\right) \Rightarrow \bar{F}_{t-1}^{-1}(\alpha) = \bar{F}_{t-1}^{-1}\left(\bar{F}_{t-1}\left(\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha}\right)\right) = \mathrm{VaR}_{t-1,\alpha}$
  - *Exemple : $\alpha = 99\%$, $\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha} = 50M€$, $P(P_{t-1} - P_t > 50 | \mathcal{F}_{t-1}) = 1\%$*

VaR : cas général

- Exemple de fonction de répartition F continue et strictement croissante
  - $\forall \alpha \in]0,1[, \exists! x \in \mathbb{R}, \alpha = F(x)$ *(donc* $x = F^{-1}(\alpha)$

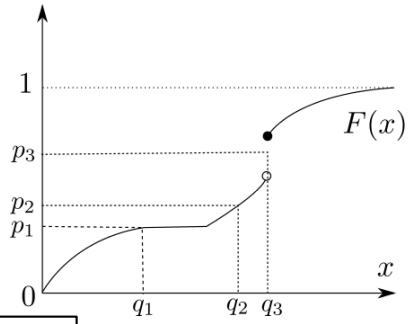


VaR : cas général

- Par simplification, on ne fait pas référence à la date de calcul
  - *Ni à l'horizon de calcul des pertes*
- Une fonction de répartition F est :
  - *Croissante au sens large,*
  - *Admet au maximum une quantité dénombrable de points de discontinuité.*
  - *Est continue à droite et limitée à gauche (cadlag) :* $\lim_{y \downarrow x} F(y) = F(x)$
  - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
  - *Elle n'est pas forcément inversible*
- En général, il n'y a ni existence, ni unicité de la solution de $\alpha = F(\mathrm{VaR}_\alpha)$ (VaR_α est l'inconnue)

VaR et ES : cas général

- En général, il n'y a ni existence, ni unicité de la solution de $\alpha = \bar{F}(\mathrm{VaR}_\alpha)$ (VaR_α est l'inconnue)



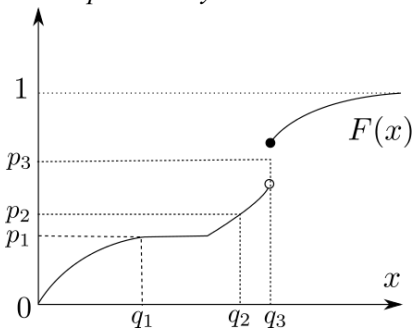
Il n'existe pas de solution à l'équation $p_3 = F(x)$

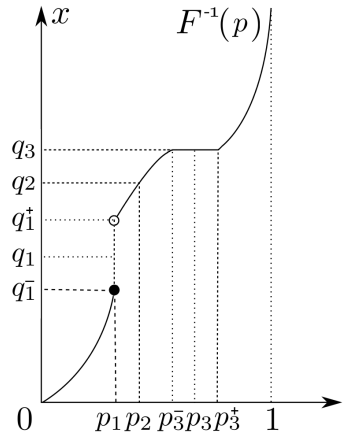
Il existe une solution unique à l'équation $p_2 = F(x)$

Il existe une infinité de solutions à l'équation $p_1 = F(x)$

VaR : cas général

- Inverse généralisé d'une fonction de répartition (à droite)
  - *Le graphe de l'inverse généralisé s'obtient par une rotation de -90° puis une symétrie autour de l'axe des ordonnées*





$q_1^+(p_1)$, quantile d'ordre supérieur
$q_1^-(p_1)$, quantile d'ordre inférieur
$p \to q_1^+(p)$ est continue à droite
$p \to q_1^-(p)$ est continue à gauche

Mesure empirique

- Interaction avec ChatGPT

Can you give an example of the empirical measure in the case of financial time series?

Mesure empirique

Yes! The **empirical measure** is commonly used in financial time series analysis, particularly in risk management and statistical modeling. It represents the observed distribution of a dataset based on historical data.

Definition of the Empirical Measure

Given a **time series of financial returns** $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, the **empirical measure** $\hat{P}_n$ is defined as:

$$\hat{P}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i},$$

where:

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are historical observations (e.g., daily log returns of a stock),
- δ_{X_i} is the **Dirac measure**, which assigns probability mass to the observed value X_i,
- $\hat{P}_n(A)$ for a set A is the proportion of observations X_i that belong to A.

This empirical measure provides a **discrete approximation** of the true (unknown) probability distribution of asset returns.

Mesure empirique

Example: Empirical Measure in Financial Time Series

Step 1: Consider a Set of Observed Returns

Suppose we observe the daily returns of a stock over five days:

$$X_1 = -0.02, \quad X_2 = 0.01, \quad X_3 = -0.01, \quad X_4 = 0.03, \quad X_5 = 0.00.$$

Step 2: Construct the Empirical Measure

The empirical measure assigns equal probability to each observation:

$$\hat{P}_5 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \delta_{X_i}.$$

In terms of probability mass, we have:

$$\hat{P}_5(\{-0.02\}) = \frac{1}{5}, \quad \hat{P}_5(\{0.01\}) = \frac{1}{5}, \quad \hat{P}_5(\{-0.01\}) = \frac{1}{5}, \quad \hat{P}_5(\{0.03\}) = \frac{1}{5}, \quad \hat{P}_5(\{0.00\}) = \frac{1}{5}.$$

For a general range, for example:

$$\hat{P}_5((-0.02, 0.02]) = \frac{3}{5}$$

since three observations $(-0.01, 0.00, 0.01)$ fall within that range.

VaR : préliminaires sur les quantiles

- Quantiles supérieur et inférieur d'ordre α d'une variable aléatoire X :
  - Acerbi & Tasche (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of banking & finance*.

Definition 2.1 (*Quantiles*).

$x_{(\alpha)} = q_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P[X \leqslant x] \geqslant \alpha\}$ is the lower α-quantile of X,
$x^{(\alpha)} = q^\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P[X \leqslant x] > \alpha\}$ is the upper α-quantile of X.

  - Delbaen (2002). Coherent risk measures on general probability spaces.

$$q_\alpha^- = \inf\{q \mid \mathbb{P}[X \leq q] \geq \alpha\}$$
$$q_\alpha^+ = \inf\{q \mid \mathbb{P}[X \leq q] > \alpha\}.$$

- *Fort heureusement, ces deux definitions coïncident*

VaR : préliminaires sur les quantiles

- Quantile (right quantile, upper quantile) d'ordre α d'une variable aléatoire X : $q_\alpha^+(X)$
  - Laurent (2003). *Sensitivity analysis of risk measures for discrete distributions*. Working paper.

Proposition 1.2 higher quantile
Let $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ be a probabilistic space, $\alpha \in]0,1[$ and X a random variable. Then,

$$q_\alpha^+(X) = \inf\{x \in \mathbb{R}, P(X \leq x) > \alpha\}.$$

  - *Définition cohérente avec celles de Delbaen et d'Acerbi & Tasche*
- Définition équivalente du quantile supérieur $q_\alpha^+(X)$

Définition 1.2 higher quantile
Let $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ be a probabilistic space and $\alpha \in]0,1[$. For X being a real random variable defined on $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,

$$q_\alpha^+(X) = \sup\{x \in \mathbb{R}, P(X < x) \leq \alpha\} \quad (1.2)$$

is the higher quantile of order α of X.

VaR : préliminaires sur les quantiles

- Intervalle des quantiles $Q_\alpha(X)$ (éventuellement réduit à un point)

Définition 1.1 Quantile set
Let us consider a real random variable X on a probabilistic space $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ and $\alpha \in]0,1[$. The set:

$$Q_\alpha(X) = \{x \in \mathbb{R}, P(X < x) \leq \alpha \leq P(X \leq x)\}.$$

defines the α quantiles of X.

- Les extrémités de l'intervalle des quantiles sont les quantiles inférieurs et supérieurs (ci-dessous, un extrait de l'article de Delbaen déjà cité)

Definition 6.1. *If X is a real valued random variable, if $0 < \alpha < 1$, then we say that q is an α-quantile if $\mathbb{P}[X < q] \leq \alpha \leq \mathbb{P}[X \leq q]$.*

It is easy to see that the set of quantiles forms a closed interval with endpoints q_α^- and q_α^+. These endpoints can be defined as

$$q_\alpha^- = \inf\{q \mid \mathbb{P}[X \leq q] \geq \alpha\}$$
$$q_\alpha^+ = \inf\{q \mid \mathbb{P}[X \leq q] > \alpha\}.$$

VaR : Définitions et propriétés

- Rappel : le quantile supérieur $q_\alpha^+(X)$ comme l'extrémité droite de l'intervalle des quantiles $Q_\alpha(X)$

Proposition 1.1 *Let $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ be a probabilistic space and $\alpha \in]0,1[$. $q_\alpha^+(X)$ is an α quantile of X and is the right end of $Q_\alpha(X)$.*

  - Définition de la VaR au seuil α

$\text{VaR}_\alpha(X) = q_\alpha^+(X)$, avec $X = P_{t-1} - P_t$ (approche conservatrice)

- On rappelle que X est associé à une perte
- Choisir le quantile supérieur est l'approche conservatrice
  - *Ce qui est logique dans une perspective de mesure des risques.*

Quelques remarques sur les réponses de ChatGPT

- Pour un même prompt, les réponses peuvent être très différentes
  - *Certaines réponses justes, d'autres incorrectes*
  - *Souvent un manque de rigueur ou de précision, ou de manque de contextualisation*
- Il ne faut pas hésiter à challenger ChatGPT car il tend à être trop péremptoire.
  - *Et verser dans les lieux communs*
  - *C'est normal, vu le principe de l'apprentissage*

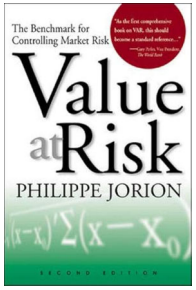
Exemple de manque de rigueur de ChatGPT

- Définition de la VaR par ChatGPT

Soit X une variable aléatoire représentant la perte d'un portefeuille sur un horizon temporel donné. La **Value at Risk à un niveau de confiance** $1-\alpha$ est définie comme le quantile de niveau α de la distribution de X :

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq \alpha\}$$

- On peut demander à ChatGPT ses sources.
  - *Pour la VaR, il cite notamment Jorion (Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk)*



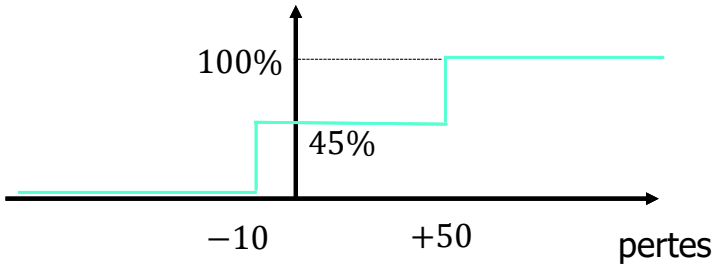
Exemples de manque de mise en contexte de ChatGPT

> Define c as the confidence level and L as the loss, measured as a positive number. VAR is also reported as a positive number. A general definition of VAR is that it is the smallest loss, in absolute value, such that
>
> $$P(L > \mathrm{VAR}) \leq 1 - c \qquad (5.1)$$

- Soit $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R}, P(X > x) \leq 1-\alpha\}$
  - *On laisse de côté l'aspect « absolute value » pour l'instant*
  - *Cette définition est aussi celle que l'on retrouve dans McNeil, Frey & Embrechts (2015). Quantitative risk management: concepts, techniques and tools.*
- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$
- $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R}, P(X \leq x) \geq \alpha\} = q_\alpha(X)$
- Jorion définit donc la VaR comme le quantile inférieur des pertes, comme ChatGPT

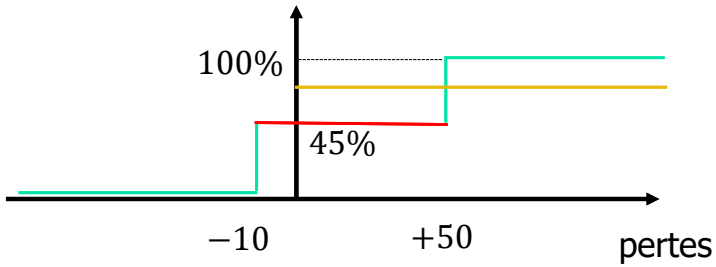
VaR, définition(s) : quantile supérieur ou quantile inférieur ?

- L'ensemble des seuils de probabilité pour lesquels $q_\alpha^+(X) \neq q_\alpha^-(X)$ est au plus dénombrable.
  - *Il est vide si X admet une fonction de répartition continue et strictement croissante*
- Considérons une distribution de pertes X, telle que
  - $P(X = -10|\mathcal{F}_{t-1}) = 0{,}45$, $P(X = +50|\mathcal{F}_{t-1}) = 0{,}55$
- Ci-dessous, le graphe de la fonction de répartition $\bar{F}$



VaR : définition(s)

- Pour $\alpha = 45\%$, tous les points sur l'intervalle rouge semi-ouvert $[-10{,}50[$ sont solution de l'équation $\alpha = \bar{F}(\mathrm{VaR}_\alpha)$.
  - *On retient la valeur la plus élevée (approche conservatrice), soit* $+50$
  - $\alpha = 45\%$ *: point de discontinuité de la fonction* $\alpha \to q_\alpha^+(X)$
- Pour $\alpha \notin \{0{,}45\%, 1\}$, $q_\alpha^+(X) = q_\alpha^-(X)$



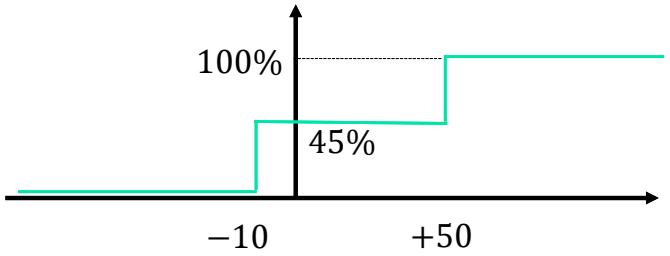
Définitions et propriétés

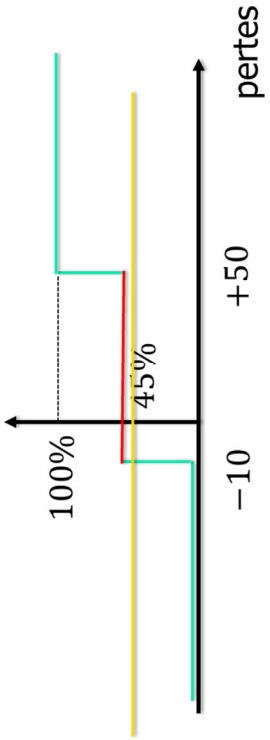
- Application des définitions précédentes

- Exemple : $X \sim B(p)$ avec $p = 0{,}7$
  - $P(X = 0) = 0{,}3$; $P(X = 1) = 0{,}7$
- Calcul de $q^+_{0,7}(X) = \sup\{x \in \mathbb{R} | P(X < x) \leq 0{,}7\}$
  - *Si* $x > 1, P(X < x) = 1 > 0{,}7$
  - $\forall x \in]0{,}1], P(X < x) = 0{,}3 \leq 0{,}7$
  - *D'où* $\{x \in \mathbb{R} | P(X < x) \leq 0{,}7\} =]-\infty, 1]$
  - *Et* $\sup\{x \in \mathbb{R} | P(X < x) \leq 0{,}7\} = 1$

Définitions et propriétés

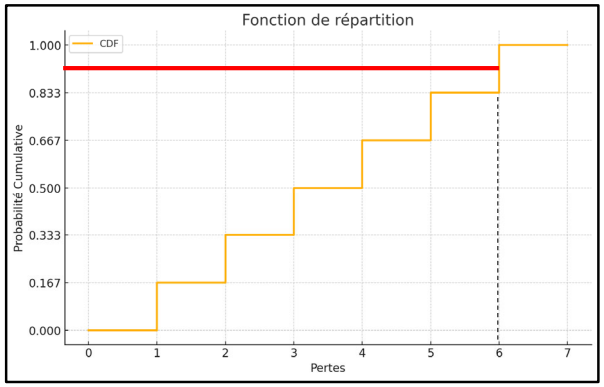
- Remarque : la fonction $\alpha \rightarrow \mathrm{VaR}_\alpha(X)$ est constante par morceaux
- Son graphe (en miroir) s'obtient en regardant le graphe de $\bar{F}$ et en tournant votre tête de 90 degrés sur la droite (dans le plan vertical)





Mesure empirique : équirépartion sur six valeurs

- Le cas du dé (équilibré) à six faces
  - *Fonction de répartition constante par morceaux*



- La VaR à 90% est égale à 6 quelle que soit la définition

VaR : Définitions et propriétés

- Considérons le cas d'une VaR à 99%, horizon un jour, calculée sur une année, soit environ 252 jours de trading.
  - *On suppose les scénarios équiprobables : méthode historique (ou non paramétrique standard)*
  - *Fonction de répartition = fonction de répartition « empirique »*
  - $2/250 < 1\%,\ 3/250 > 1\%$
- En traçant la fonction de répartition et en appliquant le raisonnement précédent, on voit que la VaR à 99% est associée à la **troisième pire perte**.
  - *En particulier,* $q^+_{99\%}(X) = q^-_{99\%}(X)$
  - *Remarque : la VaR fait uniquement intervenir les* ***statistiques d'ordre*** *(valeurs ordonnées des pertes)*

Simulation de la loi de X à partir d'une fonction quantile

- Soit $U \sim U[0,1]$ (distribuée de manière uniforme)
- Alors la variable aléatoire $q^+_U(X)$ a la même loi que X
- En particulier $P(q^+_U(X) \leq x) = P(X \leq x) = F_X(x)$

Expected Shortfall (ES)

- $ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q^+_u(X)du = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u(X)du$
- $\alpha \to ES_\alpha(X)$ continue (intégrale d'une fonction)
- Si X a une distribution continue (si $\bar{F}$ est continue), alors $ES_\alpha(X) = E[X|X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)] = E[X|X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)]$
  - *On parle parfois de CVaR (mais pour certains CVaR veut dire ES)*
- Ce n'est pas vrai dans le cas d'une distribution discrète
- Si on se place dans le cas d'un nombre fini de scénarios équiprobables (approche « historical simulation »
  - *Ou de manière équivalente dans le cas de distributions de pertes discrètes avec des poids identiques*
- $ES_\alpha(X) = \frac{1}{n(1-\alpha)}\left(\sum_{i=n}^{\lceil n\alpha\rceil-1} x_{i:n} + (n\alpha - \lceil n\alpha\rceil + 1)x_{\lceil n\alpha\rceil:n}\right)$
  - *Où* $\lceil x\rceil$ *est le plus petit entier supérieur à x (ceiling)*

Mesures de risque : invariance en loi

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Caractéristiques des mesures de risque

- Cadre formel :
- On considère une mesure de risque comme une fonction de l'ensemble des pertes à valeur dans $\mathbb{R}$
- Les pertes X sont considérées comme des variables aléatoires.
- On peut ajouter des contraintes sur les X :
  - *par exemple, pertes (essentiellement) bornées, pertes de variance finie)*
- On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des variables aléatoires associées aux pertes et ρ une mesure de risque
  - $X \in \mathcal{L} \rightarrow \rho(X) \in \mathbb{R}$

Invariance en loi

- On dote l'espace probabilisable $\mathcal{L}$ d'une mesure de probabilité
  - *Dans le cas discret, chaque événement élémentaire (langage des probabilités) est associé à un scénario (langage du risque)*
  - *Dans le cas discret (nombre dénombrable de scénarios), une mesure de probabilité attribue des probabilités (nombres compris entre 0 et 1) aux scénarios*
  - *Et somme des probabilités égale à 1*
- Soit P une mesure de probabilité.
- On peut définir la fonction de répartition associée à une variable aléatoire X par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x)$
  - *F_X fonction de répartition*
- F_X caractérise la loi de X (voir cours de probabilités)

Invariance en loi

- ρ est invariante en loi si $\forall X \in \mathcal{L}, \rho(X)$ ne dépend que de la loi de X
  - *Comme la loi de X est caractérisée par sa fonction de répartition F_X, cela revient à dire que ρ est en fait une fonction de F_X*
  - *Signification économique : Absence d'illusion stochastique (reduction axiom en microéconomie)*
  - *On conteste la validité de cet quand on examine la décision d'un particulier face au risque.*
  - *Mais, il est néanmoins retenu dans la théorie classique de l'espérance d'utilité.*
- La définition de la VaR ne fait intervenir que la fonction de répartition de la loi des pertes
- La VaR est donc une mesure de risque invariante en loi.

Invariance en loi

- Cas d'une distribution discrète (avec un nombre fini de valeurs)
  - *On a besoin de connaître le support de la distribution, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X*
  - *Notons* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *ce support. Sans perte de généralité, on peut indicer ces valeurs afin que* $x_1 < \cdots < x_n$
  - $x_1, \dots, x_n$ *sont les valeurs ordonnées prises par X*
- Cas particulier (scénarios équiprobables) : $P(\{\omega_1\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$ et $x_1 < \cdots < x_n$
  - *D'où* $P(X = x_1) = \cdots = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$
- Dans ce cas Y a la même loi que X si et seulement si $P(Y = x_1) = \cdots = P(Y = x_n) = \frac{1}{n}$

Invariance en loi

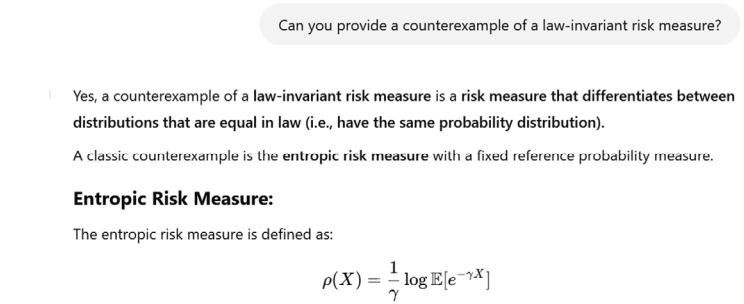
- On reste dans le cas d'une mesure P uniforme sur Ω
- Si Y est défini sur le même espace $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ que X
  - *Y n'est pas nécessairement défini sur le même espace probabilisé (ou ensemble probabilisé de scénarios) que X*
- Notons σ une permutation sur Ω (bijection de Ω dans Ω)
- Si $Y = X \circ \sigma$, X et Y ont la même loi de probabilité
  - *En effet X et Y sont distribuées de manière uniforme sur* $\{x_1, \dots, x_n\}$
- Réciproquement, si X et Y sont de même loi, il existe une permutation sur Ω, σ, telle que $Y = X \circ \sigma$
  - *On rappelle que* $X^{-1}(\{x_1\}) = \omega_1, \dots, X^{-1}(\{x_n\}) = \omega_n$
  - *Pour établir la propriété, on vérifie que l'on peut définir σ par :*
  - $\sigma(\omega_1) = X^{-1}\big(Y(\omega_1)\big), \dots, \sigma(\omega_n) = X^{-1}\big(Y(\omega_n)\big)$
  - *Ce qui implique* $X_{\sigma(\omega_1)} = Y(\omega_1), \dots, X_{\sigma(\omega_n)} = Y(\omega_n)$

Exemple de mesure de risque non invariante en loi

- Dans la méthode historique, chaque date est un « état de la nature »
- X est une variable aléatoire réelle définie sur $\{1, \dots, 252\}$
- Considérons la mesure de probabilité uniforme P sur $\{1, \dots, 252\}$, $P(\{t\}) = \frac{1}{252}, \forall t \in \{1, \dots, 252\}$
- La loi de X est uniforme sur l'ensemble des pertes possibles $X(1), \dots, X(252)$.
- $\rho(X) = X(t_0)$ pour $t_0 \in \{1, \dots, 252\}$
  - *Par exemple,* t_0 *correspond à la perte observée il y a six mois*
- ρ est une mesure de risque qui n'est pas invariante en loi.
- Pour aller plus loin, nous pouvons nous amuser un peu avec ChatGPT

Exemple de mesure de risque non invariante en loi

- Explicitation du contre-exemple précédent ?
- Aide de ChatGPT ?



- Dommage : ce n'est pas un contre-exemple …

Exemple de mesure de risque non invariante en loi

- Dommage : ce n'est pas un contre-exemple …

> The answer does not seem correct: If X and Y have the same distribution, they have the same entropic risk measure (and Laplace transform).

You're absolutely right! The entropic risk measure is indeed **law-invariant**, as it depends only on the distribution of X and not on the underlying probability space. I appreciate the correction.

- ChatGPT nous propose alors …

Now, let me provide a correct counterexample of a law-invariant risk measure.

$$\rho(X) = \mathbb{E}^P[X \mid \mathcal{F}_0]$$

Exemple de mesure de risque non invariante en loi

- Seconde tentative de chatGPT …

> The conditional expectation of a random variable depends only on the conditional distribution, so it is not associated with a law-invariant risk measure.

You're absolutely right again! The conditional expectation depends only on the conditional distribution and does not provide a valid counterexample. Let me now construct a **correct** counterexample of a law-invariant risk measure.

- Dommage : ce n'est toujours pas un contre-exemple …

Exemple de mesure de risque non invariante en loi

- Dommage : ce n'est toujours pas un contre-exemple …

> The conditional expectation of a random variable depends only on the conditional distribution, so it is not associated with a law-invariant risk measure.

You're absolutely right again! The conditional expectation depends only on the conditional distribution and does not provide a valid counterexample. Let me now construct a **correct** counterexample of a law-invariant risk measure.

- Après un ou deux tours, on arrive (enfin) à

You're absolutely right! The simplest and most direct counterexample of a law-invariant risk measure is:

$$\rho(X) = X(\omega_0)$$

where ω_0 is a fixed outcome in the sample space.

Exemple de mesure de risque non invariante en loi

- Et après un peu plus d'huile de coude pour demander une explicitation, on obtient le joli contre-exemple ci-dessous :

Construction of Random Variables X and Y

We consider a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ where:

- The sample space $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$,
- The probability measure is uniform: $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2}$.

Now, define two random variables $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ as follows:

$$X(\omega_1) = 1, \quad X(\omega_2) = 2.$$

$$Y(\omega_1) = 2, \quad Y(\omega_2) = 1.$$

Exemple de mesure de risque non invariante en loi

- Reprenons notre exemple : P probabilité uniforme sur $\{1, \dots, 252\}$
- La loi de X est uniforme sur l'ensemble des pertes possibles $X(1), \dots, X(252)$.
- $\rho(X) = X(1)$, $X(1)$ correspond à la dernière perte observée
- On considère les statistiques d'ordre (valeurs ordonnées) : $X_{1:252} \leq \cdots \leq X_{252:252}$
- Si Y a les mêmes valeurs ordonnées, elle est de même loi que X
- Il suffit donc que $X(1) \neq Y(1)$, par exemple substituer les première et deuxième valeur de X (supposées différentes) pour obtenir le contre-exemple).

Invariance en loi : VaR et ES

- La VaR et l'ES, ne dépendant que de la distribution des pertes, ces mesures de risque sont donc invariantes en loi.

Law Invariance of VaR

A risk measure ρ is **law-invariant** if it assigns the same risk value to any two random variables that have the same probability distribution. That is, for any two random variables X and Y:

$$X \overset{d}{=} Y \quad \Rightarrow \quad \rho(X) = \rho(Y).$$

Since **VaR is defined using the cumulative distribution function (CDF) of** X, it depends only on the distribution of X and not on its specific realization on the probability space. Therefore, if X and Y have the same law (i.e., the same CDF), then:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

Thus, **VaR is law-invariant**.

Invariance en loi

- Kusuoka (2001). On law invariant coherent risk measures. *Advances in mathematical economics*.

Coherent risk measures have been introduced and deeply analyzed by Artzner et al. (1999) and Delbaen (2002). Convex risk measures have been introduced and studied by Föllmer and Schied (2002a), (2002b), (2002c), Frittelli and Rosazza (2002), (2004), and Heath (2000).

A smaller class of coherent risk measures was characterized by Kusuoka (2001). This author indeed imposed the further axiom of "law invariance". Roughly speaking, a risk measure is law invariant if it assigns the same value to two risky positions having the same distribution with respect to the initial probability measure. Examples of law invariant coherent risk measures are provided by the class of insurance prices characterized by Wang et al. (1997).

Mesures de risque : monotonie

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Caractéristiques des mesures de risque : monotonie

- On considère une relation d'ordre sur les variables aléatoires $\succ$
  - *$X \succ Y$ veut dire que le risque X est supérieur au risque Y*
- Exemple 1 : $X \succcurlyeq Y$ si $X \geq Y$ presque sûrement
- Exemple 2 : $X \succcurlyeq Y$ si $F_X \leq F_Y$ où F_X, F_Y fonctions de répartition de X,Y
  - $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \leq F_Y(x)$ *ou* $P(X \leq x) \geq P(Y \leq x)$
  - *Soit* $P(X > x) \geq P(Y > x)$
  - *La probabilité que la perte X soit supérieure à un seuil x est supérieure à la probabilité que la perte Y soit supérieure à un seuil x, quel que soit ce seuil*
- Autres relations d'ordre : ordre convexe, concave, increasing concave order ou dominance stochastique au second ordre

Caractéristiques des mesures de risque : monotonie

- « Dominance » (prédominance, supériorité)
  - *Comparaison entre des profils de pertes*
  - *$X \geq Y$ si l'inégalité est vraie au sens large pour tous les états de la nature*
  - *$\geq$: Statewise dominance, state-by-state dominance*
  - *Dans la méthode historique, chaque date est un « état de la nature »*
  - *X est une variable aléatoire réelle définie sur* $\{1, \dots, 252\}$
  - $X \geq Y \Leftrightarrow X(t) \geq Y(t), \forall t \in \{1, \dots, 252\}$
- Ordre stochastique usuel : $X \succcurlyeq Y$ si $F_X \leq F_Y$
  - *L'espace des variables aléatoires doit être doté d'une probabilité P*
- Statewise dominance ⇒ ordre stochastique usuel
  - $X \geq Y \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(Y \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$
  - $P(X \leq x) \leq P(Y \leq x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X \succcurlyeq Y$
  - $X \geq Y \Rightarrow X \succcurlyeq Y$

Comparaison entre variables aléatoires

- Exemple (probabilité uniforme sur les états)
  - *$A \geq B$*
  - *C ne domine pas B, mais C domine B au premier ordre.*
  - *Avec C on gagne 3 et 1, avec C, 2 et 1 de manière équiprobable*

Consider three gambles over a single toss of a fair six-sided die:

State (die result)	1	2	3	4	5	6
gamble A wins $	1	1	2	2	2	2
gamble B wins $	1	1	1	2	2	2
gamble C wins $	3	3	3	1	1	1

  - *Construire $C^* \sim C$ avec $C^* \geq B$.*
  - *$C^* \sim C$ signifie que C^* et C sont de même loi.*

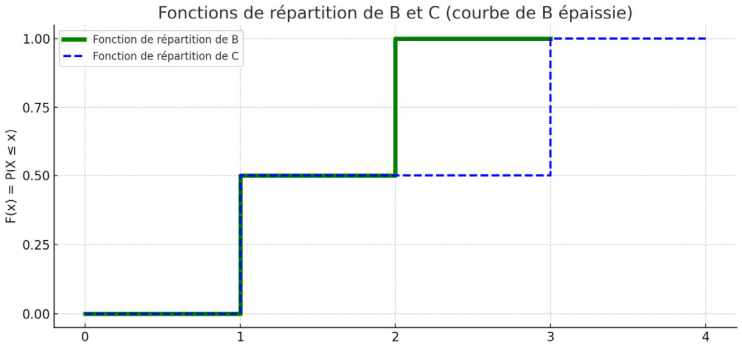
Comparaison entre variables aléatoires

State (die result)	1	2	3	4	5	6
gamble A wins $	1	1	2	2	2	2
gamble B wins $	1	1	1	2	2	2
gamble C wins $	3	3	3	1	1	1

- $C = 333111$ et $C^* = 111333$ sont de même loi
  - *On ne change pas la loi de C en faisant une permutation des valeurs sur les états équiprobables*
- $C^* = 111333 > B = 111222$
- $C^* = B + 000111$ *avec* $\varepsilon = 000111 > 0$
- On a ordonné les valeurs équiprobables de la plus petite à la plus grande
  - *Comme quand on trace les fonctions de répartition de B et de C*
  - *Voir le transparent suivant*

Comparaison entre variables aléatoires

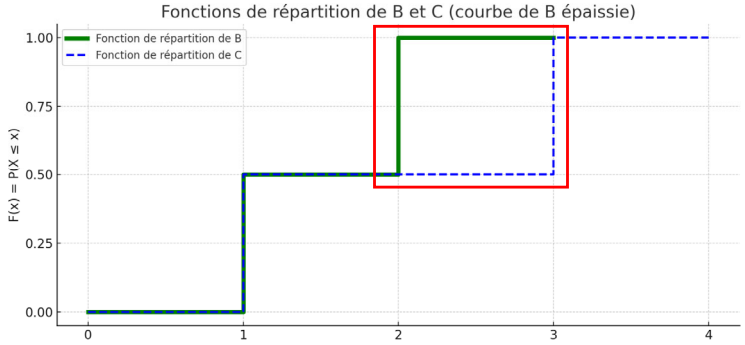
- Les fonctions de répartition de B, C ne font intervenir que les valeurs ordonnées prises par B et par C
  - $F_C(x) = P(C \leq x) = 0{,}5 \times 1_{[1,\infty[}(x) + 0{,}5 \times 1_{[3,\infty[}(x)$
  - $F_B(x) = P(C \leq x) = 0{,}5 \times 1_{[1,\infty[}(x) + 0{,}5 \times 1_{[2,\infty[}(x)$



  - $F_C(x) \leq F_B(x)$ *signifie* $C^* = 111333 > B = 111222$

Comparaison entre variables aléatoires

- Les fonctions de répartition de B, C ne font intervenir que les valeurs ordonnées prises par les variables aléatoires
  - $F_C(x) = P(C \leq x) = 0{,}5 \times 1_{[1,\infty[}(x) + 0{,}5 \times 1_{[3,\infty[}(x)$
  - $F_B(x) = P(C \leq x) = 0{,}5 \times 1_{[1,\infty[}(x) + 0{,}5 \times 1_{[2,\infty[}(x)$



  - $F_C(x) \leq F_B(x)$ *signifie* $C^* = 111333 > B = 111222$

Comparaison entre risques : dominance stochastique au premier ordre

- *On note* F_X *et* F_Y *les fonctions de répartition, associées respectivement à X et Y*
- $x \in \mathbb{R} \rightarrow F_X(x) = P(X \leq x), F_Y(x) = P(Y \leq x)$
- *Dans la suite, on fera l'hypothèse que les fonctions de répartition sont continues et strictement croissantes*
- *On peut s'affranchir de cette hypothèse en utilisant la notion d'inverse généralisée (ou fonction quantile) d'une fonction croissante (au sens large).*
- Définition (a) : X est dominé par Y pour l'ordre stochastique usuel si $F_X(x) \geq F_Y(x), \forall t \in \mathbb{R}$
  - $F_X(x) \geq F_Y(x), \forall t \in \mathbb{R}$ *Il est* ***plus probable*** *que X prenne des* ***petites valeurs*** *que Y*

Comparaison entre risques : dominance stochastique au premier ordre

- Propriété : Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X inversible ; soit $U \sim U[0;1]$. $F_X^{-1}(U)$ a la même loi que X
  - $P(F_X^{-1}(U) \leq x) = P\left(F_X\left(F_X^{-1}(U)\right) \leq F_X(x)\right) = P\left(U \leq F_X(x)\right) = F_X(x)$
  - *$F_X^{-1}(U)$ et X ont la même fonction de répartition, donc sont de même loi*
- Propriété : Soit Y, X deux variables aléatoires, Y dominant X au premier ordre. Alors $\mathrm{VaR}_\alpha(Y) \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)$, $\forall \alpha$
  - *On suppose les fonctions de répartition F_X,F_Y inversibles*
  - *Montrons que $F_Y \leq F_X \Rightarrow F_Y^{-1} \geq F_X^{-1}$.*
  - $F_Y(x) \leq F_X(x) \Rightarrow F_X^{-1}\left(F_Y(x)\right) \leq x$
  - *Soit $\alpha \in]0,1[$, considérons $x = F_Y^{-1}(\alpha)$. On a alors $F_X^{-1}(\alpha) \leq F_Y^{-1}(\alpha)$*
  - *Soit $\mathrm{VaR}_\alpha(Y) \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)$, ce qu'on voulait démontrer*

Comparaison entre risques : dominance stochastique au premier ordre

- Corollaire : Soit Y, X deux variables aléatoires, Y dominant X au premier ordre. Alors, il existe X^*, Y^* de même loi que X, Y avec $Y^* = X^* + \varepsilon$ et $\varepsilon \geq 0$
  - *En effet, on vient de montrer que $F_X^{-1}(U) \sim X$ et $F_Y^{-1}(U) \sim Y$*
  - *Et $F_X^{-1}(U) \leq F_Y^{-1}(U)$*
  - *Il suffit de prendre $X^* = F_X^{-1}(U)$, $Y^* = F_Y^{-1}(U)$ et $\varepsilon = Y^* - X^*$*

Comparaison entre payoffs : dominance stochastique au premier ordre

- Définition (b) : Y domine stochastiquement X, s'il existe deux variables aléatoires X^*, Y^* de même loi, respectivement que X et Y, telles que $X^* \leq Y^*$
  - *On vient de montrer que (a) ⇒ (b),*
  - *Montrons que (b) ⇒ (a)*
  - *C'est-à-dire que les définitions (a) et (b) sont équivalentes*

Comparaison entre payoffs : dominance stochastique au premier ordre

- Réciproque (b) ⇒ (a)
  - $\hat{X} \leq \hat{Y} \Rightarrow \{\hat{X} \leq t\} \supset \{\hat{Y} \leq t\} \Rightarrow P(\hat{X} \leq t) \geq P(\hat{Y} \leq t)$
  - *$\hat{X}$ et X ont la même fonction de répartition F_X, $P(\hat{X} \leq t) = F_X(t)$*
  - *De même, $P(\hat{Y} \leq t) = F_Y(t)$*
  - *Donc $F_X(t) \geq F_Y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$*
- Ceci montre l'équivalence entre les définitions (a) et (b)
  - *Définition (a) : X est dominé par Y pour l'ordre stochastique usuel si $F_X(x) \geq F_Y(x), \forall t \in \mathbb{R}$*
  - *Définition (b) : Y domine stochastiquement X, s'il existe deux variables aléatoires X^*, Y^* de même loi, respectivement que X et Y, telles que $X^* \leq Y^*$*

Caractéristiques des mesures de risque : monotonie

- Définition (Mesure de risque monotone) : $X \succ Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y), \forall X, Y \in \mathcal{L}$
- Définition : Une mesure de risque invariante en loi est monotone si $F_X \leq F_Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$
  - *Monotonie pour l'ordre stochastique usuel.*
  - *Celui que l'on considère le plus souvent, puisque l'on considère le plus souvent des mesures de risque invariantes en loi (absence d'illusion stochastique)*
- Propriété : la VaR est monotone pour l'ordre stochastique usuel
  - *On vient de le démontrer*
  - *La monotonie tient aussi pour la statewise dominance.*
  - *L'ES qui est une moyenne (à coefficients positifs) de VaR est donc aussi monotone.*

Caractéristiques des mesures de risque : monotonie

Monotonie et approche moyenne-variance

- $\Omega = \{0,1\}$ et P, probabilité uniforme sur Ω
- Mesure de risque (des pertes) $\rho(X) = E[X] + \lambda\sigma(X)$
- Soit les deux positions suivantes :
  - $Z(0) = 0, Z(1) = 0$ *(absence de position ou de risque)*
  - $Y(0) = 0, Y(1) = -1$ *(pile ou face)*
- $Z \geq Y$ (sûrement)
- $\rho(Z) = -0 + \lambda \times 0 = 0$
- $Y \sim -B(p)$ où B, loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}5$.
- $E[Y] = -p = -0{,}5$, $\sigma(Y) = \sqrt{p(1-p)} = 0{,}5$
- $\rho(Y) = 0{,}5 \times (\lambda - 1) > 0$ si $\lambda > 1$
- On a alors $Y \leq 0$ et $\rho(Y) > 0$

Monotonie et approche moyenne-variance

- Remarque : $\rho(X + a) = E[X + a] + \lambda\sigma(X + a) = \rho(X) + a$
- D'où un autre contre-exemple
- Soit les deux positions suivantes :
  - $Z \to Z^* = Z + 1$
  - $Y \to Y^* = Y + 1,$
  - $Z^*(0) = 1, Z^*(1) = 1$ *(perte certaine)*
  - $Y^*(0) = 1, Y^*(1) = 0$ *(perte aléatoire, vente de pari)*
- On n'a que des pertes positives et $Y^* \leq Z^*$
- Prenons $\lambda > 1$: $\rho(Y^*) = 1 + 0{,}5 \times (\lambda - 1) > 1 = \rho(Z^*)$
- $\rho(Y^*) > \rho(Z^*)$
- Absence de monotonie

Monotonie et approche moyenne-variance

- $\rho(X) = E[X] + \lambda\sigma(X)$
- $\lambda > 0$ donné (λ : niveau d'aversion vis-à-vis du risque)
  - *λ n'est pas nécessairement supérieur à 1 comme précédemment)*
- Peut-on trouver des contre-exemples où la propriété de monotonie n'est pas vérifiée ?
  - $Z = 1$, $Y \sim B(p)$
  - $\rho(Y) = p + \lambda\sqrt{p(1-p)} > 1 = \rho(Z)$ *?*
  - $\lambda^2 > \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$ *ou* $p > \frac{1}{1+\lambda^2}$
- Comme $\frac{1}{1+\lambda^2} < 1$, on peut toujours trouver p tel que $\frac{1}{1+\lambda^2} < p < 1$ et donc tel que $\rho(Y) > \rho(Z)$
- Alors que $Y \leq Z$

Mesures de risque, monotonie et worst-case

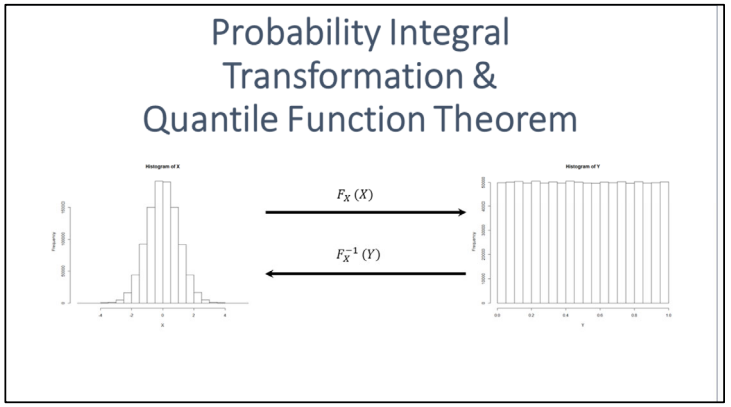
- On considère un ensemble de scénarios fini $\Omega = \{0, \dots, S\}$
- X variable aléatoire associée à la perte dans chaque scénario
- $\rho_W(X) = X_{max}$
- ρ_W : mesure de risque « worst-case »
- Une contrainte souvent associée à une mesure de risque raisonnable est : $\forall X \in \mathcal{L}, \rho(X) \leq X_{max}$
  - *Dans l'exemple précédent*
  - $Y \sim B(p)$ *et* $\rho(Y) = E[Y] + \lambda\sigma(Y)$ *avec* $p > \frac{1}{1+\lambda^2}$
  - $\rho(Y) > 1 = Y_{max}$
  - *La contrainte précédente n'est pas vérifiée*

Propriétés de la VaR

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Comonotonie de variables aléatoires

- Commençons par rappeler deux théorèmes utiles en statistiques, simulation, ML



Comonotonie de variables aléatoires

- Théorème : Probability Integral Transform (universality of the uniform). Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X, alors $U = F_X(X)$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$
  - *La fonction de répartition caractérisant une loi de probabilité, il suffit d'étudier celle de U*
  - *Supposons F_X inversible et $u \in [0,1]$*
  - $\{U \leq u\} = \{F_X(X) \leq u\} = \{X \leq F_X^{-1}(u)\}$
  - $P(U \leq u) = P\left(X \leq F_X^{-1}(u)\right) = F_X\left(F_X^{-1}(u)\right) = u$
  - *Le résultat reste vrai, même si F_X n'est pas inversible*
  - *Voir :*
    - Angus (1994). The probability integral transform and related results. *SIAM review.*
    - Dufour (1995). Distribution and quantile functions. *McGill University Report*.
    - Shorack (2000). *Probability for statisticians* (Vol. 951). New York: Springer.

- Preuve (Angus)

Comonotonie de variables aléatoires

- Théorème : Quantile Function Theorem
  - *Preuve : deepmind*

Quantile Function Transformation

Proof Theorem II (Quantile Function Theorem):
First, suppose that $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$. Note that for any x such that $0 < F(x) < 1$ and any $u \in (0,1)$, $F(x) \geq u$ if, and only if, $x \geq F^{-1}(u)$.

Suppose that $x \geq F^{-1}(u)$, then $\{x : F(x) \geq u\} = F^{-1}(u)$ is an infinite interval that contains its left-hand endpoint since F is non-decreasing and right-continuous.

Conversely, suppose that $u \leq F(x)$, then $x \geq \inf\{x : F(x) \geq u\} = F^{-1}(u)$. It follows now that $\mathbb{P}(\{F^{-1}(U) \leq x\}) = \mathbb{P}(\{U \leq F(x)\}) = F(x)$, completing the proof.

□

Comonotonie de variables aléatoires

- Définition 1 (comonotonie) : X, Y sont comonotones s'il existe Z tel que $X = f(Z), Y = g(Z)$, f, g non décroissantes
- Définition 2 (comonotonie) : sont comonotones si $X = F_X^{-1}(F_Y(Y))$ où F_X, F_Y sont les fonctions de répartition de X, Y
  - *Remarque : Notons $U = F_Y(Y)$. On peut montrer que U suit une loi uniforme (démonstration facile si F_Y est inversible)*
  - *Dans ce cas $X = F_X^{-1}(U)$ et $X = F_X^{-1}(U)$*
- On peut démontrer que les deux définitions sont équivalentes
  - Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas & Vyncke (2002). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory. *Insurance: Mathematics and Economics*.

(3) For $U \sim$ Uniform(0,1), we have

$$\underline{X} \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U)); \qquad (22)$$

Comonotone additivité de la VaR

- Comonotonie: X, Y sont comonotones si $X = f(Z), Y = g(Z)$, f, g non décroissantes
- Comonotone additivité : si X et Y sont comonotones, alors $\mathrm{VaR}_u(X+Y) = \mathrm{VaR}_u(X) + \mathrm{VaR}_u(Y)$
- Démonstration :
  - *On supposera les fonctions de répartition de X, Y, Z et f, g inversibles*
  - *Soit $U \sim U[0;1]$, $F_Z^{-1}(U)$ a la même loi que Z*
  - $X = f\left(F_Z^{-1}(U)\right) = \bar{f}(U), Y = g\left(F_Z^{-1}(U)\right) = \bar{g}(U)$
  - $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ *est tel que* $P\big(X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X)\big) = \alpha$
  - $\{X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X)\} = \{U \leq \bar{f}^{-1}(\mathrm{VaR}_\alpha(X))\}$
  - $P\big(X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X)\big) = \bar{f}^{-1}\big(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\big) = \alpha \Rightarrow \mathrm{VaR}_\alpha(X) = \bar{f}(\alpha)$,
  - $X + Y = (\bar{f} + \bar{g})(U) \Rightarrow \mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) = (\bar{f} + \bar{g})(\alpha) = \bar{f}(\alpha) + \bar{g}(\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$

Comonotone additivité de la VaR

- Cas d'une distribution discrète
- Exemple : nous avons vu que la VaR à 1 jour au seuil de 99% correspond à la troisième pire perte.
- Soit X et Y deux pertes comonotones
- Dans ce cas, elles ordonnent les scénarios de perte, de la perte la plus importante à la perte la moins importante.
- Il en résulte que le scénario associé à la pire perte pour X est le même que celui associé à la pire perte pour Y
- De même pour la deuxième pire perte, puis la troisième pire perte.
- Il en résulte que le scénario associé à la troisième pire perte pour $X + Y$ est le même que celui associé au troisième pires pertes de X et de Y

Expected Shortfall : comonotone additivité

- Comonotone additivité : si X et Y sont comonotones, alors $\mathrm{ES}_\alpha(X+Y) = \mathrm{ES}_\alpha(X) + \mathrm{ES}_\alpha(Y)$
- Démonstration :
  - $ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\alpha(X)du$
  - $ES_\alpha(X+Y) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\alpha(X+Y)du = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\alpha(X)du + \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\alpha(Y)du$ *par linéarité de l'intégrale*
- On a donc $\mathrm{ES}_\alpha(X+Y) \leq \mathrm{ES}_\alpha(X) + \mathrm{ES}_\alpha(Y)$ avec égalité si X, Y comonotones additives
- En revanche, le cas comonotone additif ne donne pas (en général) une borne supérieure pour $\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y)$
  - *Si la VaR n'est pas sous-additive, ce n'est pas le cas usuel*

Propriétés de la VaR

- Invariance en loi
- Monotonie : $X \geq Y \Rightarrow \mathrm{VaR}_u(X) \geq \mathrm{VaR}_u(Y)$
- Positivité (consistency) : $X \geq 0 \Rightarrow \mathrm{VaR}_u(X) \geq 0$,
- Invariance par translation : $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{VaR}_u(X+a) = \mathrm{VaR}_u(X) + a$
- Positive homogénéité : $\lambda > 0 \Rightarrow \mathrm{VaR}_u(\lambda X) = \lambda \mathrm{VaR}_u(X)$
- Comonotone additivité : si $X = f(Z), Y = g(Z)$, f, g non décroissantes, $\mathrm{VaR}_u(X+Y) = \mathrm{VaR}_u(X) + \mathrm{VaR}_u(Y)$

Propriétés de la VaR : à démontrer

- Positivité (consistency) : $X \geq 0 \Rightarrow \mathrm{VaR}_u(X) \geq 0$
  - *Vient de la monotonie déjà démontrée et du fait que* $\mathrm{VaR}_u(0) = 0$
- Invariance par translation : $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{VaR}_u(X+a) = \mathrm{VaR}_u(X) + a$
  - *Démonstration directe ou en passant par la comonotone additivité*
- Positive homogénéité : $\lambda > 0 \Rightarrow \mathrm{VaR}_u(\lambda X) = \lambda \mathrm{VaR}_u(X)$

Mesures de risque : Sous-additivité

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Sous-additivité

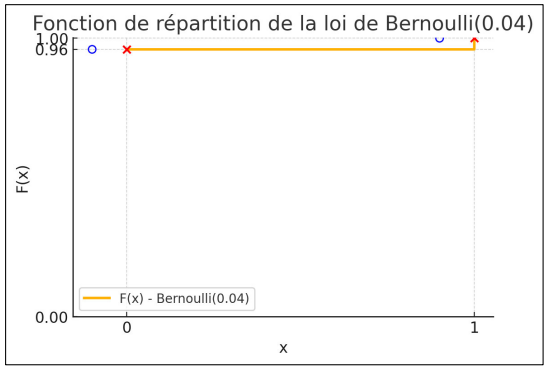
- Définition : ρ est sous-additive si $\forall X, Y \in \mathcal{L}, \rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- La VaR n'est pas sous-additive sauf cas particuliers (intéressants)
  - *Si on se limite à des distributions de pertes elliptiques (en particulier gaussiennes)*
  - *Si l'on considère la mesure Worst-case ($\alpha = 100\%$)*
- L'ES lui est toujours sous-additif

Non sous-additivité de la VaR : Un contre-exemple

- On considère deux pertes indépendantes, X_1, X_2, chacune associée à une loi de Bernoulli de paramètre 0,04
- Représenter la fonction de répartition, la fonction quantile. En déduire la VaR à 95%

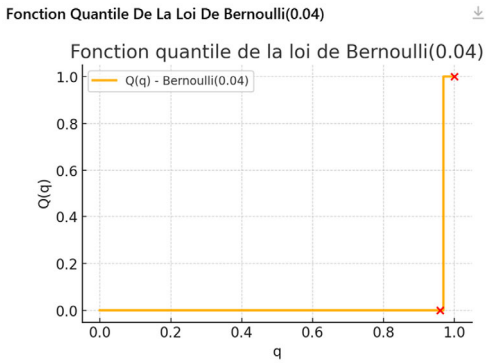
Non sous-additivité de la VaR

- $X_1, X_2 \sim B(0{,}04)$
  - $F_{X_1}(x) = P(X_1 \leq x)$
  - *Si* $x < 0$, $F_{X_1}(x) = 0$ *; si* $0 \leq x < 1$, $F_{X_1}(x) = 0{,}96$ *; si* $x \geq 1$, $F_{X_1}(x) = 1$
- Ci-dessous la fonction de répartition des pertes



Non sous-additivité de la VaR

- La fonction quantile de X_1(ou de X_2) est représentée ci-dessous



- Elle est nulle en $\alpha = 0{,}95 < 0{,}96$
- La VaR à 95% associée à chaque perte individuelle X_1, X_2 est nulle

Non sous-additivité de la VaR

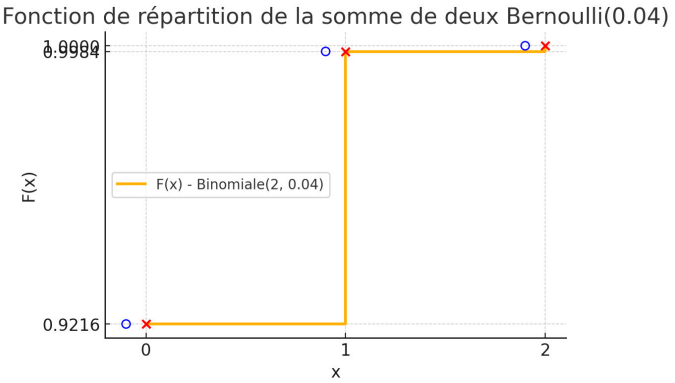
- On considère l'exposition associée à l'addition des deux risques précédents.
- Calculer la probabilité d'une perte de 2, la probabilité d'une perte de 1 ($2 \times 0{,}04 \times 0{,}96$), la probabilité d'une perte de 0 (loi binomiale)

Asset	*Outcome*	*Probability*
X_1 or X_2	-100	0.04
X_1 or X_2	0	0.96
$X_1 + X_2$	-200	0.0016
$X_1 + X_2$	-100	0.0768
$X_1 + X_2$	0	0.9216

- Représenter la fonction de répartition associé au portefeuille de deux risques, en déduire sa VaR à 95%.

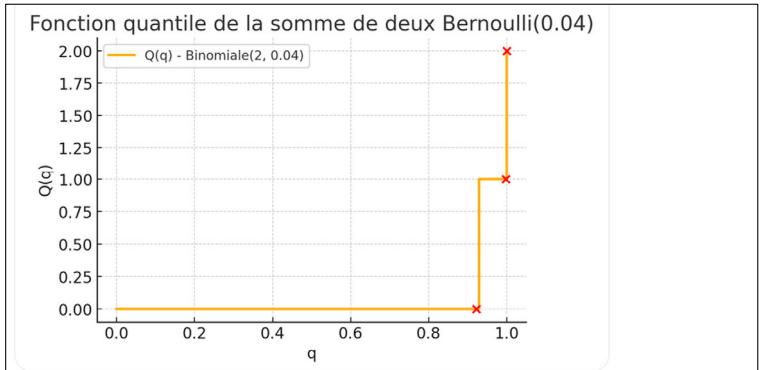
Non sous-additivité de la VaR

- $P(X_1 + X_2 = 2) = 0{,}04^2 = 0{,}016$
- $P(X_1 + X_2 = 1) = 2 \times 0{,}96 \times 0{,}04 = 0{,}0768$
- $P(X_1 + X_2 = 0) = 0{,}96^2 = 0{,}9216$
- Ci-dessous la fonction de répartition $F_{X_1+X_2}$



Non sous-additivité de la VaR

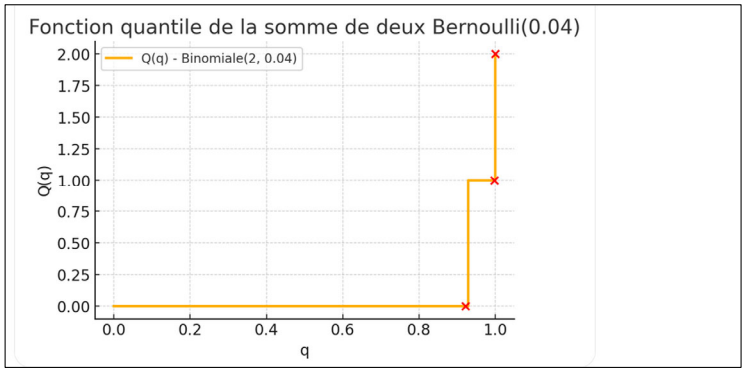
- Et la fonction quantile associée à $X_1 + X_2$ …



Voici la représentation graphique de la fonction quantile (ou fonction inverse généralisée de la fonction de répartition) associée à la somme de deux variables de Bernoulli de paramètre $p = 0.04$. Cette somme suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2, 0.04)$, et la fonction quantile prend des valeurs discrètes (0, 1, ou 2) en fonction des seuils de probabilité cumulée.

Non sous-additivité de la VaR

- Pour $\alpha = 0{,}95$, la fonction quantile est égale à 1



- $VaR_{95\%}(X_1) + VaR_{95\%}(X_2) = 0 < VaR_{95\%}(X_1 + X_2) = 1$
- Violation de la sous-additivité

Mesure de risque Worst Case (perte maximale sur un ensemble de scénarios)

- On considère $\Omega = \{1, \dots, S\}$, par exemple avec $S = 252$.
- $X: \Omega \to \mathbb{R}$ (pertes)
- On définit ρ, par $\rho(X) = \max_{s \in \Omega} X(s)$
  - *Remarque* $Y = -X$ *(correspond aux gains* $\rho^*(Y) = -\min_{s \in \Omega} Y(s)$
- Montrons que $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
  - $\forall s \in \Omega$, $X(s) \leq \rho(X)$ *et* $Y(s) \leq \rho(Y)$
  - $X(s) + Y(s) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
  - $\max_{s \in \Omega} X(s) + Y(s) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- ρ est donc sous-additive.
- Remarque : $\rho(X) = \mathrm{VaR}_{100\%}(X)$

Worst-case sur un ensemble de scénarios généralisés

- On considère $\Omega = \{1, \dots, S\}$, par exemple avec $S = 252$.
- $X: \Omega \to \mathbb{R}$ (pertes)
- On considère un ensemble $\wp$ de mesures de probabilités sur $\Omega = \{1, \dots, S\}$
- On définit ρ, par $\rho(X) = \max_{P \in \wp} E^P(X)$
- Alors ρ est sous-additive.
- $\forall P \in \wp$, $E^P(X) \leq \rho(X)$ et $E^P(Y) \leq \rho(Y)$
- D'où $E^P(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- $\max_{P \in \wp} E^P(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
  - *Ce qu'on voulait démontrer.*

VaR : sous-additivité

- La structure de dépendance entre des sous-portefeuilles est moins bien connue que les lois marginales
- ⇒ Recherche de bornes supérieures pour $\mathrm{VaR}_\alpha(X + Y)$

- *Makarov (1982). Estimates for the distribution function of a sum of two random variables when the marginal distributions are fixed. Theory of Probability & its Applications.*
- *Danielsson, Jorgensen, Sarma & de Vries (2005). Sub-additivity re-examined: the case for Value-at-Risk.*
- *Embrechts Wang & Wang (2015). Aggregation-robustness and model uncertainty of regulatory risk measures. Finance and Stochastics.*
- *Daníelsson, J., Jorgensen, B. N., Samorodnitsky, G., Sarma, M., & de Vries, C. G. (2013). Fat tails, VaR and subadditivity. Journal of econometrics, 172(2), 283-291.*

VaR sous-additivité et ChatGPT

- Attention à ce que peut dire ChatGPT

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y$$

Dans ce cas, la VaR est proportionnelle à l'écart-type :

$$\mathrm{VaR}_\alpha(Z) = \Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma_Z$$

et comme la variance de Z est inférieure ou égale à la somme des variances des actifs (grâce à la diversification), on obtient :

- Où sont les erreurs ?

VaR sous-additivité et ChatGPT

- Affirmation bien péremptoire : bien connu par qui ?
  - *Où sont les erreurs ?*

Borne supérieure comonotone

Une borne supérieure bien connue est donnée par :

$$\mathrm{VaR}\alpha(X+Y) \leq \mathrm{VaR}\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

VaR sous-additivité et ChatGPT : erreur dans les contre-exemples

Exemple : Deux actifs parfaitement négativement corrélés

Imaginons deux actifs X et Y, qui ont des distributions symétriques et sont parfaitement **négati corrélés**. Supposons que nous utilisons une **VaR à 95%** pour mesurer le risque.

- Soit X une position longue (acheteuse) sur un actif, dont la perte à 95% de VaR est **10 millic d'euros**.
- Soit Y une position courte (vendeuse) sur un actif identique, avec la même **VaR à 95% de 1(millions d'euros**.

Si nous calculons la **VaR individuellement** :

$$VaR_{0.95}(X) = 10, \quad VaR_{0.95}(Y) = 10$$

Mais comme X et Y sont **parfaitement négativement corrélés**, leur combinaison forme un port **neutre** où les pertes de l'un compensent toujours les gains de l'autre. Le portefeuille total a donc **perte maximale théorique de 0**.

Or, la VaR du portefeuille devrait être :

$$VaR_{0.95}(X+Y) = 0$$

Expected Shortfall (ES)

- $ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u^+(X)du = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u(X)du$
- L'ES hérite d'une partie des propriétés de la VaR
  - *Invariance par translation :* $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{VaR}_u(X+a) = \mathrm{VaR}_u(X) + a$
  - *Positive homogénéité :* $\lambda > 0 \Rightarrow \mathrm{VaR}_u(\lambda X) = \lambda \mathrm{VaR}_u(X)$, *d'où* $ES_\alpha(\lambda X) = \lambda ES_\alpha(X)$
  - *Positivité (consistency) :* $X \geq 0 \Rightarrow \mathrm{VaR}_u(X) \geq 0$, *d'où* $X \geq 0 \Rightarrow ES_\alpha(X) \geq 0$
  - *Monotonie :* $X \geq Y \Rightarrow \mathrm{VaR}_u(X) \geq \mathrm{VaR}_u(Y)$, *d'où* $X \geq Y \Rightarrow ES_\alpha(X) \geq ES_\alpha(Y)$
  - *Comonotone additivité : si* $X = f(Z), Y = g(Z)$, f, g *non décroissantes,* $\mathrm{VaR}_u(X+Y) = \mathrm{VaR}_u(X) + \mathrm{VaR}_u(Y)$, *donc* $ES_\alpha(X+Y) = ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y)$, *si* X, Y *comonotones*
  - *Invariance en loi : VaR comme ES ne font intervenir que la fonction de répartition des pertes*

Définition de l'ES et ChatGPT

L'Expected Shortfall (aussi appelée **Conditional VaR (CVaR)** ou **Average VaR**) représente la perte moyenne **conditionnée au fait que la perte dépasse la VaR** :

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = \mathbb{E}[X \mid X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)]$$

- $ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u^+(X)du = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u(X)du$
- Si X a une distribution continue (si $\bar{F}$ est continue), alors $ES_\alpha(X) = E[X|X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)] = E[X|X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)]$
  - *Mais pour ce n'est pas vrai pour une distribution discrète*

Comparaison VaR / ES

- ES plus robuste pour des *distributions asymétriques* : assertion fausse
  - *Remarque : la VaR est robuste aux outliers (mieux que l'écart-type)*
  - *Il existe une théorie des statistiques robustes : on préfère par exemple l'écart interquartile (normalisé) à l'écart-type*
- Plus difficile à estimer avec peu de données ?

☑ **Avantages de l'ES :**

- Il respecte la sous-additivité.
- Il capture **toutes** les pertes extrêmes et non un seul seuil.
- Il est plus robuste pour des distributions asymétriques.

⦸ **Inconvénients :**

- Plus difficile à **estimer** avec peu de données.
- Moins utilisé dans certains modèles réglementaires (bien que Bâle III le privilégie sur la VaR).

Définition de l'ES et ChatGPT

- Imprécision, absence de définition précise (TVaR)
  - *Quelle différence avec la CVaR ?*

3. Tail Value at Risk (TVaR)

- **Definition: Tail Value at Risk (TVaR)** is similar to CVaR and also deals with the risk of extreme losses. While CVaR looks at the average loss beyond VaR, TVaR is focused on the **tail of the distribution** of the portfolio returns.
- **Sub-Additivity**: Like **CVaR**, **TVaR is sub-additive.** It ensures that the total risk from combining assets or positions does not exceed the sum of individual risks, especially in extreme events.

- Est-ce que le dernier point est vrai ? Preuve ? référence

VaR et ChatGPT

- Référence étrange aux banques thaïlandaises et indonésiennes
  - *La VaR a commencé à être utilisée par JP Morgan en 1996*
  - *Pourquoi les modèles n'étaient-ils pas adaptés à une volatilité extrême ?*
  - *Rapport obscur entre sous-additivité et interdépendance : la VaR a à voir avec une mesure des risques, les interdépendances avec la modélisation des risques*

2. Crise asiatique de 1997

📌 **Problème principal : mauvaise prise en compte du risque de change et des effets de contagion.**

- Les banques thaïlandaises et indonésiennes utilisaient des modèles de VaR **non adaptés à une volatilité extrême**.
- Lorsque les devises ont chuté brutalement, la **VaR a totalement échoué à estimer les pertes réelles**.
- La non-sous-additivité a aggravé la crise car **les institutions ne prenaient pas en compte les interdépendances entre les marchés de devises et les marchés de dette**.

- Conclusion : toujours vérifier, valider, faire préciser, relancer

Expected Shortfall (ES) et mesures spectrales de risque

- L'ES est sous-additif : $ES_\alpha(X+Y) \leq ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y)$
- Mesures spectrales de risque : vérifient toutes les propriétés de l'ES
- S'obtiennent comme des moyennes pondérées (poids positifs) d'ES
- Soit G une fonction de répartition d'une loi de probabilité sur l'intervalle $[0,1]$
- $\rho(X) = \int_0^1 ES_\alpha(X) dG(\alpha)$ est une mesure spectrale de risque
- Toute mesure spectrale de risque prend cette forme et découle donc de l'ES.

Caractérisation de la mesure Worst-case

- $\rho(X) = \max_{s\in\Omega} X(s)$
- $\rho(X) = \max_{P\in\wp} E^P(X)$
- $\wp$?
- $X(s) = E^{P_s}(X)$, $P_s = \delta_s$ ($p_{s'} = 1$ si $s' = s$ et zéro sinon)
- $\max_{s\in\Omega} X(s) = \mathrm{VaR}_{100\%}(X) = \mathrm{ES}_{100\%}(X)$

Propriétés des mesures de risques

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Approche axiomatique

- Propriétés souhaitables d'une mesure de risque ?
- Mesures cohérentes de risque
  - *On peut soit considérer la valeur aléatoire X d'un portefeuille de produits financiers, à un horizon donné*
    - Par exemple, 1 jour ou 10 jours
    - Ou l'opposé de la valeur $-X$
  - *Mais le plus souvent X est associé à une variation de valeur d'un portefeuille entre la date courante et l'horizon de calcul*
  - *Avec la convention que soit X est la perte, soit le gain.*
- Axiomes des mesures cohérentes de risque
  - *Monotonie*
  - *Sous-additivité*
  - *Positive homogénéité*
  - *Invariance par translation*

DEFINITION 1.2. *A functional* $\rho : L^p(\mathbb{Q}) \to \mathbb{R}$, *where* $1 \leq p \leq \infty$, *is called a* **coherent risk measure (CRM)** *on* $L^p(\mathbb{Q})$ *if the following properties hold.*

(M) *Monotonicity: If* $X \geq 0$ *then* $\rho(X) \leq 0$.

(S) *Subadditivity:* $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

(PH) *Positive homogeneity: For* $\lambda \geq 0$ *we have* $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$.

(T) *Translation: For constants* a *we have* $\rho(a + X) = \rho(X) - a$.

- Remarques :
  - *Ce formalisme est différent de celui d'Artzner et al où l'espace des scénarios est fini* ***et n'est pas doté d'une mesure de probabilité***
  - *A partir de PH, on remarque* $\rho(0) = 0$.
- Artzner et al. introduisent un axiome de pertinence
  - *Si* $X \leq 0$ *et* $X \neq 0$, *alors* $\rho(X) > 0$ *(ici X est un gain)*
  - *Ceci exclut un ensemble de probabilités, représentant la mesure, ne chargeant pas tous les scénarios*

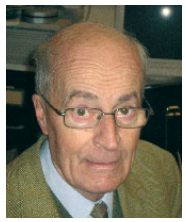
Remarque sur l'axiome de pertinence et la monotonie

- Conséquence de (PH) : $\rho(0) = 0$ (prendre $\lambda = 0$)
- Conséquence de (M) + (S) :
  - $X \leq 0$ *:* $\rho(-X) \leq 0$
  - $0 = \rho(0) = \rho(X - X) \leq \rho(X) + \rho(-X)$
  - $\rho(X) \geq -\rho(-X) \geq 0$
  - *Rappel : ici X est un gain (*$-X$ *représente une perte)*
  - *D'où si* $X \leq 0$, $\rho(X) \geq 0$
- $X \leq Y$, donc $Y - X \geq 0$, d'où $\rho(Y - X) \leq 0$
  - $\rho(Y) = \rho(X + Y - X) \leq \rho(X) + \rho(Y - X) \leq \rho(X)$
  - *D'où* $X \leq Y$ *implique* $\rho(Y) \leq \rho(X)$
  - *Rappel : ici X est un gain (*$-X$ *représente une perte)*

Mathematical Finance, Vol. 9, No. 3 (July 1999), 203–228

COHERENT MEASURES OF RISK

PHILIPPE ARTZNER
Université Louis Pasteur, Strasbourg
FREDDY DELBAEN
Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich
JEAN-MARC EBER
Société Générale, Paris
DAVID HEATH
Carnegie Mellon University, Pittsburgh



Philippe Artzner

Freddy Delbaen

https://people.math.ethz.ch/~delbaen/

Approche axiomatique

- Cas d'espace d'état Ω fini (Artzner et al)
  - *Espace probabilisable, mais pas probabilisé*
  - $\rho_{\wp}(X) = \sup_{P\in\wp} E^P[-X]$
  - *$\wp$ ensemble des mesures de probabilité sur Ω*
  - *Si on considère X comme une perte, alors* $\rho_{\wp}(X) = \sup_{P\in\wp} E^P[X]$
    - Preuve à faire
  - *Artzner et al introduisent en outre un terme d'actualisation*
  - $\rho_{\wp}(X) = \sup_{P\in\wp} E^P[X/r]$
    - Cf discussion sur le « theta effect »
  - *Par ailleurs, pour avoir la pertinence, il suffit que l'ensemble des mesures $\wp$ charge tous les états :* $\forall\omega \in \Omega, \exists P \in \wp, P(\omega) > 0$

Approche axiomatique

- Un exemple simple : soit P une probabilité sur Ω
- $\rho(X) = E^P[X]$ ($\wp = \{P\}$) est une mesure cohérente de risque
- Question : l'ES étant une mesure cohérente de risque, quel est l'ensemble $\wp$ associé à l'ES ?
  - *Voir Adam, Houkari et Laurent pour des Ω de cardinal fini*
- Comment caractériser les mesures cohérentes de risque sur L_p ?
  - *Voir Delbaen, idem pour l'ES*

Consider the *worst case risk measure* ρ_{max} defined by:

$$\rho_{max}(X) = \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega)$$

The value $\rho_{max}(X)$ is the least upper bound for the potential loss which can occur in any scenario. The corresponding acceptance set $\mathcal{A}$ is given by the convex cone of all non-negative functions in X. Thus, $\rho_{max}(X)$ is a coherent measure of risk. It is the most conservative measure of risk in the sense that any normalized monetary risk measure ρ on $\mathcal{X}$ satisfies:

$$\rho(X) \leq \rho(\sup_{\omega\in\Omega} X(\omega)) = \rho_{max}(X)$$

- La mesure worst-case ne pose pas de problème particulier si on a un ensemble de scénarios de cardinal fini.
- Dans ce cas, la monotonie implique que la mesure worst-case est un majorant
- Sinon, on peut avoir des valeurs infinies : exemple position courte sur une action avec une loi log-normale.
- Dans le cas d'espaces infinis, on peut se restreindre aux variables aléatoires, essentiellement bornées : on considère le plus petit réel bornant presque surement supérieurement une v.a.

Quelques précisions théoriques

- La mesure worst-case scenario (pour un ensemble fini de scénarios afin de garantir une valeur finie) est une mesure de risque cohérente.
- C'est la mesure cohérente la plus « conservatrice »
- Quel est l'ensemble de « scénarios généralisés » (probabilités) associés à la mesure « worst case » ?
  - *Il suffit de considérer des mesures de Dirac : une mesure qui donne une probabilité de 1 à un événement donné*
  - *Le sup de l'espérance des pertes sur l'ensemble de ces mesures*
- Les mesures de risque longtemps utilisées par les chambres de compensation et de futures (CME) pour déterminer des marges (provisions) initiales l'ont été selon cette méthode
  - *SPAN : Standard Portfolio Analysis of Risk*

CME SPAN® - Scan Risk Example

Scenario	SP Underlying Price Move	Volatility Move	SP Future Gain/Loss	SP Option Gain/Loss	Portfolio Gain/Loss
1	UNCHANGED	UP	0	1,807	1807
2	UNCHANGED	DOWN	0	-1,838	-1,838
3	UP 33%	UP	-7,499	7,899	400
4	UP 33%	DOWN	-7,499	5,061	-2,438
5	DOWN 33%	UP	7,499	-3,836	3,663
6	DOWN 33%	DOWN	7,499	-8,260	-761
7	UP 67%	UP	-15,001	14,360	-641
8	UP 67%	DOWN	-15,001	12,253	-2,748
9	DOWN 67%	UP	15,001	-8,949	6,052
10	DOWN 67%	DOWN	15,001	-13,980	1,021
11	UP 100%	UP	-22,500	21,107	-1,393
12	UP 100%	DOWN	-22,500	19,604	-2,896
13	DOWN 100%	UP	22,500	-13,455	9,045
14	DOWN 100%	DOWN	22,500	-18,768	3,732
15	UP 300%	UNCHANGED	-22,275	21,288	-987
16	DOWN 300%	UNCHANGED	22,275	-9,160	13,115
				Largest Potential Loss = SPAN Risk	**13,115**

CME Group

© 2010 CME Group. All rights reserved

Quelques précisions théoriques

- Invariance en loi : On suppose l'espace fondamental doté d'une probabilité P, par exemple
  - *Invariance en loi si $\rho(X)$ ne dépend que de la loi de X, P_X*
  - *Une mesure cohérente ne vérifie pas forcément l'invariance en loi (à finaliser).*
- Les mesures de risque cohérentes sont bornées supérieurement par la mesure worst case (comme conséquence de la monotonie)
  - *Si on considère des risques (essentiellement) bornés*
- Il existe d'autres bornes : multiplicateur de la volatilité (voir infra)

Exemple de mesure cohérente non-comonotone, donc pas une mesure spectrale

PROPOSITION 4.3. *Let P be a random variable on a probability space $(\Omega', \mathbb{P})$ with range $P(\Omega') \subset [1, p]$ and assume that $1 \leq p \leq \infty$ and $0 \leq a \leq 1$. The risk measure*

$$\rho(X) = -\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[X] + a \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\sigma_P^-(X)] \qquad (7)$$

is coherent on $L^p(\mathbb{Q})$. We have $-\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[X] \leq \rho(X) \leq \text{ess.sup}\{-X\}$.

Caractérisation de l'ensemble $\wp$?
Démonstration de la cohérence
Démonstration de la non-comonotone additivité
Définition des semi-moments, d'ess sup
Fisher, conditions sur P par rapport à Q ?

Mesure de risque cohérente mais non comonotone, faisant appel aux semi-moments

LEMMA 4.1. *For $1 \leq p \leq \infty$ and $0 \leq a \leq 1$, the risk measure $\rho_{p,a}$ with*

$$\rho_{p,a}(X) = -\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[X] + a \cdot \sigma_p^-(X) = -\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[X] + a \cdot ||(X - \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[X])^-||_p \qquad (5)$$

is coherent on $L^p(\mathbb{Q})$.

Delbaen (2002) shows that these risk measures can be obtained by the set of probability measures (also called *generalized scenarios*, compare Artzner et al. (1999)) $P = \{1 + a(g - \mathbf{E}[g]) \mid g \geq 0; ||g||_q \leq 1\}$, where $q = p/(p-1)$ and probability measures are identified with their densities. In Delbaen (2000) we find another type of risk measures that are connected to higher moments.

Fischer, T. (2003). Risk capital allocation by coherent risk measures based on one-sided moments. insurance: Mathematics and Economics

éléments préliminaires sur la réglementation des risques de marché

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

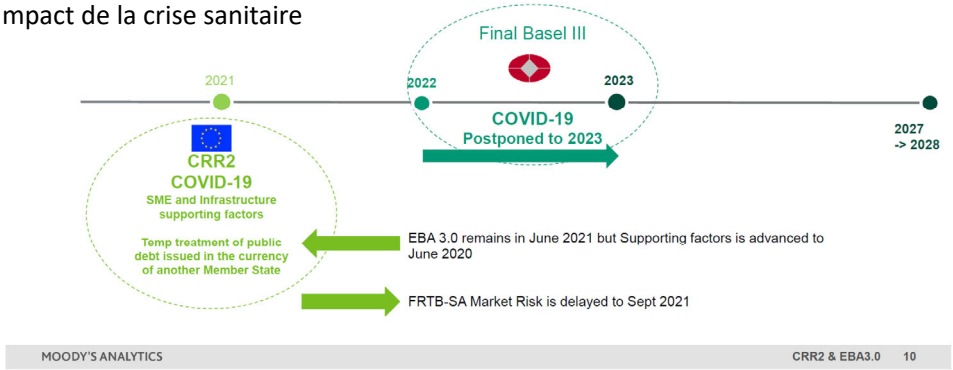
Point de vue historique

- Pré-1996 : méthode additive sur scénarios prédéterminés (banques), worst-case (marges initiales CME)
- 1996 est une année charnière
  - *Développement et mise en application du concept de VaR chez JP Morgan + RiskMetrics*
  - *Amendement aux accords de Bâle pour la mise en place de charges en capital pour les risques de marché liées à la VaR*
  - *Beaucoup de travaux des régulateurs et des banquiers sur la mesure quantitative des risques à cette période*
- 1998 : axiomatique des mesures cohérentes de risque
- Bâle 2.5 : stressed VaR, IRC, CRM
- FRTB : Fundamental Review of the Trading Book

Périmètre de calcul des mesures de risque de marché

- Champ des risques « dans la VaR » ?
  - Bâle 2.5, activités londoniennes : RNIV : Risks Not In VaR
  - *Pour les banques, on s'intéressera au portefeuille de négociation (trading book)*
  - *Certains risques de marché ne sont pas pris en compte*
    - Risque de taux d'intérêt dans le banking book
  - *La réglementation précise la « frontière » entre trading et banking book*
    - Quels contrats relèvent du trading book
    - Bâle 3 : moins de latitude, critères objectifs vs intentionnalité

Source : Moody's octobre 2020
Impact de la crise sanitaire



Report des « *parallel runs* » du FRTB SA (non publics) en septembre 2021. Il faut distinguer les phases de reporting (pour SA et IMA) et les dates de mise en application. Il subsiste des incertitudes relatives au calendrier de l'UE, sachant que la Fed reste, pour l'instant, sur la réserve.

https://www.eba.europa.eu/eba-provides-further-guidance-use-flexibility-relation-covid-19-and-calls-heightened-attention-risks
https://ma.moodys.com/rs/961-KCJ-308/images/Moody%27s%20Analytics%20Webinar%20CRR2%20EBA%203.0%2013.10.2020.pdf

Calendrier de mise en œuvre du FRTB

- Toujours incertain ?!

Marseglia expects the EU to implement the reporting requirements in early 2025, considering they will only take effect three years after the publication of the Regulatory Technical Standards on liquidity horizons, modellability of risk factors, back-testing and profit-and-loss (P&L) requirements in the *Official Journal of the European Union*, likely by the end of March 2022.

The FRTB challenge: banks brace for further uncertainty

https://www.risk.net/regulation/7901041/the-frtb-challenge-banks-brace-for-further-uncertainty
https://www.refinitiv.com/en/fundamental-review-of-the-trading-book

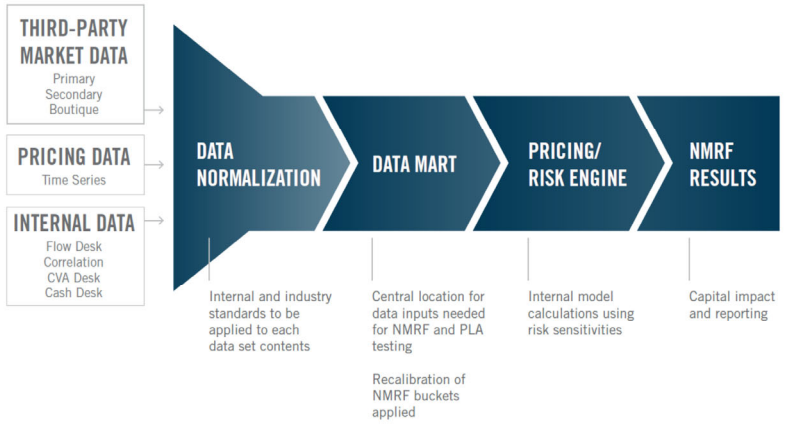
Qualité des données

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

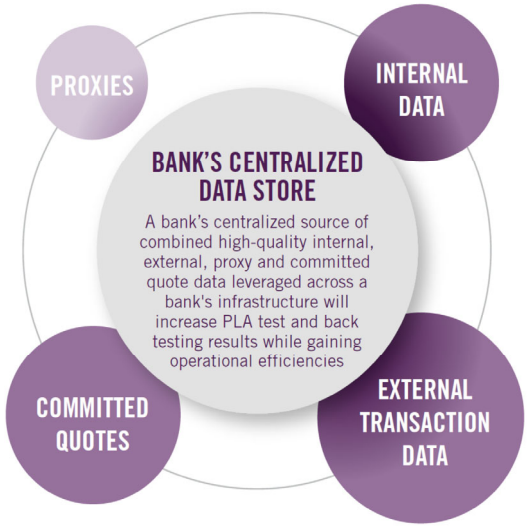
Travail à faire pour le 1/602/24 : VaR gaussiennes, volatilités, corrélation et kurtosis glissantes, risque de marché des banques à partir des cours boursiers

- Données à récupérer : historiques de cours sur Factset pour BNPP, SG, GS, MS, JPM, Citi, BofA, DB, Barclays
- Cours de clôture ajustés à partir du 1er janvier 2007 jusqu'au 31 janvier 2024. (cours en euros) + taux de change €/$
- Idem à partir de Yahoo finance.
- Calcul de VaR (gaussienne) 1J 99% de manière glissante sur des intervalles de 252 jours, avec mise à jour quotidienne
  - *Portefeuille équipondéré des banques européennes et US*
  - *Fichier output : toutes les dates*
  - *Faire en sorte que l'on puisse changer les poids*
- Calcul du ratio de kurtosis (glissant) pour SG
- Évolution de la corrélation entre SG et BNPP
  - *Si possible graphiques superposés et mis à l'échelle pour comparer avec évolution de la volatilité*

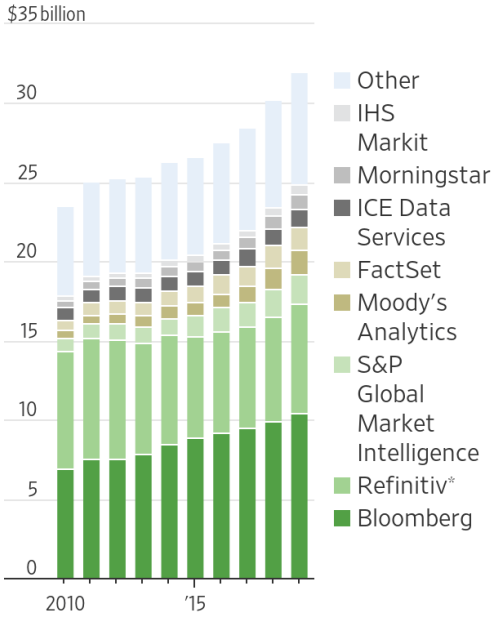
Data quality issues hard to cope under EU FRTB implementation ?



Data quality issues



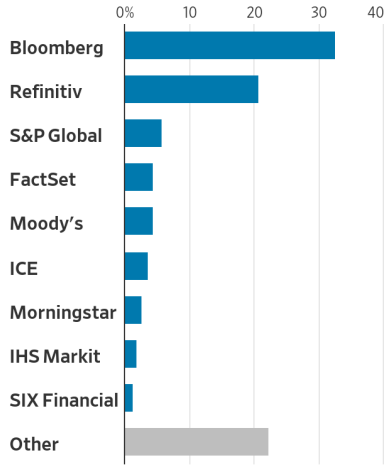
Market-data revenue, by provider



*Previously Thomson Reuters
Source: Burton-Taylor

Data Kings
Refinitiv, maker of the Eikon terminal, is the No. 2 financial-data company after Bloomberg.

Estimated 2018 share of total revenues for financial-market data, analysis and news



Source: Burton-Taylor International Consulting

Soutenance de thèse

Université Paris I - Panthéon-Sorbonne
Ecole de Management Panthéon-Sorbonne
Laboratoire PRISM Sorbonne
20.12.2021

Impact des données manquantes pour la gestion des risques

Patricia Dos Santos
Sous la direction du
Professeur Jean-Paul Laurent

PRISM Sorbonne
University of Paris 1
Pantheon Sorbonne

Labex ReFi
Financial Regulation Lab

Natixis
Equity Quantitative
Research

Problématiques autour des données manquantes
Qualité de la donnée

Les problématiques de données manquantes font partie intégrante d'une thématique bien plus large : la qualité de la donnée.

Qualité de la donnée

- **Multi-source de données :** exemple des prix du pétrole de l'EIA (Energy Information Administration) , Bloomberg, Investing.com et Yahoo Finance
- **Accessibilité des données :** accès publique ou avec licence (coûteuse), données de consensus accessibles aux contributeurs, accès suite à un processus de sauvegarde automatisable ou non
- **Gestion des valeurs aberrantes :** 32% des papiers publiés en finance font mention des outliers en 2017, contre seulement 7% en 1988, d'après Adams, Hayunga, Mansi, Reeb et Verardi [1]

Problématiques autour des données manquantes
Impacts des données manquantes

Les données manquantes sont traditionnellement traitées par *listwise deletion* ⇒ cela implique une réduction de la taille de l'échantillon et donc un biais statistique ainsi qu'une diminution de la puissance statistique (Verma et Goodale [27]).

✎ Dans le cadre de leur étude, Quinen et Raaijmakers [20] (1999) montrent qu'avec 10% de données manquantes la puissance statistique est réduite de 35%, et qu'avec 30% elle est réduite de 98%.

Le domaine de la finance ne fait pas exception.

✎ Selon l'étude de Kofman et Sharpe [16] (2003), 27% des papiers en finance, publiés entre 1995 et 1999, mentionnent la présence de données manquantes, dont la proportion moyenne est d'environ 23%.

Les données manquantes représentent également des enjeux réglementaires pour les banques :

- ☞ BCBS 239 [5] (2013)
- ☞ PFMI [9] (2012), EMIR [23] (2012), Dodd-Frank Act [25] (2010) et SFTR [22] (2015) via les référentiels centraux
- ☞ CRR [21] (2013) via les méthodologies de données de remplacement
- ☞ FRTB [3][4] (2016 et 2019) via les NMRF et le calcul de mesures de risque stressées
- ☞ TRIM [11] (2017)

- ➡ L'utilisation d'une méthode d'imputation implique un risque opérationnel.
  - ➡ Risque lié au fait que certaines méthodes peuvent être non-calculable : cas d'une par exemple, lorsque la proportion de données manquantes est trop importante (comme K-NN, Amelia et MIPCA).
  - ➡ Risque lié aux choix d'implémentation et à la documentation des méthodes de complétion : cas du MSSA dont la documentation, fournit par Bloomberg L.P. [10], doit être volontairement incomplète pour des raisons commerciales.

- ➡ La méthode d'imputation doit être choisie en fonction de l'utilisation des données.

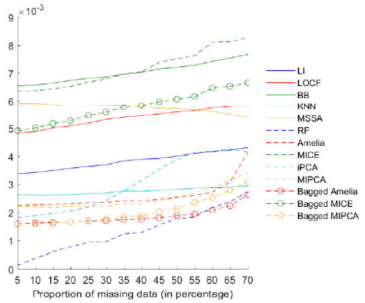
	Critère d'analyse	**5% à 25% de données manquantes**	**30% à 50% de données manquantes**	**55% à 70% de données manquantes**
Gestion des risques	- Moments statistiques - Mesures de risque	Random Forests Amelia MIPCA	Random Forests Amelia MIPCA	Random Forests
Gestion de portefeuille	- Matrices de covariances	Interpolation linéaire Random Forests Amelia MIPCA	Random Forests Amelia MIPCA	Random Forests MIPCA
Replication de donnée et prévision	- Mesures de proximité	Random Forests	Random Forests Amelia MIPCA K-NN	Random Forests MIPCA K-NN

Quelles méthodes de complétion ?

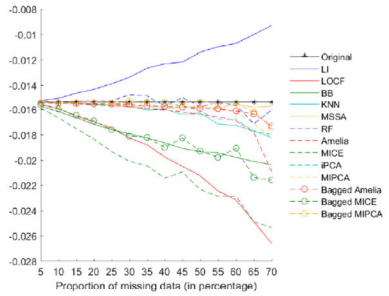
- Prendre en compte les problématiques opérationnelles
  - *Calcul en grande dimension : faisable ou non ?*
  - *Traitement des hyperparamètres (lesquels choisir ?)*
  - *Reproductibilité des résultats (validation Fed ou BCE)*
    - ! Aux imputations multiples
  - *Analyse comparative pour montrer qu'il n'y a pas de choix opportuniste de méthodes (coûteux en R&D, mais « one-shot »*
  - *Intérêt des méthodes triviales (LOCF : Last Observation Carried Forward) borne supérieure*
  - *Interpolation linéaire : borne inférieure*
- Matrices de corrélation/covariance
  - *Pairwise deletion : matrices peuvent ne pas être SPD*
  - *Listwise deletion : trop de données enlevées*
  - *Nearest SPD matrix ou régularisation naïve (décomposition spectrale puis remplacement des valeurs propres négatives par des valeurs propres légèrement positives*

Principaux résultats
Amelia versus random forests

- Les random forests et Amelia apparaissent comme les deux méthodes les plus performantes d'après de nombreux critères, mais les random forests ont tendance à surperformer Amelia.
  - Sur-performance en partie dû au bagging



MAE

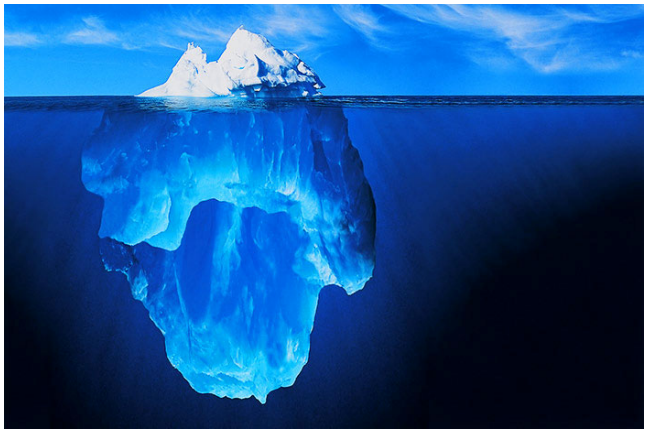


$VaR_{99\%}^{1-day}$

- Modarresi et Diner [18] ont montré que le classement entre ces deux modèles pouvait varier en fonction de la taille de l'échantillon.

Données manquantes, qualité des données

- Un morceau immergé de l'iceberg des modèles de risque
  - *Les autres étant modèles de pricing (calculs de P&L) et hyperparamètres*



Étude de cas (classe inversée) : Société Générale

- Séance du 24 février 2023 : analyse comparée des statistiques descriptives

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Rendement	2007	2008	2020	2022
Min	-5,92%	-15,56%	-17,65%	-12,15%
Max	7,74%	19,94%	29,78%	11,53%
Moyenne	-0,07%	-0,26%	-0,06%	-0,04%
Ecart-type	1,35%	3,22%	3,02%	1,86%
Médiane	0,08%	-0,42%	-0,25%	-0,03%
Quantile 25%	-1,17%	-2,54%	-2,21%	-1,17%
Quantile 75%	0,87%	1,96%	2,10%	1,36%
Skewness	0,28	0,20	0,90	-0,43
Kurtosis	2,00	2,41	8,93	4,28

Données manquantes supprimées.

M - D

	2007	2008	2020	2022
mean	-0.000797	-0.002382	0.000318	-0.004083
std	0.014794	0.045966	0.031954	0.031751
min	-0.043732	-0.161355	-0.160291	-0.186017
25%	-0.008445	-0.023842	-0.013049	-0.021218
50%	0.000000	-0.006318	-0.000497	-0.003269
75%	0.007074	0.018106	0.013568	0.015647
max	0.047319	0.186441	0.149374	0.092997
skew	0.064015	0.619854	-0.147216	-0.712529
kurtosis	0.818685	2.987942	5.478079	4.631133

Konan Barbara

	2007	2008	2020	2022
Mean	-0,09	-0,36	-0,16	-0,07
SD	1,81	4,54	4,54	2,72
Kurtosis	4,8	5,2	9,8	7,5
Skewness	0,2	-0,1	0,3	-0,7
Min	-6,10	-16,91	-19,42	-12,95
Q1	-6,10	-16,91	-19,42	-12,95
Median	-1,18	-2,58	-2,23	-1,18
Q3	0,08	-0,42	-0,25	-0,03
Max	7,46	18,18	26,06	10,92
IQR	2,05	4,52	4,31	2,53
Ratio Mean/SD	-0,048	-0,079	-0,035	-0,026
lower_limit	-4,25	-9,35	-8,70	-4,97
upper_limit	3,94	8,72	8,54	5,14

Données manquantes ?

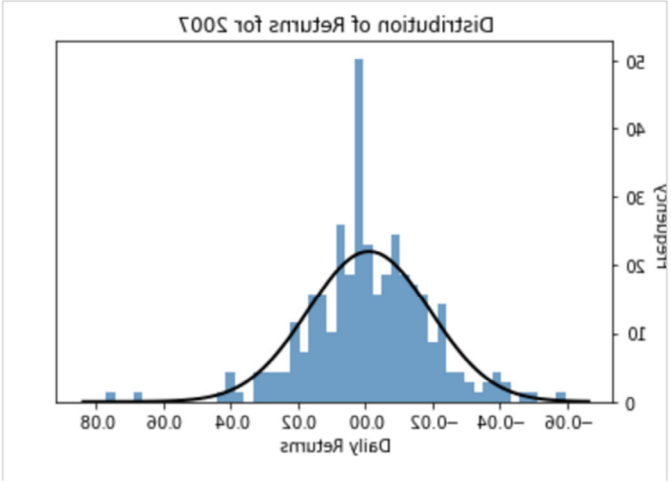
	SOG			
	2007	2008	2020	2022
Min	-7,19%	-16,63%	-15,55%	-10,34%
Std	1,80%	4,51%	4,32%	2,75%
1st Qu	-0,82%	-1,92%	-2,05%	-1,34%
Median	0,00%	0,46%	0,26%	0,05%
Mean	0,13%	0,45%	0,34%	0,14%
3rd Qu	1,21%	2,58%	2,26%	1,20%
Max	6,29%	18,42%	21,44%	13,83%
Skew	-13,88%	30,56%	89,30%	91,99%
Kurtosis	169,58%	236,70%	502,63%	507,37%

Étude de cas (classe inversée) : Société Générale

Measures	2007	2008	2020	2022
Mean	-0,09%	-0,29%	-0,16%	-0,07%
standard deviation	1,83%	4,54%	4,27%	2,73%
Skewnes	32,67%	28,04%	-15,45%	-42,02%
Kurtosis	193,57%	235,89%	359,96%	416,47%
1er quartile	-1,20%	-2,59%	-2,22%	-1,25%
Median	0,06%	-0,51%	-0,26%	-0,06%
3ème quartile	0,90%	1,97%	2,19%	1,38%
min	-5,92%	-15,56%	-17,65%	-12,15%
max	7,74%	19,94%	18,41%	11,53%
	Begu Fassa			

	2007	2008	2020	2022
Mean	-0.000709	-0.002557	-0.000553	-0.000353
Skewness	0.282946	0.197287	0.890362	-0.430774
Kurtosis	1.939535	2.340355	8.729833	4.172064
Median	0.000761	-0.004231	-0.002503	-0.000292
Min	-0.059157	-0.155556	-0.176542	-0.121480
Max	0.077449	0.199427	0.297757	0.115330
1st Quartile	-0.011723	-0.025434	-0.022101	-0.011720
3rd Quartile	0.008734	0.019605	0.020973	0.013561

AS - S



Travail à faire

1) Vérifiez que vous avez bien des données relatives aux quantiles, à la moyenne, à l'écart-type en % (corrigez et renvoyer moi le fichier à jour avant 13h demain).
2) Que peut-on dire du ratio moyenne/écart-type ? Quelle loi suit-il dans le cas gaussien ? que peut-on dire sur la rentabilité moyenne à partir de l'analyse statistique standard ?
3) Vérifiez bien dans quelle unité le coefficient d'asymétrie et l'excess kurtosis doivent être calculés. Vérifiez si c'est l'excess kurtosis ou la kurtosis que vous avez calculé (les logiciels R, Python et Excel ne sont pas toujours clairs sur ce point). Réfléchissez aussi au nombre de chiffres significatifs (idem pour le point 1)
4) Je ne l'ai dit qu'oralement, mais vous aurez à travailler sur cinq banques : SG, BNPP, CS, Barclays, DB

Travail à faire

1) Pour les cours ajustés de CS ou Barclays, dans quelle devise avez-vous travaillé (locale ou euro) ? Je préfèrerais avoir des résultats en euros ?
2) Vos sources de données devraient être renseignées sous vos tableaux de synthèse.
3) Je n'ai pas vu de réflexion sur l'analyse d'éventuels « outliers » ou erreurs dans vos données ou la présence de données manquantes. Supposons par exemple qu'un cours soit renseigné par erreur à 0 sur un jour, que verrait-on ? Que se passe-t-il si la donnée n'est pas mise à jour et que l'on conserve dans la base de données la dernière valeur disponible ? Quoi faire si l'on avait considéré une action non cotée en 2007 ou 2008 ?
4) Certains d'entre vous ont commencé à regarder les statistiques descriptives pour un portefeuille équipondéré : on n'en parlera qu'à partir de la semaine prochaine.

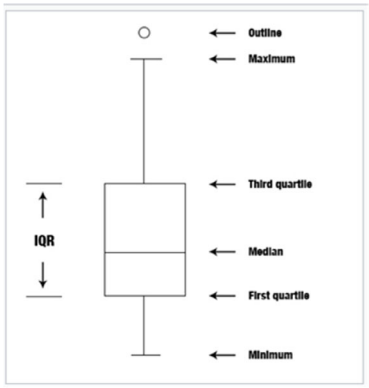
Travail à faire

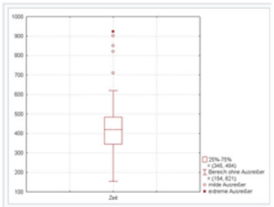
1) En ce qui concerne l'écart interquartile, que peut-on dire en rapport avec l'écart-type ? (voir la copie d'écran plus bas)
2) Que se passe-t-il sur les différents résultats si : on augmente toutes les rentabilités de +1%, on multiplie toutes les rentabilités par 1,5 ?
3) Pour ceux qui aiment utiliser les logiciels, voyez si vous pouvez présenter les résultats sous forme de « boîte à moustaches » (voir ci-dessous)
4) Toute autre idée pour analyser ces premiers résultats est à prendre. Pensez aux points complémentaires à soulever demain. Il faut garder en tête que même si l'on est un excellent statisticien et mathématicien, avant de faire des inférences statistiques formelles, on commence toujours par comprendre la manière dont la donnée est construite et « regarder » les données (statistiques descriptives, exploratoires).

Travail à faire

- Normalisation des tableaux
  - *Bien renseigner les sources de données*
  - *Le traitement des données manquantes*
  - *Noms des fichiers*
  - *Analyse des différences entre les résultats obtenus : trop divergents à l'heure actuelle pour une exploitation quelconque.*

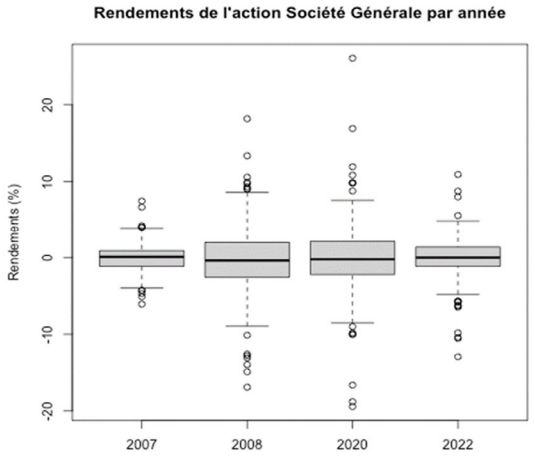
Boîtes à moustaches – box and whisker plot





Box-and-whisker plot with four mild outliers and one extreme outlier. In this chart, outliers are defined as mild above Q3 + 1.5 IQR and extreme above Q3 + 3 IQR.

Étude de cas (classe inversée) : Société Générale



Utilisation de données de marché

Empirical findings

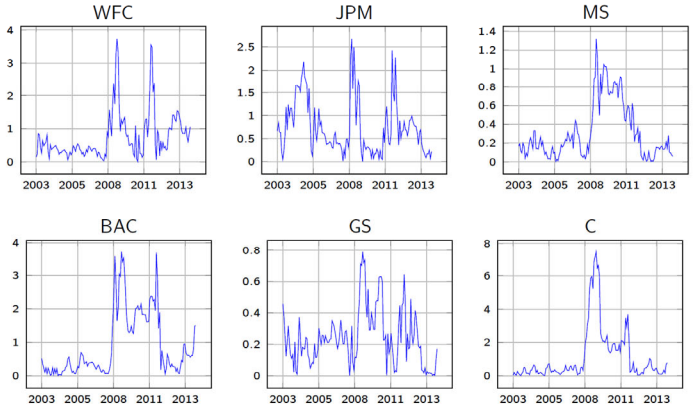


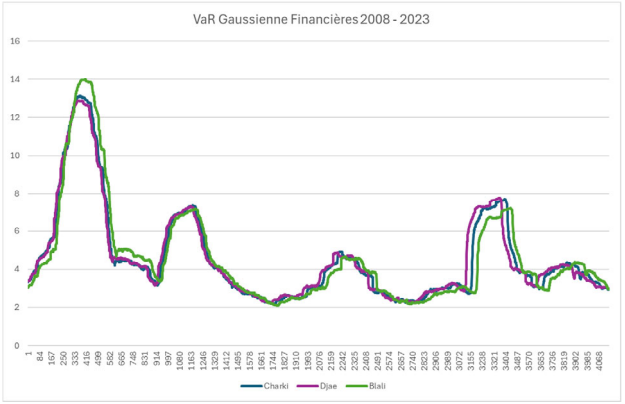
Figure 7: The figure illustrates the evolution of *VoE* for major banking corporations in the US for period of 2003-2014. A higher value of *VoE* is an indication of high asymmetry toward gains.

Questions pratiques liées à la mise en œuvre des concepts

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

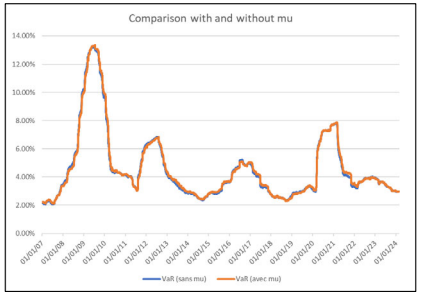
Comparaisons VaR 99% 1J

- Évolutions proches, mais différences relatives importantes
- Gestion des dates différente pour les différents groupes
  - *Jours non ouvrés ne sont pas les mêmes*
  - *Comparaison de trois groupes : C-D*



Impact de la non prise en compte de la moyenne μ sur la VaR 1 jour

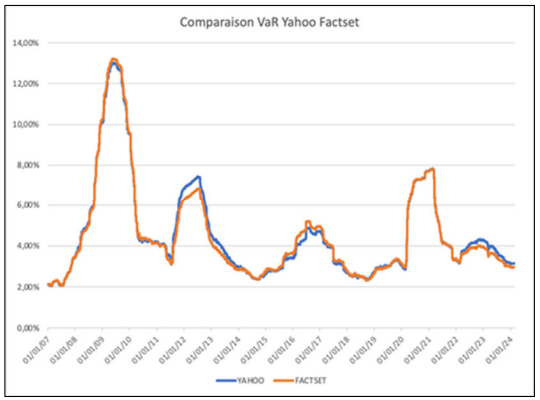
- μ, moyenne quotidienne de la rentabilité du portefeuille. $\mu = 0$ en première approximation.
- Si $\mu > 0$ sur l'année écoulée, VaR réelle plus basse de μ. Pour une rentabilité annuelle de 15%, impact sur la VaR de 0.06%
- S'il y a des options, θ – effect : θ, dérivée par rapport au temps de la valeur du portefeuille. Pour un portefeuille avec un $\gamma > 0$, $\theta < 0$
- Différence de traitement entre Bâle 2.5 et FRTB



B-B

Origine des données : écart-type sensible aux outliers

- VaR calculée à partir des données Factset et Yahoo
  - *Source : B-B*



Calcul de VaR gaussiennes

- $\text{VaR}_{99\%} \approx 2.33 \times \sigma$
- Indiquer la source des données (Factset, Yahoo)
- Format du fichier Excel à transmettre

Date 1 = 01/01/2007	VaR gaussienne
Date 2 = 02/01/2007	VaR gaussienne
Date 3 = 03/01/2008	VaR gaussienne
…	…
…	…
…	…
…	…
Date fin = 15/02/2024	VaR gaussienne

- Pour les corrélations SG/CAC40 idem.

Traitement des différences entre les heures de clôture

- Supposons que l'on ait un écart constant de $h < 1$ entre les heures de clôture aux US et en Europe.
- $r_{i,t}^{US} = \sigma_i(W_{i,t+h+1} - W_{i,t+h}) = \sigma_i(W_{i,t+h+1} - W_{i,t+1} + W_{i,t+1} - W_{i,t+h})$
- $r_{j,t}^{EU} = \sigma_j(W_{j,t+1} - W_{i,t}) = \sigma_j(W_{j,t+1} - W_{j,t+h} + W_{j,t+h} - W_{i,t})$
- En rouge, le recouvrement ne porte que sur une durée $1 - h$
- (W_i, W_j) couple de Browniens
- ρ_{ij} coefficient de corrélation entre W_i et W_j
- $E\left[\frac{1}{252}\sum_t r_{i,t}^{US} r_{j,t}^{EU}\right] = (1-h)\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$
- Pour $h \approx \frac{1}{4}$, une estimation « naïve » va conduire à surestimer les bénéfices de diversification (on suppose $\rho_{ij} > 0$).

Comparaison entre VaR gaussienne sans et avec correction de biais

- Examiner l'impact de la correction de biais suivante : multiplication par $\frac{4}{3}$ des corrélations transatlantiques
  - *Compte-tenu des week-ends et jours non ouvrés, on adopte ici une approche conservatrice, c'est-à-dire que l'on va surestimer l'écart-type de la rentabilité du portefeuille equipondéré et donc sa VaR*
- Problème possible : certains coefficients de corrélation sont supérieurs à un
  - *Remède possible : plafonner le coefficient de corrélation à 1*
- Problème possible, la matrice de corrélation n'est plus forcément semi-définie positive (valeurs propres < 0)
  - *Remède possible : décomposition spectrale et remplacement des valeurs propres négatives par des valeurs propres nulles (ou faiblement positives)*

Traitement des jours fermés

- Exemple : rentabilité du vendredi au lundi, porte sur trois jours calendaires
- Option 1 : la plus fréquemment utilisée. Recourir aux jours ouvrés (business days) uniquement
- Dans ce cas, on considère que les rentabilités entre deux business days consécutifs sont tirées dans la même loi.
- Vérification possible : considérer les écarts – types des rentabilités par « jour de la semaine » : vérifier qu'elle est la même du vendredi au lundi et du (par exemple du jeudi au vendredi).
- Autre approche : volatilité supposée constante par unité de jour calendaire. Dans ce cas, volatilité du vendredi au lundi $\sqrt{3}\times$ volatilité du jeudi au vendredi.

Traitement des jours fermés

- Dans ce cas, pour le calcul de la VaR : il faut diviser par $\sqrt{3}$ les rentabilités du vendredi au lundi
  - *Que ce soit avec la méthode paramétrique ou avec la méthode historique*
- Pour la méthode paramétrique (VaR gaussienne), on doit utiliser un scaling factor de $\sqrt{3}$ quand on calcule la VaR le vendredi à un horizon de un jour ouvré (1 Business Day).
- Autre approche : utiliser le ratio des écarts types empiriques comme scaling factor.
- Cohérence entre pricing d'options (options vanilles ou variance swaps de maturité courte) et modèles de risque ?
  - *L'approche standard*

Problématiques de données manquantes

- Listwise et pairwise deletion

Subject	Age	Gender	Income
1	29	M	$40,000
2	45	M	$36,000
3	81	M	--missing--
4	22	--missing--	$16,000
5	41	M	$98,000
6	33	F	$60,000
7	22	F	$24,000
8	--missing--	F	$81,000
9	33	F	$55,000
10	45	F	$80,000

Rappel : décomposition spectrale

- Soit Ω une matrice réelle, carrée symétrique. Alors, elle est diagonalisable (et ses valeurs propres sont réelles).
- $\Omega = \Sigma\Lambda\Sigma^*$. Avec Σ matrice orthogonale $\Sigma\Sigma^* = \Sigma^*\Sigma = I$. Λ diagonale, matrice des valeurs propres ordonnées de la plus grande à la plus petite. Colonnes de Σ : vecteurs propres de Ω
- Pour vérifier la présence d'une valeur propre négative
  - *Fonction linalg.eigvalsh dans Python*
  - *Retourne les valeurs propres d'une matrice carrée symétrique.*
- Méthode naïve pour transformer Ω en matrice semi-définie positive : considérer $\overline{\Lambda}$ construite à partir de Λ en remplaçant les valeurs propres négative par zéro, puis définir $\overline{\Omega} = \Sigma\overline{\Lambda}\Sigma^*$

VaR et ES : Cas gaussien

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

VaR et ES : le cas gaussien

> **There is a belief, or illusion, that everything can emerge from the data itself, just let the data speak. But data also benefits from rules. Machines can learn from examples but they certainly can benefit from explanations and guidance.**

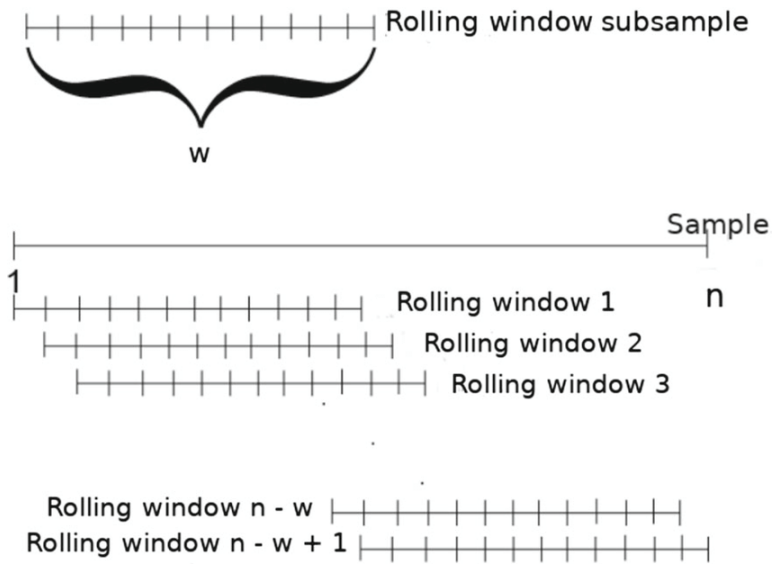
VaR et ES : le cas gaussien

- Les modèles internes de mesure des risques de marché font aujourd'hui appel à la « méthode historique »
  - *Ou non-paramétrique*
- Les approches, dites standard, sont davantage inspirées par l'approche « paramétrique »
  - *En pratique, l'approche gaussienne*
  - *L'approche gaussienne est la plus simple conceptuellement*
  - *Mais elle fait intervenir un grand nombre de paramètres : écarts-types et corrélation entre facteurs de risque.*
- En tant qu'approche paramétrique, les données sont structurées ou façonnées par le modèle probabiliste, notamment en concerne les queues de distribution
  - *Pertes extrêmes et donc mesures de risque*
  - *Voir le transparent précédent : data vs model driven ?*

Interprétation du coefficient de volatilité

- $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$
  - σ *: coefficient de diffusion ou volatilité*
  - *Mouvement Brownien géométrique (modèle de Black et Scholes)*
  - *Volatilité = écart-type du taux de rentabilité*
  - $\frac{dS_t}{S_t} \approx \frac{S_{t+dt}-S_t}{S_t}$ *rentabilité simple entre* t *et* $t+dt$
  - $\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t}$ *: rentabilité entre* t *et* $t+1$
  - $dW_t = W_{t+dt} - W_t \sim N(0, \sqrt{dt})$
  - $\frac{dS_t}{S_t} \sim N(\mu dt, \sigma\sqrt{dt})$
  - $\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t} \sim N(\mu, \sigma)$
- $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_t dW_t$

Interprétation du coefficient de volatilité : fenêtre glissante



1D (one day) VaR

- Portfolio value at time t : P_t
  - *Daily time scale:* $t-1$ *current date*
  - $\bar{F}_{t-1}(x) = P(P_{t-1} - P_t \leq x | \mathcal{F}_{t-1})$ *conditional on* $\mathcal{F}_{t-1}$ *distribution function of losses : fonction de répartition conditionnelle des pertes*
    - P : probability measure
  - *Absolute returns :* $P_t - P_{t-1}$
  - *Relative returns* $(P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$
- $\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha}$: 1D VaR at confidence level α and time $t-1$
  - $P\left(P_t - P_{t-1} \leq -\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha} | \mathcal{F}_{t-1}\right) = 1-\alpha$
    - Well-defined if $\bar{F}_{t-1}$ continuous and strictly increasing.
  - $P\left(P_{t-1} - P_t \geq \mathrm{VaR}_{t-1,\alpha} | \mathcal{F}_{t-1}\right) = 1-\alpha$ *(*$P_{t-1} - P_t$ *: loss)*
  - $P\left(P_{t-1} - P_t \geq \mathrm{VaR}_{t-1,99\%} | \mathcal{F}_{t-1}\right) = 1\%$
- $\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha}$: $t-1$, 1D percentage VaR at confidence level α:
  - $P\left((P_t - P_{t-1})/P_{t-1} \leq -\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha} | \mathcal{F}_{t-1}\right) = 1-\alpha$

Calculs VaR gaussienne

- $P_{t-1}(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i P_{i,t-1} = a^* \vec{P}_{t-1}$
- $\frac{P_{t-1}(a) - P_t(a)}{P_{t-1}(a)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i P_{i,t-1}}{P_{t-1}(a)} \left(\frac{P_{i,t-1} - P_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right)$
- $\omega_i = \frac{a_i P_{i,t-1}}{P_{t-1}(a)}$, ω : vecteur des allocations
- y_t: vecteur des rentabilités $\frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}}$
- $y_t \sim N(\mu, \Omega)$, $\frac{P_{t-1}(a) - P_t(a)}{P_{t-1}(a)} = -\omega^* y_t$
- $P\left(\frac{P_{t-1}(a) - P_t(a)}{P_{t-1}(a)} \geq \mathrm{VaR}_\alpha\right) = 1-\alpha$ (en pratique $\alpha = 99\%$)
- $P(-\omega^* y_t \geq \mathrm{VaR}_\alpha) = 1-\alpha$, $P\left(-\omega^*\mu - (\omega^*\Omega\omega)^{1/2} U \geq \mathrm{VaR}_\alpha\right) = 1-\alpha$
- $-\omega^* y_t = -\omega^*\mu - (\omega^*\Omega\omega)^{1/2} U$, $U \sim N(0,1)$
- $\mathrm{VaR}_\alpha = -\omega^*\mu + (\omega^*\Omega\omega)^{1/2} \Phi^{-1}(\alpha)$

Calcul VaR gaussienne : à compléter !!!!

- $P\left(-\omega^*\mu - (\omega^*\Omega\omega)^{1/2} U \geq \mathrm{VaR}_\alpha\right) = 1-\alpha$
- $-\omega^*\mu - (\omega^*\Omega\omega)^{1/2} U \geq \mathrm{VaR}_\alpha$
- $-U \geq \frac{\mathrm{VaR}_\alpha + \omega^*\mu}{(\omega^*\Omega\omega)^{1/2}}$
- $P\left(Z \geq \frac{\mathrm{VaR}_\alpha + \omega^*\mu}{(\omega^*\Omega\omega)^{1/2}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{\mathrm{VaR}_\alpha + \omega^*\mu}{(\omega^*\Omega\omega)^{1/2}}\right) = 1-\alpha \Rightarrow$
  $P\left(Z < \frac{\mathrm{VaR}_\alpha + \omega^*\mu}{(\omega^*\Omega\omega)^{1/2}}\right) = \alpha = \Phi\left(\frac{\mathrm{VaR}_\alpha + \omega^*\mu}{(\omega^*\Omega\omega)^{1/2}}\right)$
- $1-\alpha = 1 - \Phi\left(\frac{\mathrm{VaR}_\alpha + \omega^*\mu}{(\omega^*\Omega\omega)^{1/2}}\right)$
- $\alpha = \Phi\left(\frac{\mathrm{VaR}_\alpha + \omega^*\mu}{(\omega^*\Omega\omega)^{1/2}}\right)$
- $\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{\mathrm{VaR}_\alpha + \omega^*\mu}{(\omega^*\Omega\omega)^{1/2}} \Rightarrow \mathrm{VaR}_\alpha = -\omega^*\mu + (\omega^*\Omega\omega)^{1/2} \Phi^{-1}(\alpha)$

Calculs VaR gaussienne : remarques

- Hypothèse de rentabilités simples gaussiennes
  - *Peut poser des problèmes pratiques*
  - *Valeur de marché d'un contrat forward à la monnaie :* $P_{i,t-1} = 0$
    - $\frac{P_{i,t-1}-P_{i,t}}{P_{i,t-1}}$ n'est pas défini
    - On peut remplacer $P_{i,t-1}$ par nominal × nombre de contrats
  - *Pour une action, perte maximale sur position acheteuse* $= P_{i,t-1}$ *(soit* 100%*)*
  - *Or pour un quantile élevé et une forte volatilité, on aura une VaR supérieure à la perte maximale*
    - Problème rencontré couramment avec les achats d'options où l'on considère que l'exposition sur l'option est δ × sous-jacent alors que la perte maximale est la prime de l'option
  - *Agrégation temporelle des rentabilités pose problème : passage de 1 à 10 jours*

Calculs VaR gaussienne : homogénéité

- Passage de la VaR en pourcentage à la VaR
  - $P\left(P_{t-1}(a) - P_t(a) \geq P_{t-1}(a) \times \mathrm{VaR}_{t-1,99\%} \,|\mathcal{F}_{t-1}\right) = 1\%$
    - VaR en pourcentage
    - En supposant $P_{t-1}(a) > 0$
  - $\lambda > 0, P_{t-1}(\lambda a) = \lambda P_{t-1}(a),\ P_t(\lambda a) = \lambda P_t(a)$
    - La VaR en pourcentage ne change pas (homogène de degré 0)
  - $P\left(P_{t-1}(a) - P_t(a) \geq \mathrm{VaR}_{t-1,99\%} | \mathcal{F}_{t-1}\right) = 1\%$
    - VaR en variations absolues de la valeur du portefeuille
    - $\lambda > 0, \left\{P_{t-1}(a) - P_t(a) \geq \mathrm{VaR}_{t-1,99\%}\right\} = \left\{\lambda\left(P_{t-1}(a) - P_t(a)\right) \geq \lambda \mathrm{VaR}_{t-1,99\%}\right\} = \left\{P_{t-1}(\lambda a) - P_t(\lambda a) \geq \lambda \mathrm{VaR}_{t-1,99\%}\right\}$
    - $P\left(P_{t-1}(a) - P_t(a) \geq \mathrm{VaR}_{t-1,99\%} | \mathcal{F}_{t-1}\right) = 1\%$
    - $\lambda > 0, P\left(P_{t-1}(\lambda a) - P_t(\lambda a) \geq \lambda \mathrm{VaR}_{t-1,99\%} | \mathcal{F}_{t-1}\right) = 1\%$
    - $\lambda > 0\ , a \to \lambda a \Rightarrow \mathrm{VaR}_{t-1,99\%} \to \lambda \times \mathrm{VaR}_{t-1,99\%}$
  - *Positive homogénéité de degré un*

Calculs VaR gaussienne : remarques

- Propriétés de la VaR gaussienne : sous-additivité
  - $a \to a + b \ \Rightarrow P_t(a) \to P_t(a + b) = P_t(a) + P_t(b)$
  - $P_{t-1}(a) - P_t(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(P_{i,t-1} - P_{i,t}\right) = a^*\left(\vec{P}_{t-1} - \vec{P}_t\right)$
  - *Vecteur des rentabilités* $\frac{P_{i,t}-P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}}$ *gaussien* $\Leftrightarrow \vec{P}_t - \vec{P}_{t-1}$ *gaussien.*
  - $\vec{P}_t - \vec{P}_{t-1} \sim N(\bar{\mu}, \bar{\Omega})$
    - On peut relier $\bar{\mu}$ et $\bar{\Omega}$ à μ et Ω, mais peu importe ici
  - $a^*\left(\vec{P}_{t-1} - \vec{P}_t\right) \sim N\left(-a^*\bar{\mu}, (a^*\bar{\Omega}a)^{1/2}\right)$
  - *D'où :* $\mathrm{VaR}_\alpha(a) = -a^*\bar{\mu} + (a^*\bar{\Omega}a)^{1/2}\Phi^{-1}(\alpha)$
    - $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + 2\rho_{XY}\sigma(X)\sigma(Y) + \sigma^2(Y) \leq \left(\sigma(X) + \sigma(Y)\right)^2$
    - $\sigma(X+Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$
    - $(a+b)^*\left(\vec{P}_t - \vec{P}_{t-1}\right) = a^*\left(\vec{P}_t - \vec{P}_{t-1}\right) + b^*\left(\vec{P}_t - \vec{P}_{t-1}\right)$
    - $\left((a+b)^*\bar{\Omega}(a+b)\right)^{1/2} \leq (a^*\bar{\Omega}a)^{1/2} + (b^*\bar{\Omega}b)^{1/2}$

Calculs VaR gaussienne : remarques

- Propriétés de la VaR gaussienne : sous-additivité (suite)
  - **Si** $\boldsymbol{\alpha > 50\%}$, $\Phi^{-1}(\alpha) > 0$
  - $\mathrm{VaR}_\alpha(a+b) = -(a+b)^*\bar{\mu} + \left((a+b)^*\bar{\Omega}(a+b)\right)^{1/2}\Phi^{-1}(\alpha)$
  - $\leq -a^*\bar{\mu} + (a^*\bar{\Omega}a)^{1/2}\Phi^{-1}(\alpha) + -b^*\bar{\mu} + (b^*\bar{\Omega}b)^{1/2}\Phi^{-1}(\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha(a) + \mathrm{VaR}_\alpha(b)$
  - Remarque : si $\alpha < 50\%$, la VaR gaussienne n'est pas forcément sous-additive
  - *Remarque : si on raisonne directement sur les pertes sans rentrer dans la composition du portefeuille*
    - Représentation du risque dans l'espace des allocations ou du nombre de « titres », $\mathbb{R}^n$ ou dans l'espace des variables aléatoires associées aux pertes
    - X perte, $X \sim N(-\mu_X, \sigma_X)$ et $X = -\mu_X + \sigma_X U$ avec $U \sim N(0,1)$
    - $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -\mu_X + \sigma_X\Phi^{-1}(\alpha)$
    - $\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) = -\mu_{X+Y} + \sigma_{X+Y}\Phi^{-1}(\alpha) \leq -\mu_X - \mu_Y + \sigma_X\Phi^{-1}(\alpha) + \sigma_Y\Phi^{-1}(\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$

VaR gaussienne

- Propriétés de la VaR gaussienne : cash-invariance
  - $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{VaR}_\alpha(a + X) = -\mu_{a+X} + \sigma_{a+X}\Phi^{-1}(\alpha)$
  - $\mathrm{VaR}_\alpha(a + X) = -a - \mu_X + \sigma_X\Phi^{-1}(\alpha) = -a + \mathrm{VaR}_\alpha(X)$
- Si on a un placement sans risque, la perte est $1 - (1 + r_f) = -r_f$
  - *La VaR est alors égale à* $-r_f$

VaR Gaussienne et monotonie

- On rappelle que si X est gaussienne, $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -E(X) + \sigma(X)\Phi^{-1}(\alpha)$
  - Artzner, Delbaen, Eber & Heath (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*.

Axiom M. *Monotonicity: for all* X *and* $Y \in \mathcal{G}$ *with* $X \leq Y$, *we have* $\rho(Y) \leq \rho(X)$.

Remark. Axiom M rules out the risk measure defined by $\rho(X) = -\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[X] + \alpha \cdot \sigma_{\mathbb{P}}(X)$, where $\alpha > 0$ and where $\sigma_{\mathbb{P}}$ denotes the standard deviation operator, computed under the probability $\mathbb{P}$. Axiom S rules out the "semi-variance" type risk measure

- *Contre-exemple ?*

VaR gaussienne et monotonie

- Rappel : $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -\mu_X + \sigma_X\Phi^{-1}(\alpha)$
  - Jarrow & Madan (1997). Is mean-variance analysis vacuous: or was beta still born?. *Review of Finance*.
  - Maccheroni, Marinacci, Rustichini & Taboga (2009). Portfolio selection with monotone mean-variance preferences. *Mathematical Finance*.
  - Cerný (2009). *Mathematical techniques in finance: tools for incomplete markets*. Princeton University Press.
- $U(X) = E^P(X) - V^P(X)$

States of nature	s_1	s_2	s_3	s_4
Probabilities	0.25	0.25	0.25	0.25
Payoff of f	1	2	3	4
Payoff of g	1	2	3	5

Prospect g yields a higher payoff than f in every state. Any rational agent should prefer g to f. However, it turns out that our mean-variance agent strictly prefers f to g. In fact:

$$U_2(f) = 1.25 > 0.5625 = U_2(g).$$

Calculs VaR gaussienne : Cas $\mu = 0$

- On néglige l'effet "theta", glissement du temps pour des positions optionnelles pour des horizons courts, par exemple, un jour
- et/ou l'expected return du portefeuille.
- Attention, valeurs de μ très différentes selon que l'on considère dirty PnL ou clean PnL
  - *Pros and cons des deux approches ? Clean PnL privilégié par les régulateurs, dirty PnL plus logique dans une approche business (mais moins conservateur)*
- Choix délibéré ? Exemple : chocs instantanés dans le FRTB
  - *Plus rarement « forward VaR » : on s'intéresse aux pertes par rapport à la valeur « attendue » du portefeuille à l'horizon de calcul*
- En pratique $\frac{\mu}{\sigma}$ faible et non significativement différent de zéro pour des horizons de 1 ou 10 jours
- Mais attention, sur des grosses positions, l'impact du glissement du temps (theta effect) sur la VaR ou l'ES n'est pas négligeable.

- Chocs instantanés ?
  - $F(t, f(t))$ *: valuation function : fonction qui aux facteurs de risque (déterminant la valeur du portefeuille) associe la valeur du portefeuille*
  - $f(t)$ *: facteurs de risque*
  - $F(t, f(t)) - F(t, f(t) + \delta f)$ *: FRTB*
- Effet theta
  - $F(t, f(t)) - F(t + 1, f(t) + \delta f)$ *: Bâle 2.5*

Calculs VaR gaussienne : Cas $\mu = 0$

- Dans ce cas la VaR est proportionnelle à l'écart-type
- Pour en VaR « en valeur »
- $\mathrm{VaR}_\alpha(a) = (a^* \bar{\Omega} a)^{1/2} \Phi^{-1}(\alpha)$
- Où $(a^* \bar{\Omega} a)^{1/2}$ est l'écart-type et $\Phi^{-1}(\alpha)$ le multiplicateur
- Si $\alpha = 95\%, \Phi^{-1}(\alpha) = 1{,}645$
- Si $\alpha = 99\%, \Phi^{-1}(\alpha) = 2{,}326$
- Comme la VaR est homogène de degré 1, on peut normaliser le risque par l'écart-type et dans le cas $\mu = 0$, la VaR (et l'ES) seront un multiple de l'écart-type
- Multiplicateur plus élevé si on a des queues de distribution plus épaisses que celles de la loi normale.
- Majorants possibles (voir robustesse de la VaR)

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

- Invariance en loi (méthode historique) : *P* uniforme
  - *La loi de X est la loi uniforme sur l'ensemble des valeurs prises par X dans l'historique*
  - *La loi de X est caractérisée (ne dépend que) par les valeurs ordonnées de X (statistique d'ordre)*
  - *Pour* $t \in \{1,2,3\}$, $(3,9,1)$ *a la même loi que* $(3,9,1)$ *ou que* $(9,1,3)$
  - *L'invariance en loi équivaut à ce que toute permutation des valeurs soit associée à la même mesure de risque.*
- Une mesure de risque invariante en loi ne dépend que des statistiques d'ordre
- Réciproquement, toute mesure de risque ne dépendant que des statistiques d'ordre est invariante en loi.

- Rappel : pour un historique de 252 jours, la VaR à 99% est la troisième pire perte.
- $ES_{97.5\%}(X) = -\frac{1}{6.3} \times (x^1 + \cdots + x^6 + 0.3x^7)$, où x^k est la $k-$ pire perte
  - *Ce sont bien des mesures de risque invariantes en loi*
- Caractérisation des mesures de risques : Les mesures de risque invariantes en loi, positivement homogènes, cash-invariant, monotones, comonotones additives, sous-additives sont des combinaisons convexes d'ES
  - $ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\alpha(X)du = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_X^{-1}(u)du$

- Adam, Houkari, & Laurent (2008). Spectral risk measures and portfolio selection. *Journal of Banking & Finance*.

From a mathematical point of view, we will be given a finite[2] probability space (Ω, A, P). Given a portfolio return X, we denote by F_X, the corresponding distribution function: $x \in \mathbb{R} \to F_X(x) = P(X \le x)$. A risk measure is a functional over the set of random portfolio returns $X \to \rho(X) \in \mathbb{R}$. It may fulfil some axioms such as:

- H1 *Positive Homogeneity*: for every random portfolio return X and real value $\lambda > 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$;
- H2 *Translation-Invariance*: for every random portfolio return X and real value α, $\rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha$;
- H3 *Monotonicity*: for every random portfolio returns X and Y such that $X \ge Y$, $\rho(X) \le \rho(Y)$;
- H4 *Sub-additivity*: for every random portfolio returns X and Y, $\rho(X+Y) \le \rho(X) + \rho(Y)$;
- H5 *Law-Invariance*: for every random portfolio returns X and Y with distribution functions F_X and F_Y, $F_X = F_Y \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y)$;
- H6 *Comonotonic*[3] *Additivity*: for every comonotonic random variables X and Y, $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$.

Mesures de risque et statistiques d'ordre

- Mesures spectrales de risque
  - Adam, Houkari, & Laurent (2008). Spectral risk measures and portfolio selection. *Journal of Banking & Finance*.
  - X est ici un gain (et pas une perte)

2.5. Spectral risk measures

In this subsection, we deal with spectral risk measures, a class of measures based on integrals of the quantile function of the portfolio return. A spectral risk measure consists in a weighted average of the quantiles of the distribution of the returns using a non-increasing weight function called the spectrum. It is defined as follows:

$$M_\phi(X) = -\int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp \,,$$

where ϕ is a non-negative, non-increasing, right-continuous integrable function defined on $[0,1]$ and such that $\int_0^1 \phi(p)dp = 1$. Kusuoka (2001)[9] showed that spectral risk measures coincide with coherent, comonotonic-additive and law-invariant risk measures. In other

Mesures de risque et statistiques d'ordre

- Mesures spectrales de risque
  - Adam, Houkari, & Laurent (2008). Spectral risk measures and portfolio selection. *Journal of Banking & Finance*.
  - X est ici un gain (et pas une perte)

Since $F_X^{-1}(p) = x_{\lceil np \rceil:n}$, we can express the spectral risk measure of the empirical distribution of portfolio returns as:

$$M_\phi(X) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{i:n} \,,$$

where $\lambda_i = \int_{(i-1)/n}^{i/n} \phi(p)dp \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Then the computation of any spectral risk measure involves an average value of ranked portfolio returns[10].

The expected shortfall is a spectral risk measure with $\phi(p) = \frac{1}{\alpha} \times 1_{[0,\alpha]}(p)$ and conversely, any spectral risk measure can be expressed as a weighted average of expected shortfalls (see Appendix C for a proof of this result). As an example, let us turn back to the Denneberg risk

Mesures de risque et statistiques d'ordre

- Mesures spectrales de risque
  - Acerbi (2002). Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance*.
  - X est ici un gain (et pas une perte)

Definition 2.4. An element $\phi \in \mathscr{L}^1([0,1])$ is said to be an "admissible" risk spectrum if

(1) ϕ is positive,
(2) ϕ is decreasing,
(3) $\|\phi\| = 1$.

From the above discussion we can therefore easily prove the following

Theorem 2.5. *Let $M_\phi(X)$ be defined by*

$$M_\phi(X) = -\int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p)\phi(p)\,\mathrm{d}p \qquad (13)$$

with $\phi \in \mathscr{L}^1([0,1])$. If ϕ is an admissible risk spectrum then $M_\phi(X)$ is a risk measure.

Mesures de risque et statistiques d'ordre

- Mesures spectrales de risque
  - Acerbi (2002). Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance*.

Definition 5.1. Let $X_1, \ldots, X_N$ be N realizations of a r.v. X. For any given N-tuple of weights $\phi_{i=1,\ldots,N} \in \mathbb{R}$ we define the statistics

$$M_\phi^{(N)}(X) = -\sum_{i=1}^N X_{i:N}\phi_i. \qquad (24)$$

We will call $M_\phi^{(N)}$ the spectral risk measure generated by ϕ_i.

The discrete version of "admissible risk spectrum" sounds

Definition 5.2. An N-tuple $\phi_{i=1,\ldots,N} \in \mathbb{R}$ is said to be an "admissible" risk spectrum if

(1) $\phi_i \geqslant 0$ (ϕ_i is positive),
(2) $\phi_i \geqslant \phi_j$ if $i < j$ (ϕ_i is decreasing),
(3) $\sum_i \phi_i = 1$.

Mesures de risque et statistiques d'ordre

- Rank-dependent expected utility
  - Quiggin (1982). A theory of anticipated utility. *Journal of economic behavior & organization*.

Formal representation [edit]

As the name implies, the rank-dependent model is applied to the increasing rearrangement $\mathbf{y}_{[\,]}$ of $\mathbf{y}$ which satisfies $y_{[1]} \leq y_{[2]} \leq \cdots \leq y_{[S]}$.

$W(\mathbf{y}) = \sum_{s\in\Omega} h_{[s]}(\pi)u(y_{[s]})$ where $\pi \in \Pi, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, and $h_{[s]}(\pi)$ is a probability weight such that

$h_{[s]}(\pi) = q\left(\sum_{t=1}^{s} \pi_{[t]}\right) - q\left(\sum_{t=1}^{s-1} \pi_{[t]}\right)$ and $h_{[S]}(\pi) = q\left(\pi_{[S]}\right)$

for a transformation function $q : [0,1] \to [0,1]$ with $q(0) = 0, q(1) = 1$.

Note that $\sum_{s\in\Omega} h_{[s]}(\pi) = q\left(\sum_{t=1}^{S} \pi_{[t]}\right) = q(1) = 1$ so that the decision weights sum to 1.

Mesures de risque et statistiques d'ordre

- Supposons la mesure de risque invariante en loi et monotone
  - *Dans la suite, on suppose P uniforme*
- On considère des variables aléatoires discrètes
  - $F_X(u) = P(X \leq u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[x_i,\infty[}(u)$ *où* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *est l'ensemble des valeurs ordonnées prises par X pour les n scénarios*
  - *Soit* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *et* $y = (y_1, \dots, y_n)$ *:* $x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n$ *(ordre partiel usuel sur* $\mathbb{R}^n$*)*
  - $1_{[y_i,\infty[}(u) \leq 1_{[x_i,\infty[}(u)$, $\forall i, u$. *D'où* $F_Y \leq F_X$, *soit* $X \preccurlyeq Y$ *(Y est plus grand que X pour l'ordre stochastique usuel)*
- ρ (mesure de risque monotone) est une fonction croissante des valeurs ordonnées $x_1, \dots, x_n$
  - *En effet* $x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n \Leftrightarrow \rho(x_1, \dots, x_n) \leq \rho(y_1, \dots, y_n)$

Mesures de risque et statistiques d'ordre

- Supposons, outre invariance en loi et monotonie, que la mesure de risque est positivement homogène et comonotone additive
  - *Positive homogénéité,* $\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x)$ *pour* $\lambda \geq 0$, *implique* $\rho(0) = 0$
- Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_1 \geq \cdots \geq x_n$
  - $(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_2, 0, \dots, 0) + (x_2, x_2, x_3, \dots, x_n)$
  - *En utilisant comonotone additivité et positive homogénéité*
  - $\rho(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_2)\rho(1,0, \dots, 0) + \rho(x_2, x_2, x_3, \dots, x_n)$
  - $(1,0, \dots, 0) \geq (0,0, \dots, 0)$ *d'où* $\alpha_1 = \rho(1,0, \dots, 0) \geq 0$
  - $(x_2, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_2 - x_3, x_2 - x_3, 0, \dots, 0) + (x_3, x_3, x_3, x_4, \dots, x_n)$
  - *En utilisant comonotone additivité et positive homogénéité*
  - $\rho(x_2, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_2 - x_3)\rho(1,1,0, \dots, 0) + \rho(x_3, x_3, x_3, x_4, \dots, x_n)$
  - $\alpha_2 = \rho(1,1,0, \dots, 0) \geq \alpha_1 = \rho(1,0, \dots, 0) \geq 0$
  - *De même,* $\rho(x_3, x_3, x_3, x_4, \dots, x_n) = \alpha_3(x_3 - x_4)\rho(1,1,1,0, \dots, 0) + \cdots$

Mesures de risque et statistiques d'ordre

- On peut donc écrire $\rho(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1(x_1 - x_2) + \alpha_2(x_2 - x_3) + \cdots + \alpha_{n-1}(x_{n-1} - x_n) + \alpha_n x_n$
- Avec $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{n-1}$
- $\rho(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)x_2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha_{n-1})x_2$
- $\rho(x_1, \dots, x_n)$ s'écrit comme une combinaison linéaire à poids positifs des valeurs ordonnées des pertes
- La somme des poids est égale à $\alpha_n = \rho(1,1, \dots, 1)$
- Utilisons maintenant l'invariance par translation : $\rho(1,1, \dots, 1) = \rho(0,0, \dots, 0) + 1 = 1$
- La somme des poids est donc égale à 1 et comme les poids sont positifs ou nuls, on peut interpréter la mesure de risque comme une espérance des valeurs ordonnées des pertes.

Mesures de risque et statistiques d'ordre

- Considérons maintenant les implications de la sous-additivité
  - *Comme précédemment, on note* $x_1, \dots, x_n$ *les valeurs ordonnées des pertes :* $x_1 \geq \cdots \geq x_n$
- La **mesure worst-case** est définie par $\rho_W(X) = x_1$

- Sous-additivité de ρ_W
  - *Soit une deuxième variable aléatoire,* Y*, prenant les valeurs ordonnées* $y_1, \dots, y_n$ *:* $y_1 \geq \cdots \geq y_n$
  - *Valeurs ordonnées de* $X + Y$ *:* $(x+y)_1, \dots, (x+y)_n$
  - *On note* $X(s)$ *la valeur de* X *dans le scénario* $s = 1, \dots, n$
  - $(X+Y)(s) \leq x_1 + y_1, \forall s = 1, \dots, n$
  - $\rho_W(X+Y) = (x+y)_1 = \max_s (X+Y)(s) \leq x_1 + y_1 = \rho_W(X) + \rho_W(Y)$

Mesures de risque et statistiques d'ordre

- Mesure « worst-case » : l'inégalité $\rho_W(X+Y) \leq \rho_W(X) + \rho_W(Y)$ peut être stricte.

  - $X(1) = 10, X(2) = 60, X(3) = 50$
  - $Y(1) = 70, Y(2) = 10, Y(3) = 40$
  - $\rho_W(X) = 60$
  - $\rho_W(Y) = 70$
  - $\rho_W(X+Y) = 90 < 130$
  - *Le scénario* 1 *est le pire pour* X*, le scénario* 2 *est le pire pour* Y*, le scénario* 3 *est le pire pour* $X + Y$

Mesures de risque et statistiques d'ordre

- La propriété de sous-additivité ne s'applique pas aux autres statistiques d'ordre

  - *Exemple : considérons la deuxième pire perte avec trois scénarios*
  - *Rappel : la VaR à 99% pour 252 scénarios est la troisième pire perte*

  - $X(1) = 130, X(2) = 60, X(3) = 0$
  - $Y(1) = 0, Y(2) = 60, Y(3) = 140$
  - $(X+Y)(1) = 130, (X+Y)(2) = 120, (X+Y)(3) = 140$
  - $\rho(X) = 60$
  - $\rho(Y) = 60$
  - $\rho(X+Y) = 130 > \rho(X) + \rho(Y) = 120$

Mesures de risque et statistiques d'ordre

- Considérons maintenant la mesure de risque définie par $\rho(X) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$
  - *On supposera* $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$
  - *Soit deux scénarios* s_1, s_2
  - $\min\big(X(s_1), X(s_2)\big) \leq x_2$
  - *En effet si* $\min\big(X(s_1), X(s_2)\big) > x_2$*, alors* $\min\big(X(s_1), X(s_2)\big) = x_1$
  - *Mais comme les* $X(s)$ *sont strictement ordonnés, il ne reste plus de valeur « disponible » pour* $\max\big(X(s_1), X(s_2)\big)$
  - *Par ailleurs,* $\max\big(X(s_1), X(s_2)\big) \leq x_1$
  - *Comme* $\min\big(X(s_1), X(s_2)\big) + \max\big(X(s_1), X(s_2)\big) = X(s_1) + X(s_2)$
  - $X(s_1) + X(s_2) \leq x_1 + x_2$

Mesures de risques : allocation, bénéfices de diversification

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

VaR : bénéfices de diversification

- Analyse du risque par sous-portefeuille
  - *Deutsche bank (1999 et 2000)*

Group value-at-risk

in € m.	Total value-at-risk[1] 2000	1999	Interest rate risk 2000	1999	Equity price risk 2000	1999	Commodity price risk 2000	1999	Foreign exchange risk[2] 2000	1999
Year-end value-at-risk	37.7	61.3	35.2	58.0	12.3	17.8	2.9	1.4	5.0	8.0
Minimum value-at-risk	30.9	33.8	25.8	31.0	10.8	9.0	1.3	0.6	3.5	2.7
Maximum value-at-risk	65.5	61.3	62.6	58.0	42.2	27.4	6.8	3.8	11.8	19.9
Average value-at-risk	43.6	47.8	38.3	44.5	18.7	14.5	3.5	1.9	7.5	8.6

[1] one day holding period; confidence level 99 %
[2] without items excluded pursuant to § 5 (1) sentence 2 Principle I

  - *Remarque : le risque lié aux variations des marges de crédit (CSR ou credit spread risk) n'était pas pris en compte*
  - *Bénéfice de diversification :* $\left(\sum_{i=1}^{4} \mathrm{VaR}(a_i)\right) - \mathrm{VaR}\left(\sum_{i=1}^{4} a_i\right)$
  - *Fin d'année 2000 :* $(35{,}2 + 12{,}3 + 2{,}9 + 5) - 37{,}7 = 17{,}7$
  - *Fin d'année 1999 :* $(58 + 17{,}8 + 1{,}4 + 8) - 61{,}3{,}7 = 23{,}9$

VaR : bénéfices de diversification

- Analyse du risque par sous-portefeuille
  - *Deutsche bank (1999 et 2000)*

Group value-at-risk

in € m.	Total value-at-risk[1] 2000	1999	Interest rate risk 2000	1999	Equity price risk 2000	1999	Commodity price risk 2000	1999	Foreign exchange risk[2] 2000	1999
Year-end value-at-risk	37.7	61.3	35.2	58.0	12.3	17.8	2.9	1.4	5.0	8.0
Minimum value-at-risk	30.9	33.8	25.8	31.0	10.8	9.0	1.3	0.6	3.5	2.7
Maximum value-at-risk	65.5	61.3	62.6	58.0	42.2	27.4	6.8	3.8	11.8	19.9
Average value-at-risk	43.6	47.8	38.3	44.5	18.7	14.5	3.5	1.9	7.5	8.6

[1] one day holding period; confidence level 99 %
[2] without items excluded pursuant to § 5 (1) sentence 2 Principle I

  - *Fin d'année 2000 :* $35{,}2^2 + 12{,}3^2 + \cdots + 2\rho(35{,}2 \times 12{,}3 + \cdots) = (37{,}7)^2$
  - *Quelle est la valeur de ρ ? Si ρ faible, beaucoup de bénéfices de diversification*

Contributions au risque des sous-portefeuilles, allocation des bénéfices de diversification

- Contribution d'un sous-portefeuille a_i au risque du portefeuille global a : Incremental VaR : $\mathrm{VaR}(a) - \mathrm{VaR}(a - a_i)$
  - *Quelle économie (si la quantité précédente est positive) de VaR ferait-on si on liquidait le portefeuille* a_i *?*
  - *Ne peut pas être calculée à partir de données publiques :* $\mathrm{VaR}(a - a_i)$ *?*
  - $\mathrm{VaR}(a) \neq \sum_{i=1}^{I} \left(\mathrm{VaR}(a) - \mathrm{VaR}(a - a_i)\right)$
  - *Somme des contributions ≠ VaR*
  - *La décision à prendre pour gérer un risque n'est pas forcément de liquider ou pas tout un portefeuille*
- Contribution d'un sous-portefeuille a_i au risque du portefeuille global a : proportional method
  - $\mathrm{VaR}(a_i) \times \left(\frac{\mathrm{VaR}(a)}{\sum_i \mathrm{VaR}(a_i)}\right)$
  - *Facile à calculer et peu manipulable (et allocation additive)*

Contributions au risque des sous-portefeuilles, allocation des bénéfices de diversification

- Component VaR : $a_i \frac{\partial \mathrm{VaR}(a_1,\dots,a_I)}{\partial a_i}$
  - $\mathrm{VaR}(a_1,\dots,a_I) = \sum_i a_i \frac{\partial \mathrm{VaR}(a_1,\dots,a_I)}{\partial a_i}$ *(additivité)*
  - *Conséquence d'un résultat d'Euler sur les fonctions dérivables positivement homogènes de degré* 1
  - *Rappel :* $\mathrm{VaR}(\lambda a_1,\dots,\lambda a_I) = \lambda \times \mathrm{VaR}(a_1,\dots,a_I)$ *pour* $\lambda > 0$
  - *Dérivabilité de la VaR (cas de distribution discrètes, de la méthode historique) Manipulation au niveau des desks ?*
  - *Contributions négatives au risque* $\frac{\partial \mathrm{VaR}(a_1,\dots,a_I)}{\partial a_i} < 0$
  - *Contributions des positions individuelles et des desks et emboîtements …*
- Autres points :
  - *voir infra sur la sensibilité de la VaR, risk- parity allocation*
  - *Allocations (Shapley value, …)*
  - *Composite VaR (FRTB), mélanges de calculs gaussiens et non gaussiens, copules*

VaR : bénéfices de diversification

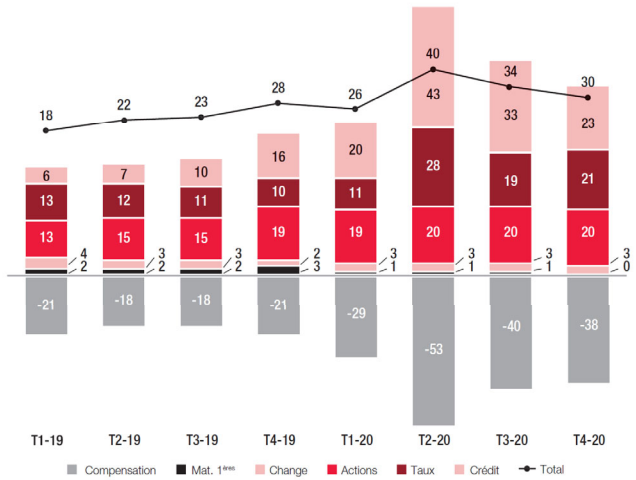
- Décomposition de la VaR 1J 99% (BNP Paribas document enregistrement universel – page 432)
  - *Sur l'exercice 2020, on constate que la somme des VaR pour les 5 grandes catégories de risque est égale à 94 millions € en moyenne*
  - *La VaR « global markets » n'est que de 45 €, soit un bénéfice de diversification d'environ 50% (49 millions d'euros)*

➤ **TABLEAU N° 83 : VALEUR EN RISQUE (1 JOUR, 99 %)** [Audité]

	Exercice 2020				Exercice 2019	
En millions d'euros	Minimum(**)	Moyenne	Maximum(**)	Dernière mesure	Moyenne	Dernière mesure
Risque de taux	16	30	46	28	19	24
Risque de crédit	11	23	40	21	11	12
Risque de change	4	12	20	13	7	6
Risque de prix attaché aux actions	10	23	52	30	10	9
Risque de prix attaché aux matières premières	2	6	13	13	4	3
Effet des compensations(*)		*(49)*		*(58)*	*(27)*	*(30)*
TOTAL DE LA VALEUR EN RISQUE	**22**	**45**	**72**	**47**	**24**	**24**

Non sous-additivité de la VaR ? Société Générale 2020

AUDITÉ | VENTILATION PAR FACTEUR DE RISQUE DE LA VAR DE *TRADING* (UN JOUR, 99%) - ÉVOLUTION 2019-2020 DE LA MOYENNE TRIMESTRIELLE (EN M EUR)



En pratique, on a souvent un bénéfice de diversification. Par exemple au 2e trimestre, VaR totale = 43 M €, somme des VaR pour les ≠ grands portefeuilles = 95 M€, bénéfice de diversification = 53 M €

Non sous-additivité de la VaR ? Crédit Suisse 2020

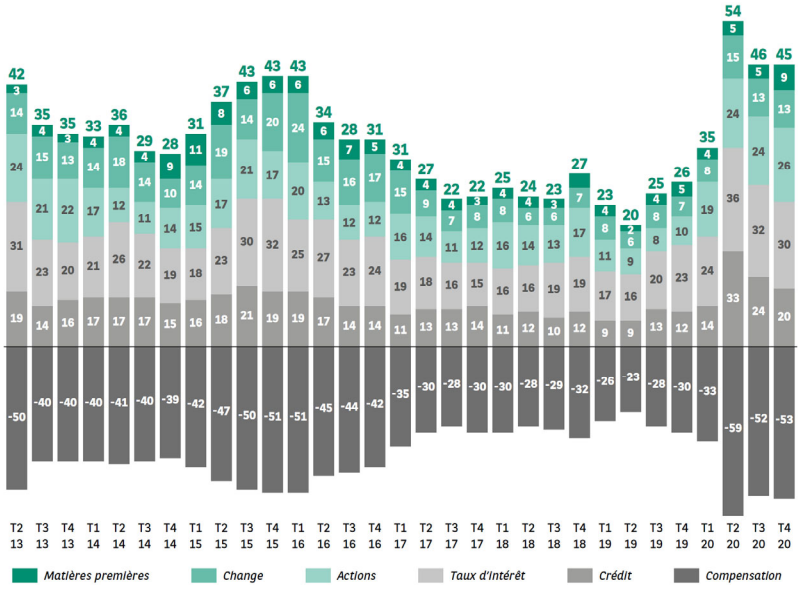
- Décomposition de la VaR 1J 99% (annual report page 189)
  - *On constate un bénéfice de diversification nettement plus élevé de 270 millions d'euros (fin d'année) rapporté à une VaR totale de 51 millions d'euros (méthode historique et non méthode paramétrique)*

Ten-day, 99% VaR – trading portfolios

End of period	Interest rate and credit spread	Foreign exchange [1]	Commodity [1]	Equity	Diversification benefit [2]	Total
2020 (USD million)						
Average	83	40	4	41	(122)	46
Minimum	16	2	1	12	– [3]	15
Maximum	162	178	11	92	– [3]	147
End of period	57	172	6	86	(270)	51
2019 (USD million)						
Average	28	6	4	17	(26)	29
Minimum	18	3	2	8	– [3]	16
Maximum	49	17	9	43	– [3]	57
End of period	20	3	3	13	(20)	19

Évolution du bénéfice de diversification

➤ GRAPHIQUE N° 12 : ÉVOLUTION TRIMESTRIELLE DE LA VAR (1 JOUR, 99 %)



VaR : bénéfices de diversification

- Exercice : corrélations implicites entre facteurs de risque
  - BNP Paribas est choisi ici parce qu'étant la seule grande banque à utiliser un modèle paramétrique
  - *En supposant les corrélations entre les cinq grandes familles de facteurs de risque constantes et en faisant l'hypothèse de VaR gaussienne, calculer la corrélation entre ces facteurs de risque.*
  - *Calculer l'évolution de la corrélation par trimestre au cours de l'année 2020*
  - *Examiner les dernières modifications du FRTB-SA (SBM et NMRF) à propos de la prise du bénéfice de diversification et comparer les valeurs*
    - NMRF : facteurs de risque non-modélisables (par manque de données)
  - *Pourquoi n'est-il pas possible de calculer les bénéfices de diversification quand on considère les valeurs maximales ou minimales ?*
  - *Sachant que SG et CS, utilisent une méthode non paramétrique, que dire des corrélations implicites en comparaison d'une approche paramétrique pour une année de turbulence (année Covid) ?*

VaR : bénéfices de diversification (JP Morgan)

- À compléter bénéfices de diversification pour JP Morgan (2020) – voir exercice du 31 mars
- À compléter bénéfices de diversification pour Stressed VaR
- À compléter analyse des ratios SVaR / VaR

Dérivées partielles de la VaR dans le cas gaussien

- $\mathrm{VaR}_\alpha(a) = -a^*\bar{\mu} + (a^*\bar{\Omega}a)^{1/2}\Phi^{-1}(\alpha)$
- $\frac{\partial \mathrm{VaR}_\alpha(a)}{\partial a} = -\bar{\mu} + \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{(a^*\bar{\Omega}a)^{1/2}}\bar{\Omega}a$
  - Par calcul matriciel et analytique standard
- $\frac{\partial^2 \mathrm{VaR}_\alpha(a)}{\partial a \partial a^*} = \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{(a^*\bar{\Omega}a)^{1/2}} \times \left[\bar{\Omega} - \frac{\bar{\Omega}aa^*\bar{\Omega}}{a^*\bar{\Omega}a}\right] = V\left[\vec{P}_{t-1} - \vec{P}_t | a^*\left(\vec{P}_{t-1} - \vec{P}_t\right) = \mathrm{VaR}_\alpha(a)\right]$
  - Gouriéroux, Laurent & Scaillet (2000). Sensitivity analysis of values at risk. *Journal of empirical finance*.
  - *On en déduit que la matrice hessienne est semi-définie positive et donc que* $a \to \mathrm{VaR}_\alpha(a)$ *est convexe dans le cas gaussien*

Expected Shortfall : cas gaussien

- $ES_{t-1,\alpha}(X) = E_{t-1}\left[X | X > \mathrm{VaR}_{t-1,\alpha}(X)\right]$
  - *Où X est la perte entre les dates $t-1$ et t*
  - *Définition valable si la loi (conditionnelle) de X est continue*
  - *Sinon, problème si $P\left(X = \mathrm{VaR}_{t-1,\alpha}(X)\right) > 0$*
  - *Ce qui arrive avec les méthodes « historiques » et de « Monte Carlo »*
- Cas gaussien : on note $\sigma_t = (E[(X - E[X])^2 | \mathcal{F}_{t-1}])^{\frac{1}{2}}$
  - *On suppose $E[X] = 0$*
- $ES_{t-1,\alpha} = \sigma_t \times \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{1-\alpha} \approx 2{,}34 \times \sigma_t$ pour $\alpha = 97.5\%$
  - $\mathrm{VaR}_{99\%}(X) \approx 2{,}32 \times \sigma_t$ *(d'où les choix du FRTB)*
- L'ES est un multiple de l'écart-type (conditionnel)
  - *Si $E[X] \neq 0$, utiliser l'invariance par translation*
- A partir des expressions de l'ES gaussien, on peut vérifier facilement positive homogénéité, sous-additivité, invariance par translation

VaR gaussienne : limites

- Il est traditionnel dans la littérature académique de critiquer la VaR (gaussienne)
  - *Non sous-additivité de la VaR : faux dans le cas gaussien*
  - *Caractère non-gaussien des facteurs de risque, à la fois pris indépendamment et en considérant la distribution jointe (hypothèse de copule gaussienne) ?*
  - *Plus gênant : positions optionnelles*
  - *A propos de la non sous-additivité : pose rarement problème en pratique, y compris avec la méthode historique*
    - Essentiellement, situations liées au risque de crédit, en petite dimension.
    - En effet, pour des quantiles élevés, la VaR se rapproche d'une mesure de risque « worst-case » qui est toujours sous-additive
    - La VaR gaussienne est sous-additive (pour les niveaux usuels des quantiles)

La chute de Credit Suisse en Bourse fait plonger les banques européennes comme BNP Paribas et Société générale

A la mi-journée, l'action de la banque Credit Suisse dévissait de plus de 30 %, à un plus bas historique, ravivant les craintes pour l'ensemble du secteur.

14:21

La chute de l'action Credit Suisse s'accèlère à -30%

La journée noire continue pour la banque européenne qui s'affiche en baisse de 30% à 14h21.

LE PLONGEON EN BOURSE DE CREDIT SUISSE PROVOQUE UN VENT DE PANIQUE SUR LES BANQUES

Aujourd'hui à 12:34

(BFM Bourse) - La banque suisse plonge à la Bourse de Zurich, après qu'un de ses principaux actionnaires a déclaré qu'il ne comptait pas apporter de l'argent frais à l'établissement en cas de besoin.

VaR gaussienne : jumps ?

- Discontinuités dans les returns ?
  - *Cours de la Société Générale et du Crédit Suisse le 15 mars 2023.*
  - *Baisse de l'ordre de 13% pour SG et jusqu'à 30% pour CS*
  - *Mais pas de grands « sauts » dans la journée*
  - *Très gros ordres, notamment pour CS (nettoyage du carnet d'ordres)*

VaR gaussienne : jumps ?

- Cours sur les 5 derniers jours (avant le 15 mars 2023)
  - *Discontinuités, notamment à l'ouverture*
  - *En ce qui concerne les volumes, très gros volumes à la clôture (accumulation des ordres)*
  - *Notamment la veille de la chute brutale, surtout pour CS …*

VaR et positions optionnelles

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

VaR et positions optionnelles

- Approximations linéaires : développements limités en Delta / Vega
  - *Permet de rester dans le cadre analytique gaussien*
- Ne prend pas en compte les non-linéarités : Gamma effects.
- Cas particulier : positions directionnelles et un seul facteur de risque
  - *Exemple : position longue dans un call*
  - *Cas un plus général : le delta de la position reste positif*
  - *Dans ce cas, VaR et fonction reliant valeur et facteur de risque commutent.*

VaR et positions optionnelles

- Exemple : position longue dans une option d'achat
- On note $r_t = (S_{t+1} - S_t)/S_t$ la rentabilité (variation relative du prix du sous-jacent de l'option)
  - $P((S_{t+1} - S_t)/S_t \leq -\mathrm{VaR}_\alpha(S)) = 1 - \alpha$
- Supposons que le prix de l'option ne dépende que du sous-jacent.
  - *Notons $C(t, S_t)$ la prime de l'option à la date t*
  - $P\big(\big(C(t+1, S_{t+1}) - C(t, S_t)\big)/C(t, S_t) \leq -\mathrm{VaR}_\alpha(C)\big) = 1 - \alpha$
  - *Remarque : dans le cadre du FRTB, la VaR va être définie en considérant des chocs « instantanés »* $\big(C(t, S_{t+1}) - C(t, S_t)\big)/C(t, S_t)$
  - *Voir plus loin à propos du « theta effect ».*
  - *Autre alternative :* $\big(C(t+1, T, S_{t+1}) - C(t, T, S_t)\big)/C(t, T, S_t)$ *(constant maturity) vs* $\big(C(t+1, T+1, S_{t+1}) - C(t, T, S_t)\big)/C(t, T, S_t)$ *(constant level of risk) où* $T, T+1$ *dates d'exercice.*

VaR et positions optionnelles

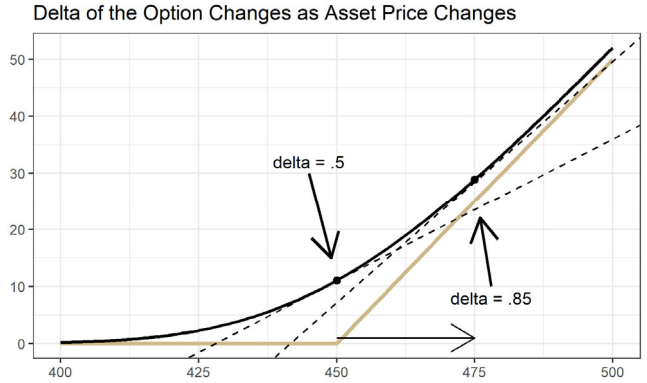
- Relation entre $\mathrm{VaR}_\alpha(C)$ et $\mathrm{VaR}_\alpha(S)$
  - $P((S_{t+1} - S_t)/S_t \leq -\mathrm{VaR}_\alpha(S)) = 1 - \alpha$
  - $P(S_{t+1} \leq S_t(1 - \mathrm{VaR}_\alpha(S))) = 1 - \alpha$
  - *Notons* $F_S(x) = P(S_{t+1} \leq x)$ *et supposons* F_S *inversible*
  - $S_t\big(1 - \mathrm{VaR}_\alpha(S)\big) = F_S^{-1}(1 - \alpha)$
  - *Par ailleurs,* $P(C(S_{t+1}) \leq C(S_t)(1 - \mathrm{VaR}_\alpha(C)) = 1 - \alpha$
  - *Comme* $\frac{d}{dx}C(x) > 0$, $P\left(S_{t+1} \leq C^{-1}\big((C(S_t)(1 - \mathrm{VaR}_\alpha(C))\big)\right) = 1 - \alpha$
  - *Soit* $C^{-1}\big((C(S_t)(1 - \mathrm{VaR}_\alpha(C))\big) = F_S^{-1}(1 - \alpha)$
  - *En utilisant les deux égalités en violet,*
  - $C(S_t)(1 - \mathrm{VaR}_\alpha(C) = C\left(S_t\big(1 - \mathrm{VaR}_\alpha(S)\big)\right)$
  - $\mathrm{VaR}_\alpha(C) = \frac{C(S_t) - C\left(S_t\left(1 - \mathrm{VaR}_\alpha(S)\right)\right)}{C(S_t)}$

VaR et positions optionnelles

- $\mathrm{VaR}_\alpha(C) = \frac{C(S_t) - C\left(S_t\left(1-\mathrm{VaR}_\alpha(S)\right)\right)}{C(S_t)}$
  - $S_t\mathrm{VaR}_\alpha(S)$ *est le choc à appliquer au sous-jacent*
- La VaR sur la position optionnelle est obtenue en calculant la variation relative de l'option après application du choc
  - *Ceci si on considère une position où le delta reste positif.*
    - Dans le cas où le delta resterait négatif (short call ou long put), il faudrait considérer des variations à la hausse du sous-jacent, ce qui va impliquer de regarder $\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(S)$ (risque bilatéral)
  - *Notons* $\delta_C = \frac{d}{dS}C(S)$. *Pour un call* $\delta_C = N(d_1) \leq 1$.
  - $C(S_t) - C\left(S_t\left(1-\mathrm{VaR}_\alpha(S)\right)\right) \leq \delta_C S_t \mathrm{VaR}_\alpha(S)$ *car le gamma est positif*
  - *Dans ce cas, l'approche par linéarisation est conservatrice.*

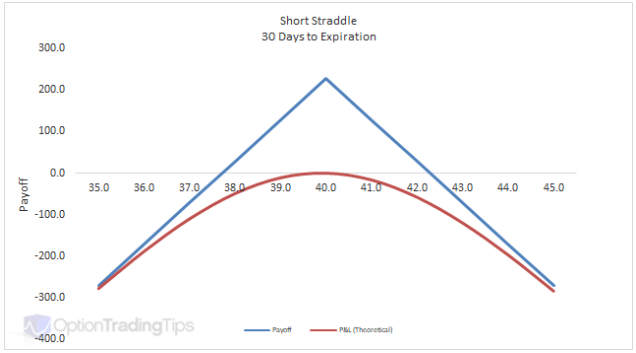
VaR gaussienne : positions optionnelles

- Cas des positions optionnelles : Quid si l'on remplace l'option par l'équivalent delta (i.e. développement limité à l'ordre 1)
  - *La perte maximale (worst case) est égale à la valeur de l'option*
  - *Ce n'est plus le cas avec l'approximation linéaire*



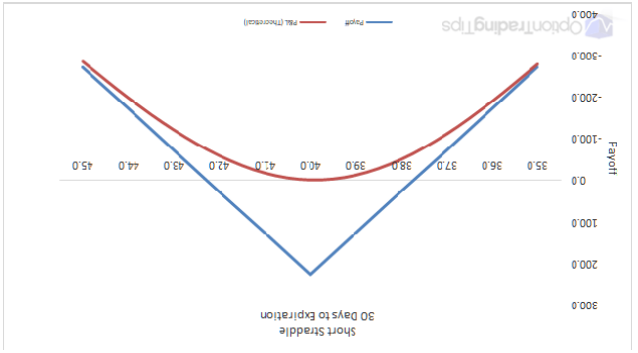
VaR gaussienne : positions optionnelles

- Positions optionnelles : ATM short straddle (short gamma)
  - *L'approximation linéaire (sous jacent égal à 40) donne une VaR nulle*
  - *Alors qu'elle est manifestement positive (curvature risk)*
  - *Problème similaire avec un short-call delta hedgé*



VaR gaussienne : positions optionnelles

- Positions optionnelles : ATM short straddle (short gamma)
  - *L'approximation linéaire (sous jacent égal à 40) donne une VaR nulle*
  - *Alors qu'elle est manifestement positive (curvature risk)*
  - *Problème similaire avec un short-call delta hedgé*



VaR gaussienne : positions optionnelles

- Positions optionnelles : FRTB SA-SBM : on définit un choc à la hausse et un choc à la baisse

(a) i is an instrument subject to curvature risks associated with risk factor k;

(b) x_k is the current level of risk factor k;

(c) $V_i(x_k)$ is the price of instrument i at the current level of risk factor k;

(d) $V_i\left(x_k^{\left(RW^{(curvature)+}\right)}\right)$ and $V_i\left(x_k^{\left(RW^{(curvature)-}\right)}\right)$ denote the price of instrument i after x_k is shifted (ie "shocked") upward and downward respectively;

https://www.bis.org/basel_framework/chapter/MAR/21.htm

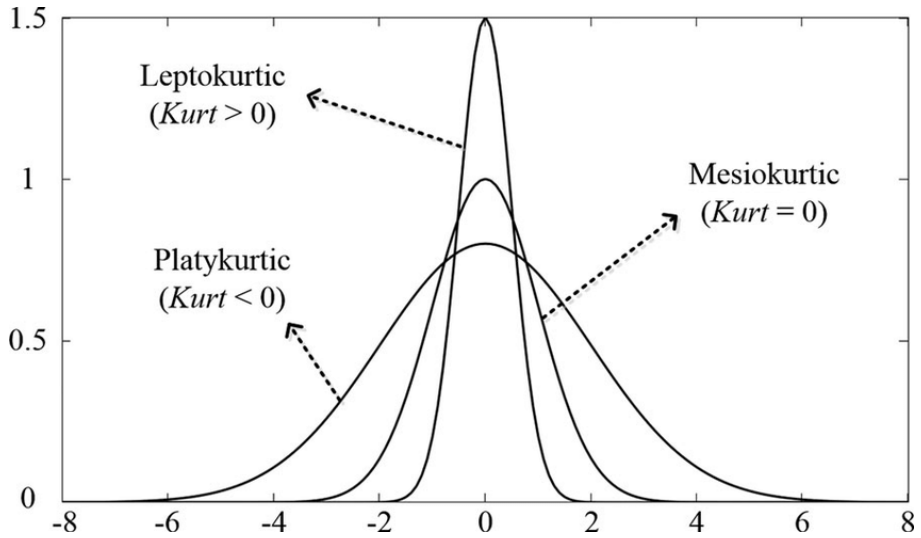
VaR : volatilité stochastique, mélange de lois normales

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

VaR gaussienne : remarques

- Caractère non-gaussien des (variations absolues ou relatives) des facteurs de risque
  - *Il est connu que les distributions marginales des rentabilités des actifs financiers, notamment des actions ont des queues de distribution plus épaisses que la normale*
  - *Et on dispose d'une théorie intéressante des valeurs extrêmes.*
  - *Un symptôme des écarts à la normalité est une kurtosis élevée.*
  - *On rappelle que la kurtosis de X, variable aléatoire* ***centrée*** *avec un moment d'ordre 4 fini est définie par* $\kappa(X) = \frac{E(X^4)}{(E(X^2))^2}$
  - $\kappa(X) = 3$ *si X suit une loi normale,* $\kappa(X) > 3$ *pour une distribution à queues épaisses (leptokurtique)*
  - $\kappa(X) - 3$ *est l'excess kurtosis*

VaR gaussienne : remarques



VaR gaussienne : remarques

- Gaussien ou non-gaussien ?
- Tout dépend de ce que l'on regarde ?
  - *Distributions non conditionnelles (marginales) des rentabilités ont des queues de distribution plus épaisses que la loi normale*
  - *Il faut appliquer un coefficient multiplicateur à l'écart-type plus important que dans le cas de la loi normale pour obtenir une VaR à 99%*
  - *Ce phénomène provient pour une bonne part des variations de la volatilité*
  - *Si l'on travaille sur des fenêtres de calcul plus courtes (un an) et des périodes où la volatilité a peu fluctué, les kurtosis tendent à être plus faibles*
  - *Exercice sur un mélange de deux lois gaussiennes, de même moyenne et de volatilité différentes*

A propos des queues de distribution épaisses

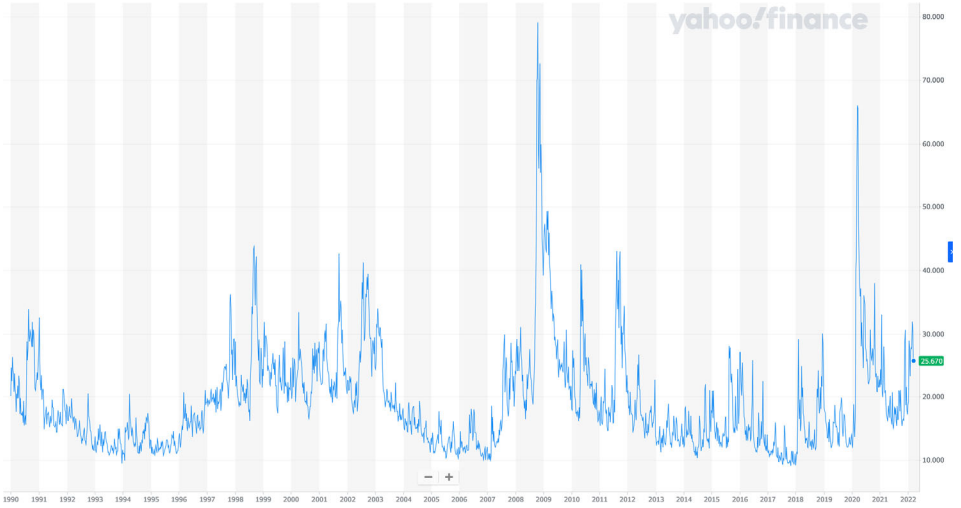
- Loi marginales ou conditionnées par la volatilité ?

> 'Fat tails' are often posited as the reason that VaR models can be unsuitable for risk measurement, but in fact, it is volatility clustering that tends to cause real problems for VaR models. The issue is not simply that the tails are fat, but that, much like London buses, you can spend ages waiting for a move in the tail and then see a whole number of big moves come along all at once.
>
> Any VaR model that aims to accurately measure near term market risk, would do well to establish whether it believes 'current volatility' is high or low, rather than to simply use a uniform time period form history and hope things are 'about average'.

- Source : Deloitte (2020)

Crises de 2008 (financière endogène), de 2011 (zone euro, Grèce), de 2020 (exogène) et de 2022

- Niveaux de l'indice VIX du CBOE



Exercice : mélange de lois gaussiennes

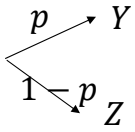
- Les modèles GARCH avec innovation gaussienne ou les modèles à volatilité stochastique (y compris les modèles à volatilité rugueuse)
- VaR à court-terme (1J) : on reste dans un cadre gaussien
- Il faut que les innovations (returns divisés par volatilité courante) soient non gaussiens pour s'écarter du paradigme gaussien
  - *Par exemple, modèles avec une composante de sauts (innovation suivant un processus de Lévy)*
  - *Dans le cadre des modèles GARCH : innovation suivant une loi de Student*
- Quand on regarde les returns normalisés (divisés par la volatilité courante), les phénomènes de queues épaisses ou de leptokurticité sont beaucoup moins marqués.

Exercice : mélange de lois normales

- Volatilité aléatoire
- On considère que la volatilité peut avoir deux valeurs σ_B, σ_H avec $\sigma_H > \sigma_B$
- Et avec probabilités $p_H, p_B = 1 - p_H$
- Les moyennes sont nulles
- Montrer que la kurtosis augmente avec σ_H

Kurtosis et mélange de lois gaussiennes

- $Y \sim N(0,1), Z \sim N(0,\sigma), \sigma > 1$
- $X = BY + (1-B)Z$, $B \sim B(p)$
  - $0 < p < 1$
- Y, Z, B indépendantes
  - *On peut simuler X par un double tirage au hasard, d'abord pour savoir si on choisit de tirer Y ou bien Z, puis simuler Y ou bien Z*
  - *Sachant la variable de Bernoulli B, X est gaussien*
  - *Exemple d'article utilisant un mélange de deux lois gaussiennes*
    - Hull & White (1998). Value at risk when daily changes in market variables are not normally distributed. *Journal of derivatives*.
- Questions :
  - *Calculer la kurtosis de X*
  - *Montrer qu'elle est supérieure à 3*
  - *Et que la kurtosis augmente avec σ*



Kurtosis et mélange de lois gaussiennes

- Une modélisation avec un mélange de (deux) lois normales est une manière simple de présenter l'impact de la volatilité stochastique sur le risque
- Dans un modèle à volatilité stochastique du type Heston ou Hull et White, la volatilité suit un processus diffusif
  - *Dynamique prix/volatilité dans le modèle d'Heston*

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sqrt{V(t)}dW_1, \qquad (1.1)$$

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2. \qquad (1.2)$$

- Si le processus de la volatilité est indépendant de celui du prix (lui-même supposé être un processus diffusif, les variations relatives (locales) des prix $\frac{dS(t)}{S(t)}$ suivent une loi normale sachant la volatilité $\sqrt{V(t)}$

Exercice : mélange de lois normales

- $X = BY + (1-B)Z$
- $X^2 = BY^2 + (1-B)Z^2$ car $B(1-B) = 0$
- $X^4 = BY^4 + (1-B)Z^4$
- $E[X^2] = E\left[E[X^2|B]\right] = E[B + (1-B)\sigma^2] = p + (1-p)\sigma^2$
- De la même manière : $E[X^4] = 3(p + (1-p)\sigma^4)$
- D'où $\kappa = 3\frac{p+(1-p)\sigma^4}{(p+(1-p)\sigma^2)^2}$ (partie facile du calcul)
- On veut maintenant montrer que : $\frac{p+(1-p)\sigma^4}{(p+(1-p)\sigma^2)^2} > 1$
  - *Proposition de démonstration (il en existe probablement de plus simples)*
  - $p + (1-p)\sigma^2 = (p-1) + 1 + (1-p)\sigma^2 = 1 + (1-p)(\sigma^2 - 1)$
  - $p + (1-p)\sigma^4 = 1 + (1-p)(\sigma^4 - 1)$

Exercice : mélange de lois normales

- On veut maintenant montrer que : $\frac{p+(1-p)\sigma^4}{(p+(1-p)\sigma^2)^2} > 1$
  - *Proposition de démonstration (il en existe probablement de plus simples)*
  - $p + (1-p)\sigma^2 = 1 + (1-p)(\sigma^2 - 1) = 1 + a$, *avec* $a > 0$
  - $p + (1-p)\sigma^4 = 1 + (1-p)(\sigma^4 - 1) = 1 + b$, *avec* $b > 0$
  - $\frac{1+b}{(1+a)^2} = \frac{1+b}{1+2a+a^2} > 1 \Leftrightarrow b > 2a + a^2$
  - $(1-p)(\sigma^4 - 1) > 2(1-p)(\sigma^2 - 1) + (1-p)^2(\sigma^2 - 1)^2$
  - *Après simplification par* $1-p$
  - $\sigma^4 - 1 > 2(\sigma^2 - 1) + (1-p)(\sigma^2 - 1)^2$
  - *Comme* $\sigma^4 - 1 = (\sigma^2 - 1)(\sigma^2 + 1)$, *après simplification par* $\sigma^2 - 1$
  - $\sigma^2 + 1 > 2 + (1-p)(\sigma^2 - 1)$
  - $\sigma^2 - 1 > (1-p)(\sigma^2 - 1)$, *ce qui est vrai*
- Que se passe-t-il si σ augmente ?

Exercice : mélange de lois normales

- (suite) : est-ce que la VaR augmente si $\sigma \uparrow$?
  - *A priori, oui (essayer de passer par les fonctions de répartition)*
  - *Car la VaR est liée à l'inverse de la fonction de répartition*
  - *Méthode numérique possible : calculer* $VaR_\alpha(p, \sigma)$
  - *À regarder pour vendredi prochain*
- Fonction de répartition :
  - $P(X < x) = E[P(X < x|B)] = E\left[B\Phi(x) + (1-B)\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right] = p\Phi(x) + (1-p)\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$
- Il faut ensuite résoudre : $p\Phi(x) + (1-p)\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \alpha$
  - *Plus précisément voir comment la solution* x *dépend de* σ

Calculs VaR gaussienne : remarques

- Concepts de skewness et de kurtosis introduits par Karl Pearson en 1905
  - *Ainsi que la classification des distributions en leptokurtique, platykurtique (ou platikurtique) et mésokurtique*
  - *Nombreuses discussions sur l'interprétation d'une kurtosis élevée*
    - Fiori & Zenga (2009). Karl Pearson and the origin of kurtosis. *International Statistical Review*
    - Balanda & MacGillivray (1988). Kurtosis: a critical review. *The American Statistician.*
- Exemples : évolution de la kurtosis pour Société Générale et pour l'indice CAC40

VaR et corrélations entre facteurs de risque

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Calculs VaR gaussienne : corrélations

- L'approche standard du FRTB, notamment en matière d'agrégation des risques est de type gaussien, avec une granularité (environ 5000 facteurs de risque) des écarts-types et des corrélations prescrites par le comité de Bâle
  - *Seules les grecques (Delta, Vega, chocs pour le « curvature risk » dépendent des modèles de pricing internes à la banque*
- Son calcul et son reporting (au moins auprès des superviseurs) est obligatoire, même pour les banques qui recourent à titre principal à l'approche par les modèles internes
- Parmi les problèmes pratiques, la granularité des facteurs de risque, spécifiée par le régulateur et différente des modèles internes, le calcul des deltas et de la « curvature »

VaR gaussienne : corrélations

- Il ne faut pas seulement regarder les variations temporelles des volatilités, mais aussi celles des corrélations
  - *Pour n facteurs de risque,* $\frac{n(n-1)}{2}$ *corrélations*
  - *Pour* $n \approx 5000$ *(FRTB – SA),* 12 497 500 *paramètres de corrélation*
  - *Sauf à raisonner de manière hiérarchique …*
  - *A compléter*

Cross-asset correlations in a more inflationary environment and challenges for diversification strategies

Prepared by Benjamin Mosk, Lorenzo Pangallo and Sebastiano Michele Zema

Published as part of the Financial Stability Review, November 2022.

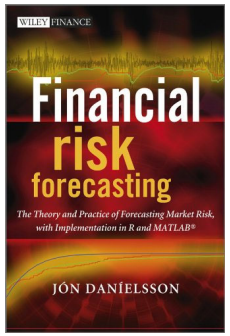
Calcul de VaR gaussiennes

- Écart-type des rentabilités
- $\sigma = \bar{x} \times \sqrt{\sum_i \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$
- Écarts-types calculés de manière glissante sur 252 jours
- À partir des rentabilités quotidiennes en euros
- Rentabilités historiques à partir de janvier 2006, VaR à partir de janvier 2007

Date 1 = 01/01/2007	VaR gaussienne
Date 2 = 02/01/2007	VaR gaussienne
Date 3 = 03/01/2008	VaR gaussienne
…	…
…	…
…	…
…	…
Date fin = 15/02/2024	VaR gaussienne

VaR Gaussienne : EWMA VaR

- équation (3.1) donne l'évolution de la matrice de variance-covariance des returns y_t à la date courante t, notée $\hat{\Sigma}_t$
- (3.1) $\hat{\Sigma}_t = \lambda\hat{\Sigma}_{t-1} + (1-\lambda)y'_{t-1}y_{t-1}$
- λ : est un paramètre appelé "decay factor"
- Souvent pris égal à 0,94 (valeur conventionnelle depuis les travaux initiaux de RiskMetrics et JP Morgan)
- On peut ensuite calculer la volatilité du portefeuille, puis la VaR (gaussienne) du portefeuille.
  - *Pour une VaR à 99%, facteur multiplicatif de 2.33*



VaR Gaussienne : EWMA VaR

- Extrait du livre de Jon Danielsson

3.2 EWMA

Perhaps the easiest multivariate volatility model to implement is EWMA. The univariate form of the model from (2.2) is:

$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2,$$

where the weight λ is assumed to be known—often set at 0.94 for daily returns. The multivariate form of the model is essentially the same:

$$\mathbf{(3.1)}\quad \Sigma_t = \lambda\Sigma_{t-1} + (1-\lambda)y'_{t-1}y_{t-1}$$

with an individual element given by:

$$\mathbf{(3.2)}\quad \sigma_{t,ij} = \lambda\sigma_{t-1,ij} + (1-\lambda)y_{t-1,i}y_{t-1,j},\quad i,j = 1,\ldots,K.$$

The covariance matrix can be forecast by applying (3.2) separately to each asset and pair of assets in the portfolio. Implementing the EWMA model is thus straightforward, even for a large number of assets. Coupled with the fact that the covariance matrix is guaranteed to be positive semi-definite, it is not surprising that EWMA is often the chosen method.

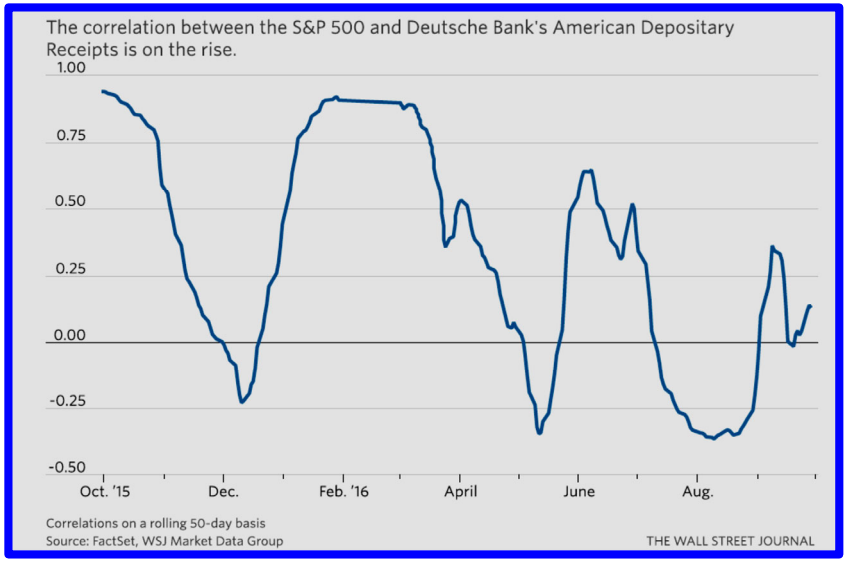
The downside is its restrictiveness, both because of the simple structure and the assumption of a single and usually non-estimated λ. In applications, this often means that covariances seem to move excessively (as suggested by Figure 3.1, see p. 66). It is of course not hard to estimate λ with QML.

VaR gaussienne et corrélations

- Instabilité temporelle des corrélations empiriques

golien. Mesurez la corrélation entre les couples de variables à des sous-périodes différentes, par exemple pour 1994, 1995, 1996, etc. Il y a des chances que cette mesure manifeste une grave instabilité ; elle dépendra de la période pour laquelle elle a été calculée. Pourtant, on parle de la corrélation comme s'il s'agissait d'un phénomène réel, en faisant une chose tangible, l'investissant d'une nature physique, la réifiant.

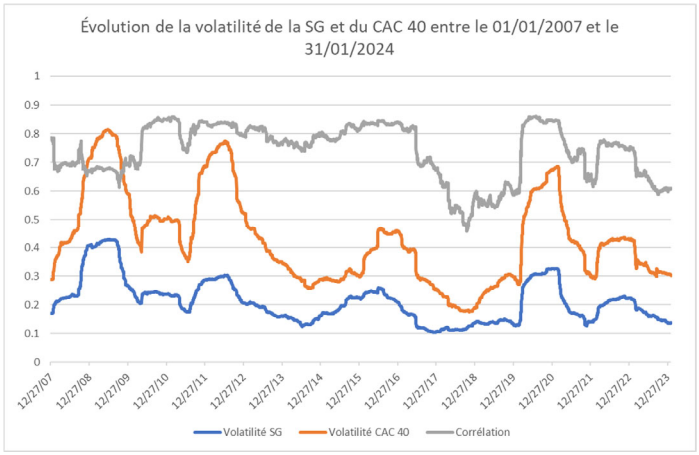
Corrélation entre la rentabilité de l'indice S&P500 et de l'action Deutsche Bank (calculée en $) fluctue entre 90% et -30%



Fin septembre 2015 – Fin septembre 2016, calculée sur 50 jours glissants

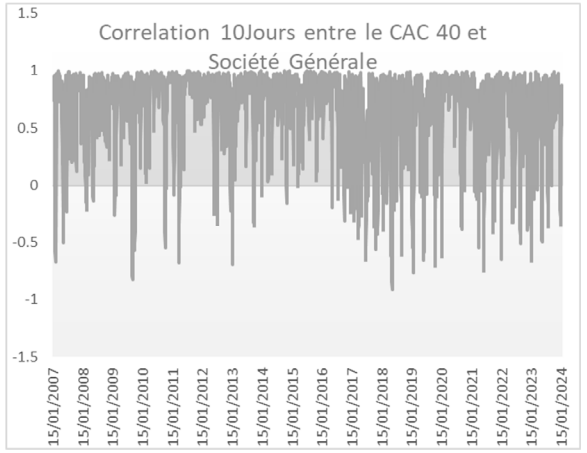
Instabilité des corrélations glissantes

- Source : D-L (rentabilité CAC vs rentabilité SG)



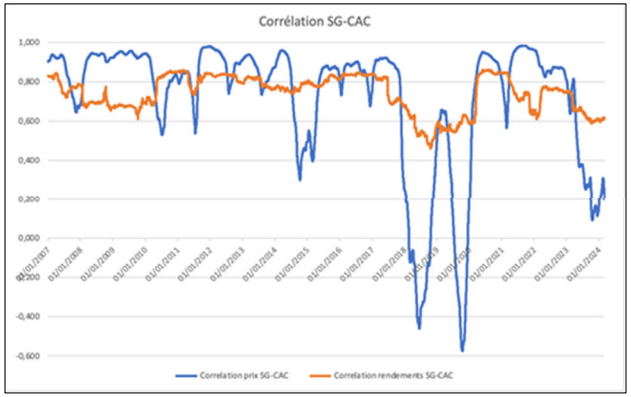
Instabilité des corrélations glissantes ?

- Source : B-B (rentabilité CAC vs rentabilité SG)



Corrélations glissantes : considérer des variations relatives ou absolues et pas des niveaux

- Source B-B



VaR (gaussienne) et corrélations

- Choix de portefeuille en présence d'incertitude sur les corrélations
- Ambiguïté par rapport à la structure de dépendance entre facteurs de risque
  - $\mathcal{R}(C||C_0)$ *: mesure de l'écart entre une structure de dépendance (matrice de corrélation dans le cas gaussien) a priori* C_0 *et* C
  - $\lambda\mathcal{R}(C||C_0)$ *est un terme de pénalité*

$$\sup_{\theta\in\Theta}\inf_{C\in\mathcal{C}_n}\left\{\mathbb{E}^C\left[U\left(W_T(\theta)\right)\right]+\lambda\mathcal{R}(C\,\|\,C_0)\right\}. \qquad (\mathcal{P}_{\mathrm{MP}})$$

Interpretation of λ**.** MP belongs to the wider class of Variational Preferences (VP) which have been axiomatically derived by Maccheroni et al. (2006). Being VP, they model an uncertainty averse decision maker. λ can be interpreted as a coefficient of ambiguity aversion: with an unchanged utility function under risk U, a higher value of λ will lower ambiguity aversion.

VaR (gaussienne) et corrélations

- Choix de portefeuille en présence d'incertitude sur les corrélations (source Bertrand Tavin)

As the investor becomes more and more ambiguity averse, she ends up using the worst dependence structure in the whole set of admissible copulas. In this case, problem ($\mathcal{P}_{\text{MP}}$) converges toward the Wald (1950) maximin problem:

$$\sup_{\theta\in\Theta}\inf_{C\in\mathcal{C}_n}\mathbb{E}^C\left[U\left(W_T(\theta)\right)\right]. \qquad (\mathcal{P}_{\text{Wald}})$$

VaR (gaussienne) et corrélations

- Choix de portefeuille en présence d'incertitude sur les corrélations (source Bertrand Tavin)

concentration is not a consequence of these modelling assumptions. More generally, this behavior is explained by Epstein and Halevy (2019): "*if the investor is sensitive to the resulting ambiguity about the differences and relation between returns, she may perceive only limited gains from diversification*". Indeed, a highly ambiguity averse investor will give a large weight to the worst-case dependence scenario where returns are perfectly correlated and no diversification benefits can be obtained.

Approche SBM -FRTB

- Principe d'agrégation : corrélations intra-bucket constantes + poupées russes (russian dolls) : Joreskog
- Pour des facteurs de risque dans un même bucket i, corrélations $= \rho_i$
- Peut s'écrire sous la forme d'un modèle à un facteur
- $F_{j,i} = \sqrt{\rho_i} \times Z_i + \sqrt{1-\rho_i} \times \varepsilon_{j,i}$
- $Z_i, \varepsilon_{1,i}, \dots, \varepsilon_{N(i),i}$ variables gaussiennes centrées réduites indépendantes
  - $N(i)$ *: nombre de facteur dans le bucket* i
- Z_i : facteur commun au bucket i
- Corrélation entre $F_{j,i}$ et $F_{j',i}, j' \neq j$: ρ_i

Approche SBM -FRTB

- Agrégation interbucket
- A titre illustratif, on va supposer un emboîtement à deux étages.
- Entre les buckets i et k, corrélation constante $= \rho$
- Représentation factorielle
- $Z_i = \sqrt{\rho} \times Z + \sqrt{1-\rho} \times \eta_i$
- $Z, \eta_i, \varepsilon_{j,i}$ variables latentes gaussiennes indépendantes
- Z facteur commun au différents buckets

Approche SBM -FRTB

- Block correlation matrix
- $0 = \begin{pmatrix} 60.3\% & 44.3\% & 43.3\% & 36.1\% \\ 44.3\% & 52.3\% & 36.2\% & 40.7\% \\ 43.3\% & 36.2\% & 42.3\% & 34.3\% \\ 36.1\% & 40.7\% & 34.3\% & 37.6\% \end{pmatrix}$
- Sur la diagonale, les corrélations intra-buckets (ici 4 buckets)
- Hors diagonale les corrélations inter-buckets
- Est associée à une représentation à facteurs si et seulement si la block correlation matrix est semi-définie positive.

Approche SBM -FRTB

- $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.15 \\ 0.1 & 0.15 & 0.2 \end{pmatrix}$ block correlation matrix
- Approche parcimonieuse peu de paramètres
- Passage à la matrice complète (block average map)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 1 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 & 0.3 & 0.3 & 0.15 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 1 & 0.3 & 0.15 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 1 & 0.15 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

Approche SBM -FRTB

- Pour que l'approche SBM – FRTB soit valide, il faut et il suffit que les corrélations inter-buckets soient associées à une block-correlation matrix psd (positive semi-definite)
- Sinon la matrice « block average map » peut avoir des valeurs propres négatives
- On peut alors arriver à des « variances négatives » …
- Question pratique : est-ce que les architectes de Bâle 3 ont pensé à ce problème ?
- Question pratique : Comment faire pour remédier à ce problème si on le rencontre ?
- Question pratique : qu'est-ce qui peut faire penser que l'on rencontre ce problème dans le paramétrage des corrélations SBM ?

Approche SBM -FRTB

- La réponse aux questions précédentes permet de comprendre certaines bizarreries dans les formules d'agrégation du FRTB SA
  - $K_b = \sqrt{\max(0, \sum_k WS_k^2 + \sum_{k \neq l} WS_k WS_l)}$

(4) Within bucket aggregation: the risk position for delta (respectively vega) bucket b, K_b, must be determined by aggregating the weighted sensitivities to risk factors within the same bucket using the prescribed correlation ρ_{kl} set out in the following formula, where the quantity within the square root function is floored at zero:

$$K_b = \sqrt{\max(0, \sum_k WS_k^2 + \sum_k \sum_{k \neq l} \rho_{kl} WS_k WS_l)}$$

- Mais quel nouveau problème apparaît ?

VaR (gaussienne) et corrélations

- Pour un portefeuille « long only » - portefeuille directionnel, la VaR augmente avec les corrélations
  - *Sens mathématique à expliciter : Ordres stochastiques …*
    - Amraoui, Cousot, Hitier, & Laurent (2012). Pricing CDOs with state-dependent stochastic recovery rates. *Quantitative Finance*.
  - *Dans ce cas une approche prudente implique de considérer des corrélations élevées*
    - Le bénéfice de diversification est moindre
- Pour un portefeuille « long-short » - arbitrage, la VaR diminue avec les corrélations
  - *Dans ce cas une approche prudente implique de considérer des corrélations basses*
  - *On surestime les bénéfices des couvertures*

Théorie du portefeuille : diversification

- Risques non « diversifiables » ?
- Le tableau ci-contre montre qu'une « mauvaise année »
  - *Comme 2008*
- Les performances des actifs risqués peuvent être fortement négatives
  - *Uniformément négative*
  - *Par taille*
  - *Par zone géographique*
  - *Par secteur d'activité*
- Ceci ne remet pas en cause le principe de diversification

Indices Paris

Libellé	Dernier	Var.	Var/1janv
CAC 40	3 329.92(c)	+4.68%	-40.69%
CAC MID&SMALL 1	4 732.55(c)	+0.19%	-38.91%
SBF 120	2 392.03(c)	+4.23%	-41.09%

Indices Internationaux

Libellé	Dernier	Var.	Var/1janv
Dax Xetra	4 781.33(c)	+3.43%	-40.73%
Dow Jones	8 852.22(c)	-1.41%	-33.27%
Euro Stoxx 50	2 532.17(c)	+4.47%	-42.45%
Footsie 100	4 063.01(c)	+5.22%	-37.07%
Nasdaq Comp.	1 711.29(c)	-0.37%	-35.48%
Nikkei 225	8 693.82(c)	+2.78%	-43.21%

Indices sectoriels Paris

Libellé	Dernier	Var.	Var/1janv
Biens de consommat	799.40(c)	+3.23%	-40.68%
Hygiène santé phar	673.13(c)	+6.97%	-30.84%
Industries	702.77(c)	+0.62%	-49.27%
Matériaux de base	1 232.13(c)	+4.74%	-49.23%
Pétrole & Gaz	684.52(c)	+8.82%	-38.02%
Services	696.50(c)	+4.83%	-42.48%
Services aux colle	1 114.92(c)	+6.79%	-42.73%
Sociétés financièr	639.62(c)	+1.12%	-41.56%
Télécommunications	988.30(c)	+4.75%	-15.14%
Technologie	448.78(c)	+4.13%	-41.14%

Trois scénarios de corrélation (medium, high, low)

In order to address the risk that correlations increase or decrease in periods of financial stress, the aggregation of bucket level capital requirements and risk class level capital requirements per each risk class for delta, vega, and curvature risks as specified in MAR21.4 to MAR21.5 must be repeated, corresponding to three different scenarios on the specified values for the correlation parameter ρ_{kl} (correlation between risk factors within a bucket) and γ_{bc} (correlation across buckets within a risk class).

(1) Under the "medium correlations" scenario, the correlation parameters ρ_{kl} and γ_{bc} as specified in MAR21.39 to MAR21.101 apply.

(2) Under the "high correlations" scenario, the correlation parameters ρ_{kl} and γ_{bc} that are specified in MAR21.39 to MAR21.101 are uniformly multiplied by 1.25, with ρ_{kl} and γ_{bc} subject to a cap at 100%.

(3) Under the "low correlations" scenario, the correlation parameters ρ_{kl} and γ_{bc} that are specified in MAR21.39 to MAR21.101 are replaced by $\rho_{kl}^{low} = \max\left(2 \times \rho_{kl} - 100\%; 75\% \times \rho_{kl}\right)$ and $\gamma_{bc}^{low} = \max\left(2 \times \gamma_{bc} - 100\%; 75\% \times \gamma_{bc}\right)$

Classification des risques selon une approche business

(1) Risk class: seven risk classes are defined (in MAR21.39 to MAR21.89).

(a) General interest rate risk (GIRR)

(b) Credit spread risk (CSR): non-securitisations

(c) CSR: securitisations (non-correlation trading portfolio, or non-CTP)

(d) CSR: securitisations (correlation trading portfolio, or CTP)

(e) Equity risk

(f) Commodity risk

(g) Foreign exchange (FX) risk

Facteurs de risques et « buckets » : approche business

(2) Risk factor: variables (eg an equity price or a tenor of an interest rate curve) that affect the value of an instrument as defined in MAR21.8 to MAR21.14.

(3) Bucket: a set of risk factors that are grouped together by common characteristics (eg all tenors of interest rate curves for the same currency), as defined in MAR21.39 to MAR21.89.

	FRTB	Basel 2.5
Standardized Approach	Sensitivity Based Risk Charge Default Risk Charge Residual Risk Add-on	Standardized Capital Charge
Internal Model Approach	Expected Shortfall Default Risk Charge Non-Modellable Risk Factors	VaR + stress VaR Incremental Risk Charge Risk Not In VaR

Basel Committee on Banking Supervision

MAR

Calculation of RWA for market risk

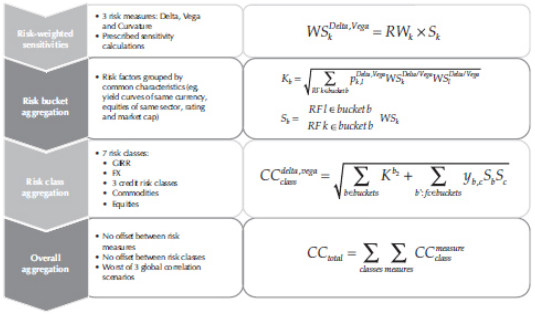
MAR21

Standardised approach: sensitivities-based method

Version effective as of 01 Jan 2023

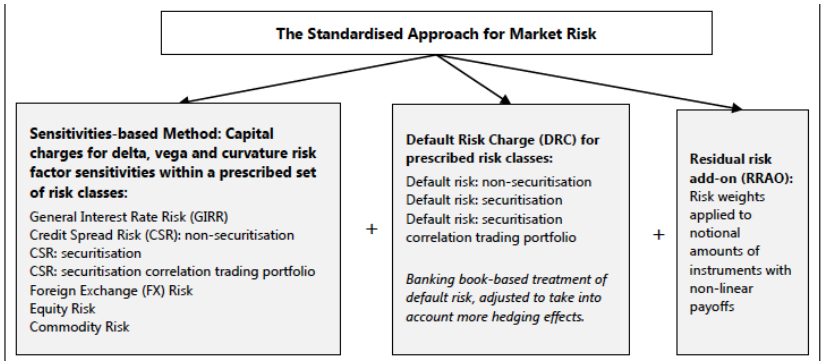
First version in the format of the consolidated framework, updated to take account of the revised implementation date announced on 27 March 2020.

Figure 4.3 Calculation of sensitivity-based capital charge



Calculs VaR gaussienne : remarques

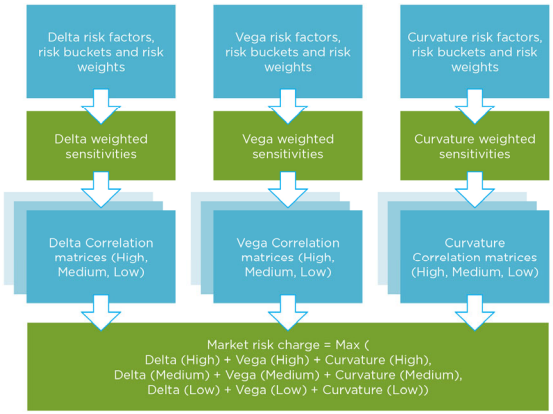
- Approche standard du FRTB, SBM (Sensitivities Based Method) a un rôle central
- Risques de taux, de change, de marges de credit, actions et commodities (+ buckets)
- Agrégation des Risques (correlations)



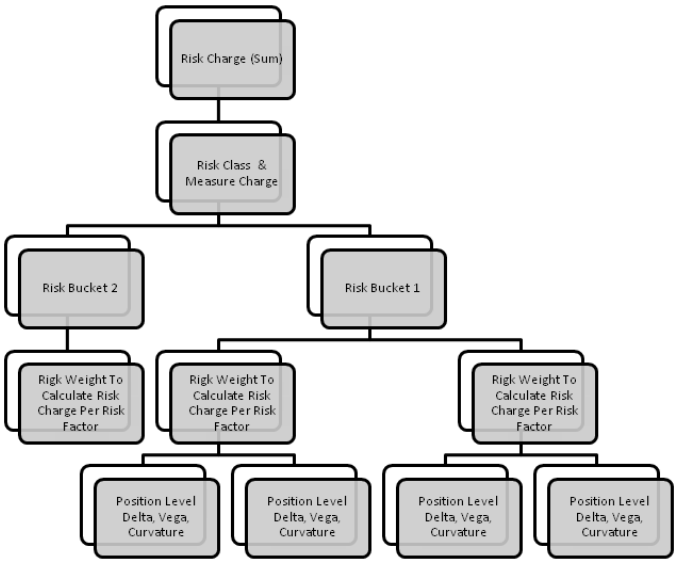
Approche SBM -FRTB

- Pour prendre en charge l'incertitude sur les corrélations, trois scénarios (high, medium, low) sont définis : charge en capital = max sur ces trois scénarios

Figure 3: Calculating the SBA Capital Charge



Approche hiérarchique (bottom-up) du SBM - FRTB

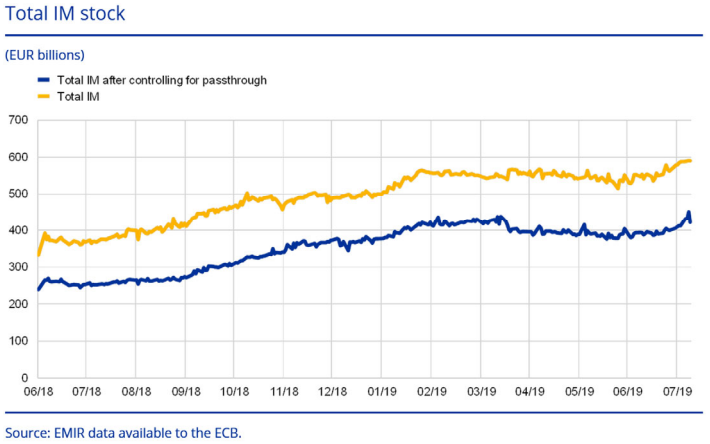


Le modèle SIMM de l'ISDA

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

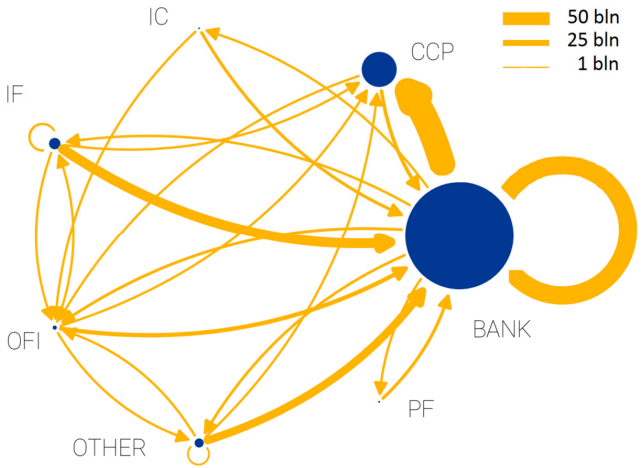
Échanges de marges initiales (initial margins)

- Investigating initial margin procyclicality and corrective tools using EMIR data
  - https://www.ecb.europa.eu/press/financial-stability-publications/macroprudential-bulletin/html/ecb.mpbu201910_5~6c579ba94e.en.html



Échanges de marges initiales (initial margins)

- At the sectoral level, banks and CCPs account for most of the IM paid and received in derivative markets



Modèle de calcul des marges initiales de l'ISDA

- Méthodologie proposée par l'ISDA : SIMM, standard industry initial margin model
  - *Inspiration : VaR paramétrique (gaussienne)*
  - *Sur la valeur globale du portefeuille vis-à-vis d'une contrepartie*
  - *https://www.isda.org/a/Pf2gE/ISDA-SIMM-v2.5.pdf*

ISDA Safe, Efficient Markets

Final Document
SIMM Version 2.4

ISDA SIMM®,1 Methodology, version 2.4 (based on v2.3.8: 26 July 2021)
Effective Date: December 4, 2021

This Document

This document gives the official methodology for the calculation of the ISDA Standard Initial Margin Model (SIMM). This uses a risk-based approach incorporating Delta risk, Vega risk, Curvature risk, Inter-curve basis risk, Credit Base Correlation risk and Concentration risk.

Modèle de calcul des marges initiales de l'ISDA : SIMM (standard industry margin model)

Correlations for aggregated weighted sensitivities or risk exposures

	2w	1m	3m	6m	1yr	2yr	3yr	5yr	10yr	15yr	20yr	30yr
2w		74%	63%	55%	45%	36%	32%	28%	23%	20%	18%	16%

Copyright © 2022 by International Swaps and Derivatives Association, Inc.

ISDA Safe, Efficient Markets

Final Document
SIMM Version 2.5

	2w	1m	3m	6m	1yr	2yr	3yr	5yr	10yr	15yr	20yr	30yr
1m	74%		80%	69%	52%	41%	35%	29%	24%	18%	17%	16%
3m	63%	80%		85%	67%	53%	45%	39%	32%	24%	22%	22%
6m	55%	69%	85%		83%	71%	62%	54%	45%	36%	35%	33%
1yr	45%	52%	67%	83%		94%	86%	78%	65%	58%	55%	53%
2yr	36%	41%	53%	71%	94%		95%	89%	78%	72%	68%	67%
3yr	32%	35%	45%	62%	86%	95%		96%	87%	80%	77%	74%
5yr	28%	29%	39%	54%	78%	89%	96%		94%	89%	86%	84%
10yr	23%	24%	32%	45%	65%	78%	87%	94%		97%	95%	94%
15yr	20%	18%	24%	36%	58%	72%	80%	89%	97%		98%	98%
20yr	18%	17%	22%	35%	55%	68%	77%	86%	95%	98%		99%
30yr	16%	16%	22%	33%	53%	67%	74%	84%	94%	98%	99%	

Modèle de calcul des marges initiales de l'ISDA : corrélation interbuckets

43. The correlation parameters γ_{bc} applying to sensitivity or risk exposure pairs across different non-residual buckets is set out in the following table:

Bucket	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		36%	38%	35%	37%	33%	36%	31%	32%	33%	32%	30%
2	36%		46%	44%	45%	43%	33%	36%	38%	39%	40%	36%
3	38%	46%		49%	49%	47%	34%	36%	41%	42%	43%	39%
4	35%	44%	49%		48%	48%	31%	34%	38%	42%	41%	37%
5	37%	45%	49%	48%		48%	33%	35%	39%	42%	43%	38%
6	33%	43%	47%	48%	48%		29%	32%	36%	39%	40%	35%
7	36%	33%	34%	31%	33%	29%		28%	32%	31%	30%	28%
8	31%	36%	36%	34%	35%	32%	28%		33%	34%	33%	30%
9	32%	38%	41%	38%	39%	36%	32%	33%		38%	36%	34%
10	33%	39%	42%	42%	42%	39%	31%	34%	38%		38%	36%
11	32%	40%	43%	41%	43%	40%	30%	33%	36%	38%		35%
12	30%	36%	39%	37%	38%	35%	28%	30%	34%	36%	35%	

Modèle de calcul des marges initiales de l'ISDA : corrélations intra-buckets

G.2 Equity – Correlations

59. The correlation parameters ρ_{kl} applying to sensitivity or risk exposure pairs within the same bucket are set out in the following table:

Bucket number	Correlation
1	18%
2	23%
3	30%
4	26%
5	23%
6	35%
7	36%
8	33%
9	19%
10	20%
11	45%
12	45%
Residual	0%

Modèle de calcul des marges initiales de l'ISDA

Bucket	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		20%	20%	20%	13%	16%	16%	16%	17%	12%	18%	18%
2	20%		25%	23%	14%	17%	18%	17%	19%	13%	19%	19%
3	20%	25%		24%	13%	17%	18%	16%	20%	13%	18%	18%
4	20%	23%	24%		17%	22%	22%	22%	21%	16%	24%	24%
5	13%	14%	13%	17%		27%	26%	27%	15%	20%	30%	30%
6	16%	17%	17%	22%	27%		34%	33%	18%	24%	38%	38%
7	16%	18%	18%	22%	26%	34%		32%	18%	24%	37%	37%
8	16%	17%	16%	22%	27%	33%	32%		18%	23%	37%	37%
9	17%	19%	20%	21%	15%	18%	18%	18%		14%	20%	20%
10	12%	13%	13%	16%	20%	24%	24%	23%	14%		25%	25%
11	18%	19%	18%	24%	30%	38%	37%	37%	20%	25%		45%
12	18%	19%	18%	24%	30%	38%	37%	37%	20%	25%	45%	

Modèle de calcul des marges initiales de l'ISDA

65. The correlation parameters γ_{bc} applying to sensitivity or risk exposure pairs across different buckets are set out in the following table:

Buckets	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1		33%	21%	27%	29%	21%	48%	16%	41%	23%	18%	2%	21%	19%	15%	0%	24%
2	33%		94%	94%	89%	21%	19%	13%	21%	21%	41%	27%	31%	29%	21%	0%	60%
3	21%	94%		91%	85%	12%	20%	9%	19%	20%	36%	18%	22%	23%	23%	0%	54%
4	27%	94%	91%		84%	14%	24%	13%	21%	19%	39%	25%	23%	27%	18%	0%	59%
5	29%	89%	85%	84%		15%	17%	9%	16%	21%	38%	28%	28%	27%	18%	0%	55%
6	21%	21%	12%	14%	15%		33%	53%	26%	9%	21%	4%	11%	10%	9%	0%	24%
7	48%	19%	20%	24%	17%	33%		31%	72%	24%	14%	-12%	19%	14%	8%	0%	24%
8	16%	13%	9%	13%	9%	53%	31%		24%	4%	13%	-7%	4%	6%	1%	0%	16%
9	41%	21%	19%	21%	16%	26%	72%	24%		21%	18%	-7%	12%	12%	10%	0%	21%
10	23%	21%	20%	19%	21%	9%	24%	4%	21%		14%	11%	11%	10%	7%	0%	14%
11	18%	41%	36%	39%	38%	21%	14%	13%	18%	14%		28%	30%	25%	18%	0%	38%
12	2%	27%	18%	25%	28%	4%	-12%	-7%	-7%	11%	28%		18%	18%	8%	0%	21%
13	21%	31%	22%	23%	28%	11%	19%	4%	12%	11%	30%	18%		34%	16%	0%	34%
14	19%	29%	23%	27%	27%	10%	14%	6%	12%	10%	25%	18%	34%		13%	0%	26%
15	15%	21%	23%	18%	18%	9%	8%	1%	10%	7%	18%	8%	16%	13%		0%	21%
16	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%		0%
17	24%	60%	54%	59%	55%	24%	24%	16%	21%	14%	38%	21%	34%	26%	21%	0%	

Modèle de calcul des marges initiales de l'ISDA

- SIMM (modèle paramétrique gaussien) : quelles corrélations ?
  - *On retrouve le principe d'agrégation hiérarchique ou de poupées russes*

(c) The weighted sensitivities should then be aggregated within each currency. The sub-curve correlations $\phi_{i,j}$ and the tenor correlation parameters $\rho_{k,l}$ are set out in Section D.

$$K = \sqrt{\sum_{l,k} WS_{k,l}^2 + \sum_{l,k} \sum_{(j,l)\neq(l,k)} \phi_{i,j}\rho_{k,l}WS_{k,i}WS_{l,j}}\,.$$

(e) The vega risk exposure should then be aggregated within each bucket. The buckets and correlation parameters applicable to each risk class are set out in Sections D-I.

$$K_b = \sqrt{\sum_k VR_k^2 + \sum_k \sum_{l\neq k} \rho_{kl} f_{kl} VR_k VR_l},$$

Modèles de risque de marché : chambres de compensation (marges initiales)

- Comme pour les marchés de futures et pour les dérivés de gré à gré des modèles de risque sont utilisés pour calculer les marges initiales sur les produits dérivés compensés centralement
  - *Ci-dessous, quelques indications sur les modèles utilisés par LCH*
  - *Le détail des modèles n'est malheureusement pas public.*
  - *Néanmoins, on constate que les marges tendent à augmenter avec la volatilité et le niveau de risque (effet procyclique)*

Market	Model type	Margin method used	Minimum look-back period	Holding period	Frequency of parameter review
CDSClear	Analytical	VAR / Expected Shortfall	10 years	5 days	Monthly
RepoClear SA	Analytical	VAR / Expected Shortfall	10 years	5 days	Monthly
Cash Securities	Analytical	VAR / Expected Shortfall	10 years	3 days	Monthly
Derivatives	Empirical	SPAN® derivatives for Options and Futures	10 years	2 days	Quarterly
€GCPlus (Triparty Repo)	Empirical	PIMM	10 years	7 days	Monthly

Cartographie des facteurs de risque à partir des corrélations : modèles graphiques

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

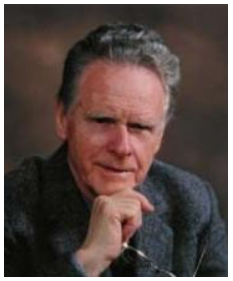
Dépendance positive: modèle structurel

- Corrélations partielles (cas gaussien) : soit $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien. La corrélation partielle entre X_i et X_j sachant $\{X_k, k \in \{1, \dots, n\} \backslash \{i, j\}\}$ est la corrélation entre les résidus des régressions linéaires de X_i et X_j sur les $X_k, k \in \{1, \dots, n\} \backslash \{i, j\}$
  - *Si la corrélation partielle entre X_i et X_j et les $X_k, k \in \{1, \dots, n\} \backslash \{i, j\}$ est nulle, il y a indépendance entre X_i et X_j sachant $X_k, k \in \{1, \dots, n\} \backslash \{i, j\}$. On note : $X_i \perp X_j | X_k, k \in \{1, \dots, n\} \backslash \{i, j\}$*
    - Indépendance et nullité des corrélations des résidus sont équivalents dans le cas gaussien multivarié
    - La relation entre corrélation partielle est matrice de variance covariance est précisée plus loin
- Si une distribution gaussienne est MTP2 alors toutes les corrélations partielles sont positives (ou nulles)
  - Karlin & Rinott (1983), Lebowitz (1972), Fallat et al (2017).

Éléments de théorie

- Reprenons le cas du modèle structurel bivarié
  - Résultats aussi valables dans le cas multivarié
  - $U_a = \beta_a \times Z + \sqrt{1 - \beta_a^2} \times Z_a$
  - $U_b = \beta_b \times Z + \sqrt{1 - \beta_b^2} \times Z_b$
    - $0 \leq \beta_a, \beta_b \leq 1$
    - On a un modèle à un facteur et il y a une dépendance monotone (ici croissante) de U_a, U_b par rapport au facteur
    - *Monotone unidimensional latent variable models* (Junker & Ellis (1997)
- Dans ce cas la densité de (U_a, U_b) est MTP2.
  - Holland & Rosenbaum (1986). Conditional association and unidimensionality in monotone latent variable models. *The Annals of Statistics*
  - Rosenbaum (1984). Testing the conditional independence and monotonicity assumptions of item response theory. *Psychometrika*
  - La matrice de variance-covariance est donc une $M-$ matrice

Covariance selection models



Arthur Dempster

- Dempster, A. P. (1972). Covariance selection. *Biometrics*, 157-175.
- L'idée sous-jacente est que dans le cas d'un grand nombre de rentabilités d'actifs, il y a des redondances.
- On peut donc prévoir assez bien une donnée manquante,
  - *La variance conditionnelle d'une rentabilité sachant les autres rentabilités est très faible (cf algorithmes d'imputation de données manquantes)*
- Présence de nombreux termes proches de zéros dans l'inverse de la matrice de variance-covariance des rentabilités
- Elle est (presque) creuse (sparse matrix)

Covariance selection models

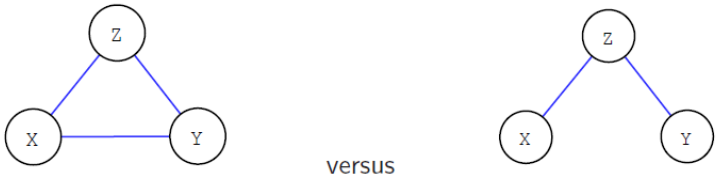
- Supposons que l'on a trois actifs a, b, c de rentabilités (centrées).
  - *On considère le modèle à un facteur Z*
  - $\begin{cases} r_a = Z + Z_a \\ r_b = Z + Z_b \\ r_c = Z \end{cases}$
  - *Avec Z, Z_a, Z_b variables gaussiennes, centrées, réduites indépendantes*
- Matrice de variance-covariance et son inverse données par :
  - $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, *On appelle aussi Σ^{-1}, matrice de précision, notée P*
  - *On remarque la nullité des termes p_{ab} et p_{ba}.*
  - *On remarque aussi que P est une $M-$ matrice (P est une $M-$matrice si tous ses éléments non diagonaux sont négatifs)*

Covariance selection models

- On remarque que $r_a = Z + Z_a$ et $r_b = Z + Z_b$ sont conditionnellement indépendants sachant $r_c = Z$
- Corrélation partielle (sachant r_c) entre r_a et r_b = corrélation des résidus des régressions linéaires de r_a et r_b sur r_c
- Corrélation partielle liée à l'inverse de la matrice de variance-covariance Σ^{-1} ou à la matrice de précision $\Sigma^{-1} = P = (p_{ij})$
- Corrélation partielle de $i, j | k \neq i, j$: $-\frac{p_{ij}}{\sqrt{p_{ii} \times p_{jj}}}$
  - *Si p_{ij} est négatif, alors la corrélation partielle est positive*
  - *Si p_{ij} est nul, alors la corrélation partielle est nulle*
  - *Importance des termes non diagonaux de $P = \Sigma^{-1}$*

Covariance selection models

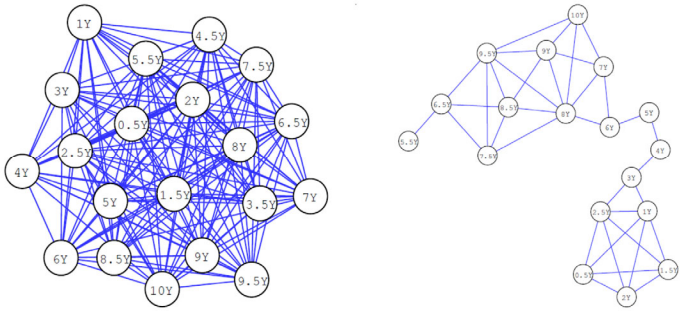
- Corrélation partielle nulle veut dire que deux entités ne sont liées entre elles que par l'intermédiaire d'autres entités : pas de lien direct



A droite : corrélation partielle nulle entre x et y sachant z

Covariance selection models

- Estimateur du maximum de vraisemblance d'une matrice de variance covariance sous la contrainte que des termes de la matrice inverse est simple (Dempster)
- ⇒ estimations plus robustes, matrices mieux conditionnées quand le nombre d'actifs par rapport au nombre d'observations est élevé
  - *Détermination des corrélations partielles nulles : Maximum de vraisemblance plus pénalisations des termes non nuls de la matrice inverse (LASSO)*
    - d'Aspremont, A. Sparse Covariance Selection using Semidefinite Programming.
    - Friedman, Hastie, and Tibshirani (2007). Sparse inverse covariance estimation with the graphical lasso.
    - Meinshausen & Bühlmann (2006). High-dimensional graphs and variable selection with the lasso



D'Aspremont et al, Sparse Covariance Selection using Semidefinite Programming

- Autre approche : maximisation de la vraisemblance sous contrainte de M matrice pour la matrice de variance covariance
  - Agrawal, Roy & Uhler (2019). Covariance matrix estimation under total positivity for portfolio selection.
  - Lauritzen, Uhler & Zwiernik (2019). Maximum likelihood estimation in Gaussian models under total positivity.
  - *Les termes de la matrice de précision sont négatifs ou nuls et la parcimonie vient de la saturation des contraintes.*

Rentabilités boursières : dépendance positive ?

Ex: 2016 Monthly correlations of global stock markets *(InvestmentFrontier.com)*

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Nasdaq} & \text{Canada} & \text{Europe} & \text{UK} & \text{Australia} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.000 & 0.606 & 0.731 & 0.618 & 0.613 \\ 0.606 & 1.000 & 0.550 & 0.661 & 0.598 \\ 0.731 & 0.550 & 1.000 & 0.644 & 0.569 \\ 0.618 & 0.661 & 0.644 & 1.000 & 0.615 \\ 0.613 & 0.598 & 0.569 & 0.615 & 1.000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Nasdaq} \\ \text{Canada} \\ \text{Europe} \\ \text{UK} \\ \text{Australia} \end{array}$$

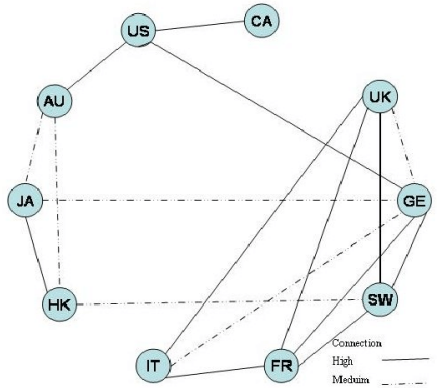
Ex: 2016 monthly correlations of global stock markets *(InvestmentFrontier.com)*

$$S^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Nasdaq} & \text{Canada} & \text{Europe} & \text{UK} & \text{Australia} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2.629 & -0.480 & -1.249 & -0.202 & -0.490 \\ -0.480 & 2.109 & -0.039 & -0.790 & -0.459 \\ -1.249 & -0.039 & 2.491 & -0.675 & -0.213 \\ -0.202 & -0.790 & -0.675 & 2.378 & -0.482 \\ -0.490 & -0.459 & -0.213 & -0.482 & 1.992 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Nasdaq} \\ \text{Canada} \\ \text{Europe} \\ \text{UK} \\ \text{Australia} \end{array}$$

La matrice de variance-covariance des rentabilités est une $M-$ matrice. Source : Agrawal, Roy, & Uhler (2019). Covariance Matrix Estimation under Total Positivity for Portfolio Selection .

Covariance selection models

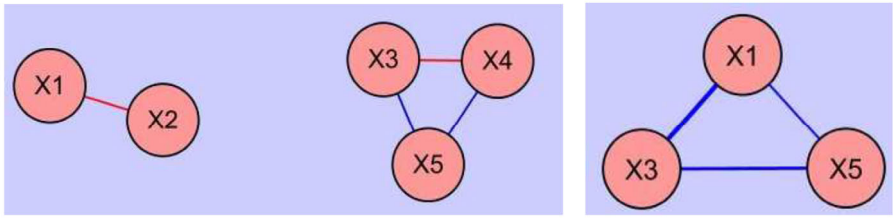
- Abdelwahab, Amor, & Abdelwahed (2008). The analysis of the interdependence structure in international financial markets by graphical models. *International research journal of finance and economics*, *15*(2), 1-306.



The partial correlation graph for the international financial stock returns data

Détermination des liens à partir de données boursières

- Mao, K. (2009). *Two models for Bayesian supervised dimension reduction* (Doctoral dissertation, Duke University, Durham).



(a) (b)

Figure 11: Graphical models inferred from the (a) the covariance matrix of the explanatory variables and (b) the gradient outer product matrix. Each node represents a variable and each edge indicates conditional dependence. The distance of the edge is inversely proportional to the amount of dependence, the thickness of the edge is proportional to the certainty of the inference and blue edges are negative while red edges are positive.

Robustesse de la VaR : bornes « model free »

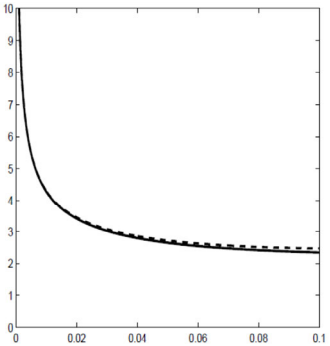
UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Robustesse de la VaR

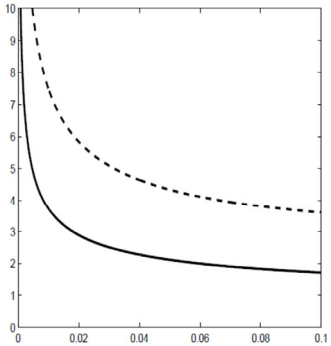
- Bornes indépendantes de la loi de X, faisant intervenir un multiplicateur de l'écart-type conditionnelle
  - Barrieu & Scandolo (2015). Assessing financial model risk. *European Journal of Operational Research*.
  - *Inégalité de Cantelli : si $\tilde{X}$ est une variable aléatoire centrée d'écart-type unitaire $P(\tilde{X} \geq q) \leq \frac{1}{1+q^2}$, pour $q > 0$*
- D'où $\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha}(X) \leq \sigma_X \times \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ (borne de Cantelli)
  - Pour $E[X] = 0$ (lien à préciser)
- Ratio entre borne supérieure et VaR gaussienne : $\frac{1}{\Phi^{-1}(\alpha)}\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$
  - Quand $\alpha \approx 100\%$, se comporte comme $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$, soit 10 pour $\alpha \approx 100\%$

Robustesse de la VaR et de l'ES

- VaR, voir à gauche. Trait continu, borne de Cantelli
  - *On voit qu'on a un ratio de l'ordre de 3 pour $\alpha = 95\%$ et de 4,3 pour $\alpha = 99\%$*



(a) VaR_α



(b) ES_α

Robustesse de l'ES

- On peut également montrer : $ES_{t-1,\alpha}(X) \leq \sigma_X \times \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$
  - *Toujours sous l'hypothèse $E[X] = 0$*
- Ratio entre borne supérieure et ES gaussien : $\frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}$
  - *Voir graphique précédent (trait continu)*
  - *<u>De ce point de vue</u>, on va avoir des bornes meilleures avec l'ES à 97,5% qu'avec la VaR à 99%*
  - *Mais par ailleurs, on pourra vérifier que l'ES est plus sensible aux outliers que la VaR*
- Les bornes précédentes sont strictes ; on peut trouver des distributions, telles que l'on ait égalité
- ES sous-additif en toute généralité, ce qui n'est pas le cas de la VaR. Mais les bornes supérieures sont sous-additives

Calculs VaR gaussienne : remarques

- Corrélations instables entre classes d'actifs
- Repartons de $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + 2\rho_{XY}\sigma(X)\sigma(Y) + \sigma^2(Y) \leq \big(\sigma(X) + \sigma(Y)\big)^2$,
- $\sigma(X+Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$, avec égalité dans le cas $\rho_{XY} = 1$
  - *Couramment utilisée dans le cadre réglementaire*
  - *Si on a des doutes sur la valeur de ρ_{XY}, choisir $\rho_{XY} = 1$ est une approche conservatrice pour la VaR dans le cas gaussien*
    - Mais ce n'est plus vrai pour la VaR dans le cas non-gaussien
  - *Approche utilisée dans le FRTB*
    - Cinq classes d'actifs : actions, taux d'intérêt, change, marges de crédit, commodities

Agrégation des risques et des mesures de risques : FRTB

- $X = X_1 + \cdots + X_5$
- $\rho(X) \sim \lambda \times \overline{ES}_{97.5\%}(X) + (1-\lambda) \times \left(\sum_{i=1}^{5} \overline{ES}_{97.5\%}(X_i)\right)$
- $\lambda = 0{,}5$
- $\overline{ES}_{97.5\%}(X)$ est le max des ES courants, à quelques ajustements près
  - $ES_\alpha(X+Y) \leq ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y)$
  - *full factor, reduced set of risk factors*
- Prise en compte partielle des bénéfices de diversification
- $\overline{ES}_{97.5\%}$ est sous-additif
  - *La période de stress est celle d'un an qui maximise $ES_{t,97.5}(X)$ avec mise à jour au moins trimestrielle.*
  - *Même période de stress pour les cinq classes de facteurs de risque*
- $\overline{ES}_{97.5\%}(X_1 + \cdots + X_5) \leq \sum_{i=1}^{5} \overline{ES}_{97.5\%}(X_i)$

Mesures de risque et cadre moyenne variance

- Notons X la perte sur un portefeuille (entre la date courante et l'horizon de calcul)
- $\sigma(X)$ désigne l'écart-type de X et $E[X]$
- Comme $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + 2\rho_{XY}\sigma(X)\sigma(Y) + \sigma^2(Y) \leq \big(\sigma(X) + \sigma(Y)\big)^2$,
- $\sigma(X+Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$
- On a la sous-additivité
- On peut facilement vérifier que $\sigma(\lambda X) = \lambda\sigma(X)$, pour $\lambda \geq 0$ (positive homogénéité)
- Remarque : sous-additivité + positive homogénéité implique convexité : $\lambda \in [0,1], \sigma(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \sigma(\lambda X) + \sigma\big((1-\lambda)Y\big) = \lambda\sigma(X) + (1-\lambda)\sigma(Y)$

Mesures de risque et cadre moyenne variance

- Quid de l'invariance par translation ?
  - *Soit $a \in \mathbb{R}$, $\sigma(X+a) = \sigma(X) \neq \sigma(X) + a$*
- On peut remédier à cette difficulté en considérant la mesure de risque définie par , $\rho(X) = E[X] + \lambda\sigma(X)$, avec $\lambda > 0$
  - *Remarque : ceci s'inspire de l'expression de la VaR ou de l'ES dans le cas gaussien*
- De par la linéarité de l'espérance, ρ reste sous-additive et positivement homogène et est également invariante par translation
  - *On remarque que $\rho(0) = 0$*
- Soit $-X$ distribué selon une loi de Bernoulli
  - *$P(X = -1) = 1 - p$, $P(X = 0) = p$*
  - *Ceci correspond à un gain de 1 avec une probabilité de $1 - p$ et de 0 avec une probabilité p*
  - *On remarque que $X \leq_{ps} 0$ et que $P(X < 0) > 0$*

Mesures de risque et cadre moyenne variance

- Si on préfère plus à moins, tout individu devrait préférer X (ticket de loto gratuit) à 0.
- $\rho(X) = E[X] + \lambda\sigma(X)$
- $E[X] = -(1-p)$, $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$
- $\rho(X) = -(1-p) + \lambda\sqrt{p(1-p)}$
- $\rho(X) > 0 \Leftrightarrow \lambda\sqrt{\frac{p}{1-p}} > 1$, ce qui vrai si $\frac{1}{1+\lambda^2} < p < 1$
- On a alors $X \leq 0$ et on n'a pourtant pas $\rho(X) \leq 0$
- La mesure de risque n'est pas croissante

VaR et Expected Shortfall : approche générale, propriétés

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Expected Shortfall (ES) : cas discret

- $ES_\alpha(X) = \frac{1}{n(1-\alpha)}\left(\sum_{i=n}^{\lceil n\alpha\rceil-1} x_{i:n} + (n\alpha - \lceil n\alpha\rceil + 1)x_{\lceil n\alpha\rceil:n}\right)$
- Dans le cas où $\alpha = 97.5\%$ et $n = 252$
- $ES_{97.5\%}(X) = -\frac{1}{6.3} \times (x^1 + \cdots + x^6 + 0.3x^7)$, où x^k est la $k-$ pire rentabilité
- L'EBA a publié en novembre 2023 un document présentant diverses modalités de calculs, voir en particulier l'annexe

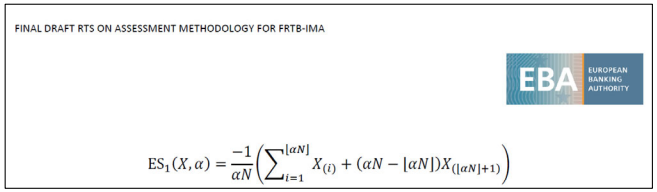
FINAL DRAFT RTS ON ASSESSMENT METHODOLOGY FOR FRTB-IMA

EBA EUROPEAN BANKING AUTHORITY

- https://www.eba.europa.eu/sites/default/files/2023-11/7c4b9e7f-a23e-41da-af5f-8c201ec48019/Final%20report%20on%20RTS%20on%20assessment%20methodology%20FRTB%20IMA.pdf

Expected Shortfall (ES)

- On retrouve le résultat précédent dans le document de l'EBA (novembre 2023)



- Si l'on utilise un modèle paramétrique, disons un modèle gaussien pour les facteurs de risque.
- Pour chaque simulation $i \in \{1, \ldots, n\}$, on recalcule la valeur du portefeuille X_i (full reval).
- On peut ensuite ordonner les valeurs et appliquer la méthode précédente pour calculer l'ES à 97.5%
- Il faut au moins 5000 simulations : trop coûteux ?

Caractérisation de l'Expected Shortfall

- Soit $X: \Omega = \{1, \ldots, S\} \to \mathbb{R}$ (pertes)
- On peut représenter $ES_\alpha(X)$ sous la forme $\max_{P\in\wp} E^P(X)$
- Pour simplifier l'exposé de la démonstration, on se place dans le cas de la méthode historique où $\alpha = 97.5\%$ et $S = 252$
  - $ES_{97.5\%}(X) = \frac{1}{6.3} \times (x^1 + \cdots + x^6 + 0.3x^7)$, x^k k^e *pire perte*
  - $P_{\{s_1,s_2,\ldots,s_7\}} \in \wp \Leftrightarrow P(s_1) = \cdots = P(s_6) = \frac{1}{6.3}, P(s_7) = \frac{0.3}{6.3}$
  - $\neq \wp = A_S^7 = \frac{S!}{(S-7)!}$
  - *On note* $x^1 = x_{\bar{s}_1}, \ldots, x^7 = x_{\bar{s}_7}$
  - $ES_{97.5\%}(X) = E^{P_{\{\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_7\}}}(X)$
  - *Et* $\forall P \in \wp$, $E^P(X) \leq E^{P_{\{\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_7\}}}(X)$
  - *Ce qu'il fallait démontrer*

Expected Shortfall (ES)

- Rappel : la VaR 1J 99% en méthode historique (historical window : 252 trading days) est la troisième pire valeur.
- Mais le document de l'EBA mentionne un autre mode de calcul, approuvé par la BCE (ECB guide to internal models)

> Another VaR estimator[28] (type 6) is interpolating between the sample values at probabilities assigned to the observations bracketing α : Denoting the integer $M_6 = \lfloor \alpha(N+1) \rfloor$ and the fractional remainder $R_6 = \alpha(N+1) - \lfloor \alpha(N+1) \rfloor$, we define:
>
> $$Q_6(X,\alpha) = (1-R_6)X_{(M_6)} + R_6 X_{(M_6+1)}$$

- Moyenne (pondérée) des deuxièmes et troisièmes pires valeurs.
- D'où par moyennage des VaR :

$$\mathrm{ES}_6(\mathrm{X},\alpha) = \frac{-1}{\alpha(\mathrm{N}+1)}\left(\frac{3}{2}X_{(1)} + \sum_{i=2}^{M_6-1} X_{(i)} + \frac{1+2R_6-R_6^2}{2}X_{(M6)} + \frac{R_6^2}{2}X_{(M6+1)}\right)$$

Calcul de l'ES global (FRTB – IMA / MRF)

- Approche théorique
  - $ES(\sum_i X_i) \leq \sum_i ES(X_i)$
  - $ES = (1-\rho)ES(\sum_i X_i) + \rho(\sum_i ES(X_i))$
  - $0 \leq \rho \leq 1$. *Permet de contrôler les bénéfices de diversification*
- Approche choisie par le comité de Bâle (modèles internes / modellable risk factors). $\rho = 0{,}5$

33.15 The aggregate capital requirement for modellable risk factors (*IMCC*) is based on the weighted average of the constrained and unconstrained ES capital requirements, where:

(1) The stress period used in the risk class level $ES_{R,S,i}$ should be the same as that used to calculate the portfolio-wide $ES_{R,S}$.

(2) *Rho (ρ)* is the relative weight assigned to the firm's internal model. The value of ρ is 0.5.

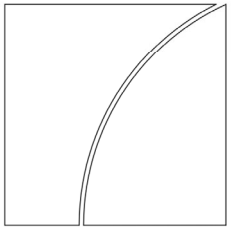
(3) *B* stands for broad regulatory risk classes as set out in [MAR33.14].

$$IMCC = \rho\left(IMCC(C)\right) + (1-\rho)\left(\sum_{i=1}^{B} IMCC(C_i)\right)$$

where $IMCC(C) = ES_{R,S}\frac{ES_{F,C}}{ES_{R,C}}$ and $IMCC(C_i) = ES_{R,S,i}\frac{ES_{F,C,i}}{ES_{R,C,i}}$

Calcul de l'ES global (FRTB – IMA / MRF)

Basel Committee
on Banking Supervision



Minimum capital requirements for market risk

January 2019 (rev. February 2019)

Calcul de l'ES global (FRTB – IMA / MRF)

- $IMCC(C) = ES_{R,S} \times \frac{ES_{F,C}}{ES_{R,C}}$
  - *ES calculé sur une période de stress pour l'ensemble des facteurs de risque*
  - $ES_{R,S}$ *correspond à l'ES stressé sur un «reduced set of risk factors »*
  - $ES_{R,C}$ *correspond au current ES sur un «reduced set of risk factors »*
  - $ES_{F,C}$ *correspond au current ES sur le «full set of risk factors »*
- $IMCC(C_i)$: « partial ES » pour les facteurs de risque C_i
  - *Calculé pour chacune des 5 grandes classes de facteurs de risque (interest rate, equity, fx, commodity et credit spread).*
  - *Tous les autres facteurs de risque sont maintenus constants dans le calcul de* $IMCC(C_i)$

Problématique du passage de 1J à 10J sans scaling par $\sqrt{10}$

- Exemple avec deux dates et simulation MC
  - $F(x) = P(X < x)$. *On suppose F inversible :* $F\left(F^{-1}(u)\right) = u$
  - $U \sim U[0,1]$, $P(U < u) = u$ *pour* $0 < u < 1$. $F^{-1}(U)$ *a la même loi de probabilité que X :*
  - $P(F^{-1}(U) < x) = P\left(F\left(F^{-1}(U)\right) < F(x)\right) = P\left(U < F(x)\right) = F(x)$
  - *Supposons les pertes sur les deux prochains jours,* X, Y ***indépendantes***.
  - *Comment simuler* $X + Y$ *?* (U_1, U_2), $F^{-1}(U_1) + F^{-1}(U_2)$
- Autre approche : Bootstrap dans l'historique
  - *Peut être adapté au cas des méthodes HS filtrée par la volatilité*
  - *Très (trop) coûteux pour de la full-reval.*
- Autre approche : fonctions caractéristiques
  - $\varphi_X(u) = E\left[e^{iuX}\right]$, $\varphi_{X+Y}(u) = \varphi_X(u)\varphi_Y(u)$, *puis inversion de la fonction caractéristique*
- Méthodes a priori non valides pour le superviseur : il faudrait montrer au préalable l'indépendance …

Problématique du passage de 1J à 10J sans scaling par $\sqrt{10}$

- Pour éviter de faire du scaling de 1 à 10J, on peut travailler directement avec des rentabilités à 10J

Method 1 – the historical method

The first step in the stepwise method must be performed using the historical method where $N \geq 200$. Given the sample $Ret(r_j, 1,10)$,..., $Ret(r_j, N, 10)$ of 10-business-days returns for a given non-modellable risk factor (obtained as a result of step S.0), the historical method requires institutions to first calibrate an upward and a downward shock applicable to the risk factor by estimating the empirical expected shortfalls of the returns for the right and left tails.

  - *Final draft RTS on the calculation of stress scenario risk measure*
- Si on utilise des returns sur des périodes sans recouvrement (non-overlapping) : peu de données
  - *Sur un an, 25 données*
  - *VaR à 99% = VaR à 99% = ES à 97.5% = pire perte …*
  - *Overlapping : données redondantes*

Expected Shortfall (ES)

- Document de l'EBA de décembre 2020

Final Draft RTS

on the calculation of the stress scenario risk measure under Article 325bk(3) of Regulation (EU) No 575/2013 (Capital Requirements Regulation 2 – CRR2)

Problématique du passage de 1J à 10J sans scaling par $\sqrt{10}$

- Calcul avec 10D (10 business days) returns – overlapping
- Calcul de VaR à 99% ?
- Il est possible que les trois pires périodes de 10 jours se recoupent
- Auquel, cas cela correspond à regarder le worst-case avec la méthode non-overlapping
- La métrique de risque n'est alors pas celle à laquelle on avait pensé
- Worst-case sur 25 périodes de 10 jours contigües.
- Confusion méthodologique

Problématique du passage de 1J à 10J sans scaling par $\sqrt{10}$

- Final report on RTS on assessment methodology FRTB IMA Novembre 2023

After discussing properties of VaR and ES estimators, we turn to results of sample estimates for some stylized proxy choices for risk model P&Ls in a historical simulation approach. For the examples in the following, we focus on a historical simulation approach setting with 255 business days (the typical number of business days in a year ranging from 250 to 260) and ten-business-days overlapping returns at a confidence level of 97.5%, i.e. $\alpha = 2.5\%$. Using ten-days *non*-overlapping returns would result in 25 observations, and consequently very high estimation error[38], while avoiding the complication of overlapping returns with serial autocorrelation. Approaches between those two choices are of course possible as well.

Construction d'un modèle de risques de marché : calcul des P&L

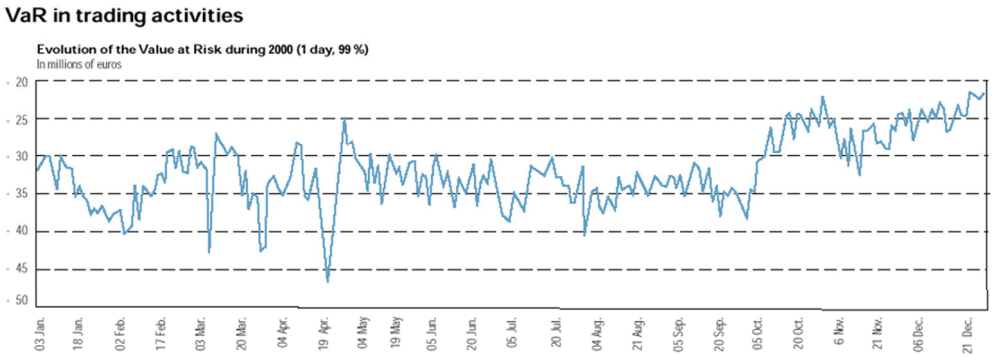
UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Construction d'un modèle de risque

- Calcul des P&L
  - *Facteurs de risque → valeurs*
    - Cas linéaire et non-linéaire
  - *Différentes notions de P&L*
    - Actual P&L – dirty P&L, HPL, RTPL
    - hyperparamètres
  - *Agrégation des facteurs de risque, buckets*
    - Facteurs de risque modélisables (MRF – modellable risk factors)
    - « Sourcing » des données, consensus de marché (Markit Totem), prix de transaction, confirmed quotes (bilatéral vs unilatéral, contrepartie unique ou pas), volumes « normaux »
- Méthodes paramétriques vs méthodes historiques
- Validation et documentation des modèles

VaR à 1 jour

- Calcul quotidien : VaR de la Société Générale en 2000
  - *Confidentialité des transactions préservée, malheureusement ces informations ne font plus partie des « public disclosures »*

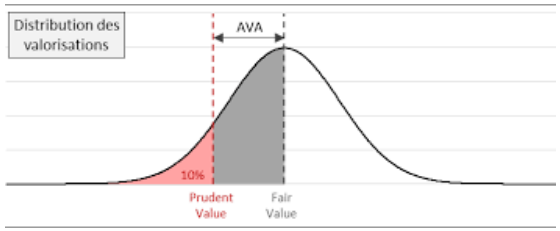


VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- Actual P&L (APL) : calculé au niveau de chaque desk de trading
  - $P_t - P_{t-1}$ *comprend :*
    - les gains intra-journaliers,
    - le day-one profit.
  - $P_t - P_{t-1}$ *exclut :*
    - ~~les effets liés à la capitalisation sur un jour (theta effect),~~
    - commissions de trading (clean P&L)
    - ajustements pour risques de contrepartie (CVA, counterparty valuation adjustments)
    - additional valuation adjustments (AVA) venant en déduction de la fair value pour le calcul du CET 1 (Core Equity Tier One)
    - AVA : https://www.nexialog.com/wp-content/uploads/2019/09/Note-Prudent-Valuation-Additional-Value-Adjustment.pdf
  - *Les AVA comprennent notamment :*
    - MPU (Market Price Uncertainty)
    - COC (Close-Out Costs)
    - MR (Model Risk)
      - https://www.eba.europa.eu/regulation-and-policy/market-risk/draft-regulatory-technical-standards-on-prudent-valuation

VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- Les AVA viennent en déduction de la fair value pour un calcul prudent des actifs
  - *Prennent la suite des PVA (prudent valuation adjustments)*
- AVA MPU : Market Price Uncertainty
  - *AVA MPU : EBA RTS art. 9 and FAQs 6.1, 21, 23, 23.1, 28, 30, 31, 40.1, 40.3*



VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

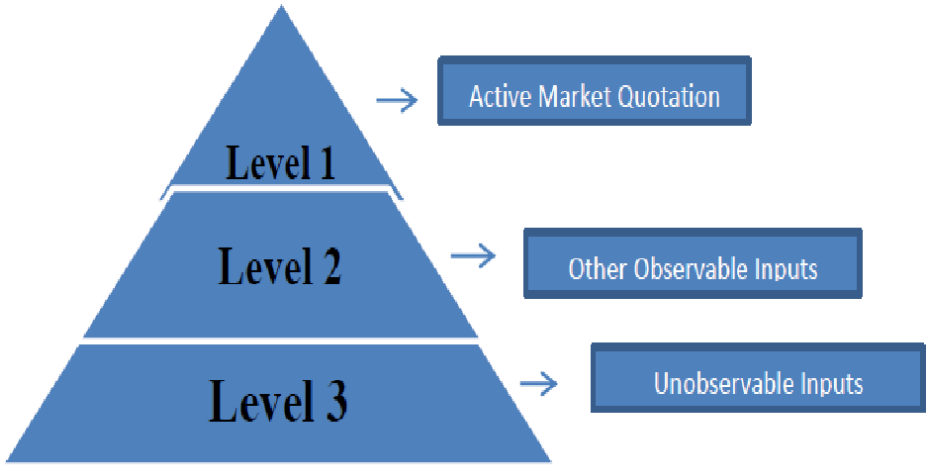
- Norme IFRS 13 (fair value)
  - *IFRS 13 defines **fair value** as the price that would be received to sell an asset or paid to transfer a liability in an orderly transaction between market participants at the measurement date (an exit price)*
    - https://www.ifrs.org/issued-standards/list-of-standards/ifrs-13-fair-value-measurement/
  - *Fair value is the price that would be received to sell an asset or paid to transfer a liability in an orderly transaction in the principal (or most advantageous) market at the measurement date under current market conditions (ie an exit price) regardless of whether that price is directly observable or estimated using another valuation technique.*
  - *Exit price : The price that would be received to sell an asset or paid to transfer a liability*
    - Différence entre "*exit price*" et "*fair value*" : "*orderly transaction between market participants at the measurement date*"
    - Fair value ne correspond donc pas à un « prix à la casse » (fire sale)

VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- Norme IFRS 13 (fair value)
  - *Pour un actif (financier), la fair value va se placer sous l'angle de la cession (exit price) plutôt que sous l'angle de l'acquisition (entry price)*
  - *L'application du concept de fair value dépend de l'organisation des marchés et du caractère plus ou moins « observable » des « inputs » de pricing.*
  - *Hiérarchie : actifs de niveau 1, de niveau 2 et 3*
    - Notion de marché de référence (principal market / most advantageous market, ce dernier concept ayant à voir avec les coûts de transaction les moins élevés)
    - Notion de pricing inputs et donc de modèles de pricing
  - *Pour des produits financiers complexes (actifs dits de niveau 3), l'évaluation est entre le mark-to-market et le mark-to-model*

VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- Norme IFRS 13 (fair value)



VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- Norme IFRS 13 (fair value)

VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- Level 1: Quoted (unadjusted) market prices in active markets for identical assets or liabilities
  - *Active market : in which transactions for the asset or liability occur with sufficient frequency and volume to provide pricing information on an ongoing basis*
- Level 2: Valuation techniques for which the lowest level input that is significant to the fair value measurement is directly or indirectly observable
- Level 3: Valuation techniques for which the lowest level input that is significant to the fair value measurement is unobservable.
  - *Quid des "collateral reconciliations"*

VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- IFRS 13 : key definitions

Fair Value	The price that would be received to sell an asset or paid to transfer a liability in an orderly transaction between market participants at the measurement date.
Active market	A market in which transactions for the asset or liability take place with sufficient frequency and volume to provide pricing information on an ongoing basis.
Exit price	The price that would be received to sell an asset or paid to transfer a liability.
Most advantageous market	The market that maximizes the amount that would be received to sell the asset or minimizes the amount that would be paid to transfer the liability, after taking into account transaction costs and transport costs.
Principal market	The market with the greatest volume and level of activity for the asset or liability.

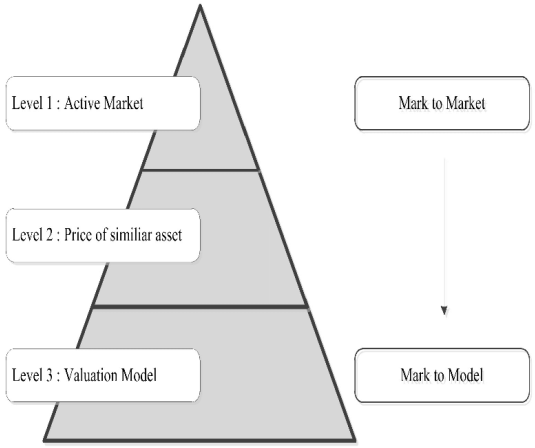
Table 1: Key definitions – excerpt from [IFRS 13: Appendix A]

VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- Norme IFRS 13 (fair value)

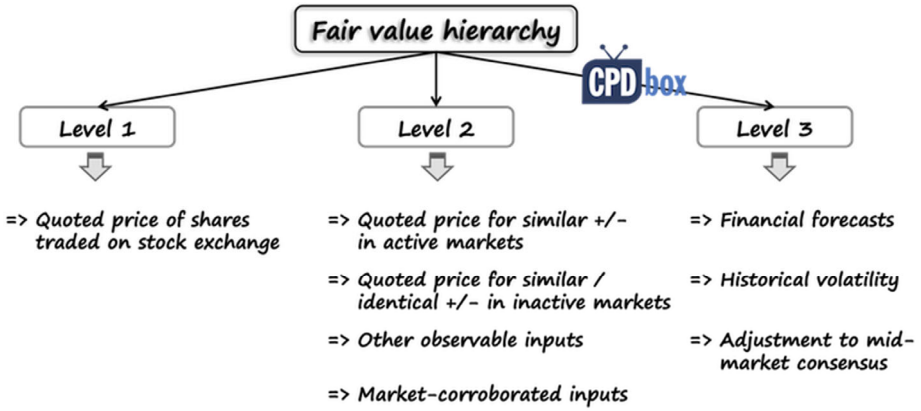
VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- Norme IFRS 13 (fair value)



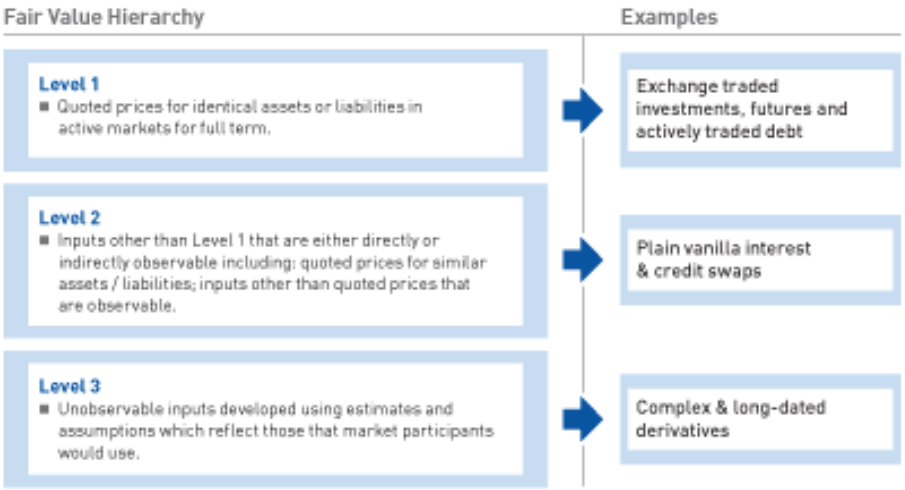
VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- Normes IFRS 13 : Exemples



VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- Normes IFRS 13 : Exemples



VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- DOP : Day One Profit
  - *En lien avec la norme IFRS 13, mais pratique plus ancienne*
  - *DOP : Difference between the transaction price and the fair value modelled using unobservable inputs*
  - *Cela concerne plutôt des produits financiers complexes (actifs dits de niveau 3)*
  - *Deferral (report) : reconnaissance différée du profit, vu l'incertitude sur la fair value.*
  - *Exemple : vente d'une option à 145. Le mark-to-model de la banque indique que l'option vaut 123. 123 va être la fair-value.*
  - *Mais on peut décider de passer 10 en profit immédiat et de provisionner 12. Il y aura ensuite des reprises de provisions au fur et à mesure jusqu'à échéance de l'option.*

VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- Hypothetical P&L (HPL) –MAR 32.25

32.25 The HPL must be calculated by revaluing the positions held at the end of the previous day using the market data of the present day (ie using static positions). As HPL measures changes in portfolio value that would occur when end-of-day positions remain unchanged, it must not take into account intraday trading nor new or modified deals, in contrast to the APL. Both APL and HPL include foreign denominated positions and commodities included in the banking book.

  - *On calcule la valeur du portefeuille à la date t en recalculant le portefeuille à partir des facteurs de risque observés à la date t*
  - *Positions figées*
  - *pas de theta effect ((Bâle 2.5 ≠ FRTB)*
  - *Pas de prise en compte des nouveaux deals et des profits intraday (par contraste avec l'APL (Actual P&L)*

Le calcul du HPL

- Des facteurs de risque aux (variations) de prix
  - *Portefeuille composé de n titres (pas de dividendes)*
  - $P_{t-1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,t-1} P_{i,t-1}$ *(P_{t-1} : valeur du portefeuille en $t-1$)*
  - *HPL :* $\sum_{i=1}^{n} a_{i,t-1} \times \left(P_{i,t} - P_{i,t-1}\right)$
- Pricing function (valuation function)
  - *En présence de produits dérivés de gré à gré et d'options, usage de l'« interpolation » et de fonctions non-linéaires*
    - Interpolation : « Courbes des taux », surfaces de volatilité
    - Homescu, C. (2011). Implied volatility surface: Construction methodologies and characteristics. *Available at SSRN 1882567*.
  - $P_{t-1} = F\left(t-1, \vec{\theta}_{t-1}, \vec{F}_{t-1}, \vec{g}\left(\vec{F}_{t-1}\right), \gamma\right)$
  - $\vec{g}\left(\vec{F}_{t-1}\right)$ *: paramètres réévalués quotidiennement*
  - $HPL = F\left(t-1, \vec{\theta}_{t-1}, \vec{F}_{t}, \vec{g}\left(\vec{F}_{t}\right), \gamma\right) - F\left(t-1, \vec{\theta}_{t-1}, \vec{F}_{t-1}, \vec{g}\left(\vec{F}_{t-1}\right), \gamma\right)$

Le calcul du HPL : valuation engine

- L'utilisation des pricers du front office pour la mesure des risques (full revaluation) est coûteuse en temps de calcul
  - *Usage fréquent de la méthode de Monte-Carlo pour les pricers.*
- D'où l'idée de développer des proxy models ou meta-modèles
- Pour contourner le problème des simulations emboitées (nested simulations)

Deep learning volatility: a deep neural network perspective on pricing and calibration in (rough) volatility models

BLANKA HORVATH*†, AITOR MUGURUZA‡ and MEHDI TOMAS§

†King's College London, The Alan Turing Institute London, UK
‡Imperial College London & NATIXIS London, UK
§CMAP & LadHyx, École Polytechnique, Palaiseau, France

Le calcul du HPL : valuation engine

We present a neural network-based calibration method that performs the calibration task within a few milliseconds for the full implied volatility surface. The framework is consistently applicable throughout a range of volatility models—including second-generation stochastic volatility models and the rough volatility family—and a range of derivative contracts. Neural networks in this work are used in an off-line approximation of complex pricing functions, which are difficult to represent or time-consuming to evaluate by other means. The form in which information from available data

- Idée : utiliser la propriété d'approximation universelle des réseaux de neurones pour calibrer la valuation engine.
- On entraîne le réseau en lui fournissant un échantillon de valeurs exactes d'options en fonction des facteurs de risque et de caractéristiques statiques (maturité, strike, …)
  - *D'où les valeurs des hyperparamètres*
- Pour d'autres valeurs des pricing inputs, le réseau de neurones permet de prédire la valeur du portefeuille.

Le calcul du HPL : valuation engine

- Horvath, Muguruza & Tomas (2021). Deep learning volatility: a deep neural network perspective on pricing and calibration in (rough) volatility models. *Quantitative Finance*.

> In this paper, we apply deep neural networks (merely) as powerful high-dimensional functional approximators to approximate the multidimensional pricing functionals from model parameters to option prices. The advantage of doing so via deep neural networks over standard (fixed-basis) functional approximations is that deep neural networks are agnostic to the approximation basis (Goodfellow *et al.* 2016). A

Le calcul du HPL : valuation engine

> To sum up, neural networks have the potential to efficiently approximate complex functions, which are difficult to represent and time-consuming to evaluate by other means. Using deep neural networks, as we do here, to approximate the pricing map (or equivalently the implied volatility mapping) from parameters of traditional models to shapes of the implied volatility surface represented by grid of implied volatility values speeds up each functional evaluation, while maintaining control over reliability and interpretability of network outputs.

Périmètre des facteurs de risque et inputs de la valuation engine

- Les banques décident du niveau de granularité pour le pricing et/ou leur analyse des risques
  - *Beaucoup de facteurs de risques (par ex. 60 000) ⇒ approche plus fine (granulaire) des risques*
- Exemple : pour une « courbe des taux » de swaps de référence dans une devise, les tenors (piliers) peuvent être :
  - *Taux à la monnaie 3 mois, 6 mois, 1an, 3 ans, 5 ans, 7 ans, 10 ans*
  - *Ou : taux à la monnaie 3 mois, 6 mois, 1an, 5 ans, 10 ans*
  - *à la monnaie ⇔ sans prime initiale (ici pas d'initial margins)*
- Première approche plus « granulaire » : Le premier ensemble des facteurs de risque inclut le second
  - *On va considérer l'impact du périmètre des facteurs de risque à la fois sur le pricing et sur l'analyse des risques*
  - *Considérons un swap de maturité 6 ans*

Périmètre des facteurs de risque et inputs de la valuation engine

- On va considérer l'impact du périmètre des facteurs de risque à la fois sur le pricing et sur l'analyse des risques (suite)
  - *Considérons un swap de maturité 6 ans (suite) dont le taux fixe nous est donné (static data)*
  - *Pour simplifier la présentation, faisons l'hypothèse que la valeur de ce swap ne fait intervenir que l'ensemble des taux de swaps à la monnaie, toutes maturités confondues.*
  - *Si le taux de swap six ans est observé sur le marché et que notre swap 6 ans a le même taux fixe que celui du marché, on peut en déduire que la valeur du swap est nulle : on est dans le cadre du mark-to-market*
  - *Si ce n'est pas le cas, il va être nécessaire de reconstituer l'ensemble des taux associés aux différentes dates de paiement de notre swap six ans. Intervient alors un modèle de reconstitution des taux non observés à partir des taux observés (interpolation ou extrapolation)*

Périmètre des facteurs de risque et inputs de la valuation engine

- Formellement notons F_t le premier ensemble de facteurs de risque et $\hat{F}_t$ le second (avec $\hat{F}_t \subset F_t$)
- Le pricer (valuation function) comprend une première étape de reconstruction de la courbe des taux à partir des tenors.
  - *$F_t \to g(\theta, F_t, .)$ où θ est un (hyper)paramètre résultant d'une calibration. $g(\theta, F_t, T)$ va correspondre au taux de maturité T*
  - *En pratique, la plupart des pricers des banques reposent sur l'interpolation (et pas l'approximation) : si T est un tenor, le taux fourni par g est bien le taux de maturité T utilisé en entrée.*
  - *Exemple (interpolation linéaire) : $r_6 = \frac{1}{2} \times (r_5 + r_7)$*
  - *Exemple (suite) : $r_6 = \frac{4}{5} \times r_5 + \frac{1}{5} \times r_{10}$*
  - *Cet exemple montre que la fonction g dépend de la granularité des facteurs de risque : l'espace de départ (ensemble des tenors) n'est pas le même.*

VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- HPL (Hypothetical P&L FRTB)

10.32 Hypothetical P&L (HPL): the daily P&L produced by revaluing the positions held at the end of the previous day using the market data at the end of the current day. Commissions, fees, intraday trading and new/modified deals, valuation adjustments for which separate regulatory capital approaches have been otherwise specified as part of the rules and valuation adjustments which are deducted from CET1 are excluded from the HPL. Valuation adjustments updated daily should usually be included in the HPL. Time effects should be treated in a consistent manner in the HPL and risk-theoretical P&L.

- Le HPL précise le concept de clean P&L
  - *Comme dans le cas du clean P&L*
  - *Non prise en compte des commissions*
  - *Non prise en compte des gains liés au trading intraday*
  - *Non prise en compte des gains liés à de nouveaux trades (voir partie consacrée au day-one profit)*

VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

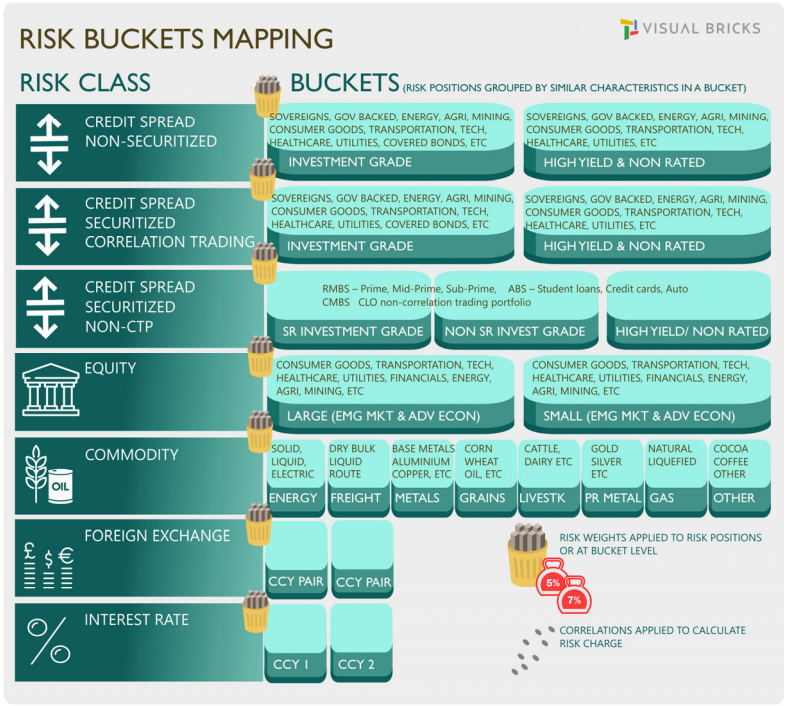
- HPL (Hypothetical P&L FRTB)

10.32 Hypothetical P&L (HPL): the daily P&L produced by revaluing the positions held at the end of the previous day using the market data at the end of the current day. Commissions, fees, intraday trading and new/modified deals, valuation adjustments for which separate regulatory capital approaches have been otherwise specified as part of the rules and valuation adjustments which are deducted from CET1 are excluded from the HPL. Valuation adjustments updated daily should usually be included in the HPL. Time effects should be treated in a consistent manner in the HPL and risk-theoretical P&L.

- Les paramètres recalibrés quotidiennement à partir des facteurs de risque de la valuation engine du Front Office sont intégrés dans le calcul du HPL
- Paramètres directement calculés à partir de quantités observables sur les marchés (ex : volatilité implicite d'une option, bijection entre observables de marché et facteurs de risque) ≠ hyperparamètres liés à une optimisation (paramètre de lissage dans une interpolation)
- Les ajustements de valeur (voir autres transparents) qui interviennent en déduction du numérateur (CET1) ne sont pas pris en compte
- ! Aux paramètres infréquemment changés (floor sur les taux d'intérêt)

La construction d'un modèle de mesure des risques de marché

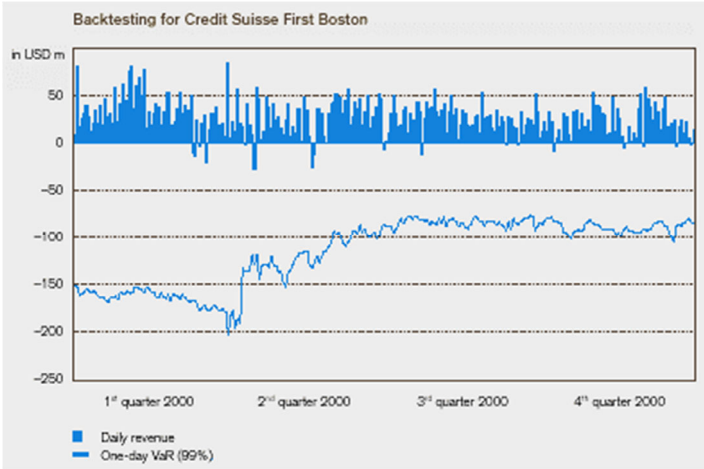
- Contexte pratique : détermine les choix de modélisation
- Nombre de facteurs de risque (dimensionnalité) est faible
  - *Approches par scénarios prédéfinis ou modèles GARCH*
- Quand le nombre de facteurs de risque est grand
  - De l'ordre de plusieurs dizaines de milliers
  - *Approches « historiques » : distribution empirique*
  - *Approches paramétriques gaussiennes*
    - Utilisation ou pas de simulations de Monte Carlo
    - Pas utile pour les approches gaussiennes si on néglige les non-linéarités par rapport aux facteurs de risque (positions optionnelles)
    - Utile si positions optionnelles ou des méthodes
  - *Distribution gaussienne pour les facteurs de risque + simulation de Monte-Carlo pour prendre en compte les positions non-linéaires (coûteux en temps de calcul)*



http://www.visualbricks.com/frtb.html

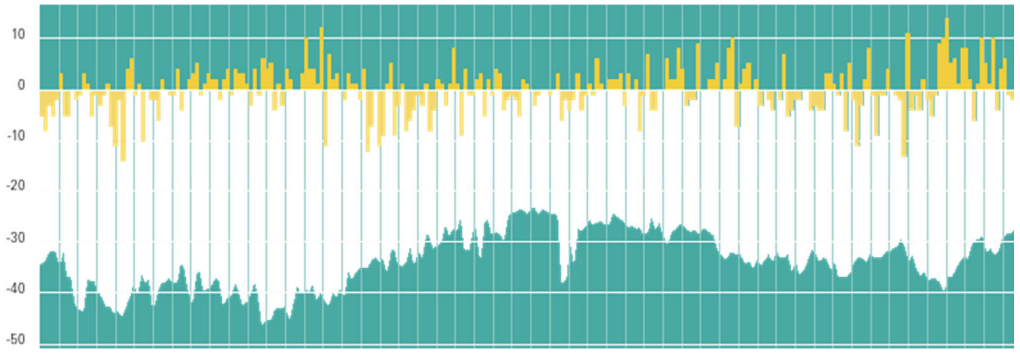
VaR et P&L : Credit Suisse (2000)

- *Pertes rares et toujours très inférieures à la VaR*
- *« Dirty » P&L ? Inclusion des commissions, des résultats intra-day (opérations de change), du « theta effect » ?*



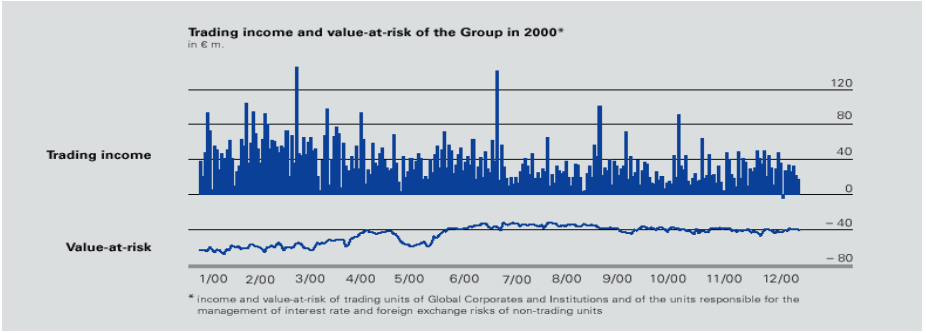
VaR et P&L : ABN Amro (2000)

- *P&L vs VaR (en millions d'Euros)*
- *P&L beaucoup plus souvent négatif (clean P&L ?)*
- *Surestimation de la VaR ?*



VaR et P&L : quelques exemples

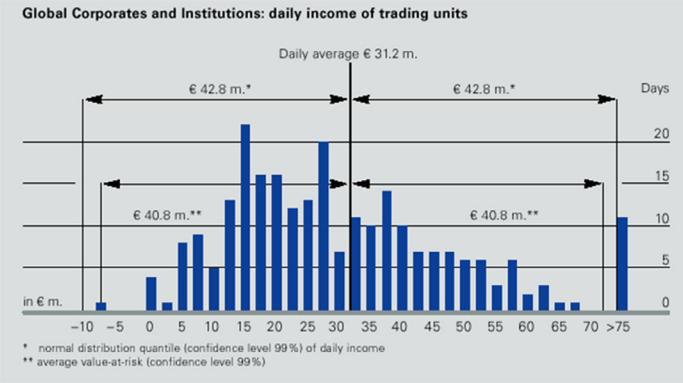
- Deutsche Bank (2000)



- *Résultats quotidiens tous les jours positifs ! (≠ ABN Amro)*
- *La distribution des gains/pertes ex-post est très différente de la distribution ex-ante*
- *Incorpore le risque business (marges commerciales) et l'expertise (information non contenue dans les prix) des traders*
- *On remarque que les VaR à 1 jours restent relativement faibles*

VaR et P&L : Deutsche Bank (2000)

- Contrairement au prix des actifs financiers, les distributions des gains sont platikurtiques et avec de l'asymétrie vers les gains
  - *VAR moyenne, inférieure à la VaR gaussienne*

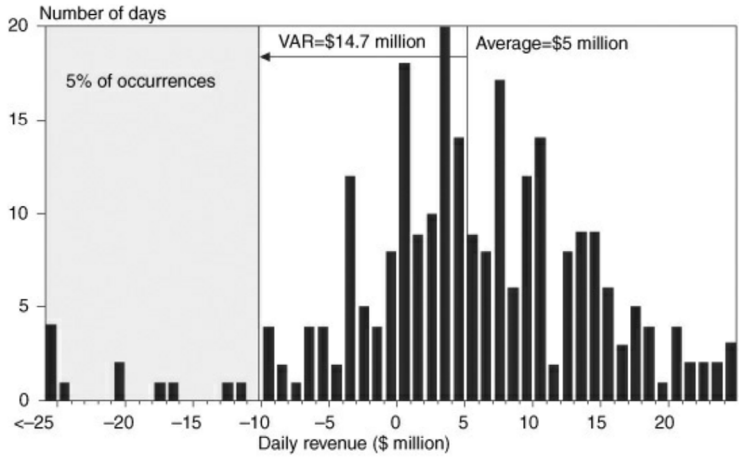


  - *Banques de marché externalisent les risques extrêmes vers leurs clients*

VaR et P&L : JP Morgan (1994)

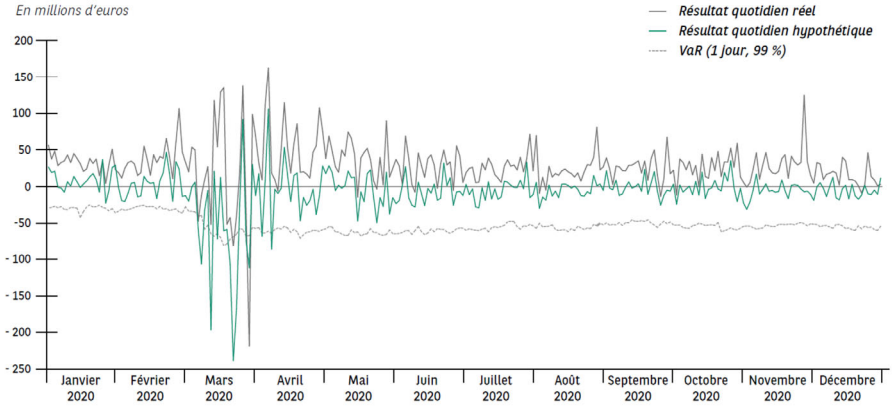
- Source : Jorion Value at Risk, 3rd Ed.: The New Benchmark for Managing Financial Risk

Computation of nonparametric VAR.



VaR et P&L de BNP Paribas pendant la crise sanitaire

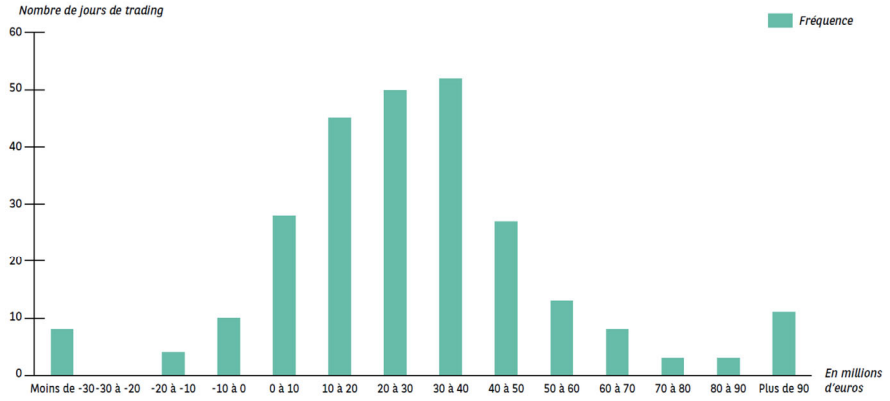
➤ **GRAPHIQUE N° 11 : COMPARAISON ENTRE LA VAR (1 JOUR, 99 %) ET LE RÉSULTAT QUOTIDIEN DU PORTEFEUILLE DE NÉGOCIATION (EU MR4)**



Augmentation de la VaR, mais pas suffisamment en mars 2020 ⇒ nombreuses violations. Tendance à la sous-estimation de la VaR les autres jours ? Corrélation assez faible entre HPL et APL

VaR et P&L : BNP Paribas (2020)

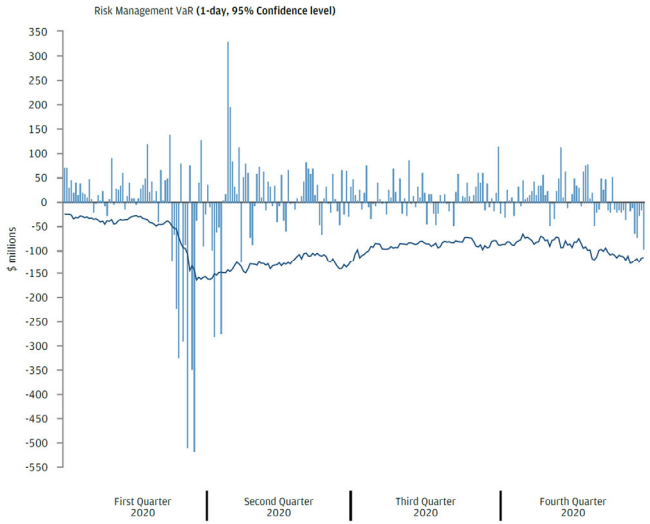
➤ **GRAPHIQUE N° 13 : DISTRIBUTION DES RÉSULTATS RÉELS QUOTIDIENS DU PORTEFEUILLE DE NÉGOCIATION**



On notera la similitude avec le graphique précédent : espérance positive, asymétrie vers les gains, pertes quotidiennes rares et de montant faible, eu égard aux fonds propres, distribution plutôt platikurtique ; et pourtant, 2020 est l'année Covid.

VaR 1D 95% et P&L 2020 JP Morgan

- NB : ici on a l'évolution d'une VaR à 95% (et non 99%)



VaR 1D 95% et P&L 2020 JP Morgan

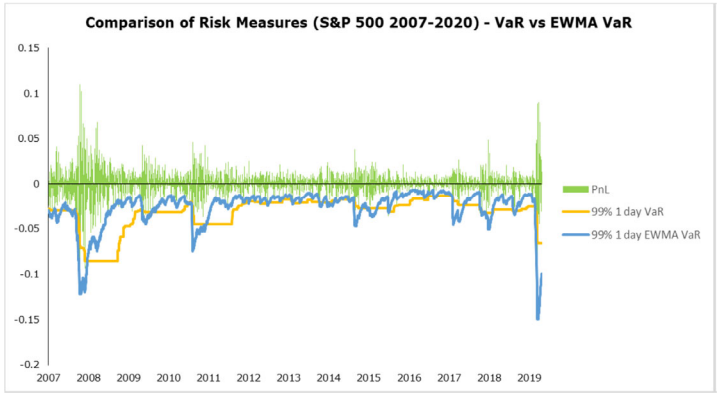
- Voyons quelles explications sont données dans le rapport annuel de JP Morgan, à propos de ces exceptions de VaR
  - *For the year ended December 31, 2020, the Firm observed 10 VaR backtesting exceptions, which were predominantly driven by volatility at the onset of the Covid-19 pandemic that was materially higher than the levels realized in the historical data used for the VaR calculation.*
- Ce qui est mis en avant, c'est un écart entre la volatilité réalisée et la volatilité observée pendant la période de calibration
  - *Importance de la volatilité (VaR homogène de degré 1)*
  - *Importance de sa dynamique*
  - *Notons qu'il est interdit aux banques d'utiliser autre chose que des données historiques (comme par exemple, l'utilisation du VIX)*
  - *Même quand un risque futur est avéré (event risk), par exemple « référendum Brexit ».*

Bâle 2.5 et FRTB : études d'impact

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

2020 : année de la crise Covid – VaR 1D 99% de l'indice S&P 500

- Calcul avec la méthode historique et avec la méthode historique « filtrée » par une estimation de la volatilité courante
  - *Les exceptions de VaR sont dues pour une bonne part à une mauvaise actualisation de la volatilité dans les modèles des banques*



  - Source : Deloitte (In defence of VaR)

EWMA VaR vs Vanilla VaR

- Source Deloitte : In Defence of VaR (June 2020)

Table 1: Backtesting Exceptions under each Risk Measure during "stress" (2008 and 2020) and "quiet" years (2018 and 2019) for S&P 500. Note that EWMA VaR could be floored at VaR, meaning it would never suffer more exceptions.

Number of Backtesting Exceptions	2008	2018	2019	2020
Vanilla VaR vs EWMA VaR				
99% 1 day VaR	13	7	1	8
99% 1 day EWMA VaR	3	3	4	3
ES vs EWMA ES				
97.5% 1 day ES	13	7	1	8
97.5% 1 day EWMA ES	3	3	2	2
Vanilla VaR vs EWMA VaR, with 5 day lag				
99% 1 day VaR (5 day lag)	18	10	2	11
99% 1 day EWMA VaR (5 day lag)	10	7	5	8

VaR et crise Covid

- Source Deloitte : In Defence of VaR (June 2020)

VaR has performed no better this time round than it did in 2008. According to Risk.net, US banks experienced 42 exceptions in Q1 2020, while the US units of a Canadian and a European bank each exceeded their VaR by more than 1000%. In Europe things didn't look much better, with one typical bank experiencing six exceptions in Q1 (for a 99th percentile VaR one would expect less than 1 exception per quarter).

By rule these exceptions should be leading to an increase in the multiplier, which could lead to a significant increase in Market Risk capital requirements (the multiplier begins to increase after a bank has experienced 4 or more exceptions in a one year window). Moreover, VaR models do eventually incorporate the COVID-related market swings into their histories and therefore register a very sharp (albeit too late) increase in VaR. This 'pro-cyclicality' of market risk capital requirements has caused concern amongst regulators, many of whom appear to be opting not to apply the multiplier increase to banks that experience exceptions.

Basel Committee on Banking Supervision

Basel III Monitoring Report

December 2020

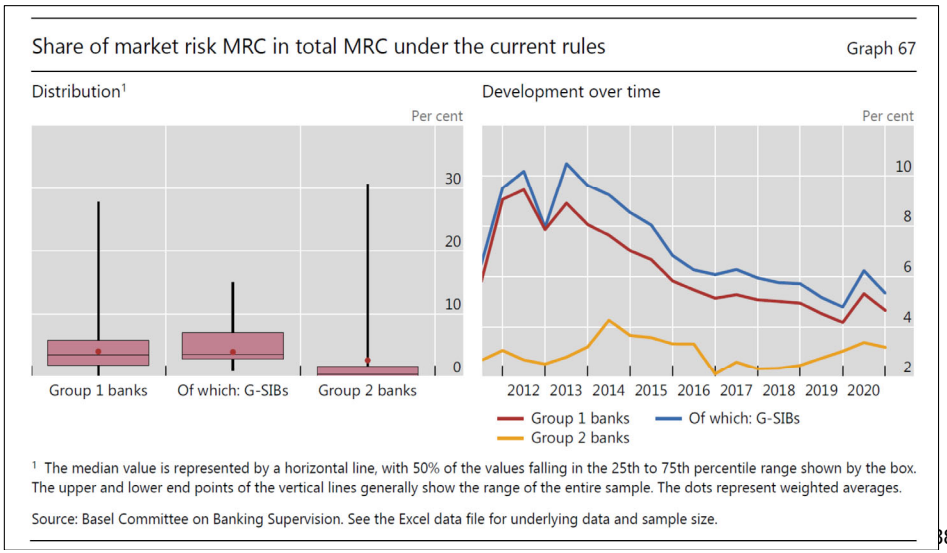
BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS

Études d'impact sur le passage de Bâle 2.5 à Bâle 3, réalisées par l'EBA et le comité de Bâle à partir de données contribuées (fin décembre 2019)

https://www.eba.europa.eu/sites/default/documents/files/document_library/Publications/Reports/2020/960797/Basel%20III%20monitoring%20report%20-%20Dec%202020.pdf
https://www.bis.org/bcbs/publ/d512.pdf

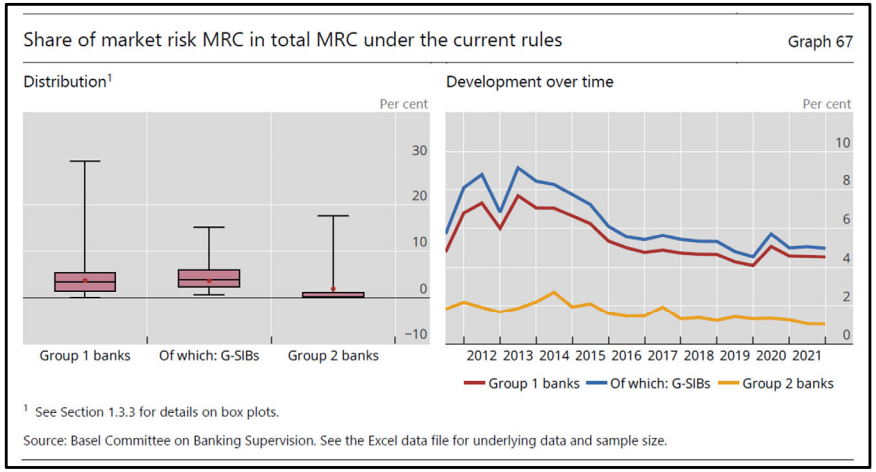
Part des risques de marché dans les besoins en fonds propres : QIS d524 (données 31/12/20) – Bâle 2.5

Baisse de la part due aux risques de marché dans les exigences en fonds propres réglementaires : deleveraging ? Optimisation ? Effet visible du Covid en S1 2020.



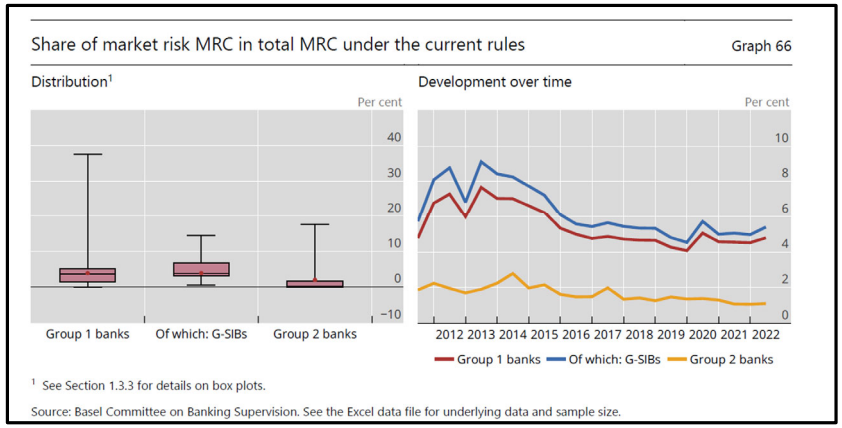
Part des risques de marché dans les besoins en fonds propres : QIS d541 (données 31/12/21) – Bâle 2.5

- Pas de changement notable par rapport à fin 2020
  - *Changement des données passées pour les banques du groupe 2 ?*



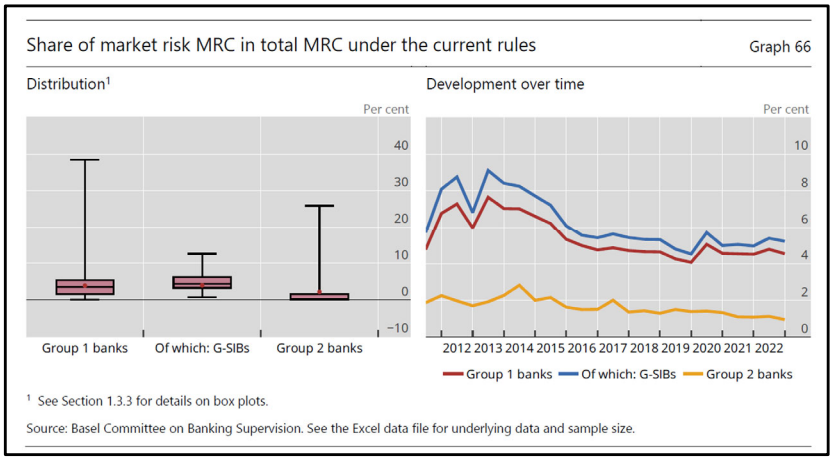
Part des risques de marché dans les besoins en fonds propres : QIS d554 (données 30/06/22) – Bâle 2.5

- Légère augmentation de la part consacrée aux risques de marché (hausse de la VaR, voir infra) : Covid ?
  - *A noter également les cas atypiques parmi les G-SIBs*



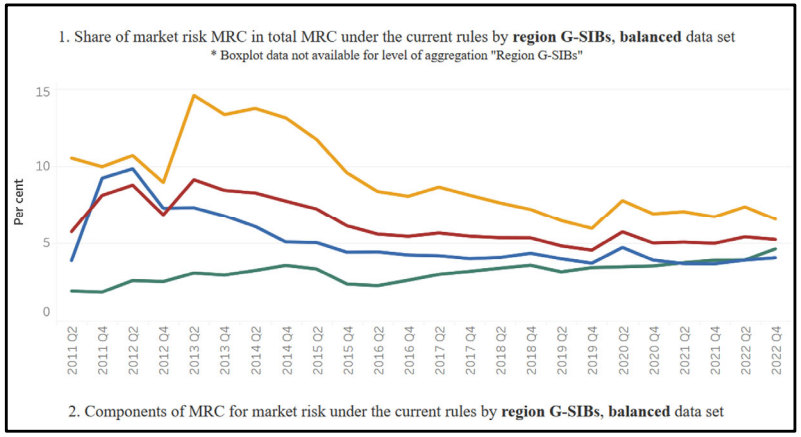
Part des risques de marché dans les besoins en fonds propres : QIS d546 (données 31/12/22) – Bâle 2.5

- Stabilisation en décembre 2022 : les données au 30 juin 2023 devraient être disponibles en février 2024
  - *Source https://www.bis.org/bcbs/publ/d554.pdf*



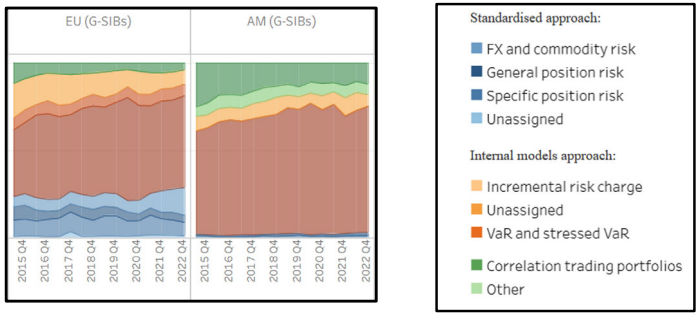
Importance des fonds propres destinés à couvrir les risques de marché : US vs EU G-SIBs

- Source https://www.bis.org/bcbs/dashboards.htm?m=3117 (interactive dashboard). En jaune, banques américaines, en rouge banques européennes.
- Grandes banques US : plus d'exposition (relative) aux risques de marché



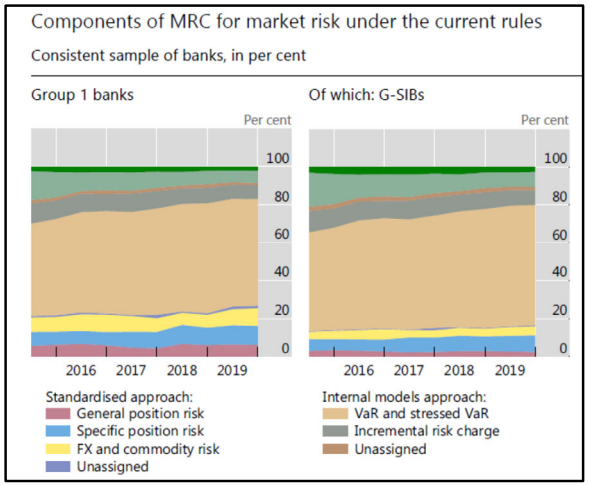
Ventilation des fonds propres destinés à couvrir les risques de marché : US vs EU G-SIBs

- Banques européennes : 52% provient de VaR + SVaR, 72% aux US (zone marron)



- Remarque : Plus grande contribution du risque FX en Europe, plus grande contribution du CTP (correlation trading portfolio, collateralized debt obligations) aux US, IRC (Incremental Risk Charge, credit spread risk) similaires

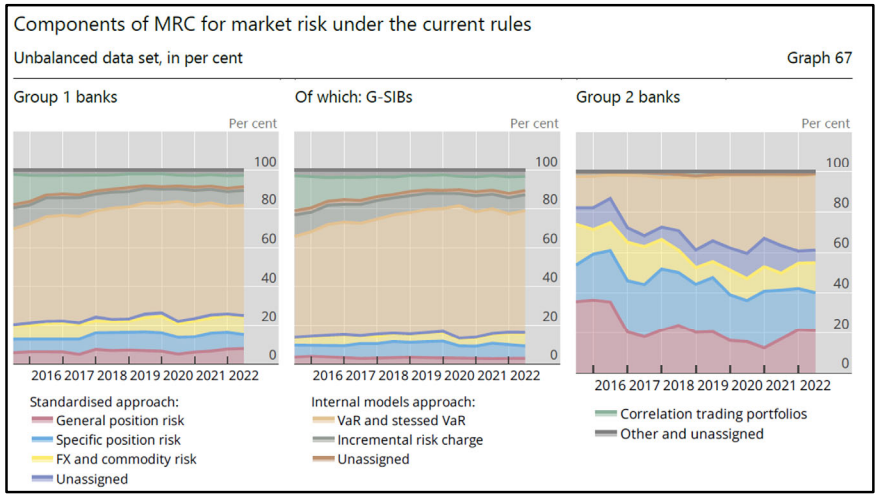
Décomposition des charges en capital pour le risque de marché, référentiel Bâle 2.5 (source d512 – fin 2019)



En marron clair, VaR + stressed VaR (risque de marché), en gris et en vert clair, IRC (migration risque de crédit) et CRM (CTP, correlation trading portfolio)

Décomposition des charges en capital pour le risque de marché, référentiel Bâle 2.5 (source d546 – juin 2022)

- Pour les G-SIB, 20% approche standard, 60% VaR et SVaR, 20% risque de crédit (IRC + CRM)



Basel III monitoring report (d524)

- Données issues du QIS du 31 décembre 2020
  - *QIS : Quantitative Impact Study*
  - *Actualisation des données des transparents précédents*
- Consommation en fonds propres pour les grandes banques
  - *Part du risque de marché*
- Ventilation de la consommation en fonds propres pour les différentes catégories de risque.
- Les données se réfèrent au référentiel en cours de validité
  - *Bâle 2.5*

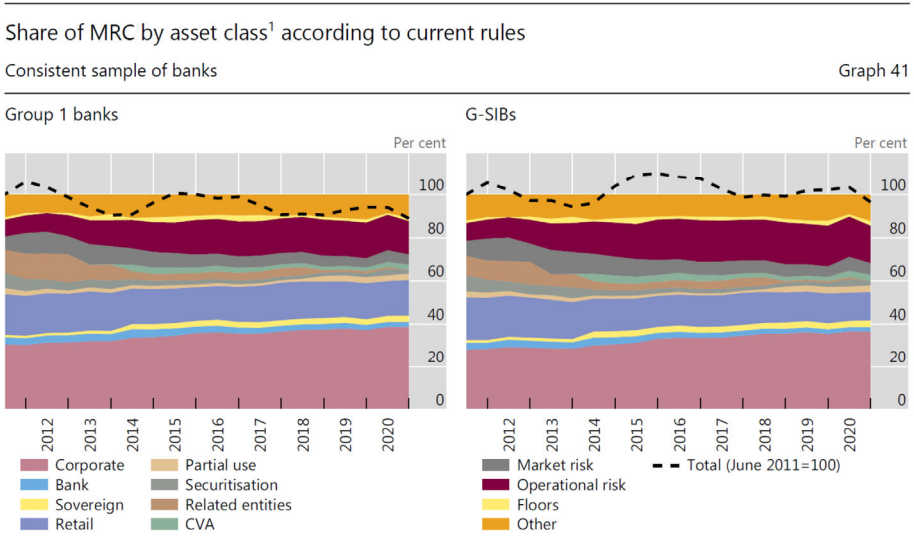
Basel Committee on Banking Supervision

Basel III Monitoring Report

September 2021

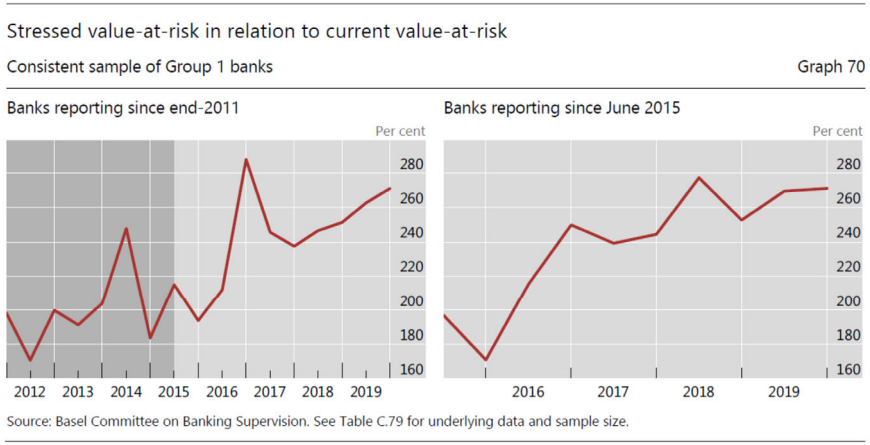
BIS

Ventilation de la consommation de fonds propres au sein du trading book (fin 2020 QIS BIS d524)



Source : Basel Monitoring Report, September 2021, page 49, https://www.bis.org/bcbs/publ/d524.htm

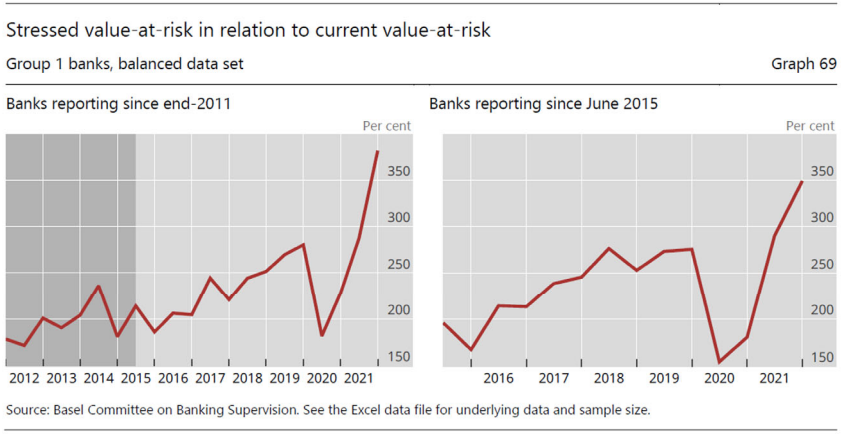
BIS QIS sur la base de données du 31 décembre 2019



Jusqu'en 2019 (pré-covid), augmentation de la part de la stressed VaR : passage de x2 à x3 la current VaR

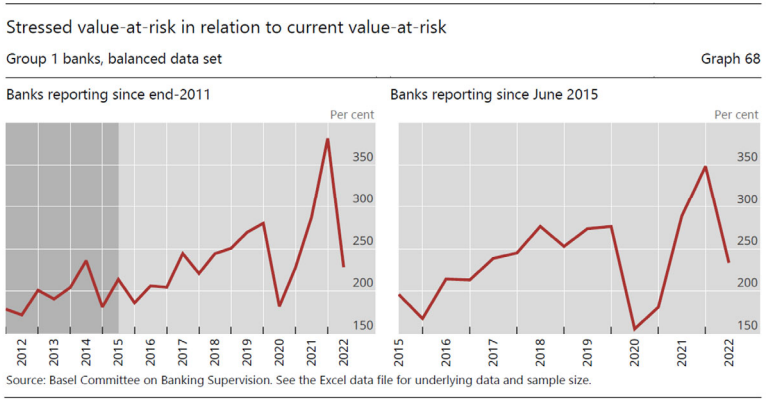
BIS QIS sur la base de données du 31 décembre 2021 (d541)

- On constate que les données passées (2016) sont modifiées (?)
  - *Baisse en S1 2020 (hausse current VaR), puis forte hausse du ratio SVaR/Current VaR*

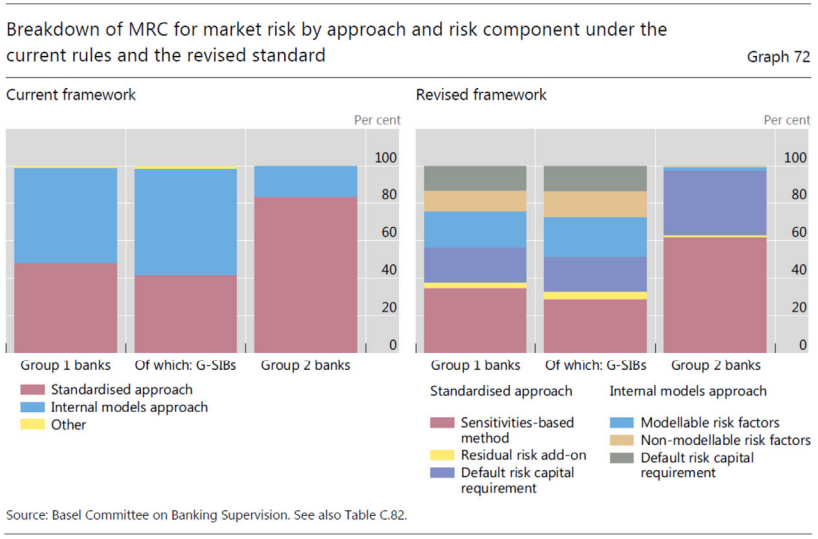


BIS QIS sur la base de données du 30 juin 2021 (d546)

- Baisse considérable du ratio SVaR/VaR considérablement entre le 31 décembre 2021 et le 30 juin 2022, expliquée par le comité de Bâle par une hausse de la volatilité (VaR) en 2022



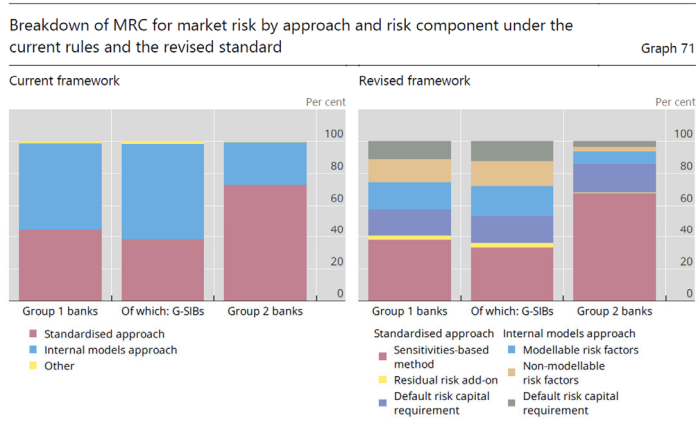
Ventilation des charges en capital (approche standard vs modèles internes) pour les risques de marché référentiel Bâle 2.5 vs FRTB (source d512, 4.3 – fin 2019)



Pour Bâle 2.5, il manque la ventilation IRC/CRM. Ce qui ressort de la VaR (ou de l'ES stressé) correspond à environ 20% du total (Modellable risk factors)

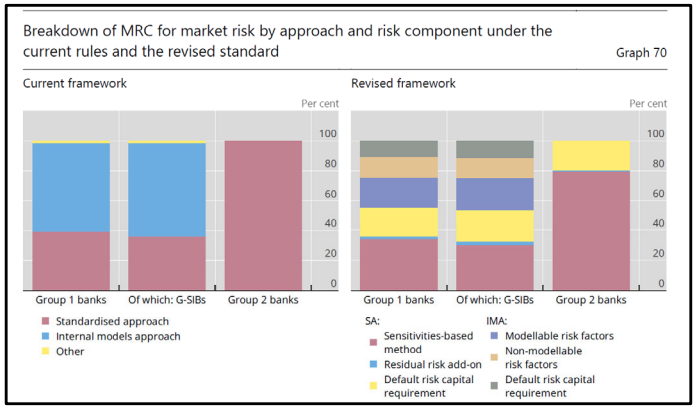
Ventilation des charges en capital (approche standard vs modèles internes) référentiel Bâle 2.5 vs FRTB (source d541 – fin 2021)

- Peu de changements % fin 2019, mais n'intègre pas la tendance récente à donner la priorité à l'approche standard
  - *Risque de crédit dans le trading book (DRC –Default Risk Charge) : 1/3 du total, une partie obligatoirement en approche standard, l'autre pouvant être IMA.*

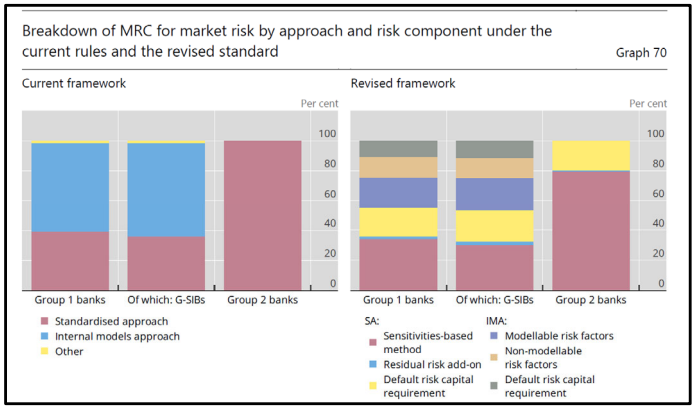


Ventilation des charges en capital (approche standard vs modèles internes) référentiel Bâle 2.5 vs FRTB (source d554 – fin 2022)

- La part des besoins en fonds propres calculés selon l'approche standard passe à 1/3 pour les G-SIBs contre 40% un an auparavant (changement de méthodologie)
- « petites banques » : 100% en approche standard

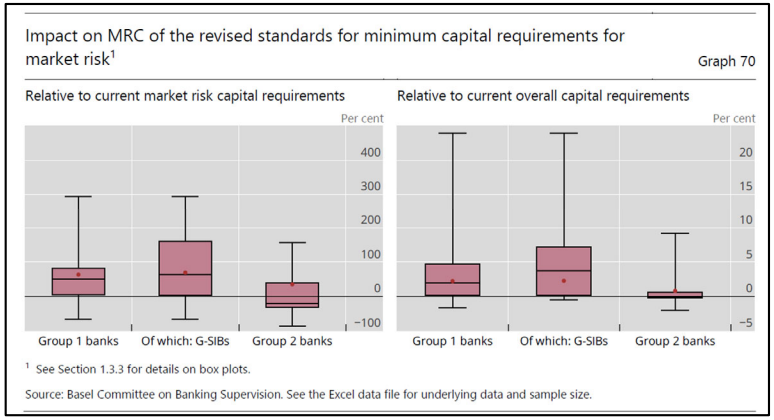


Ventilation des charges en capital (approche standard vs modèles internes) référentiel Bâle 2.5 vs FRTB (source d554 – fin 2022)



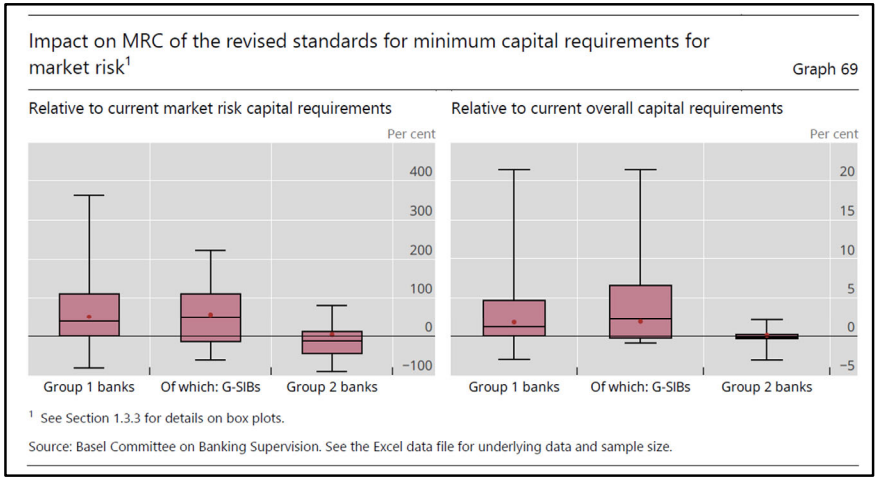
Impact global du FRTB pour les activités de marché ? (données fin 2021 d541)

- Augmentation très importante par rapport à Bâle 2.5 ?
- +70% en moyenne et médiane % à l'existant
  - *Inflation des réponses aux QIS ? Optimisation ex-post possible ? Manque de confiance des régulateurs vis-à-vis des banques ?*



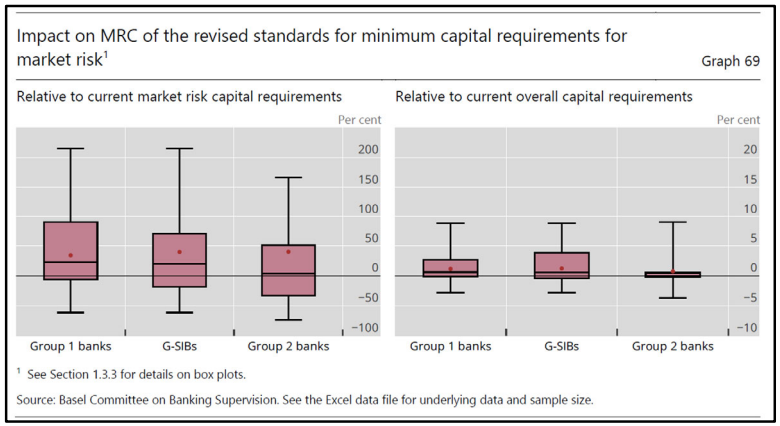
Impact global du FRTB pour les activités de marché ? (données juin 2022 d546)

- L'actualisation de juin 2022 confirme le fort impact anticipé par les G-SIBs.



Impact global du FRTB pour les activités de marché ? (données décembre 2022 d554)

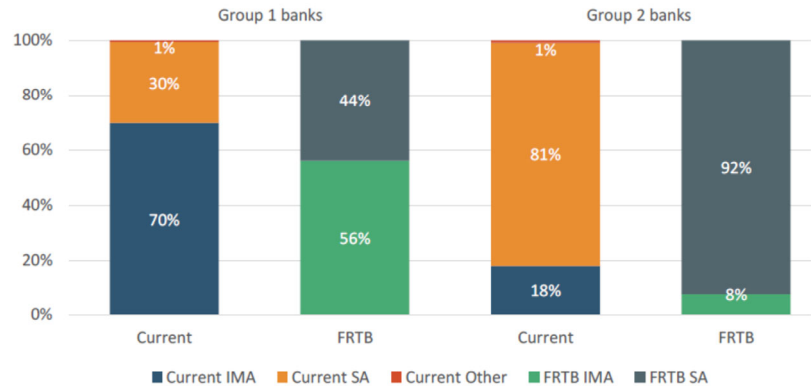
- Forte révision à la baisse de l'impact du FRTB, dû à un changement de méthodologie du comité de Bâle
  - *Le comité de Bâle reproche aux banques des choix méthodologiques trop conservateurs*



Pour les banques de l'UE, passage au FRTB implique un accroissement du % des fonds propres réglementaires calculés selon les méthodes standard (FRTB SA)

Figure 7: Contribution to the total market risk RWAs by each calculation method before and after FRTB

Part 1: Reduced estimation bias

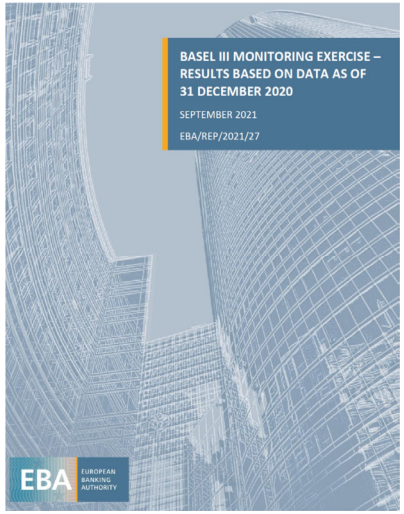


Source: EBA QIS data (December 2019), sample: 44 banks

According to a survey conducted by the European Central Bank in 2019 and published in February 2020, only 40% of eurozone banks currently using the IMA for market risk plan to seek IMA approval under the new rules.

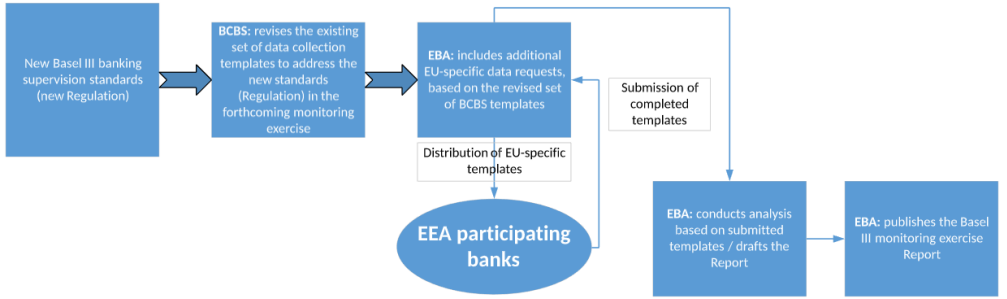
EBA Basel III monitoring exercise

- Document de l'EBA, septembre 2021
  - *https://www.eba.europa.eu/eba-publishes-its-regular-monitoring-report-basel-iii-full-implementation-eu*
- Données du 31 décembre 2020
- Périmètre : UE (EEA), échantillon de 40 banques
- Étude menée en parallèle et en coordination avec celle du comité de Bâle
- Section 4, FRTB
  - *Impact estimé du passage de Bâle 2.5 au FRTB*



EBA Basel III monitoring exercise

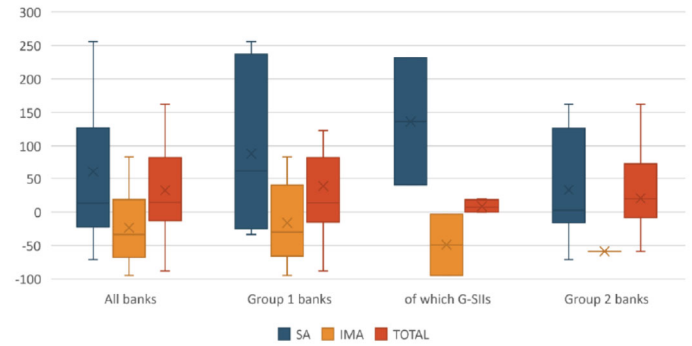
- Pour avoir une visibilité de l'impact des réformes de Bâle 3, au sein de l'EEA, les études d'impact menées par le comité de Bâle, deviennent obligatoires, avec des instructions complémentaires spécifiques



EBA Basel III monitoring exercise (risques de marché)

- Bâle 2.5 → FRTB ⇒ ↘ des charges en capital calculées à partir des modèles internes (effet de périmètre), ↗ des charges en capital pour l'approche standardisée pour les G-SIBs

Figure 6: Change of market risk capital requirements after FRTB implementation according to reduced estimation bias, without floor, broken down by approach and bank group (in % of market risk MRC)

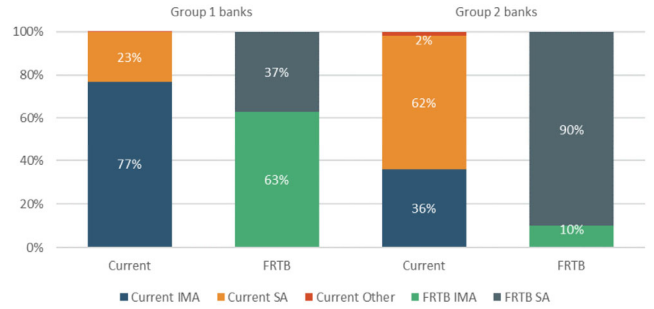


Source: EBA QIS data (December 2020), sample 40 banks; note: the mean value ("X") is the simple average.

EBA Basel III monitoring exercise (risques de marché)

- Résultats conformes à ceux de l'enquête précédente.
- Pour les « grandes banques », le % de fonds propres IMA diminue (à partir d'un niveau élevé). Pour les « petites banques » déjà majoritairement en SA, le périmètre IMA s'effondre.

Figure 7: Contribution to the total market risk RWAs according to reduced estimation bias by each calculation method before and after FRTB



Source: EBA QIS data (December 2020), sample: 40 banks

- Benchmarking : HPE – hypothetical portfolio exercise

- EBA benchmarking exercise

Table 4: Interquartile dispersion for IMV and risk metrics by risk factor

Average Interquartile dispersion by risk factor

	IMV	VaR (all sample)	SVaR	P&L VaR	VaR HS banks	VaR MC banks	Exp shortfall
Equity	2%	24%	28%	13%	23%	7%	13%
IR	19%	19%	34%	17%	16%	7%	12%
FX	4%	27%	31%	25%	26%	7%	23%
Commodity	4%	19%	19%	21%	17%	0%	19%
Credit spr.	1%	37%	34%	37%	33%	13%	36%

Mise en œuvre du FRTB : problématiques générales et contexte

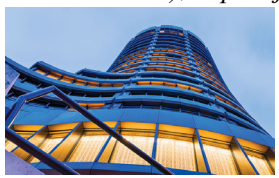
UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Mise en œuvre du FRTB : problématiques générales et contexte

- Le FRTB (Fundamental Review of the Trading Book) est en principe amené à remplacer le cadre réglementaire existant (Bâle 2.5) pour les risques de marché.
- Au-delà des aspects techniques, on a trois cadres de modélisation des risques de marché, Bâle 2.5 IMA, FRTB IMA et FRTB SA
  - *SA : approche standard, IMA : approche par les modèles internes*
- La réglementation ne prescrit pas de méthodologie statistique pour le calcul des mesures de risques.
- Il est intéressant de voir les solutions préconisées pour la mise en œuvre d'un modèles de mesure des risques de marché.

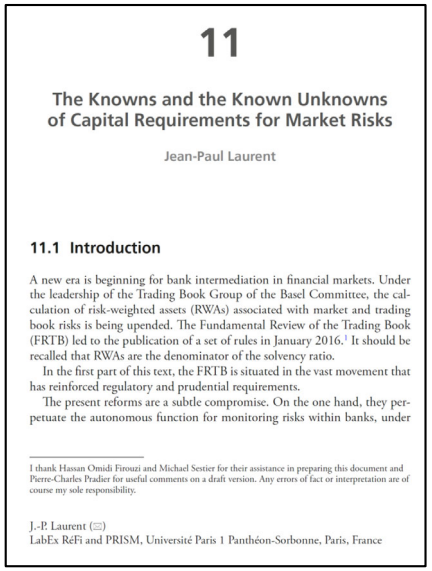
Mise en œuvre du FRTB : problématiques générales et contexte

- Le comité de Bâle a publié deux moutures du FRTB (janvier 2016, puis janvier 2019) à l'issue de deux groupes de travail
  - *Market Risk Group (Derek Nesbitt – PRA/BoE), depuis janvier 2017*



  - *Trading Book Group (Norah Barger, Division of Supervision and Regulation, Fed, et Karl Cordewener, BCBS puis Philippe Durand, ACPR) auparavant*
    - https://ypfs.som.yale.edu/library/fcic-staff-audiotape-interview-norah-barger-federal-reserve-board
- Reportant au Policy and Standards Group (anciennement Policy Development Group) du comité de Bâle
  - https://www.bis.org/bcbs/mesc.htm

- Laurent, J. P. (2017). The Knowns and the Known Unknowns of Capital Requirements for Market Risks. *Financial Regulation in the EU: From Resilience to Growth*, 277.
- https://www.slideshare.net/JeanPaulLaurent/market-risk-and-capital-requirements-a-hide-and-seek-game sur les problématiques précoces



11

The Knowns and the Known Unknowns of Capital Requirements for Market Risks

Jean-Paul Laurent

11.1 Introduction

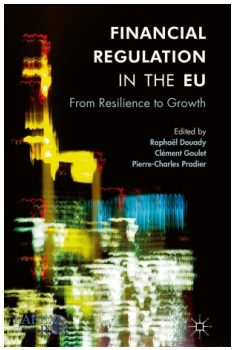
A new era is beginning for bank intermediation in financial markets. Under the leadership of the Trading Book Group of the Basel Committee, the calculation of risk-weighted assets (RWAs) associated with market and trading book risks is being upended. The Fundamental Review of the Trading Book (FRTB) led to the publication of a set of rules in January 2016.[1] It should be recalled that RWAs are the denominator of the solvency ratio.

In the first part of this text, the FRTB is situated in the vast movement that has reinforced regulatory and prudential requirements.

The present reforms are a subtle compromise. On the one hand, they perpetuate the autonomous function for monitoring risks within banks, under

I thank Hassan Omidi Firouzi and Michael Sestier for their assistance in preparing this document and Pierre-Charles Pradier for useful comments on a draft version. Any errors of fact or interpretation are of course my sole responsibility.

J.-P. Laurent (✉)
LabEx ReFi and PRISM, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, Paris, France

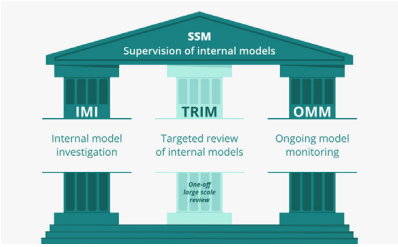


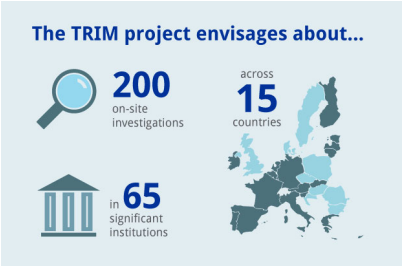
EUROPEAN CENTRAL BANK
BANKING SUPERVISION

ECB guide to internal models

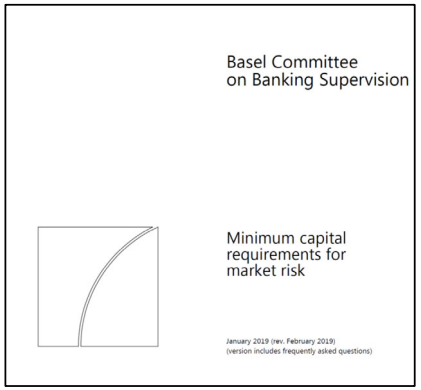
https://www.bankingsupervision.europa.eu/ecb/pub/pdf/ssm.guidetointernalmodels_consolidated_201910~97fd49fb08.en.pdf

Pages 117 - 174 sur le risque de marché (cadre Bâle 2.5



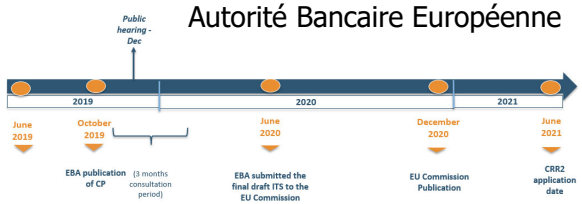


Cadre réglementaire



EBA EUROPEAN BANKING AUTHORITY

Autorité Bancaire Européenne



https://www.eba.europa.eu/regulation-and-policy/single-rulebook/interactive-single-rulebook/100427

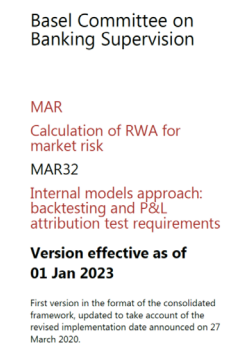
D457. Document de base sur le FRTB (Bâle 3). Beaucoup de jargon technique.
Champ international (mais délais et incertitudes sur la mise en œuvre)

7 juin 2019 : publication de la CRR2, *capital requirement regulation* et de la CRDV, *capital requirements directive*, implémentation de Bâle 3 dans l'Union Européenne, pour application initialement prévue en juin 2023 pour les risques de marché.

Implémentation des nouvelles réglementations relatives au risque de marché

- Documents publiés récemment par l'EBA ou le comité de Bâle (PLAT P&L Attribution Tests, NMRF, RFET – Risk Factor Eligibility Test)
  - *Calcul des scénarios de stress pour les facteurs de risque non modélisables (NMRF Non Modellable Risk Factors)*
    - https://www.eba.europa.eu/sites/default/documents/files/document_library/Publications/Draft%20Technical%20Standards/2020/RTS/961600/Final%20[illegible]0stress%20scenario%20risk%20measure.pdf

https://www.bis.org/basel_framework/chapter/MAR/32.htm?tldate=20201231&inforce=20230101&published=20200327

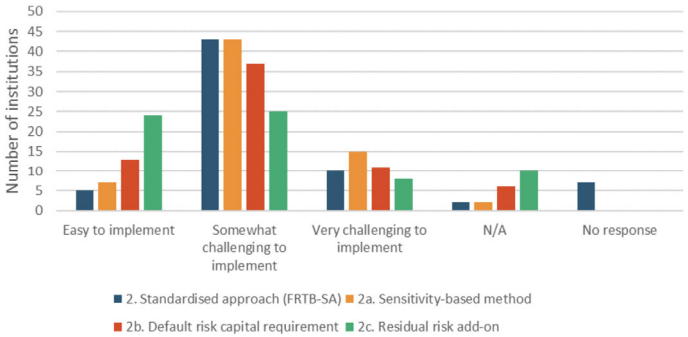


Implémentation des nouvelles réglementations relatives au risque de marché

- Le passage au FRTB devrait impliquer une diminution notable des risques mesurés selon les modèles internes
  - *Augmentation du périmètre des risques obligatoirement calculés en approche standard*
  - *Plus grande difficulté à obtenir l'approbation des modèles internes*
  - *Selon l'étude d'impact du comité de Bâle (décembre 2021 d541), sur 14 banques étant à même d'analyser leur conformité aux critères d'approbation (P&L attribution tests), seuls 16% des desks seraient éligibles à l'approche IMA.*
  - *Ce chiffre n'a que peu bougé ces dernières années.*
  - *Les critères les plus techniques relatifs aux facteurs de risque non modélisables (NMRF) et de validation des modèles internes restent des facteurs bloquants*
  - *Méthodologies abscondes, pas forcément bien conçues (dialogue régulateurs – association professionnelles ?), baisse des budgets ?*

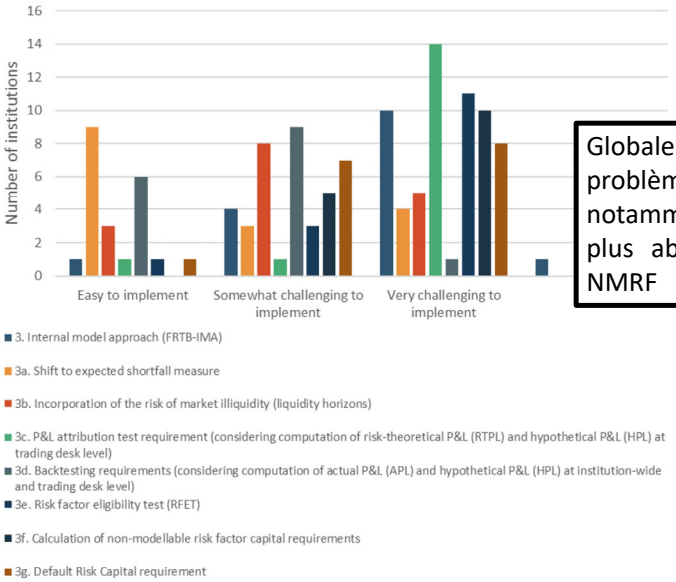
Implémentation des nouvelles réglementations relatives au risque de marché dans l'UE

- Etude d'impact de l'EBA sur la future réglementation des risques de marché (84 pages), décembre 2019
  - https://www.eba.europa.eu/sites/default/documents/files/document_library//EBA-2019-Op-15%20-%20Policy%20Advice%20on%20the%20Basel%20III%20reforms%20on%20credit%20valuation%20adjustment%20%28CVA%29%20and%20market%20risk.pdf



Approche standard (FRTB SA), IMA SBM (modèles internes) et DRC posent des problèmes importants d'implémentation

Le passage de la VaR à l'Expected Shortfall n'est pas le problème principal



Globalement, beaucoup de problèmes d'implémentation, notamment sur les aspects les plus absconds : PLAT, RFET, NMRF

Table 1. List of SA-CCR and FRTB mandates in CRR2 and proposed deadlines

	CRR2 7 Jun. 2019	European Parliament resolution (Jun. 2018)	Council Presidency compromise (May 2018)	European Commission proposal (Nov. 2016)
FRTB mandates				
(1) GL on the meaning of exceptional circumstances for the reclassification of a position (Article 104a(1))	28 Jun. 2024	Mandate deleted	5 years aeif	2 years aeif
(2) RTS on treatment of non-trading book positions subject to FX or commodity risk (Article 325(9))	28 Sep. 2020	6 months aeif	3 years aeif	6 months aeif
(3) RTS on instruments exposed to residual risks (Article 325u(5))	28 Jun. 2021	15 months aeif	2 years aeif	15 months aeif
(4), (5), (6) RTS on gross jump-to-default (JTD) amounts (Article 325w(8)(a),(b),(c))	28 Jun. 2021	15 months aeif	2 years aeif	15 months aeif
(7) RTS on emerging markets and advanced economies (Article 325ap(3))	28 Jun. 2021	15 months aeif	2 years aeif	15 months aeif
(8) RTS on material extensions and changes under the IMA (Article 325az(8)(a))	28 Jun. 2024	2 years aeif	3 years aeif	2 years aeif
(9) RTS on the assessment methodology for the IMA (Article 325az(8)(b))	28 Jun. 2024	2 years aeif	3 years aeif	2 years aeif
(10) RTS on extraordinary circumstances for being permitted to continue using the IMA (Article 325az(9)(a))	28 Jun. 2024	mandate deleted	5 years aeif	6 months aeif
(11) RTS on extraordinary circumstances for being permitted to limit the backtesting add-on (Article 325az(9)(b))	28 Jun. 2024	N.A.	N.A.	N.A.
(12), (13), (14), (15) RTS on liquidity horizons for the IMA (Article 325bd(7)(a),(b),(c),(d))	28 Mar. 2020	6 months aeif	9 months aeif	6 months aeif
(16) RTS on assessment of risk factor modellability under the IMA (Article 325be(3))	28 Mar. 2020	N.A.	9 months aeif	N.A.
(17), (18), (19), (20), (21), (22) RTS on backtesting requirements and PLA requirements under the IMA (Article 325bf(9) and Article 325bg(4)(a),(b),(c),(d),(e))	28 Mar. 2020	6 months aeif	9 months aeif	6 months aeif
(23) GL on criteria for the use of data inputs in the risk-measurement model under the IMA (Article 325bh(3))	28 Sep. 2020	N.A.	3 years aeif	N.A.
(24), (25), (26), (27) RTS on a stress scenario risk measure for non-modellable risk factors under the IMA (Article 325bk(3)(a)(b)(c)(d))	28 Sep. 2020	6 months aeif	15 months aeif	6 months aeif
(28) RTS on PDs and LGDs for the default risk model under the IMA (Article 325bp(12))	28 Sep. 2020	15 months aeif	15 months aeif	15 months aeif
(29) ITS on specific reporting requirements for market risk (Article 430b(6))	30 June 2020	N.A.	30 June 2020	N.A.
(30) Report on the impact of the FRTB (Article 519b(1))	30 Sept 2019	5 years aeif	30 Sept 2019	5 years aeif
RTS on risk weights for positions in CIUs (Article 325k(3))	Mandate deleted	15 months aeif	2 years aeif	15 months aeif
GL on the internal default risk model (Article 325bn(2))	Mandate deleted	2 years aeif	Mandate deleted	2 years aeif
Report on the appropriateness of the level of own funds requirements for market risk (Article 501b(2))	Mandate deleted	By doa + 2 years	Mandate deleted	by doa + 2 years

Pour la mise en œuvre de la CRR2 pour les risques de marché, l'EBA doit rédiger 26 RTS (regulatory technical standards), 1 ITS (Implementation Technical Standard), 2 GL (guidelines) et une étude d'impact.

On notera que le document relatif à la validation des modèles internes ne devrait être publié qu'en 2024.

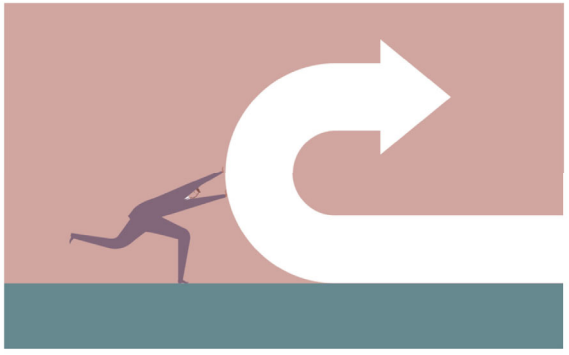
Et il faudra aussi compter avec les guidelines de la BCE.

Implémentation du FRTB dans l'UE : vers une régression de l'utilisation des modèles internes ?

- https://www.risk.net/regulation/7951706/banks-turn-away-from-frtb-internal-models-in-europe

Banks turn away from FRTB internal models in Europe

Drawbacks mean even fewer model approval applications planned than past ECB survey suggested



Éligibilité des desk à l'approche par modèle interne (IMA) : P&L attribution tests (PLAT)

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

VaR à un jour : Comment calculer la variation de valeur d'un portefeuille ?

- RTPL : Risk Theoretical PnL

Definition of profits and losses used for the PLA test and backtesting

32.22 The RTPL is the daily trading desk-level P&L that is produced by the valuation engine of the trading desk's risk management model.

(1) The trading desk's risk management model must include all risk factors that are included in the bank's expected shortfall (ES) model with supervisory parameters and any risk factors deemed not modellable by the supervisory authority, and which are therefore not included in the ES model for calculating the respective regulatory capital requirement, but are included in non-modellable risk factors.

(2) The RTPL must not take into account any risk factors that the bank does not include in its trading desk's risk management model.

EBA EUROPEAN BANKING AUTHORITY

EBA/CP/2023/04

24 March 2023

Consultation Paper

Draft Regulatory Technical Standards on the assessment methodology under which competent authorities verify an institution's compliance with the internal model approach as per Article 325az(8) of Regulation (EU) No 575/2013 (Capital Requirements Regulation 2 - CRR2)

Contents

1. Responding to this consultation 3
2. Executive Summary 4
3. Background and rationale 6
3.1 Governance requirements 6
3.2 Assessment of the internal risk-measurement model used for the calculation of the expected shortfall and the stress scenario risk-measure 8
3.2.1 Risk factors 10
3.2.2 Proxies and data quality 12
3.2.3 Treatment of FX and Commodity risk in the banking book 12
3.2.4 Back-testing and profit and loss attribution requirements 13
3.2.5 Calculation of the expected shortfall measure and the stress scenario risk measure 15
3.3 Assessment of the internal default risk model 16
4. Draft regulatory technical standards on the assessment methodology under which competent authorities verify an institution's compliance with the requirements set out in Articles 325bh, 325bi, 325bn, 325bo and 325bp Regulation (EU) No 575/2013 (Capital Requirements Regulation 2 – CRR2) 20
5. Accompanying documents 152
5.1 Draft cost-benefit analysis / impact assessment 152
5.2 Questions for consultation 158
5.3 Annex I: Accuracy and soundness of ES estimators 162

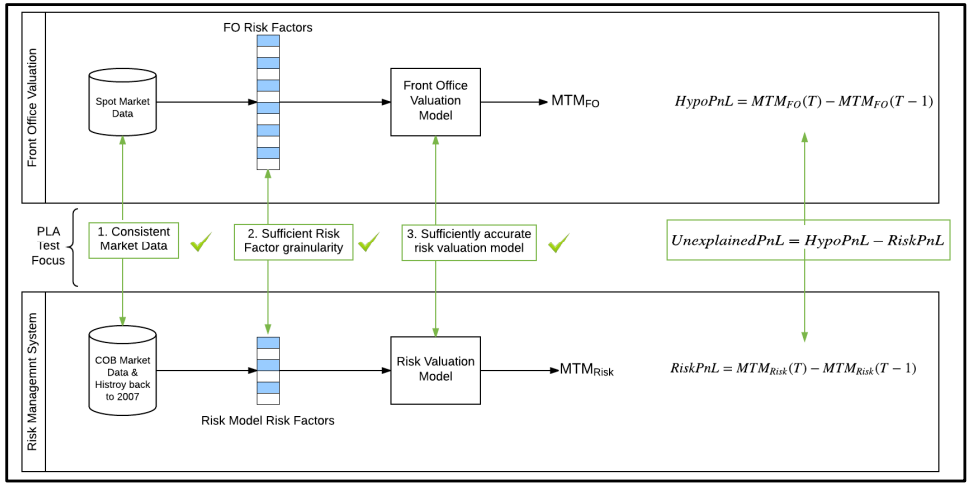
Commentaires sur le calcul du RTPL

> As regards the RTPL, competent authorities are required to check that the RTPL is calculated using the ES/SSRM set-up (e.g. same pricing functions). Furthermore, they are required to check that risk factors that are not shocked in the ES/SSRM do not contribute to the RTPL. The RTS also envisage several

- Les facteurs de risque n'intervenant pas effectivement dans le calcul de l'ES/SSRM ne peuvent être pris en compte dans le calcul du RTPL
- Les fonctions de pricing utilisées pour l'ES/SSRM doivent être les mêmes que celles utilisées pour le calcul du RTPL
  - *SSRM : Stress Scenario Risk Measure. ES calculé séparément pour les facteurs de risques non modélisables (NMRF)*
  - *On cherche à s'assurer que le RTPL est bien en phase avec le modèle utilisé pour la métrique de risque : mêmes entrants, mêmes fonctions*

Problématique de l'alignement entre les changements de MtM entre risques (RTPL) et FO (HPL)

- Trois étapes : choix des data, extraction des RF (risk factors), passage par les pricing engines



Problématique de l'alignement entre les changements de MtM entre risques (RTPL) et FO (HPL)

- On va procéder à partir d'un exemple
  - *Considérons une option d'achat de strike K et de maturité T. On note $\sigma(K,T)$ la volatilité implicite*
  - *On suppose que les autres déterminants de la valeur de l'option, taux repo, prix du sous-jacent, … sont les mêmes pour le Front office (FO) et le département des risques (approche step-reval)*
- Le FO modélise la surface de volatilité à partir des facteurs de risque $(\sigma(K_i,T_i), i \in I)$, le département des risques à partir de $\left(\sigma\left(K_j,T_j\right), j \in J\right)$
  - $(\sigma(K_i,T_i), i \in I)$ *sont les facteurs de risque du FO*
  - $\left(\sigma\left(K_j,T_j\right), j \in J\right)$ *sont les facteurs de risque du département des risques*
  - *On a souvent $J \subset I$, mais cela n'a aucune importance ici.*

Problématique de l'alignement entre les changements de MtM entre risques (RTPL) et FO (HPL)

- Pour calculer le MtM initial on aura deux fonctions σ_I et σ_J
  - $(\sigma(K_i,T_i), i \in I) \rightarrow \sigma_I(K,T)$
  - $\left(\sigma\left(K_j,T_j\right), j \in J\right) \rightarrow \sigma_J(K,T)$
  - *Ces fonctions diffèrent nécessairement dès que $J \neq I$*
- Ces fonctions sont en général des interpolations
  - $\sigma_I(K_i,T_i) = \sigma(K_i,T_i), \forall i \in I$
  - $\sigma_J\left(K_j,T_j\right) = \sigma\left(K_j,T_j\right), \forall j \in J$

Problématique de l'alignement entre les changements de MtM entre risques (RTPL) et FO (HPL)

- MAR 32.30 évoque le point précédent dans le cadre de facteurs de risque equity (et d'un risque idiosyncratique simulé)
  - *« (…) the bank would include the actual return return of the name in the RTPL (and in the HPL) … »*

> 32.23 Movements in all risk factors contained in the trading desk's risk management model should be included, even if the forecasting component of the internal model uses data that incorporates additional residual risk. For example, a bank using a multifactor beta-based index model to capture event risk might include alternative data in the calibration of the residual component to reflect potential events not observed in the name-specific historical time series. The fact that the name is a risk factor in the model, albeit modelled in a multifactor model environment, means that, for the purposes of the PLA test, the bank would include the actual return of the name in the RTPL (and in the HPL) and receive recognition for the risk factor coverage of the model.

- MAR 32.30 qui introduit explicitement le concept d'alignement

> *PLA test data input alignment*
>
> 32.30 For the sole purpose of the PLA assessment, banks are allowed to align RTPL input data for its risk factors with the data used in HPL if these alignments are documented, justified to the supervisory authority and the requirements set out below are fulfilled:

Problématique de l'alignement entre les changements de MtM entre risques (RTPL) et FO (HPL)

- MAR 32.30 et 31 précisent les modalités d'alignement des inputs du RTPL sur ceux du HPL, notamment :

> (1) Banks must demonstrate that HPL input data can be appropriately used for RTPL purposes, and that no risk factor differences or valuation engine differences are omitted when transforming HPL input data into a format which can be applied to the risk factors used in RTPL calculation.

  - *Le § précédent implique bien que les inputs du FO ne sont pas identiques à ceux du modèle interne de calcul des risques*

> 32.31 Adjustments to RTPL input data will be allowed when the input data for a given risk factor that is included in both the RTPL and the HPL differs due to different providers of market data sources or time fixing of market data sources, or transformations of market data into input data suitable for the risk factors of the underlying pricing models. These adjustments can be done either:
>
> (1) by direct replacement of the RTPL input data (eg par rate tenor x, provider a) with the HPL input data (eg par rate tenor x, provider b); or
>
> (2) by using the HPL input data (eg par rate tenor x, provider b) as a basis to calculate the risk factor data needed in the RTPL/ES model (eg zero rate tenor x).

Problématique de l'alignement entre les changements de MtM entre risques (RTPL) et FO (HPL)

- Dans la formulation du comité de Bâle, l'alignement des inputs des modèles de pricing est fait « pré-transformation » et non « post-transformation ».
  - *Ce qui est défavorable aux banques*

> 32.32 If the HPL uses market data in a different manner to RTPL to calculate risk parameters that are essential to the valuation engine, these differences must be reflected in the PLA test and as a result in the calculation of HPL and RTPL. In this regard, HPL and RTPL are allowed to use the same market data only as a basis, but must use their respective methods (which can differ) to calculate the respective valuation engine parameters. This would be the case, for example, where market data are transformed as part of the valuation process used to calculate RTPL. In that instance, banks may align market data between RTPL and HPL pre-transformation but not post-transformation.

PLA Test et alignement HPL/RTPL au sein de l'UE

- Back-testing, PLA tests (éligibilité à l'approche IMA : RTPL, HPL)

EBA/RTS/2020/02

27 March 2020

EBA FINAL draft Regulatory Technical Standards

on Back-testing requirements and Profit and Loss attribution requirements under Article 325bf(9) and 325bg(4) of Regulation (EU) No 575/2013 (revised Capital Requirements Regulation - CRR2)

PLA Test et alignement HPL/RTPL au sein de l'UE

2. The institution may substitute the value of a risk factor used in the calculation of the RTPL with the value taken by the same risk factor used in the calculation of the HPL as long as:

   a. in the calculation of the HPL, the value taken by the risk factor has been derived, transforming input data into suitable data for that risk factor (in other words, in the computation of the HPL, the risk factor does not directly correspond to the input data);

   b. the value of the risk factor in the HPL has been obtained using techniques of the valuation systems used for the hypothetical changes in the trading desk portfolio's value;

   c. none of the techniques of the valuation systems used for computing the HPL have been rebuilt in the valuation systems to derive the value of the risk factor for computing the RTPL.

Example

When computing both the HPL and the RTPL, the zero rate tenor x is used as a risk factor by the institution. In the HPL, the value of the risk factor (i.e. the zero rate tenor x) has been derived constructing the fixed-income yield curve from interest rate swaps (via bootstrapping). Accordingly, the input data for the risk factor are the rates in the interest rate swaps. In the RTPL, the value of the risk factor (i.e. the zero rate tenor x) has not been derived via bootstrapping (i.e. the technique used in the valuation systems used to determine the value of the risk factor for computing the HPL). Instead, the value of the risk factor is taken directly from a market data source (e.g. provider A). Accordingly, in this case, the institution is allowed (just for the purpose of the PLA) to substitute the value of the risk factor in the RTPL (i.e. the value of the zero rate tenor x as given by the market data provider A) with the value of the risk factor in the HPL (i.e. the value of the zero rate tenor x as derived via bootstrapping from data on interest rate swaps).

Aspects pratiques de la mise en œuvre du FRTB au sein de l'UE

- Horizons de liquidité pour l'approche par modèle interne

EBA/RTS/2020/01

27 March 2020

EBA FINAL draft Regulatory Technical Standards

on liquidity horizons for the Internal Model Approach (IMA) under points (a) to (d) of Article 325bd(7) of Regulation (EU) No 575/2013 (revised Capital Requirements Regulation — CRR 2)

Aspects pratiques de la mise en œuvre du FRTB au sein de l'UE

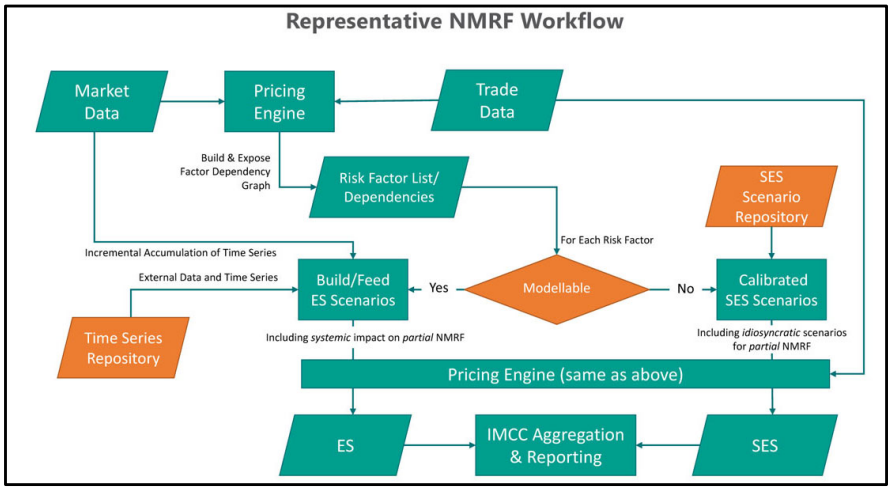
- Ces quatre RTS ont été transmis par l'EBA à la Commission Européenne qui doit les publier pour qu'ils prennent force de loi
- Comme indiqué précédemment, on anticipe une publication au JO de l'UE en mars 2022
- Mais il faudra ensuite prendre en compte des délais de mise en place pour le reporting, puis l'utilisation des nouvelles règles pour le calcul des exigences en fonds propres (2025 ? 2028 ?)
- L'attitude de l'UE va aussi dépendre de celle de la Fed qui n'avait indiqué des ses intentions avant fin 2022 …

Éligibilité des facteurs de risque : RFET (Risk Factor Eligibility Tests. Impact de la séparation MRF/NMRF

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Vue globale de l'approche par modèle interne pour les desks éligibles

- NB : pricing engine est relative aux pricers du département des risques

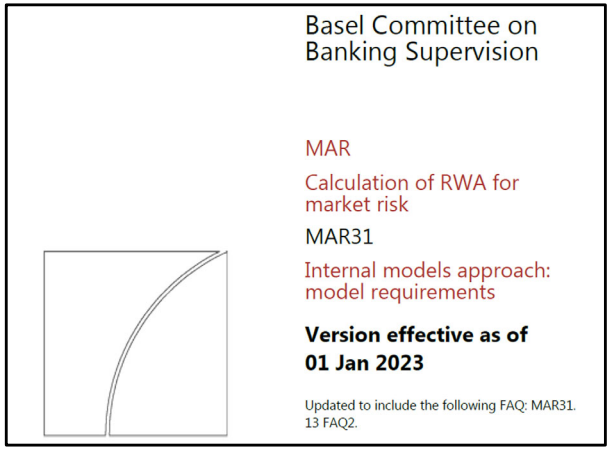


Éligibilité des facteurs de risque : RFET (Risk Factor Eligibility Tests.

- Comme pour le PLAT et le concept de RTPL, maïeutique difficile
  - *Deux moutures du FRTB*
  - *RTS de l'EBA, plus restrictif que le texte du comité de Bâle*
  - *Quid des implémentations dans les autres juridictions (Fed, BoE) ?*
  - *Préjugés et/ou manque de pragmatisme face à de vraies questions sur la validité des historiques de risk factors (RF) ?*
  - *Les régulateurs ont été échaudés par les expériences de données de consensus de marché (consensus prices) après les scandales sur les marchés liés aux taux Libor.*
  - *Les calculs de VaR ou d'ES impliquent que les RF correspondent à des « exit prices » sur des horizons de liquidité (10 jours, 20 jours, …)*
  - *Mais que se passe-t-il s'il n'y a pas de marché effectif, cad de possibilité de dénouer des transactions à cet horizon ?*

Éligibilité des facteurs de risque : RFET (Risk Factor Eligibility Tests selon le comité de Bâle

- Specification of market risk factors
- Model eligibility of risk factors



Ventilation des facteurs de risque dans l'approche IMA

- Approche IMA (modèles internes)
- On distingue entre deux types de facteurs de risque
  - *MRF : Modellable Risk Factors*
  - *NMRF : Non Modellable Risk Factors*
- Les facteurs de risque utilisés pour les modèles internes doivent être un sur-ensemble des facteurs de risque considérés dans l'approche standard.
- Les banques peuvent utiliser des proxys quand les historiques de données ne sont pas disponibles, selon des méthodologies validées par leur superviseur.
  - *Exemple : remplacer une marge de crédit sur un nom par un indice « sectoriel/géographique/qualité de crédit » de marges de crédit*
- MRF : facteur de risque en relation avec un marché actif

Ventilation des facteurs de risque dans l'approche IMA : MRF vs NMRF

- Les MRF vont intervenir dans les calculs d'Expected Shortfall
- Les NMRF font l'objet de traitements et calculs séparés pour obtenir les besoins réglementaires en fonds propres
  - *SSRM : Stress Scenario Risk Measure*
- L'objectif des régulateurs était de considérer des facteurs de risque associés à des marchés liquides et transparents.
  - *"The concept of modellability is intentionally linked, in the present context, to the concepts of liquidity and observability of market data"*
    - Source : Draft RTS EBA
- Afin que les données en entrée des modèles de risque soient pertinentes
  - *Éviter par exemple, que ces données ne soient pas en rapport avec les prix de marché, soient lissées et diminue artificiellement la volatilité.*

La notion de RPO (real price observation)

- MRF : facteur de risque en relation avec un marché actif
  - *Le comité de Bâle préfère utiliser la notion de « prix réel »*
  - *Prix sur lequel un transfert de risque réel ou possible est engagé*
- Par marché actif, on entend un marché sur lequel il y a suffisamment de transactions réelles ou potentielles
  - *Transaction réelle : une transaction effectuée pour un volume « suffisant » par rapport au fonctionnement usuel du marché considéré*
  - *Transaction potentielle : committed quote, engagement d'une contrepartie à traiter à l'achat/à la vente*
- Notion de « prix réels »
  - *Réglementation complexe et soumise à des interprétations arbitraires*
  - *Ne garantit ni la liquidité, ni la transparence et ne prévient qu'imparfaitement la mise en place de transactions fictives (conformité formelle).*

La notion de RPO (real price observation)

- Notion de prix réel : diverses possibilités

(1) It is a price at which the institution has conducted a transaction;

(2) It is a verifiable price for an actual transaction between other arms-length parties;

(3) It is a price obtained from a committed quote made by (i) the bank itself or (ii) another party. The committed quote must be collected and verified through a third-party vendor, a trading platform or an exchange; or

(4) It is a price that is obtained from a third-party vendor, where:

(a) the transaction or committed quote has been processed through the vendor;

(b) the vendor agrees to provide evidence of the transaction or committed quote to supervisors upon request; or

(c) the price meets any of the three criteria immediately listed in MAR31.12 (1) to MAR31.12(3).

Ventilation des facteurs de risque dans l'approche IMA. La notion de RPO (real price observation)

- Le critère (1) favorise les banques qui ont une position prédominante sur un marché
  - *Elles ont beaucoup plus de données correspondant à des transactions effectives*
- Le critère (2) est supposé favoriser la mise en commun de données (data pooling) par les banques, mais la data a d'autant plus de valeur qu'elle devient un input réglementaire
  - *Et il y a des questions évidentes de confidentialité : les volumes de transactions, les prix de transaction sont des données stratégiques qui ne peuvent être partagées*
- La notion de « committed quote » (critère 3) a été considérée de manière restrictive :
  - *Exclusion des reconciliation prices qui sont pourtant la matière première de quantification du risque en cas de défaut*

L'exclusion des évaluations quotidiennes servant aux appels de marge entre banques

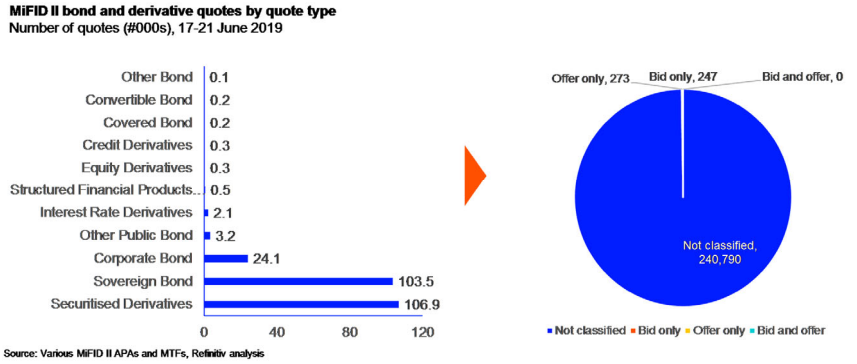
- Reconciliation prices : valeurs servant à calculer les appels de marge (variation margins) pour les dérivés de gré à gré
  - *Appels de marge bilatéraux (les deux parties peuvent être amenées à poster du collatéral) et si chaque partie doit évaluer l'ensemble de ses positions (calculating agent)pour déterminer les variation margin*
  - *En cas de désaccord, procédures de « réconciliation »*
- Ces données internes aux banques ne sont pas utilisables
  - *MAR 31.12 : "Collateral reconciliations or valuations cannot be considered real prices to meet the RFET"*
  - *"Due to their lack of verifiability and representativeness,(…) collateral reconciliations or valuations should not be considered eligible sources of verifiable prices".*
    - https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32022R2060
  - *Réglementation pénalisante pour les dérivés de gré à gré et les banques, mais avantageuse pour les data providers*

La notion de RPO (real price observation)

- Critère 3 : Committed quotes (suite)
- Pour le comité de Bâle, FAQ1 (Frequently Asked Questions) :
  - *"A committed quote is a price from an arm's length provider at which the provider of the quote must buy **or** sell the financial instrument"*
- Question : faut-il que le market maker fournisse une double cotation (quote bid-ask ou double sided quote) ?
  - *A priori, non, mais l'EBA a adopté une approche restrictive : « quotes must have both a bid and offer on the same day — although not necessarily from the same party".*
  - *Or, certains marchés (obligations corporate) fonctionnent selon le principe du request for quote (RFQ) avec une demande pour un prix à l'achat ou bien à la vente (single sided quote).*
  - *L'UE a prévu une clause de revoyure (échéance Mars 2024) au cas où les implémentations, notamment aux US, seraient plus favorables aux banques.*

La notion de RPO (real price observation)

- https://www.refinitiv.com/perspectives/regulation-risk-compliance/frtb-whats-next-for-the-basel-market-risk-rules/
- Etude de Refinitiv sur 240 000 quotes obtenus dans le cadre de la réglementation MIFID 2, pendant une semaine. Aucun quote renseigné comme un bid and offer …



La notion de RPO (real price observation)

- https://www.refinitiv.com/perspectives/regulation-risk-compliance/frtb-do-eba-rules-risk-harming-market-structure/
  - *RPO : real price observation à partir des données MIFID 2*
  - *En colonne 2, on élimine les cotations multiples pour un même instrument financier au cours d'une même journée*
  - *En colonne 3, les observations pour lesquelles on dispose à la fois d'un bid et d'un offer, soit 11% seulement.*

Asset class	Quotes Multiple quotes per instrument per day	RPOs Single quote per instrument per day	Bid and offer RPOs Single quote per instrument per day with both bid and offer
Bonds	846,281	47,589	5,365
Equity derivatives	50	29	0
Interest rate derivatives	416	208	1
Securitized derivatives	2,779	596	0
Structured financial products	2,779	142	42
Total	**852,305**	**48,564**	**5,408**

La notion de RPO (real price observation)

- Précisions du RTS (Regulatory Technical Standard) de l'EBA
  - *b) et c) : problèmes interprétatifs : « non-negligible volume » ? « reasonably small bid-offer » ?*
  - *d) a pour objet de limiter les « fake committed quotes » : par exemple, deux banques s'échangeant des two-sided committed quotes*

Furthermore, as a safeguard to ensure that only sound prices are taken into account in the modellability assessment, the RTS clarify that:

a) internal trades between entities of the same group cannot be considered transactions delivering verifiable prices;

b) only transactions and eligible quotes with a non-negligible volume should be allowed to deliver verifiable prices;

c) for a quote to be considered a verifiable price, it should have a reasonably small bid–offer spread;

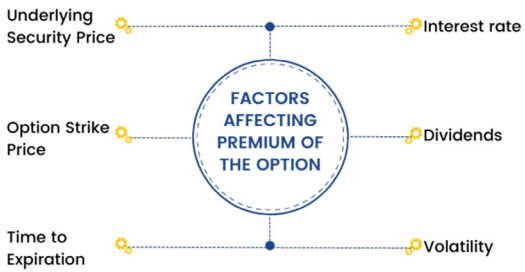
d) trades should not be conducted – nor quotes provided – with the sole purpose of generating verifiable prices.

Le passage des RPO aux MRF …

- La notion de RPO va permettre de définir les MRF
  - *Sachant que les RPO ne correspondent pas aux données quotidiennes qui vont être utilisées pour calculer l'ES ou la SSRM*
  - *SSRM : Stress Scenario Risk Measure*
  - *MAR 31.15 "The bank must have policies and procedures that describe its mapping of real price observations to risk factors".*
- Premier problème : le prix d'un produit dérivé, disons une option dépend de plusieurs facteurs de risque
  - Taux repo (taux d'intérêt), prix du sous-jacent, volatilité implicite
  - *MAR 31.13 "Any real price that is observed for a transaction should be counted as an observation for all of the risk factors for which it is representative".*
  - *MAR 31.15 A real price is representative for a risk factor of a bank where the bank is able to **extract** the value of the risk factor from the value of the real price*

Le passage des RPO aux MRF …

- La formulation du comité de Bâle est doublement imprécise
  - *Dans MAR 31.15, « extract » est un verbe polysémique (ayant plusieurs sens). Si l'on comprend le mot comme « retrieve », il devrait y avoir une bijection entre real price et facteur de risque (au singulier dans MAR 31.15.*
  - *MAR 31.13 indique au contraire qu'il y a plusieurs facteurs de risque associés à un real price, ce qui donne à penser à une surjection*



Le passage des RPO aux MRF …

- Dans le cas d'une option, on ne peut pas retrouver la volatilité implicite, le niveau des taux d'intérêt, le prix du sous-jacent à partir du seul prix de l'option
  - *Sachant que date d'exercice et prix d'exercice sont des « static data »*
  - *Cad le mapping facteurs de risque → real price n'est pas injectif*
- La vision du comité de Bâle semble être la suivante :

date d'exercice	prix de l'option	taux d'intérêt	taux de dividende	prix du sous-jacent	volatilité implicite

- Les données relatives à l'option particulière sont regroupées dans un tableau d'où l'on peut extraire (extract) les inputs
  - *Ici volatilité implicite, taux d'intérêt, dividend rate, prix du sous-jacent*
  - *Ce qui revient à faire l'hypothèse qu'une transaction sur une option ne peut avoir lieu que si tous les facteurs de risque sont connus*
  - *Vision « Mark-to-Model »*

Le passage des RPO aux MRF …

- Interprétation de MAR 31.15 par l'EBA conforme à la seconde approche présentée dans le transparent précédent
  - *It is understood that, in extracting a risk factor from the value of a verifiable price, further inputs, such as the values of other risk factors or input parameters may be used where necessary.*
- Modellability of risk factors under the internal model approach
  https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32022R2060
  - *(…) Where the institution is able to extract the value of the risk factor from the value of the verifiable price using commonly used quantitative methodologies. A number of those methodologies need additional input data in order for institutions to be able to extract the value of a risk factor, making it more complex to demonstrate the representativeness of the verifiable prices. Therefore, those methodologies, as well as the additional input data, where needed, should be based on objective and properly documented information, thus preventing institutions from using unsound assumptions*

Le passage des RPO aux MRF …

- Subsiste un second problème : supposons que l'option précédente ait un strike ou une maturité « non-standard »
  - *Exemple : maturité résiduelle de 3 mois et 27 jours.*
  - *Ceci peut ne pas correspondre aux inputs des pricing engines du modèle des risques*
  - *Par exemple, le département des risques peut avoir comme inputs (facteurs de risque) des volatilités ATM (At the money) à 3 mois et à 6 mois*
  - *Le facteur de risque « volatilité à 3 mois et 27 jours » n'apparaît pas dans la liste des facteurs de risque.*
- Le comité de Bâle demande aux banques de procéder à une segmentation de tous les pricing inputs (risk factor primaires)
  - *Courbes des taux, surfaces de volatilité, ensembles de dimension plus importante*

Le passage des RPO aux MRF …

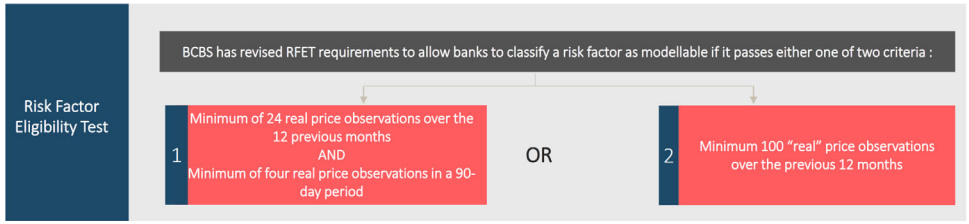
- Le comité de Bâle demande aux banques de procéder à une segmentation des pricing inputs (facteurs de risque primaires)
  - *Courbes des taux, surfaces de volatilité, cubes, …*
  - *Ces segments (disjoints) doivent être en correspondance bijective avec les facteurs de risque du RTPL.*

> (1) The *own bucketing approach*. Under this approach, the bank must define the buckets it will use and meet the following requirements:
>
> (a) Each bucket must include only one risk factor, and all risk factors must correspond to the risk factors that are part of the risk-theoretical profit and loss (RTPL) of the bank for the purpose of the profit and loss (P&L) attribution (PLA) test.[5]

  - Les banques peuvent définir leur propre segmentation (voir encadré) ou suivre celle proposée par le comité de Bâle.
  - *Dans l'exemple précédent, le facteur de risque « volatilité à 3 mois et 27 jours » pourrait être attribué au bucket associé à la volatilité à 3 mois ATM (pour ce sous-jacent).*

RFET : risk factor eligibility test

- MAR 31.13 : Précise le nombre et, le cas échéant la fréquence des observations pour qu'un RF (risk factor) soit considéré comme modélisable



- *Pour l'UE, pas de différence par rapport aux principes du comité de Bâle (voir la référence dans le transparent suivant)*
- *Les critères d'éligibilité ont été assouplis par rapport à la première mouture du FRTB*

RFET : risk factor eligibility test

- Critères d'appréciation des facteurs de risque modélisables dans l'UE (draft EBA RTS de mars 2020)

EBA FINAL draft Regulatory Technical Standards

on criteria for assessing the modellability of risk factors under the Internal Model Approach (IMA) under Article 325be(3) of Regulation (EU) No 575/2013 (revised Capital Requirements Regulation – CRR2)

NMRF : ventilation des NMRF par classes de facteurs de risque

- Forte proportion de NMRF, en particulier pour IR/CS
  - CS : credit spreads → CDS, IR : interest rate risk
- *Source : EBA consultation paper on RTS on stress scenario risk measure (SSRM)*

Table 2: Total number of risk factors and NMRF included in the data collection, by risk cateogry

Risk factor category	Total number of risk factors	Of which: time series provided	Total number of NMRF	Of which: time series provided	Average share of NMRF
COMM	2,921	2,921	211	211	7%
CS	11,510	11,448	4,943	4,913	43%
EQ	16,016	15,686	4,485	4,482	28%
FX	3,389	3,276	685	685	20%
IR	14,449	10,737	5,222	4,516	36%
Total	**48,285**	**44,068**	**15,546**	**14,807**	**32%**

Sources: EBA NMRF data collection and EBA calculations.

Mise en œuvre du FRTB au sein de l'UE : stress scenario risk measure (SSRM)

- Chocs applicables aux NMRF (Non Modellable Risk Factors) et méthodologie de calcul de l'ES pour ce périmètre
  - *« capitalisation des NMRF » : calcul des fonds propres réglementaires*

EBA EUROPEAN BANKING AUTHORITY

EBA/RTS/2020/12

17 December 2020

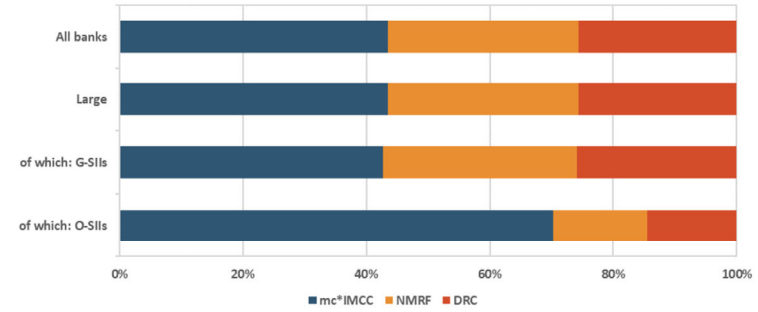
Final Draft RTS

on the calculation of the stress scenario risk measure under Article 325bk(3) of Regulation (EU) No 575/2013 (Capital Requirements Regulation 2 – CRR2)

NMRF : contribution à la charge en capital dans l'approche IMA. Impact de la séparation MRF/NMRF

- Source : EBA consultation paper on RTS on stress scenario risk measure (SSRM)

Figure 1: Composition of FRTB-IMA RWA, by bank size



Sources: EBA 2018-Q4 QIS data and EBA calculations.
Notes: Based on a sample of 13 banks: Large (13), of which G-SIIs (7), of which O-SIIs (6). mc, multiplication factor; IMCC, capital requirement for modellable risk factors; NMRF, capital requirements for non-modellable risk factors; DRC, default risk capital requirement.

Aspects pratiques de la mise en œuvre du FRTB : capitalisation des NMRF

33.17 The aggregate regulatory capital measure for *I* (non-modellable idiosyncratic credit spread risk factors that have been demonstrated to be appropriate to aggregate with zero correlation), *J* (non-modellable idiosyncratic equity risk factors that have been demonstrated to be appropriate to aggregate with zero correlation) and the remaining *K* (risk factors in model-eligible trading desks that are non-modellable *(SES)*) is calculated as follows, where:

(1) $ISES_{NM,i}$ is the stress scenario capital requirement for idiosyncratic credit spread non-modellable risk *i* from the *I* risk factors aggregated with zero correlation;

(2) $ISES_{NM,j}$ is the stress scenario capital requirement for idiosyncratic equity non-modellable risk *j* from the J risk factors aggregated with zero correlation;

(3) $SES_{NM,k}$ is the stress scenario capital requirement for non-modellable risk *k from K risk factors; and*

(4) Rho (ρ) is equal to 0.6.

$$SES = \sqrt{\sum_{i=1}^{I} ISES_{NM,i}^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{J} ISES_{NM,j}^2} + \sqrt{\left(\rho * \sum_{k=1}^{K} SES_{NM,k}\right)^2 + (1-\rho^2) * \sum_{k=1}^{K} SES_{NM,k}^2}$$

Aspects pratiques de la mise en œuvre du FRTB : capitalisation des NMRF

- https://www.eba.europa.eu/sites/default/documents/files/document_library/1017256/A%20universal%20stress%20scenario%20approach%20to%20capitalise%20NMRF.pdf

VaR et ES : méthodes historiques filtrées par la volatilité ; calculs à 1J et à 10J

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE — PRISMA orbonne — LABEX ReFi

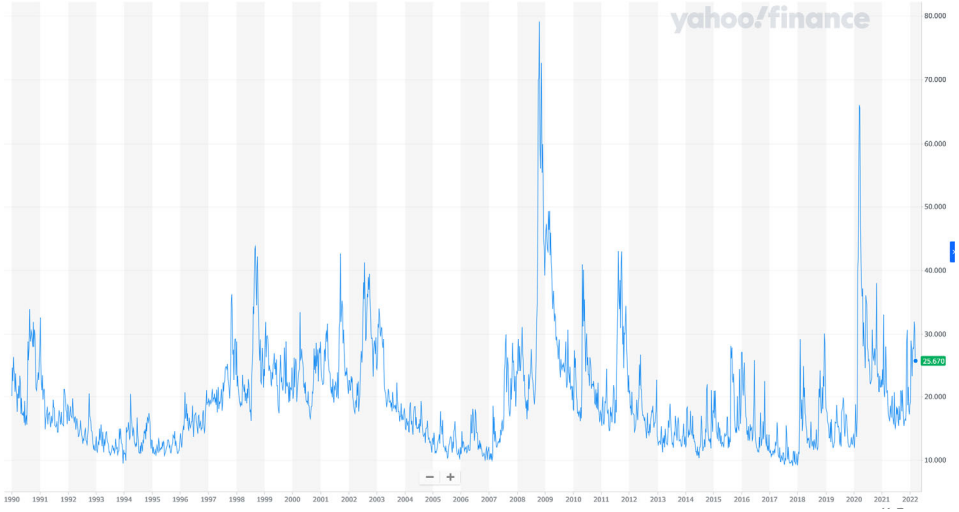
Notes de cours vendredi 20 mars 2020 : méthodes de calcul de l'Expected Shortfall dans le cadre du FRTB

Jean-Paul Laurent
M2 Finance de Marché et Gestion des Risques
Ecole de Management de la Sorbonne

Jean-Paul Laurent,
À partir d'un travail en commun avec Hassan Omidi Firouzi, Royal Bank of Canada

Crises de 2008 (financière endogène), de 2011 (zone euro, Grèce), de 2020 (exogène) et de 2022

- Niveaux de l'indice VIX du CBOE



Volatilité DAX30

Évolution de l'indice VIX

Évolution de la volatilité historique (1 mois glissant)

https://us.spindices.com/indices/strategy/sp-500-1-month-realized-volatility-index

Méthodes de calcul de l'ES dans le cadre du FRTB

- Partie 1 :
  - VaR et ES calculées par les méthodes historiques et historiques filtrées par la volatilité;
  - Estimation de la volatilité via des modèles GARCH et EWMA
  - Problématique de l'horizon temporel de 10 jours
- Partie 2 :
  - Dynamique de l'ES, calcul de l'ES sur période stressée
  - Détermination de la période de stress
  - Impact du choix des paramètres sur l'ES stressé

Volatility Weighted HS (VWHS) vs plain HS (section 1)

- Subsection 1.1 computation principles for running 10D ES and 1D VaR under plain HS and FHS/VWHS
  - FHS : Filtered Historical Simulation
  - 1D VaR under HS and VWHS
  - 10D ES under VWHS (no square root scaling)
- Subsection 1.2 filtering volatility with EWMA and GARCH(1,1) models
  - GARCH(1,1) filter
  - EWMA (I-GARCH) filter: choice of decay factor based on various statistical criteria
  - Practical implementation (seed values)
  - EWMA vs GARCH(1,1): theoretical and practical (parsimony, willingness to consider models used in the investment banks, etc.)
  - Comparing with plain HS

Subsection 1.1 computation principles for running 1D VaR/ES under plain HS and VWHS

- Portfolio log-return $r_t = \ln(P_t/P_{t-1})$
  - Daily time scale: $t-1$ current date
  - $F_{t-1}(x) = P(r_t \leq x|\mathcal{F}_{t-1})$ conditional on $\mathcal{F}_{t-1}$ distribution function of log-returns r_t
  - Relative returns $(P_t - P_{t-1})/P_{t-1} = e^{r_t} - 1$
- $\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha}$: $t-1$, 1D percentage VaR at confidence level α:
  - $P\left((P_t - P_{t-1})/P_{t-1} \leq -\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha}|\mathcal{F}_{t-1}\right) = 1-\alpha$
    - Well-defined if F_{t-1} continuous and strictly increasing.
  - More generally, $\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha} = 1 - \exp\left(F_{t-1}^{-1}(1-\alpha)\right)$
    - $F_{t-1}^{-1}(1-\alpha) = q_{t-1,1-\alpha}(r_t)$ conditional on $\mathcal{F}_{t-1}$ quantile of order $1-\alpha$ of r_t
- $ES_{t-1,\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} \mathrm{VaR}_{t-1,u}du$ *: à vérifier*

Subsection 1.1 computation principles for running 1D VaR/ES

- (Location) scale models: $r_t = \sigma_t \times \varepsilon_t$
- $\sigma_t^2 = E[r_t^2|\mathcal{F}_{t-1}]$
  - σ_t^2: Conditional on $\mathcal{F}_{t-1}$ variance of 1D ahead return
  - $\sigma_t = (\mathrm{Var}[r_t|\mathcal{F}_{t-1}])^{\frac{1}{2}}$ known at $t-1$
- $\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha} \approx -q_{t-1,1-\alpha}(r_t) = -\sigma_t \times q_{t-1,1-\alpha}(\varepsilon_t)$
  - From $r_t = \sigma_t \times \varepsilon_t$ and positive homogeneity of Value at Risk
- GARCH: parametric approach to ε_t
  - Such as $t(\nu)$: parametric approach to ε_t
- $\mathrm{VaR}_{t-1,\alpha} \approx -\sigma_t \times q_{1-\alpha}(\varepsilon_t)$ **if $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ are i.i.d**
  - RiskMetrics (1996), Ferreira & Lopez (2005): ε_t i.i.d unit variance Gaussian
  - Rescaling of volatility used in Francq & Zakoïan (2015)

FHS/VWHS models / subsection 1.1

- 1D Volatility Weighted Historical Simulation (VWHS) : same approach to VaR than GARCH.
  - Consider $\varepsilon_{t-1} = \frac{r_{t-1}}{\sigma_{t-1}}, \varepsilon_{t-2} = \frac{r_{t-2}}{\sigma_{t-2}}, \ldots, \varepsilon_{t-H} = \frac{r_{t-H}}{\sigma_{t-H}}$
  - BUT $\hat{q}_{1-\alpha}(\varepsilon_t)$ empirical quantile of standardised returns r_t/σ_t.
    - Diebold, Schuermann, & Stroughair (2000), McNeil & Frey (2000), Alexander and Sheedy (2008), Martins-Filho et al (2018) for other non or semi-parametric approaches of r_t/σ_t.
- $\frac{\sigma_t}{\sigma_{t-1}} \times r_{t-1}, \frac{\sigma_t}{\sigma_{t-2}} \times r_{t-2}, \ldots, \frac{\sigma_t}{\sigma_{t-H}} \times r_{t-H}$, returns rescaled by volatility weighting scheme $\frac{\sigma_t}{\sigma_{t-h}}, h = 1, \ldots, H = 252$
  - VWHS 1D VaR computed based on sorted previous volatility adjusted returns (Hull & White (1998))
    - Idea of volatility scaling can be found in Duffie & Pan (1997).
    - See also Alexander (2009), Gurrola-Perez & Murphy (2015), Gurrola-Perez (2018) for different "devol/revol" (i.e. volatility weighting) schemes.

Filtered Historical Simulation (FHS) 1D horizon

- $\frac{r_{t-h}}{\sigma_{t-h}}$ "filtered shocks"
  - Barone-Adesi et al. (1999), Barone-Adesi, & Giannopoulos (2001)
- Same approach as Hull & White (1998) apart from bootstrapping within $\left\{\frac{r_{t-1}}{\sigma_{t-1}}, \ldots, \frac{r_{t-H}}{\sigma_{t-H}}\right\}$ before sorting values
  - Number of simulations:
    - 5 000: Barone-Adesi, Giannopoulos, & Vosper (1999, 2002, 2018), Degiannakis, Floros & Dent (2013), Giannopoulos & Tunaru (2005), Alexander (2009), 10 000: Pritsker (2006), 30 000: Alexander and Sheedy (2008), 5 000 000: Barone-Adesi & Giannopoulos (2001)
  - By LLN, when number of MC runs $\to \infty$, converges to using the empirical distribution as in Hull & While (1998)
  - Only holds for a 1D horizon

FHS: Computation over 10D time horizon

- FHS for 10D horizon (Barone-Adesi et al. (1999))
  - See also Alexander (2009), Righi & Ceretta (2015), Degiannakis, Floros & Dent (2013), Giannopoulos & Tunaru (2005), Barone-Adesi, Giannopoulos, & Vosper (2018)
  - $t-1$ is computation date for risk measure. Risk measures computed from past year data
  - Randomly draw (with replacement) 10 filtered returns $\frac{r_{t-h}}{\sigma_{t-h}}$ from past year ($h=1,\ldots,252$): $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_9$
  - Use $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_9$ and the dynamic conditional vol. model (say GARCH) to simulate log-returns $r_{t+l}=\sigma_{t+l}\times\varepsilon_l$, $l=0,\ldots,9$
  - Compute $r_t+\cdots+r_{t+9}=\sum_{l=0}^{9}\ln(P_{t+l}/P_{t+l-1})=\ln(P_{t+9}/P_{t-1})$
  - Derive the percentage 10D change $\frac{P_{t+9}-P_{t-1}}{P_{t-1}}=e^{\ln(P_{t+9}/P_{t-1})}-1$
  - Repeat 30 k times (say) and derive risk measures from sorted simulated values of $\frac{P^i_{t+9}-P^i_{t-1}}{P^i_{t-1}}$, $i=1,\ldots,30000$.

FHS/VWHS Implementation

- For 30k simulations
  - $t-1$, 97.5% 10D percentage VaR = minus the 750th worst value of simulated 10D relative returns
  - $t-1$, 99% 10D percentage VaR = minus the 300th worst value of simulated 10D relative returns
  - $t-1$, 97.5% 10D (percentage) ES = minus the average of the 750 worst values of simulated 10D relative returns
- Using 252 past historical returns (plain HS),
  - 99% 1D VaR = minus the 3rd worst relative return,
  - 97.5% 1D VaR = minus the 7th worst relative return
  - 97.5% 1D ES $=-\frac{1}{6.3}\times(x^1+\cdots+x^6+0.3x^7)$, where x^k is the k −th worst return.

FHS: Computation over multiple time horizons / Subsection 1

- Previous approach accounts for possible increases of volatility within the forecasted period.
  - But computationally demanding: non-linear exposures plus full revaluation.
  - Rescaled 10 D returns over $(t-h-9,t-h)$: $\sigma_t\varepsilon_{t-h}+\sigma_{t-1}\varepsilon_{t-h-1}+\cdots+\sigma_{t-9}\varepsilon_{t-h-9}$
    - For $h=1,\ldots,243$
  - Less computationally demanding:
    - Only accounts for the most recent path of volatilities
    - Does not account for possibly surges in future volatilities
    - Historical paths not consistent with volatility dynamics
    - Overlapping 10D returns: disputable especially with 1Y computation period, but Basel compliant (MAR 33.4 (7))

Filtering returns (subsection 1.2) / Modelling dynamics of conditional volatility

- Use GARCH(1,1), I-GARCH (EWMA) or realized volatility models to predict 1D or 10D ahead volatility
  - 1D is used to filter daily returns over one (rolling) year and the computation of 1D 95% and 99% VaR
  - See Poon & Granger (2003), Andersen, Bollerslev, Christoffersen, & Diebold (2013) for reviews
  - Forecasting up to 10D is required for computing 97.5% 10D ES
  - Parametric models of conditional volatility
    - Parameters not intended to be rebalanced frequently?
    - EWMA often used by banks with a decay factor of 0.94
  - Seed value for filtering returns: average variance over computation period

Filtering returns (GARCH) / subsection 1.2

- In a FHS context GARCH(1,1) models are predominantly used:
  - Pritsker (2006), Alexander& Sheedy (2008), Perignon & Smith (2008), Barone-Adesi, Giannopoulos, & Vosper (2018) use a symmetric normal GARCH(1,1)
  - Righi & Cerretta (2015), Kratz, Lok & McNeil (2018) also use a symmetric GARCH model, with Gaussian and Student t innovations
  - Barone-Adesi, Giannopoulos, & Vosper (1999, 2002) consider a asymmetric GARCH(1,1) model with Gaussian innovations
  - Alexander (2009) consider both a asymmetric GARCH and a symmetric normal GARCH. She reports $\alpha_1 + \beta_1$=0.9967 or 0.9934 depending on specifications.
  - Escanciano & Pei (2012) consider an AR(1)-GARCH(1,1)
  - Degiannakis, Floros & Dent (2013) do not report significant improvement when moving from normal symmetric GARCH(1,1) to FIGARCH. They also provide rolling sample parameter of GARCH and show that β_1 varies between .87 and .95 for the FTSE 100 index. Nevertheless, non rolling GARCH estimators are used in the FHS context
  - Regarding the use of asymmetric GARCH models, the significance of the corresponding coefficient relies on the chosen package (Charles & Darné (2019))

Filtering returns (GARCH) / subsection 1.2

- (symmetric) GARCH(1,1): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$
  - $\alpha_1 = 0.0533$ (std error: 0.011), $\beta_1 = 0.9419$ (std error: 0.011) $(\alpha_1 + \beta_1 = 0.995)$
    - Degiannakis, Floros, & Dent (2013) provide rolling sample parameters of GARCH(1,1) and show that β_1 varies 0.875 and 0.95
  - Parameters estimated using ML and Gaussian innovations with R (v 3.5.2) and rugarch package (1.4.1)
  - Estimation period: 2002-2005 (prior to computation of risk measures)
    - Over the estimation period, rugarch failed to estimate GARCH with Student t innovations (on other subperiods, shape parameters fairly high around 17).
  - Long run variance: $\bar{\sigma}^2 = 0.0001185$
  - Adjusted ω: $\bar{\omega} = \bar{\sigma}^2 \times \left(1 - (\alpha_1 + \beta_1)\right) = 5.75 \times 10^{-7}$

Filtering returns (GARCH) / subsection 1.2

- $\alpha_1 + \beta_1 = 0.995 \approx 1$
  - If $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, I-GARCH framework (Engle and Bollerslev (1986))
  - $\alpha_0 > 0$ and $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ the process r_t is not weakly stationary ($E[r_t^2] = +\infty$), but strongly stationary and ergodic (Nelson (1991))
  - Potential issues with weak stationarity condition $\alpha_1 + \beta_1 < 1$
  - Structural breaks and time varying parameters inflate estimates of $\alpha_1 + \beta_1$
    - Diebold (1986), Lamoureux and Lastrapes (1990)
    - See also Mikosch, & Stărică (2004), Hilllebrand (2005)
  - If the data generating process is stationary E-GARCH(1,1) and fitting a GARCH(1,1), the probability of the estimated sum $\alpha_1 + \beta_1$ exceeding unity can be large (Malmsten (2004)).

Filtering returns with I-GARCH/EWMA subsection 1.2

- IGARCH(1,1) Variance dynamics (Engle & Bollerslev (1986))
- $\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2 = \sigma_{t-1}^2 (\lambda + (1-\lambda)\varepsilon_{t-1}^2)$
  - Single parameter model, $\lambda < 1$: **decay factor**
  - $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) \times r_{t-1}^2$, with $\alpha_0 = 0$
  - σ_t^2 is a martingale
  - σ_t^2 converges to zero a.s. (Nelson (1991)
    - Not suitable for long-term volatility prediction
    - For FRTB, we are concerned with 10D ahead prediction
    - σ_t^2 is not floored and becomes quite close to zero in calm periods (Murphy et al. (2014))
    - In FRTB framework, not an issue: max of σ_t from 2007 is involved

filtering returns with EWMA / subsection 1.2

- $\sigma_{t-h}^2 = \lambda^{H-h}\sigma_{t-H}^2 + (1-\lambda)\left(r_{t-h-1}^2 + \lambda r_{t-h-2}^2 + \cdots + \lambda^{H-h-1} r_{t-H}^2\right)$, $h = 0,1,\ldots,H-1$
  - Estimated variance σ_{t-h}^2 is an exponentially weighted moving average (EWMA) of past squared returns
    - Hull & White (1998), Ziggel, Berens, Weiß, & Wied(2014), Murphy, Vasios & Vause (2014), Gurrola-Perez & Murphy (2015), Houllier and Murphy (2017), Gurrola-Perez (2018).
  - $H = 252$, seed value σ_{t-H}^2 of importance when $\lambda \approx 1$
    - σ_{t-H}^2 se as empirical variance $\bar{\sigma}_{t-H,t-1}^2 = \frac{1}{H} \times (r_{t-h-1}^2 + \lambda r_{t-h-2}^2 + \cdots + \lambda^{H-h-1} r_{t-H}^2)$ over past year $[t-H, t-1]$
    - Computable at current time $t-1$
    - σ_t^2 is then actually a weighted average (weighting terms sum up to one) of squared returns over past year.
    - $\forall h, \sigma_{t-h} \to \bar{\sigma}_{t-H,t-1}^2$ when $\lambda \to 1$
    - With above choice of seed, EWMA estimator converges to 1 year rolling sample variance of log-returns, corresponding to plain historical simulation in the FRTB context

GARCH(1,1) and EWMA volatility filters

- $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ leads to the rolling estimator
- $\sigma_{t-h}^2 = {\beta_1}^{H-h}\sigma_{t-H}^2 + \alpha_1\left(r_{t-h-1}^2 + \beta_1 r_{t-h-2}^2 + \cdots + {\beta_1}^{H-h-1} r_{t-H}^2\right)$, $h = 0,1,\ldots,H-1$
- Similar to EWMA/IGARCH filter of squared returns when $\alpha_1 + \beta_1 \approx 1$
- λ to be compared to β_1 in GARCH(1,1)
- Setting seed value σ_{t-H}^2 remains an important issue even for $\beta_1 \ll 1$, since $\frac{\sigma_t}{\sigma_{t-h}}$, $h = 1,\ldots,H = 252$ are all involved in the weighting scheme.
  - If seed is set at very low value (compared to average squared returns over past year), more weight given to earlier returns)

filtering returns with EWMA / subsection 1.2

- Variance/volatility dynamics
  - $\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2 = (1-\lambda) \times (r_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2)$
  - $1-\lambda$: Speed at which new returns are taken into account when updating conditional variance
- Consider different values of decay factor λ
  - Assume that we start from the same value σ_{t-1}^2
  - Response to shock $r_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2$ proportional to $1-\lambda$
    - Take λ =0.94 (RiskMetrics benchmark)
    - With λ =0.8, ratio = 3.3
    - with λ =0.99, ratio =0.17
  - Variance dynamics highly sensitive to choice of decay factor.

filtering returns with EWMA / subsection 1.2

- Numerous techniques to estimate decay factor λ
- RiskMetrics (1996): minimizing the average squared error on variance estimation

$$\hat{\lambda} = \underset{\lambda \in (0,1)}{arg\,min} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} [\sigma_i^2(\lambda) - r_i^2]^2$$

- Other approaches:
  - Guermat & Harris (2002) to cope with non Gaussian returns
  - Pseudo likelihood: Fan & Gu (2003)
  - Minimization of check-loss function: González-Rivera et al. (2007)

filtering returns with EWMA / subsection 1.2

- For S&P500, estimates of daily decay factor are depend upon estimation method and period
- Range from 0.8 to 0.98 wide around the 0.94 RiskMetrics golden number

Estimation method/ length of historical data	10 years	First 5 years	Second 5 years
Squared error method	0.8992854	0.8207192	0.9030331
Pseudo likelihood method	0.9331466	0.9525935	0.9146936
Check loss method at 1% level	0.9010942	0.9406649	0.8398029
Check loss method at 2.5% level	0.8829908	0.9557358	0.8634209

- Building volatility filters is even more intricate when considering different risk factors (Davé & Stahl (1998))
- Murphy et al. (2014) suggest that CCPs typically use high values (0.99) for decay factor.

Filtering returns with EWMA / subsection 1.2

- Blended EWMA (Houllier and Murphy (2017))
- Average of long and short-memory predictors of volatility
  - $\sigma_{L,t}^2 = \lambda_L \sigma_{L,t-1}^2 + (1-\lambda_L) \times r_{t-1}^2$
  - In Houllier and Murphy, $\lambda_L = 1$, thus $\sigma_{L,t}^2 = \sigma_L^2$
  - $\sigma_{S,t}^2 = \lambda_S \sigma_{S,t-1}^2 + (1-\lambda_S) \times r_{t-1}^2$
  - λ_S determined based on worst loss analysis

  $-\ \sigma_t^2 = \frac{\sigma_{S,t}^2 + \sigma_{L,t}^2}{2}$
- λ_S smaller than 0.98, but wide range of acceptable λ_S

Filtering returns with EWMA / subsection 1.2

- Using a worst loss fitting approach, Houllier and Murphy (2017) suggest that $\lambda = 0.98$ might be a good choice
- Murphy et al. (2014) suggest that CCPs typically use high values (.99) for decay factor.
- Recall that high values of λ results in slower updates of VaR when volatility increases
  - In case of Poisson type event risk (no memory), higher values of λ would be a better choice.
- No obvious way to decide about the optimal λ

Filtering returns using realized variance

- Lopez (2001), Christoffersen & Diebold (2000), Angelidis et al. (2007), Gurrola-Perez & Murphy (2015) point out issues with unobserved σ_t: moving to realized volatility?
- $r_t = \tilde{\sigma}_t \times \tilde{\varepsilon}_t$
  - $\tilde{\sigma}_t^2 = \int_{t-1}^{t} \sigma^2(s) ds$ quadratic variation (integrated variance) between $t-1$ and t for a stochastic volatility model with instantaneous volatility $\sigma(.)$
  - $\tilde{\sigma}_t$ known ex-post ($\mathcal{F}_t -$ measurable)
  - Whenever high frequency (say prices sampled at 5') data is available, $\tilde{\sigma}_t^2$ can be approximated by "realized variance": summation of intraday squared returns
    - Nelson (1990), Foster & Nelson (1994), Barndorff-Nielsen & Shephard (2001, 2002), Engle, & Patton (2007), Andersen, Bollerslev, Christoffersen, & Diebold (2013).
    - Zhang, Mykland & Aït-Sahalia (2005), Aït-Sahalia, Mykland, & Zhang (2011) discuss optimal sampling frequency and how to deal with microstructure noise

Filtering returns using realized variance

- Connexion between realized variance, ARCH models and rolling estimators dating back from Nelson (1990)
- Realized variance (sampled at a high frequency) may be a very good proxy of "true volatility"
- Allows for predictive accuracy of volatility forecasts
  - Diebold & Mariano (2002), Andersen & Bollerslev (1998), Liu, Patton, & Sheppard (2015), Bollerslev, Hood, Huss, Pedersen (2018).
- GARCH, I-GARCH provide reasonably good short-term forecasts, realized variance leads to some improvements
- Log realized variance modelled as an ARFIMA$(p, d, 0)$ model: $\Phi(L)(1-L)^d(\ln \mathrm{RV}(t) - \mu) = u_t$, where u_t is a Gaussian white noise, $d \approx 0.40$
  - Andersen, Bollerslev, Diebold, & Ebens (2001), Andersen, Bollerslev, Diebold & Labys (2001, 2003). See also Corsi (2009)

Filtering returns using realized variance

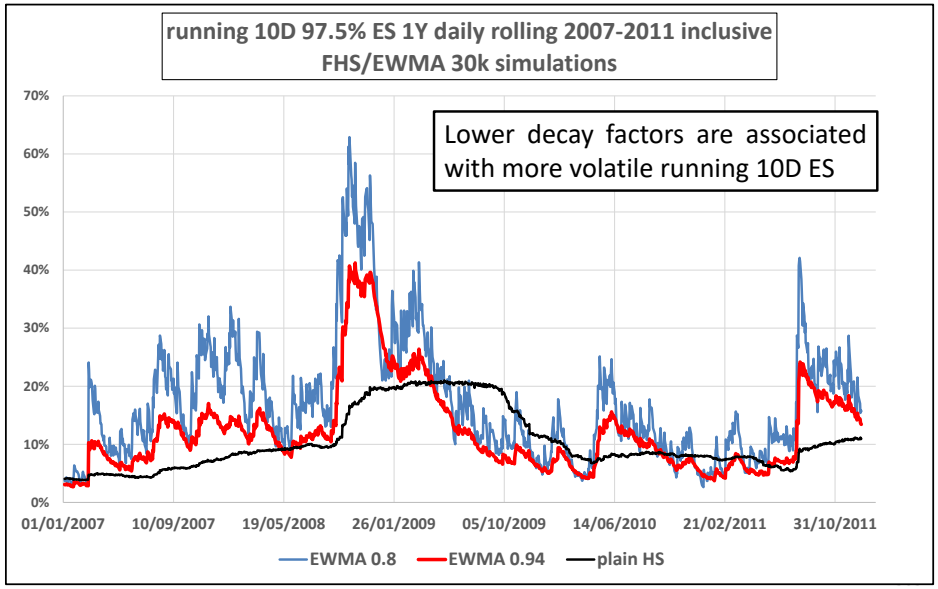
- $r_t = \tilde{\sigma}_{t-1} \times \tilde{\varepsilon}_t$
  - Connexion between stochastic volatility and ARCH models dating back from Nelson (1990)
  - $\tilde{\sigma}_{t-1}, \mathcal{F}_{t-1}$ – measurable, used as a predictor of volatility of r_t: $\tilde{\sigma}^2_{t-1} \simeq E[r_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$
- Compute filtered returns over past year $\tilde{\varepsilon}_{t-h} = \frac{r_{t-h}}{\tilde{\sigma}_{t-h-1}}, h = 1, \ldots 252$
- Compute empirical quantile $\hat{q}_{1-\alpha}(\tilde{\varepsilon}_t)$
- $\mathbf{VaR_{t-1,\alpha}} = -\tilde{\sigma}_{t-1} \times \hat{q}_{1-\alpha}(\tilde{\varepsilon}_t)$
  - VWHS using realized variance derived from sorted values of $\frac{\tilde{\sigma}_{t-1}}{\tilde{\sigma}_{t-2}} \times r_{t-1,,}, \ldots, \frac{\tilde{\sigma}_{t-1}}{\tilde{\sigma}_{t-H-1}} \times r_{t-H}$

Running VaR/ES vs SVaR/SES (Stressed ES)

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Section 2: running and max of ES and computation of endogenous stress period

Long SPX exposure: Running 1Y 10D 97.5% ES over 2007-2011 FHS/EWMA 0.8, 0.94, 1 (plain HS). 30k simulations



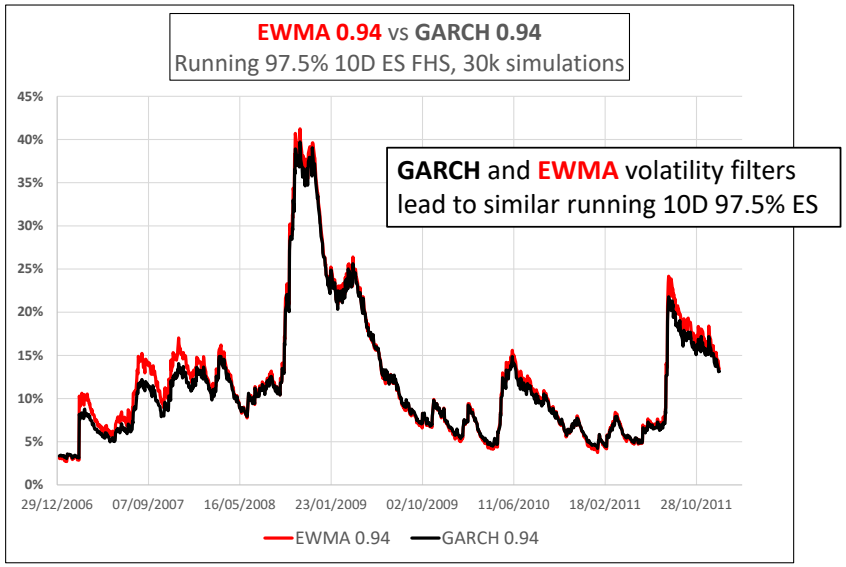
Behaviour of running 10D 97.5% ES

- Low decay factors associated with more volatile running ES
- Intuition (for 1D ES): $ES_\alpha(r_t) = \sigma_t \times ES_\alpha(\varepsilon_t)$
  - Variance dynamics: $\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2 = (1-\lambda) \times (r_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2)$
  - Shock: $r_{t-1}^2 - E[r_{t-1}^2|\mathcal{F}_{t-2}] = r_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2$
  - $\sigma_t - \sigma_{t-1} \approx \frac{1-\lambda}{2\sigma_{t-1}} \times (r_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2)$
  - Assume $\sigma_{t-1}^2 = \bar{\sigma}^2$, average variance over past year (seed value for EWMA whatever the chosen decay factor in computations).
  - $\frac{\sigma_t(0.8)-\sigma_{t-1}}{\sigma_t(0.94)-\sigma_{t-1}} = 3.3$, $\frac{\sigma_t(0.99)-\sigma_{t-1}}{\sigma_t(0.94)-\sigma_{t-1}} = 0.17$
  - Volatility dynamics highly sensitive to choice of decay factor

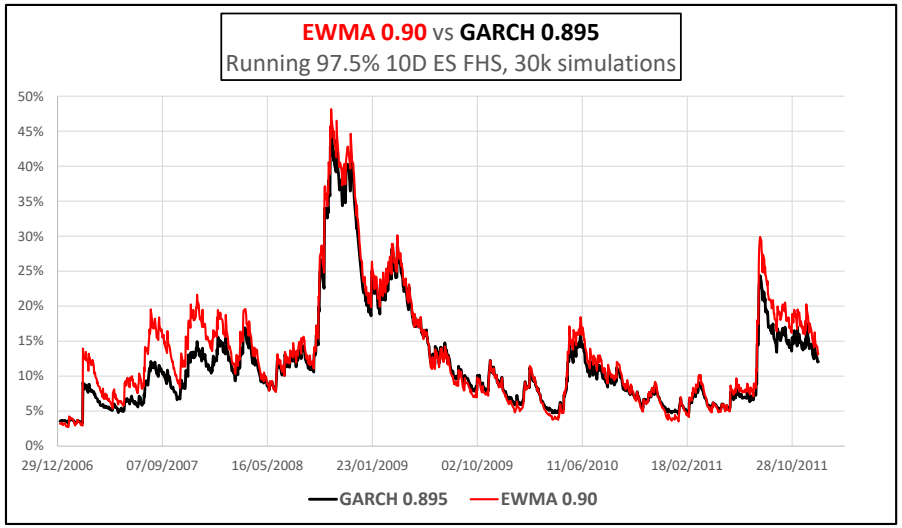
EWMA vs GARCH(1,1) volatility dynamics

- Compare 10D 97.5% ES outcomes of FHS/GARCH and FHS/EWMA for close values driving volatility dynamics
  - Estimation period: 2002-2005, $\alpha_1 = 0.0533$ (std error: 0.011), $\beta_1 = 0.9419$ (std error: 0.011), $\alpha_1 + \beta_1 = 0.995$
    - Compare with EWMA 0.94
  - Estimation period: 2002-2015, $\alpha_1 = 0.0907$ (std error: 0.012), $\beta_1 = 0.8950$ (std error: 0.013), $\alpha_1 + \beta_1 = 0.986$
    - Compare with EWMA 0.90
- Figures below show that GARCH and EWMA vol. dynamics lead to almost same running 10D 97.5% ES
  - $\alpha_1 + \beta_1 \approx 1$
  - Short-time horizons (10D)

Long SPX exposure: Running 1Y 10D 97.5% ES over 2007-2011
EWMA 0.94 vs **GARCH (β=0.94)** FHS with 30k simulations



Long SPX exposure: Running 1Y 10D 97.5% ES over 2007-2011
EWMA 0.9 vs **GARCH (β=0.895)** FHS with 30k simulations

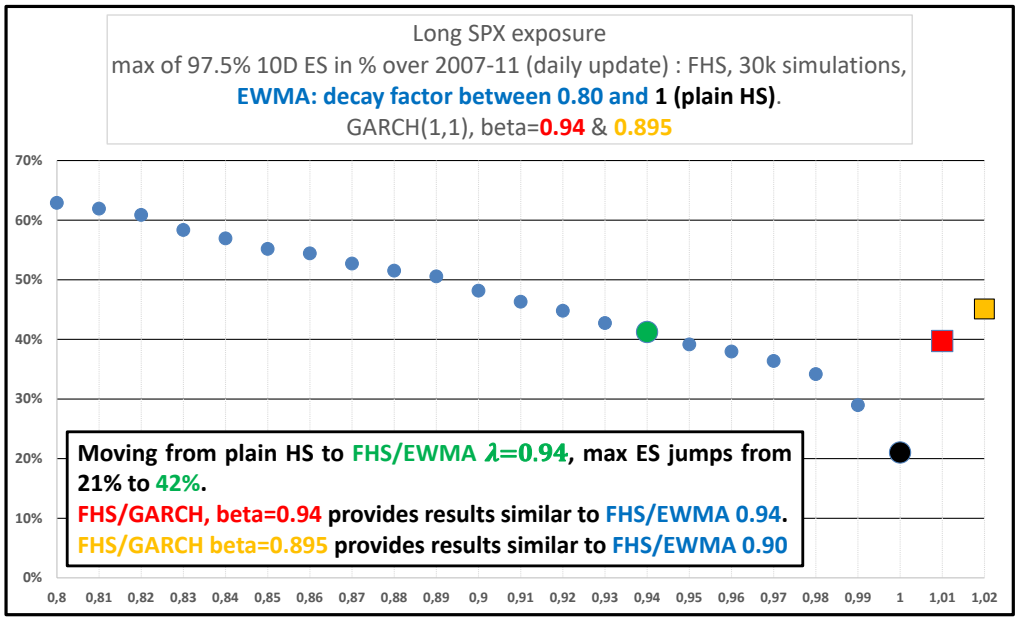


Summary statistics for running 10D 97.5% ES under FHS (30k simulations), daily update 2007-2011 inclusive for selected models of volatility dynamics

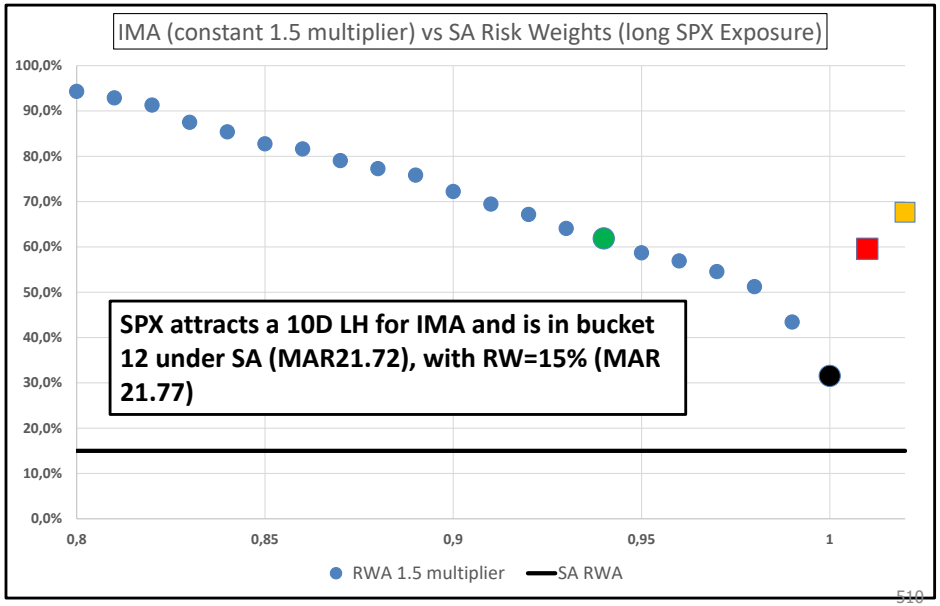
FHS 97.5% 10D ES	0,8	0,85	0,9	0,94	1 (plain HS)	GARCH 0.94	GARCH 0.895
min	3%	3%	3%	3%	4%	3%	3%
median	14%	13%	11%	10%	9%	10%	10%
mean	17%	15%	13%	12%	10%	12%	12%
max	63%	55%	48%	41%	21%	40%	45%
3rd-1st quartile	12%	11%	9%	8%	4%	7%	7%

As mentioned in previous slides GARCH 0.94 and EWMA 0.94 / GARCH 0.895 and EWMA 0.90 provide similar results. The max-min range widely depends upon vol. dynamics. EWMA 0.94 and plain HS are associated with similar medians but max ES is roughly twice smaller with plain HS

FRTB daunts (filtered) Historical Simulation: max of daily updated 10D 97.5% ES over 2007 -2011



Long SPX exposure : FRTB Risk Weights under different IMA models (constant 1.5 multiplier) vs SA Risk Weights



Endogenous computation of stressed period within FRTB

- FRTB metrics based on the 1Y ES that maximises current ES
  - Endogenously determination of stress period (at bank, not desk, level)
  - Under Basel 2.5 no formal requirements to determine the period over which SVaR is computed
  - This also applies to the period over which NMRF ES is computed (within a risk factor class).
- Update of stress period at least quarterly (formerly monthly)
  - We subsequently investigate daily vs monthly updates: almost no differences
  - How the stress period depends upon the filtering scheme (decay factor) : plain HS is an outlier with a strongly delayed stressed period.
  - If we were to use plain HS and compute the max of ES over
- Not investigated in the paper, but changes in exposures might lead to more important shifts in stress periods:
  - risk budgeting, capital allocation, internal risk management and disclosure?

Endogenous stress period for computation of max of 10D 97.5% ES

Stress period has to be updated at least quarterly (formerly monthly in Jan. 16 FRTB) and depends upon chosen model: ES almost for the same for daily and monthly updates

	0.8	0.85	0.9	0.94	1 (plain ES)	GARCH 0.94	GARCH 0.895
daily update	18/10/07 - 16/10/08	18/10/07 - 16/10/08	18/10/07 - 16/10/08	31/10/07 - 29/10/08	**22/05/08 - 21/05/09**	31/10/07 - 29/10/08	18/10/07 - 16/10/08
max ES	62,89%	55,17%	48,17%	41,23%	21,01%	39,71%	45,09%
monthly update	29/11/07 - 26 /11/08	29/11/07 - 26 /11/08	29/11/07 - 26 /11/08	29/11/07 - 26 /11/08	**18/08/08 - 17/08/09**	29/11/07 - 26/11/08	29/11/07 - 26/11/08
max ES	62,99%	55,41%	48,28%	40,35%	20,73%	38,81%	45,05%
ratio of max ES	99,84%	99,58%	99,77%	102,19%	101,36%	102,34%	100,08%

Plain HS (EWMA 1) stress period is delayed to slower adjustments to risk, i.e. countercyclical during the GFC

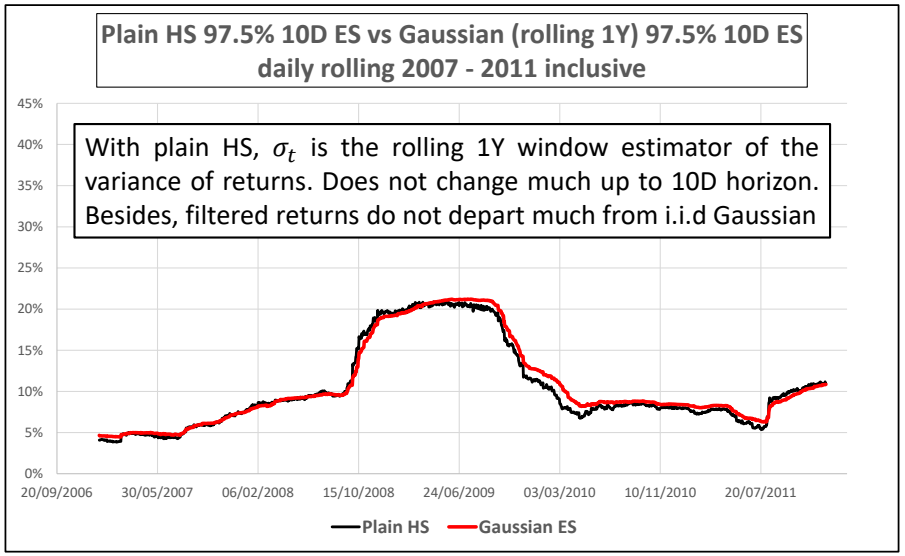
Comparing FHS and proxy parametric approaches for 10D 97.5% ES

- Under the model $r_t = \sigma_t \varepsilon_t$, with i.i.d. ε_t innovations and $\sigma_t^2 = \text{var}[r_t|\mathcal{F}_{t-1}]$, $\text{var}[r_t + \cdots + r_{t+9}|\mathcal{F}_{t-1}] = \text{var}[r_t|\mathcal{F}_{t-1}] + \cdots + \text{var}[r_{t+9}|\mathcal{F}_{t-1}]$
- Under a I-GARCH (EWMA) model of volatility dynamics, σ_t^2 is a martingale, thus $\text{var}[r_t + \cdots + r_{t+9}|\mathcal{F}_{t-1}] = 10 \times \sigma_t^2$
- If $\sigma_{t+9} = \sigma_{t+8} = \cdots = \sigma_t$ (no volatility dynamics until 10D time horizon), $\varepsilon_t, \ldots, \varepsilon_{t+9}$ Gaussian and neglecting differences between log and relative returns, 10D α ES would be:

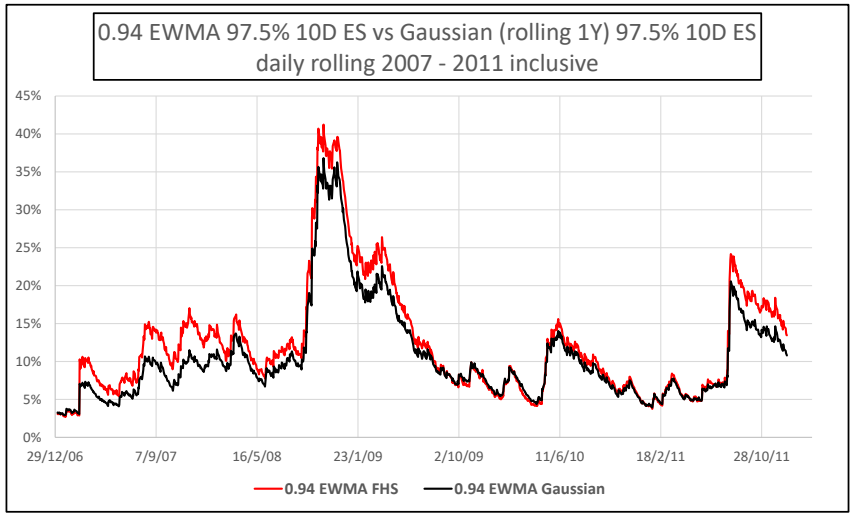
$$ES_{t-1,\alpha} = \sigma_t \sqrt{10} \times \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{1-\alpha} \approx 7.39 \times \sigma_t \text{ for } \alpha = 97.5\%$$

- Take the daily rolling estimator of daily log-returns σ_t under plain HS and EWMA 0.94, multiply by 7.39, compare this RiskMetrics ES (see When (2018) with FHS ES.

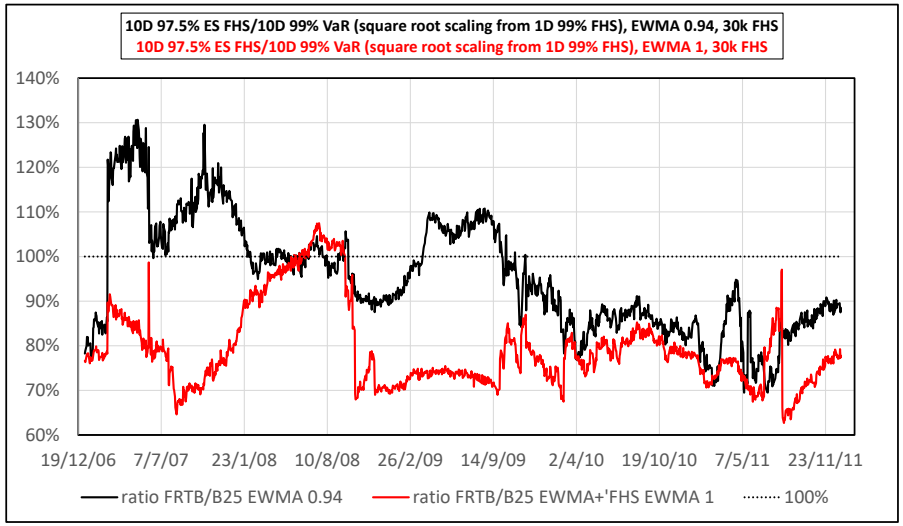
Long SPX exposure: Running 1Y 10D 97.5% ES over 2007-2011 plain HS vs Gaussian ES (computed from 1Y rolling volatility)



Long SPX exposure: Running 1Y 10D 97.5% ES over 2007-2011 0.94 EWMA FHS vs Gaussian ES (computed from 1Y rolling volatility)



Basel 2.5 (10D 99% VaR) vs FRTB (10D 97.5% ES) risk measures 30k FHS / EWMA 0.94 and EWMA 1 (plain HS), 2007 – 2011 inclusive

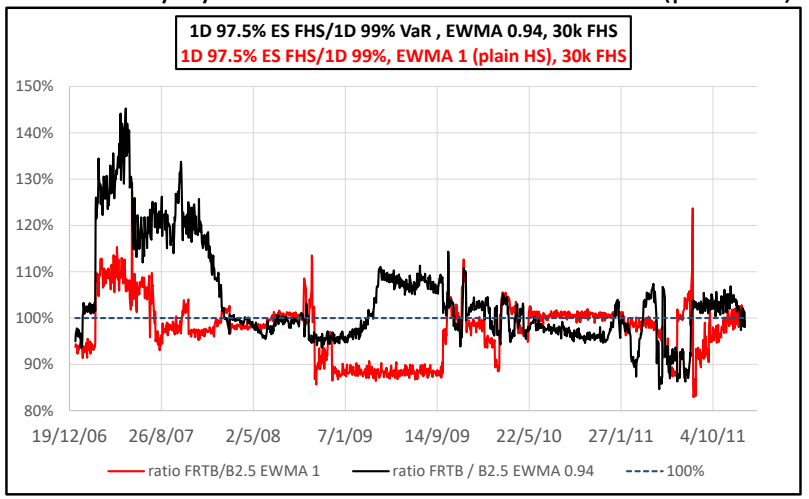


Ratios of 10D 97.5% FHS ES to 10D 99% VaR (square root scaling from 1D), 1Y window, daily rolling, 2007-2011 inclusive, **EWMA 0.94** & **EWMA 1 (plain HS)**

Switching from Basel 2.5 10D 99% VaR to 97.5% 10D ES FRTB risk metrics

- We compute ratios of 10D 97.5% ES to $\sqrt{10} \times$ 1D 99% VaR, daily updates, 2007 – 2011 inclusive
  - Banks usually compute 10D 99% VaR as $\sqrt{10} \times$ 1D 99% VaR
- For FHS (30k simulations) EWMA 0.94 and 1 (plain HS)
- Overall, switch of base risk measure is less expensive when using plain HS as compared to EWMA 0.94 FHS
  - Red curve below black curve
  - If portfolio daily price changes Gaussian i.i.d., ratio ≈ 1
- FRTB Quantitative Impact Studies (QIS) requested reporting 1D 97.5% ES and 1D 99% VaR
  - 1D and 10D ratios of 97.5% ES to 99% VaR show large discrepancies from 1

Ratio of FRTB 1D 97.5% ES (Quantitative Impact Studies) to Basel 2.5 1D 99% VaR, 30k FHS
Volatility dynamics: EWMA 0.94 & EWMA 1 (plain HS)



Ratio of 1D 97.5% ES (reported in FRTB QIS) to 1D 99% VaR, 1Y window, daily rolling, 2007-2011 inclusive

FRTB daunts volatility scaling (VWHS)

- FHS/VWHS tend to be more resilient during crisis times (see further model assessment)
- React more promptly to surge in volatility
  - Might be procyclical and underestimate risks associated with Minsky moments
- FRTB includes a "countercyclical buffer" since it only the maximum of ES and not current ES
  - Compared with 50% current VAR + 50% stressed VaR
- A more volatile risk measure is associated with larger maximum and thus larger input for capital requirement
- As for benchmarking exercises (e.g. EBA), averaging is requirement for meaningful outcomes

Regulatory backtesting and supervisory review (model validation)

- VaR exceptions: $I_{t+1}(\alpha) = 1_{\{r_{t+1} < -\mathrm{VaR}_{t,\alpha}\}}$
- $E[I_{t+1}(\alpha)|\mathcal{F}_t] = 1 - \alpha$ (Christoffersen (1998))
  - If VaR model well specified, $\{I_t(\alpha)\}$ is a sequence of independent Bernoulli variables
  - $I_t(\alpha) - (1-\alpha)$ is a mds (martingale difference sequence)
- $N_t(\alpha) = \sum_{i=0}^{I-1} I_t(\alpha)$, (running) number of VaR exceptions over past year ($I = 252$)
  - $N_t(\alpha)$ follows a binomial distribution for a well-specified model

FRTB backtesting based on the number of 1D VaR exceptions

- At bank level, traffic light approach
  - Max number of 1D 99% VaR exceptions over past year: 10
  - Inflated multipliers on IMA capital charge increasing from 1.5 to 2 as number VaR exceptions move from 5 to 10
  - Calibration of thresholds based on running number of VaR exceptions $N_t(\alpha)$ following a binomial distribution
- At desk level, 97.5 and 99% 1D VaR are considered (MAR 32.18)
  - Max number of 99% VaR exceptions $= 12$ at 97.5% level, 30
  - Otherwise, desk is capitalized under SA (MAR 32.19)
- Continuous compliance over a set of reporting dates D and a single confidence level α for a given desk
  - $\max_{t\in D} N_t(\alpha) \leq S(\alpha)$, where $S(\alpha)$ is the regulatory prescribed max number of VaR exceptions: $S(99\%) = 12, S(97.5\%) = 30$

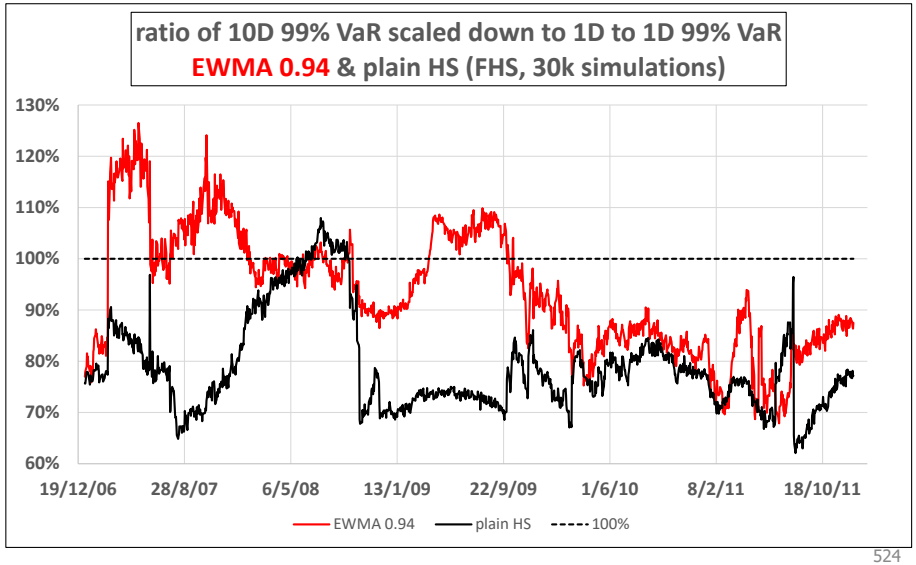
Computation of 1D 99% & 97.5% VaR

- FRTB not fully explicit regarding 1D VaR coherence with 10D ES.
  - MAR 32.18 requires that data used for VaR have to be equally weighted, which precludes BRW, but not FHS in our understanding
  - FAQ1 seems to restrict volatility scaling for VaR, which makes sense if ES is computed with plain HS
- Dealing with different time horizons is not straightforward even assuming that VaR and ES should be derived in a coherent way.
- 1D 97.5% and 99% VaR can be computed with 1D FHS
  - Based on 1D filtered returns and same vol. dynamics as for 10D ES
  - Using 30k simulations, either using the empirical distribution function
- Or scaled down from the 10D model, i.e. computing 10D FHS 97.5% & 99% VaR and divide by $\sqrt{10}$

Computation of 1D 99% & 97.5% VaR

- Square root scaling widely used and easy to compute
  - Müller, Dacorogna, Olsen, Pictet, Schwar, & Morgenegg (1990), Diebold, Hickman, Inoue, & Schuermann (1997). Danielsson & Zigrand, (2006) discuss the limits of the approach especially related to volatility clustering and non-Gaussian innovations (fat tails, jumps).
  - Drost & Nijman (1993) discuss temporal aggregation of GARCH processes to convert, say 1D to 10D volatility dynamics. See also Christoffersen, & Diebold (1997).
  - Wang, Yeh, & Cheng (2011) suggest to use the variance ratio statistics to account for volatility clustering.
  - Under previous approach, the ratio of 10D VaR to 1D VaR should remain constant.

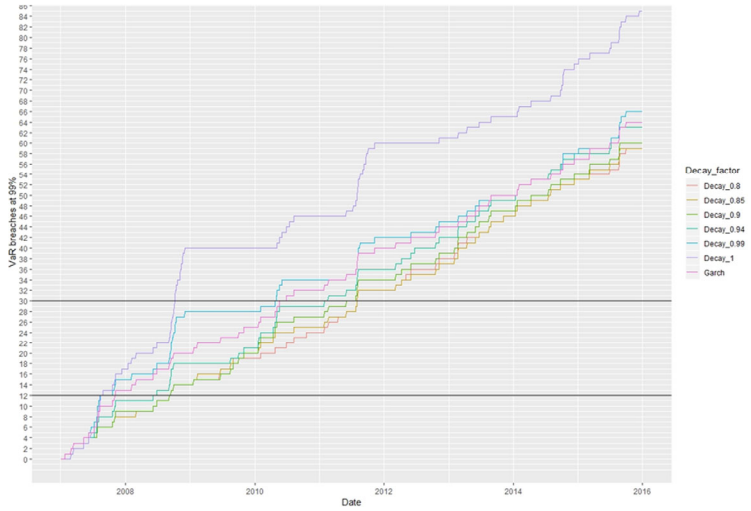
Ratio of 1D 99% FHS VaR scaled down from 10D FHS VaR to 1D 99% FHS VaR



Computation of 1D 99% VaR

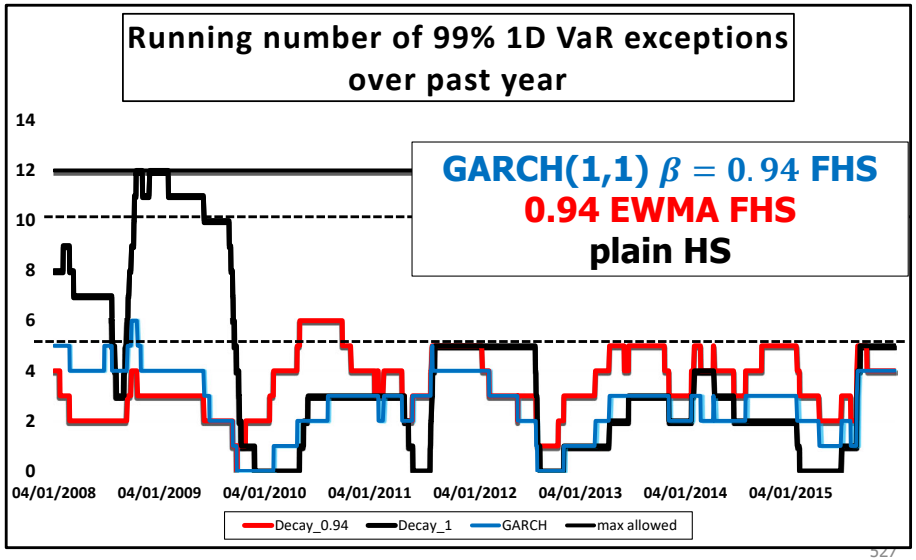
- Higher 1D VaR results in lower number of VaR exceptions
- Compute ratios $\frac{\text{FHS } 10D \text{ 99\% VaR}}{\sqrt{10}\times\text{FHS } 1D \text{ 99\% VaR}}$ for EWMA 0.94 and plain HS

Daily dynamics of 1D 99% VaR breaches 2007-2015 inclusive

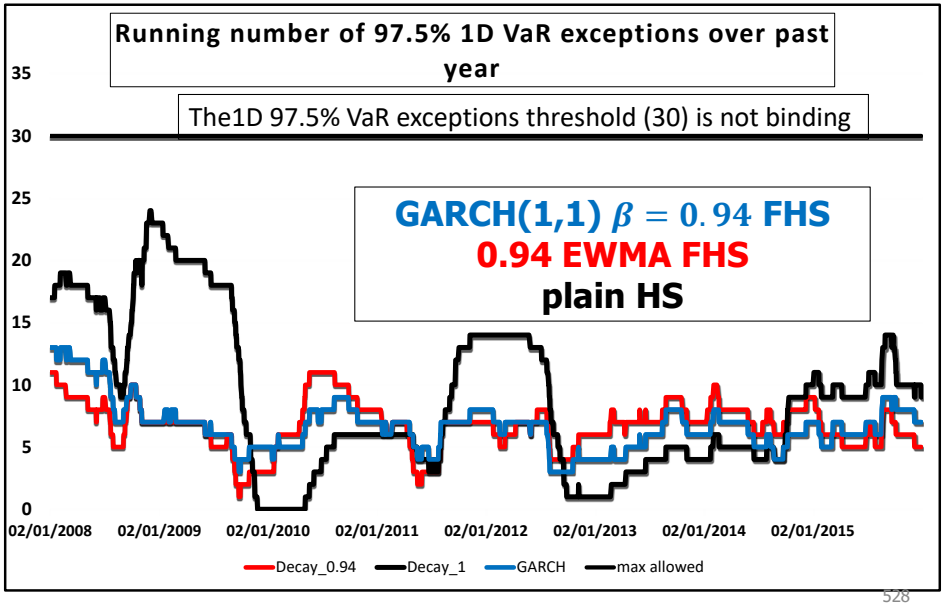


VaR is computed from 4/1/07 (using 252 trading days of 2006)

Long SPX exposure: Dynamics of 1D 99% FHS VaR breaches 2008-2015 inclusive, 2265 data (continuous compliance)



Long SPX exposure: Dynamics of 1D 97.5% VaR breaches 2008-2015 inclusive (2265 daily data)



Backtests, validation d'un modèle de VaR

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Assessment of risk models based on p-values

- If F_t well-specified conditional on $\mathcal{F}_t$ loss distribution, $p_{t+1} = F_t(r_{t+1}) \sim U[0,1]$
  - Crnkovic and Drachman (1996), Diebold, Gunther & Tay (1997)
  - Fed, ongoing BCBS QIS and FRTB model validation require producing p-values but p-values not publicly disclosed
  - Does not rely on stationarity of the loss distribution: useful for time varying exposures
  - $I_{t+1}(\alpha) = 1_{\{r_{t+1} < -\mathrm{VaR}_{t,\alpha}\}} = 1_{\{p_{t+1} < 1-\alpha\}}$; if F_t well-specified then $E\left[1_{\{p_{t+1} < 1-\alpha\}} - (1-\alpha) | \mathcal{F}_t\right] = 0$
  - VaR backtests at any confidence level α can be written using p-values, but using p-values allows for a global assessment of F_t, especially useful for non-linear exposures

Assessment of risk models based on p-values

- Expanding upon Kupiec (1995), numbers of p-values with confidence levels partitioning [0,1] in buckets ~ multinomial distribution.
- Unconditional coverage test leads to χ_2 statistics with number of degrees of freedom equal to number of buckets-1 (number of confidence levels)
  - Campbell (2006), Kratz, Lok & McNeil (2018) use χ_2 adequacy tests
  - Kupiec (1995), Perignon & Smith (2008), Colletaz, Hurlin & Perignon (2013), Gurrola-Perez (2018) use LR (which only differs from the χ_2 in small samples).
  - Number of confidence levels: Campbell (2006): 4 (99%, 97.5%, 95%, 90%), Perignon & Smith (2008): 3 (99%, 97.5%, 95%), Colletaz, Hurlin & Perignon (2013): 2 (99%, 97.5%), Gurrola-Perez (2018): 2 (99%, 99.5%)
  - Kratz, Lok & McNeil (2018) recommend using 4 confidence levels: $0.975 + \frac{i}{4} \times 0.025, i = 0,1,2,3$

Assessment of risk models based on p-values

- Blum (2005), Hurlin & Tokpavi (2006), Leccadito, Boffelli, & Urga (2014) consider multilevel tests, but also check the independence of p-values as Christoffersen (1998)
- See also Emmer, Kratz & Tasche (2015) and the references therein regarding issues related to backtesting distribution forecasts and p-values, Lok (2017) for a review of using p-values for back-testing and Lok (2017), Gordy & McNeil (2018) regarding weighting p-values

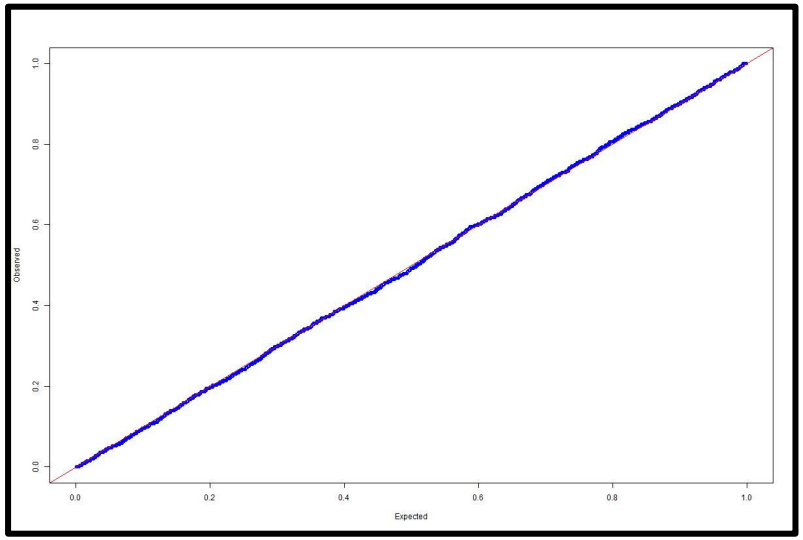
Back-tests based on p-values using severity of VaR breaches

- $\frac{(1-\alpha)-p_t}{1-\alpha} \times 1_{\{p_t < 1-\alpha\}}$: Severity of VaR breaches or PIT exceedances
  - Kerkhof & Melenberg (2004), Zumbach (2006), Du & Escanciano (2016), Costanzino & Curran (2018)
  - Since $p_t = F_{t-1}(r_t) \sim U[0,1]$
  - $\Rightarrow u_{t,\alpha} = \frac{(1-\alpha)-p_t}{1-\alpha} \times 1_{\{p_t < 1-\alpha\}} \sim \mathrm{U}[0, 1-\alpha]$
- Thus, $E\left[\frac{(1-\alpha)-p_t}{1-\alpha} \times 1_{\{p_t < 1-\alpha\}} - \frac{1-\alpha}{2} | \mathcal{F}_{t-1}\right] = 0$
  - Kratz, Lok & McNeil (2018) advocate that focusing on a univariate restriction, i.e. conditional mean of PIT exceedance is superseded by Multinomial back-tests
  - See also Gordy & McNeil (2018) ????

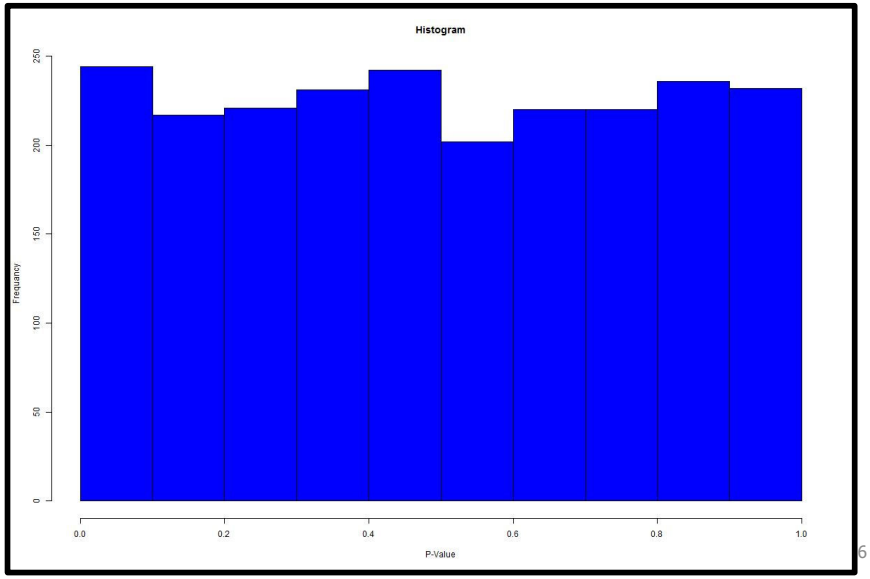
Backtesting using p-values based on Berkowitz (2001)

- Christoffersen (1998), Berkowitz (2001): $F_t(r_{t+1}) \sim U[0,1] \Leftrightarrow \Phi^{-1}\left(F_t(r_{t+1})\right) \sim N(0,1)$
- Discrete distributions of p-values either with plain HS or FHS are inconsistent with the above continuous distribution framework
  - i.e. running 1D VaR computed over 252 past trading days
  - if r_{t+1} greater than 252 past values, then $F_t(r_{t+1}) = 1$
  - If r_{t+1} greater than 252 past values, then $F_t(r_{t+1}) = 0$
  - $\Phi^{-1}\left(F_t(r_{t+1})\right) = \pm\infty$ Berkowitz test cannot be computed
- Kolmogorov Smirnov test: $F_t(r_{t+1}) \sim U[0,1]$
  - Probability of getting two identical p-values $= 0$
  - Several data points associated with $F_t(r_{t+1}) = 0,1$ not consistent with uniform distribution
  - Getting rid of the issue involves bucketing of p-values as in

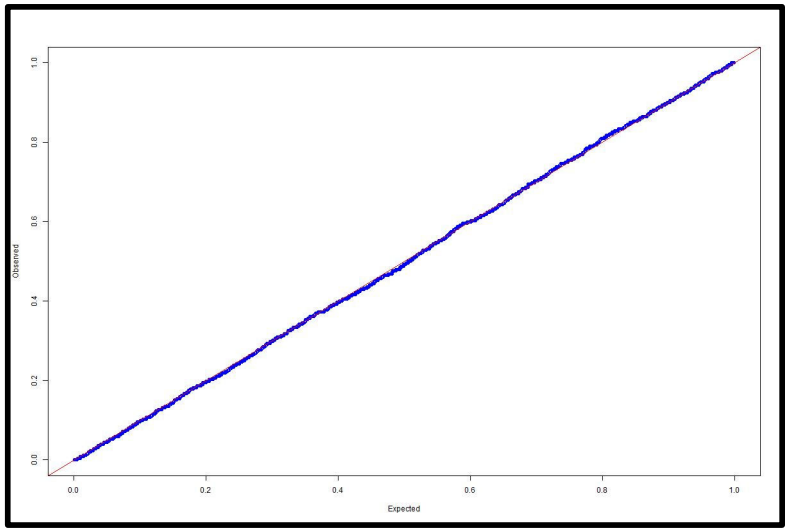
QQ plot for p-values for FHS/GARCH $\beta = 0.94$, daily data, 2007-2015 inclusive, 2265 daily data



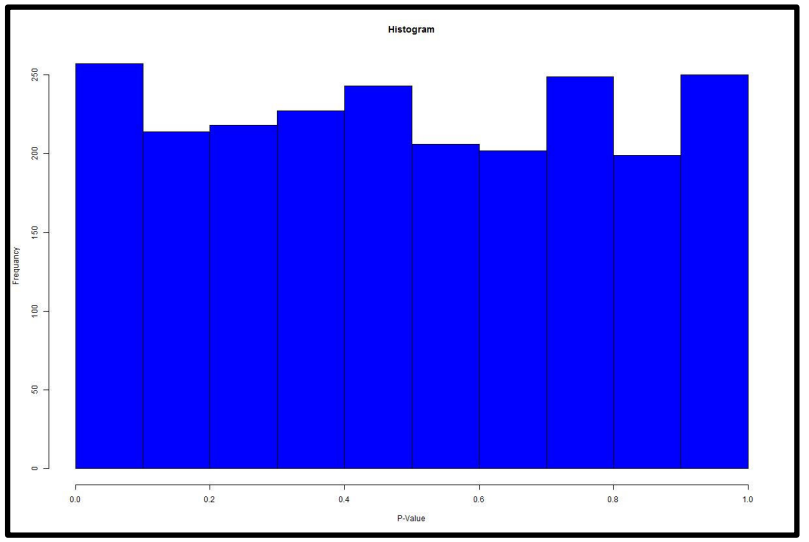
Backtesting FHS/GARCH(1,1) 1D 99% VaR: Histogram of p-values (by deciles), 2007-2015 inclusive (2265 daily data)



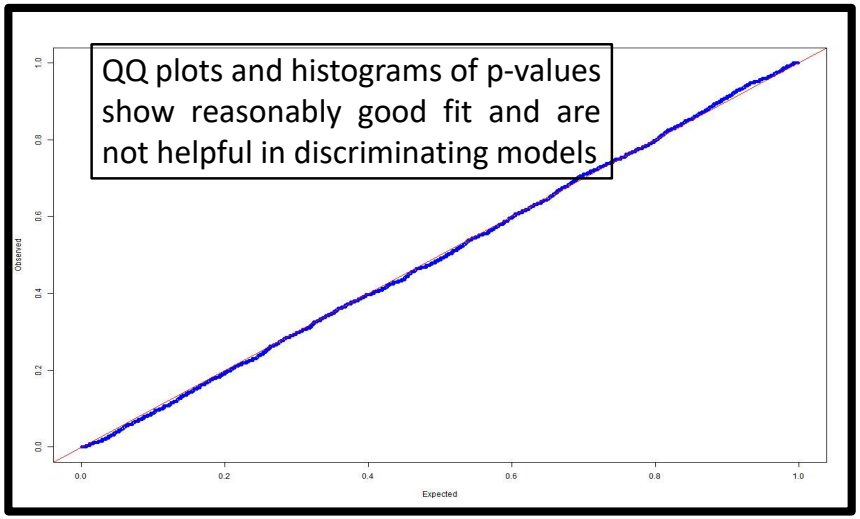
QQ plot for p-values for FHS/EWMA with decay factor $\lambda = 0.94$, daily data, 2007-2015 inclusive, 2265 daily data



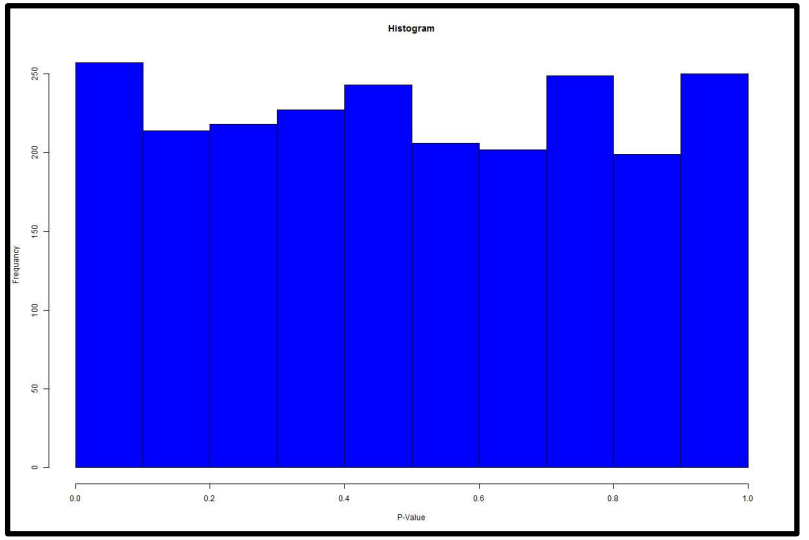
Backtesting FHS/EWMA 0.94 1D 99% VaR: Histogram of p-values (by deciles), 2007-2015 inclusive (2265 daily data)



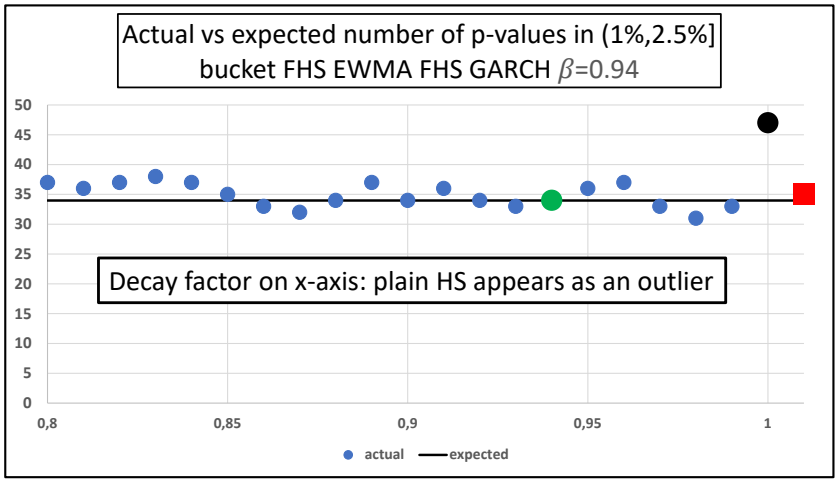
QQ plot of p-values for plain historical simulation, daily data, 2007-2015 inclusive, 2265 daily values



Backtesting plain HS 1D 99% VaR: Histogram of p-values (by deciles) for plain HS, 2007-2015 inclusive (2265 daily data)

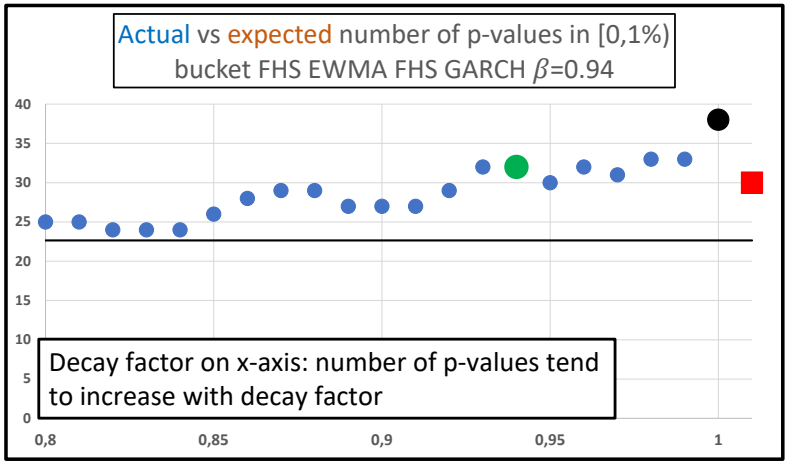


Number of p-values (difference of 99% and 97.5% VaR breaches) in between 1% and 2.5% for FHS/EWMA and FHS/GARCH $\beta = 0.94$



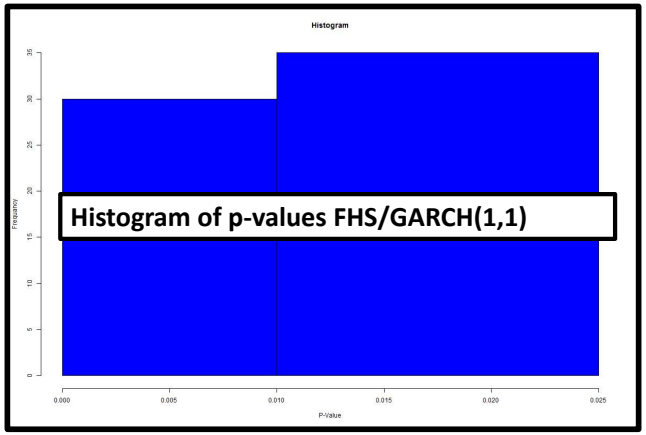
GARCH: red cell, EWMA 0.94 green cell, plain HS black cell

Number of p-values in between 0 and 1% (99% VaR breaches) for FHS/EWMA and FHS/GARCH $\beta = 0.94$



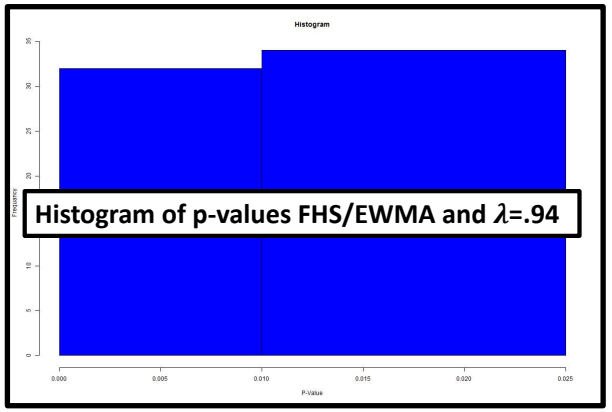
GARCH: red cell, EWMA 0.94 green cell, plain HS black cell

PIT adequacy tests focusing on tails, p-value below 1% and p-values in between 1% and 2.5%, 1D 99% FHS/GARCH(1,1) $\beta = 0.94$ VaR, 2007-2015 inclusive (2265 daily data)



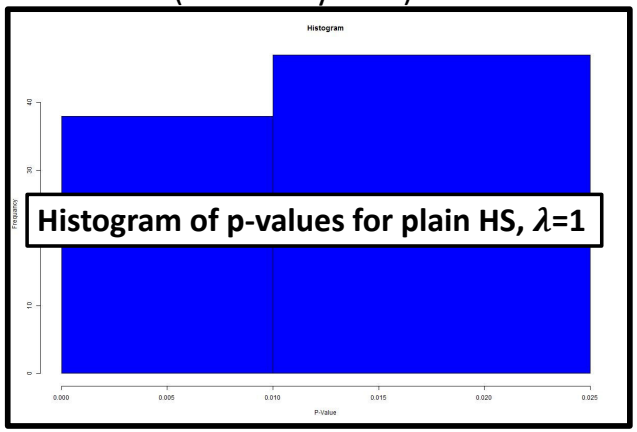
Expected vs actual number of p values: 23 vs 30 at 1% level, 34 vs 35 in between 1% and 2.5%: bad fit at 1% level

PIT adequacy tests focusing on tails, p-value below 1% and p-values in between 1% and 2.5%, 1D 99% FHS/EWMA 0.94 VaR, 2007-2015 inclusive (2265 daily data)



Expected vs actual number of p values: 23 vs 32 at 1% level, 34 vs 34 in between 1% and 2.5%: bad fit at 1% level

PIT adequacy tests focusing on tails, p-value below 1% and p-values in between 1% and 2.5%, plain HS, 2007-2015 inclusive (2265 daily data)

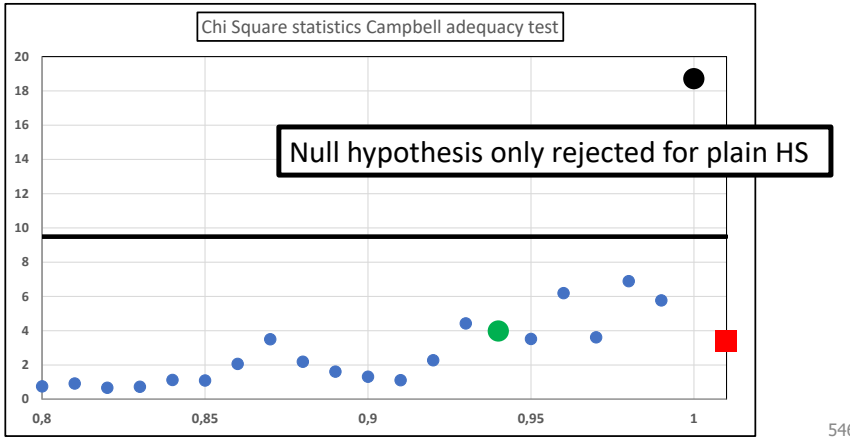


Histogram of p-values for plain HS, λ=1

Expected vs actual number of p values: 23 vs 38 at 1% level, 34 vs 47 in between 1% and 2.5%: bad fit with HS

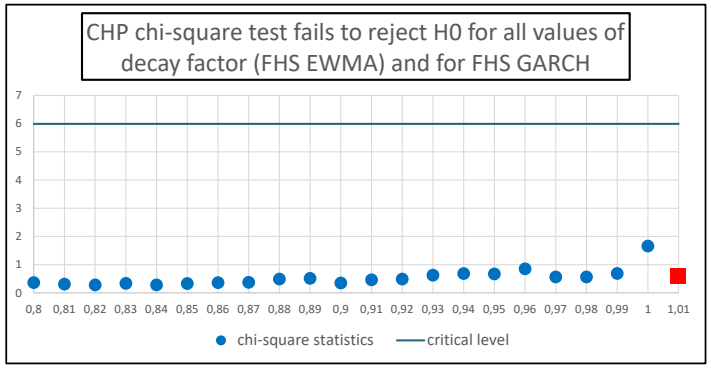
Backtesting FHS (EWMA & GARCH(1,1) 1D 99% VaR, 2007-2015 inclusive, 2265 daily data, based on Campbell (2006)

p-values sorted in 5 buckets: [0,1%], (1,2.5%], (2.5,5%], (5,10%] and (10,100%]. χ^2_4 adequacy test performed, decay factor on x-axis (red square corresponds to returns filtered with GARCH(1,1), $\beta = 0.94$, χ^2_4 statistics on y- axis. Critical value at 5% level: 9.49



PIT adequacy tests focusing on tails, p-value below 1% and p-values in between 1% and 2.5%, plain HS, 2007-2015 inclusive (2265 daily data)

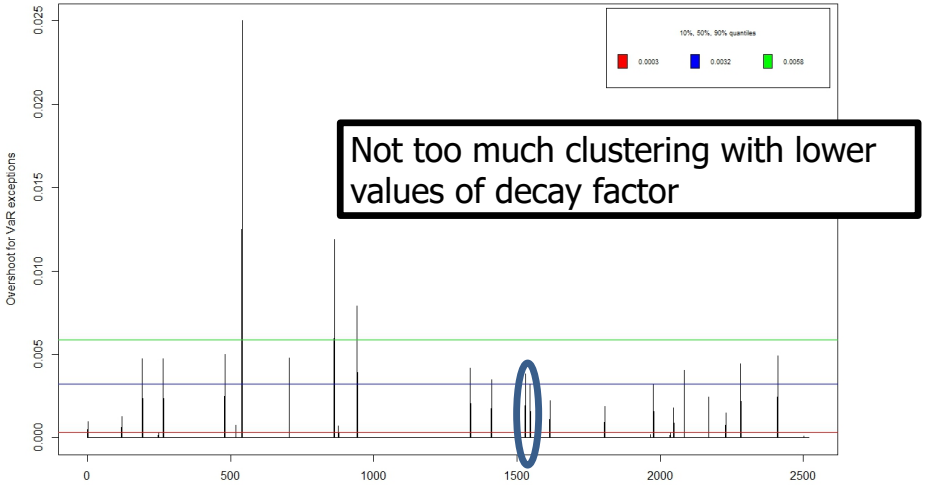
- Colletaz, Hurlin & Perignon (2013) risk map approach: LR test statistics based upon two confidence levels and converges to a chi-square distribution with two degrees of freedom. Here, we use $\alpha = 97.5\%$ and $\alpha = 99\%$



Assessment of risk models

- Clustering of VaR exceptions, i.e. several blows in a row might knock-out bank's capital
- Are VaR exceptions clustered during stressed periods?
  - *"We are seeing things that were 25-standard deviation moves, **several days in a row**"*
    - Quoted from David Viniar, Goldman Sachs CFO, August 2007 in the Financial Times
  - Crotty (2009), Danielsson (2008), Dowd (2009), Dowd et al. (2011)
- Tests based on duration between VaR exceptions
  - Christoffersen & Pelletier (2004), Haas (2005), Candelon et al. (2010)

Overshoots for VaR exceptions using VWHS and lambda=.8 at 1% confidence level



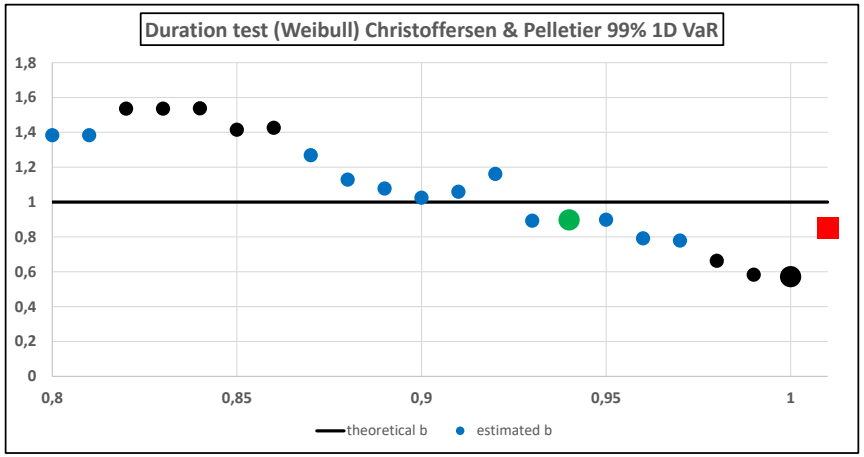
Backtesting based on durations between VaR exceptions

- Jump process associated with VaR breaches
  - Christoffersen & Pelletier (2004)
  - Jump times: $t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots$
  - $D_i = t_i - t_{i-1}$, duration between two VaR breaches
    - $P\left(D_i = 1 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right) = 1 - \alpha$
    - $P\left(D_i = k | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right) = (1-\alpha)\alpha^{k-1}$
  - Constant hazard rate : $\frac{P\left(D_i = k | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right)}{P\left(D_i \geq k-1 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right)} = 1 - \alpha$
  - Unconditional test: check that duration times D_i follow above distribution
  - Conditional test: hazard rate does not depend on D_{i-1}

Backtesting based on durations between VaR exceptions

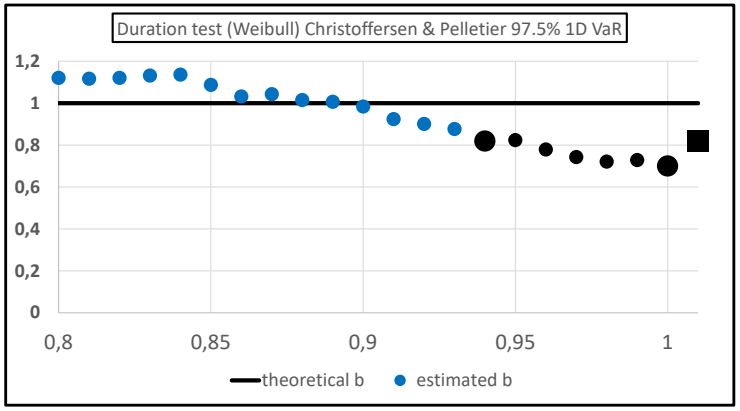
- Implies that duration between two jumps have exponential type distributions and are independent
  - Christoffersen & Pelletier (2004) H0 (exponential) vs H1 (Weibull), check whether $b = 1$ (Weibull then turns out to be exponential)
  - Chi-square adequacy test: bucket VaR exceptions and compare with theoretical distribution
  - These two tests do not consider the hazard rate is higher if past duration between two hits is low (see Christoffersen & Pelletier (2004), EACD test).

Christoffersen & Pelletier LR test of exponentially distributed durations



x-axis: decay factors (GARCH(1,1) red square y-axis: estimated b values
Black cells correspond to rejection of H0, filtering returns with EWMA 0.94 and GARCH(1,1) is fine, but plain HS is an outlier.

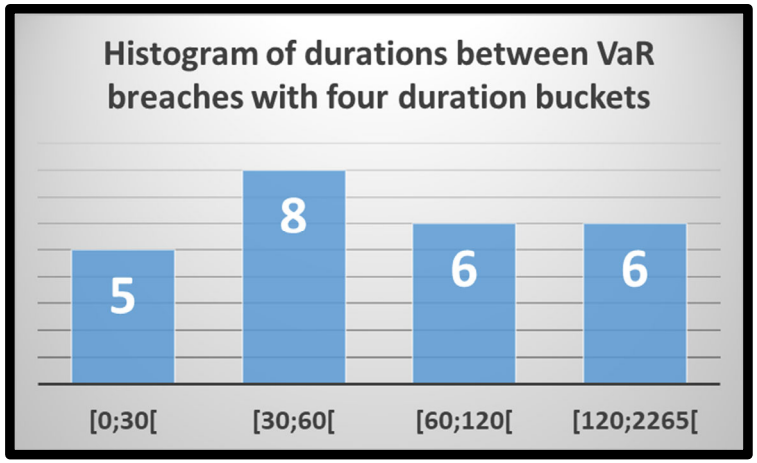
Christoffersen & Pelletier LR test of exponentially distributed durations (FHS/EWMA and FHS/GARCH)



x-axis: decay factors (GARCH(1,1) square y-axis: estimated b values
Black cells correspond to rejection of H0 (constant hazard rate), FHS with EWMA 0.94 and GARCH(1,1) and plain HS are rejected. As for 99% level, LR statistics for plain HS is an outlier and estimated b tend to decrease with decay factor

0
1
8
9
13
31
33
35
36
44
52
54
55
61
68
69
72
73
76
133
148
196
228
314
339

Distribution of durations (in days) between consecutive 1D 99% VaR breaches (2007 – 15 inclusive, VWHS with GARCH(1,1) filter (parameters set as above)



Left table: sorted series of durations

Chi-2 adequacy test (unconditional)

$P(k_1 \leq D_i < k_2) = \alpha^{k_1} - \alpha^{k_2}$, number of daily observations $= 2265$, expected number of 99% VaR exceptions $= 22.65$

duration ranges	observed	theoretical	observed	theoretical	chi-2 computation	
[0;30)	5	6,0	20%	26%	0,1627	4,4
[30;60)	8	4,4	32%	19%	2,8803	3,6
[60;120)	6	5,7	24%	25%	0,0159	4,3
[120;2266)	6	6,9	24%	30%	0,1139	4,8
	25	23	100%	100%	**3,1729**	
expected number of VaR exceptions			22,65			
expected number of durations			23			

Expected number of durations$= 23$, expected number of durations in bucket $[k_1; k_2) = 23 \times \left(\alpha^{k_1} - \alpha^{k_2}\right)$. Table above shows a fairly good fit of observed and theoretical distribution (critical level at 95% $= 7.81$)

Assessment of VWHS (λ=**0.94**, 2.5% confidence level) with conditional coverage tests

- $I_t(\alpha) = 1 - \alpha_0 + \sum_{i=1}^{I} \alpha_i I_{t-i} + \sum_{j=0}^{K} \beta_j VIX_{t-j} + u_t$
  - $E[I_{t+1}(\alpha)|\mathcal{F}_t] = 1 - \alpha$?
    - Christoffersen (1998)
  - Past hits I_{t-i} and VIX_{t-j} instrumental variables
    - Engle & Manganelli (2004): $I = 4$
    - Berkowitz et al. (2008): use of VIX
  - VaR model is well-specified if $\alpha_0 = \alpha$ and $\beta_j = 0, \alpha_i = 0, i \geq 1$

Assessment of VWHS (λ=0.94) with conditional coverage tests

- Results for S&P500 confidence level $\alpha = 97.5\%$
  - Use of BIC and backward model selection techniques
  - Red cells are acceptable: no lag for VIX, but lags 2,3,4 or (3,4) for I_{t-i} could be considered

GMM model	(1|0)	(1|1)	(1|2)	(2|0)	(2|1)	(2|2)
BIC	67.18	72.25	69.70	65.07	70.21	67.80
GMM model	(3|0)	(3|1)	(3|2)	(4|0)	(4|1)	(4|2)
BIC	65.07	70.16	67.71	65.07	70.14	67.56
GMM model	(1,2|0)	(1,2|1)	(1,2|2)	(2,3|0)	(2,3|1)	(2,3|2)
BIC	70.33	75.44	73.02	67.86	73.08	70.66
GMM model	(3,4|0)	(3,4|1)	(3,4|2)	(1,3|0)	(1,3|1)	(1,3|2)
BIC	67.86	73.01	70.43	69.97	75.05	72.73

Assessment of risk models

- Preliminary results suggests that $\lambda \leq 0.9$
  - **Would reject $\lambda = 0.94$ and plain HS**

Parameters (two regressors, I_{t-3}, I_{t-4})	Estimate	Std. Error	z value	$Pr(>\|z\|)$
α_0	−4.0561	0.5043	−8.043	$8.77e-16^{***}$
α_3	2.4467	1.2060	2.029	0.0425^{*}
α_4	2.4467	1.2060	2.029	0.0425^{*}

  - But results of statistical tests are difficult to interpret (depend on the chosen lags)
  - Rejection for lags (3,4) acceptance for lag 3 only

Parameters (one regressor, I_{t-3})	Estimate	Std. Error	z value	$Pr(>\|z\|)$
α_0	−3.8544	0.4519	−8.529	$<2e-16^{***}$
α_3	2.2450	1.1850	1.894	$0.0582^{\cdot}$

Estimation results based on March 2008 to February 2009 daily data

Comparing back-tests results with Gurrola-Perez (2018)

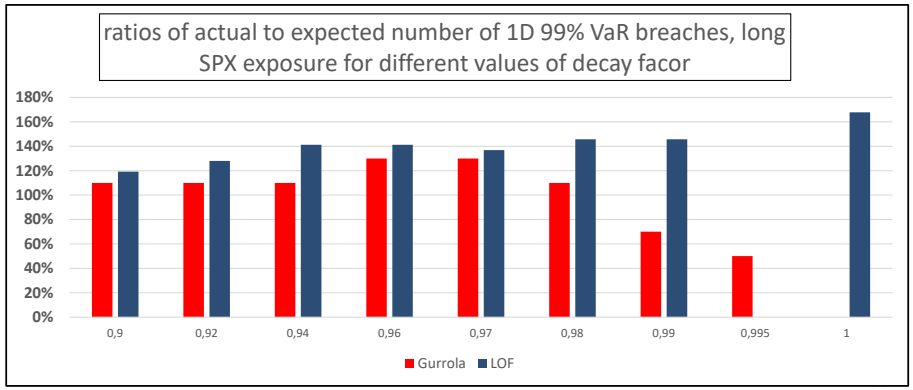
- Gurrola-Perez (2018) points out some difficulties in back-testing and implementing FHS
- Data generated from Gaussian IGARCH(1,1) $r_t = \sigma_t \times \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ i.i.d and $\sigma_t^2 = \omega + \lambda_0 \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda_0) \times r_{t-1}^2$, $\lambda_0 = 0.94, 0.97, 0.99$
- 1000 daily times series of 1D FHS VaR with 1750 observations, $\alpha = 95\%, 99\%, 99.5\%$ and $H = 1000$
  - Number of observations and confidence levels similar to one used in our study.
  - 1D EWMA FHS VaR, with $\lambda_m = 0.9, 0{,}91, \ldots, 0.99, 0.995$
  - 4 years of rolling data, lengthier than 1Y FRTB prescription

Comparing back-tests results with Gurrola-Perez (2018)

- As for real data, Gurrola considers 2750 daily returns of SPX, uses a rolling window of $H = 1750D$, leading to series of 1000 daily VaR outcomes
- 1D 99.5% FHS VaR estimates for SPX, with a EWMA filter and decay factors equal to $\lambda = 0.92$ and $\lambda = 0.98$.
- The number of 1D 99.5% VaR breaches are the same (5) for both models and both pass the unconditional test of Kupiec (1995) as well as the conditional coverage test of Christoffersen (1998).
- However, the running 1D 99.5% VaR is much more volatile when using $\lambda = 0.92$ rather than $\lambda = 0.98$, with a ratio peaking up to 1.8, as confirmed in our study focusing on the max of 97.5% ES.

Comparing back-tests results with Gurrola-Perez (2018)

- Numbers of 1D 99% and 99.5% VaR exceptions roughly as expected: 10 and 5 resp. $\forall \lambda \in [0{,}9; 0.98]$
  - Number of VaR exceptions goes down for decay factors 0.99 and 0.995, due to computation of VaR over 7 years and back-testing done over 4 calm years, contrasting our study VaR computed over 1Y, and conducted over 9Y covering the GFC and the Eurozone crisis



Comparing back-tests results with Gurrola-Perez (2018)

- Gurrola-Perez outcomes of backtests for different values of decay factor.
- Report table for different backtests and decay factor values
- + compute our own tests from the report p-values