

$$r_e = r_f + \beta(r_m - r_f)$$

where

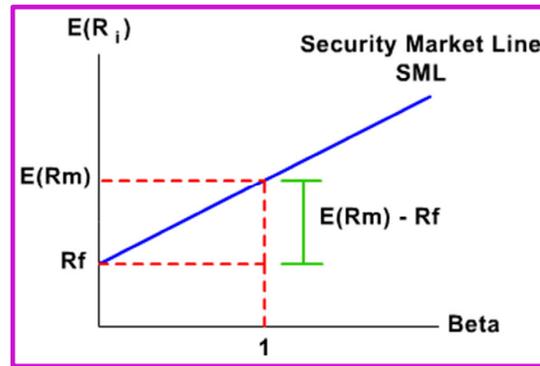
$r_e$  = Required Return on Equity

$r_f$  = Risk-free Rate

$r_m$  = Market Return

$\beta$  = Stock Beta

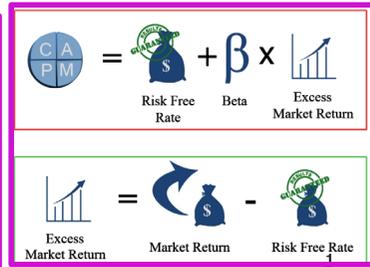
$(r_m - r_f)$  = Equity Risk Premium



$$E(R_i) = R_F + \beta_i [E(R_M) - R_F]$$

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_m)}{\text{var}(R_m)} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

Price of risk =  $E(R_M) - R_F$



**MEDAF : relation entre rentabilité attendue et risque de titres et de portefeuilles**

- « Security Market Line » (SML)
  - SML et CML
  - Exercices
  - Seul le risque de marché est rémunéré
- Alpha de Jensen et ratio de Sharpe
- Démonstration du Médaf
  - Médaf et ratio de Sharpe
- Médaf, valeur fondamentale, création de valeur
- Portefeuille orthogonal
- Modèles multi-bêtas
- Compléments
  - Propriétés du portefeuille orthogonal, Exercices, Composition et ratio de Sharpe du portefeuille tangent, démonstrations complémentaires, modèle zéro-bêta de Black, ...

**Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)**

- Relation entre rentabilité attendue d'un titre et son risque
- Le Médaf sert pour l'évaluation des entreprises
  - Rentabilité attendue par les actionnaires
  - Evaluation d'une entreprise lors d'opérations de croissance externe ou de cessions
  - Détermine le taux d'actualisation des cash-flows futurs
- Le Médaf détermine les choix d'investissement
  - TRI cible, taux d'actualisation pour la VAN

## Security Market Line (SML)

5

## Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

- Propriété : si  $T$  est le portefeuille tangent et  $i$  un titre ou un portefeuille de titres choisi dans le même ensemble de titres risqués, alors  $E_i = r_f + \beta_i \times (E_T - r_f)$
- $E_i$  : Rentabilité attendue du titre  $i$  (de rentabilité  $r_i$ )
- $r_f$  : taux d'intérêt sans risque
- $E_T$  : Rentabilité attendue du portefeuille tangent (de rentabilité  $r_T$ )
- $\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_T)}{Var[r_T]} = \rho_{iT} \frac{\sigma_i}{\sigma_T}$  : bêta du titre  $i$  par rapport au portefeuille  $T$
- $E_T - r_f$  : prime de risque

6

## Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

- Univers de titres donné et un groupe d'investisseurs.
- Qui investissent exclusivement dans l'univers de titres
- Seuls ces investisseurs achètent des titres
- Les investisseurs raisonnent tous dans la même devise.
- Tous les investisseurs détiennent une combinaison d'actif sans risque et de portefeuille tangent
- **Équilibre : offre = demande de titres**
- Offre de titres risqués : le « portefeuille de marché »
- Demande : le portefeuille tangent
- **Le portefeuille de marché est le portefeuille tangent**
- **Il est donc efficient au sens moyenne variance**

7

## Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

- **Si** le portefeuille tangent est égal au portefeuille de marché
- **$E_i = r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)$**
- $E_i$  : Rentabilité attendue du titre  $i$
- $r_f$  : taux d'intérêt sans risque
- $\beta_i$  : bêta du titre  $i$
- $E_M$  : espérance de rentabilité du portefeuille de marché
- $E_M - r_f$  : prime de risque

8

## Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

$$E_i = \underbrace{r_f}_{\text{taux sans risque}} + \underbrace{\beta_i}_{\text{Bêta du titre } i} \times \underbrace{(E_M - r_f)}_{\text{prime de risque}}$$

- Prime de risque :  $E_M - r_f$ 
  - écart entre la rentabilité du portefeuille de marché  $E_M = E[r_M]$  et le taux sans risque  $r_f$
- Dans l'équation  $E_i = r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)$ ,  $\beta_i$  est le seul terme qui dépend du titre  $i$ .

9

## Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

$$E_i = \underbrace{r_f}_{\text{taux sans risque}} + \underbrace{\beta_i}_{\text{Bêta du titre } i} \times \underbrace{(E_M - r_f)}_{\text{prime de risque}}$$

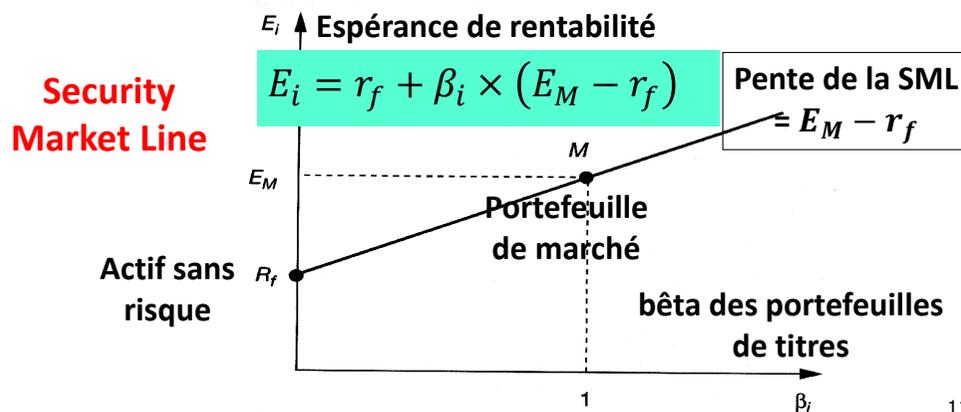
$$E_i = r_f + \underbrace{\beta_i \sigma_M}_{\text{risque de marché}} \times \underbrace{\frac{E_M - r_f}{\sigma_M}}_{\text{prix de marché du risque}}$$

$$\text{Prix de marché du risque : } \frac{E_M - r_f}{\sigma_M} = \text{pente de la CML}$$

10

## Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) / Security Market Line (SML)

- On se place dans un plan où le **bêta des portefeuilles est porté en abscisse**
  - Pour la CML, c'est l'écart-type des rentabilités
- L'espérance des rentabilités en ordonnées



11

12

## SML et CML

13

## CML et SML (Security Market Line)

### ■ Rappel : portefeuilles sur la CML

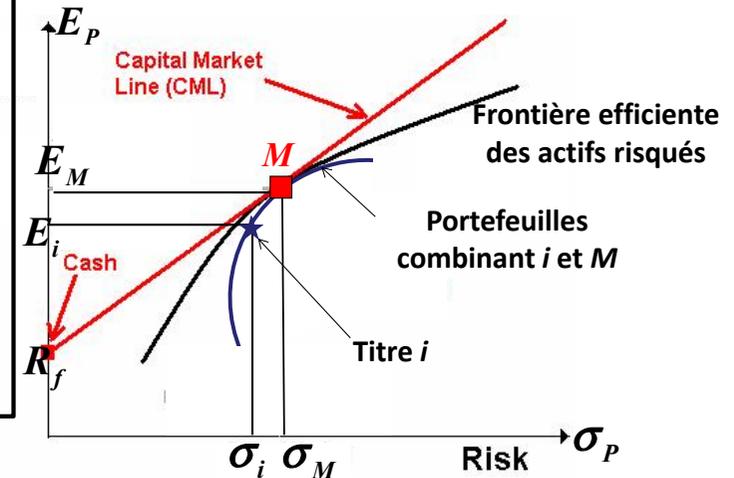
La CML représentée à droite est dans un plan (écart-type, espérance)

*Idée de la démonstration rigoureuse :*

La courbe bleue représente les portefeuilles combinant le titre  $i$  et le portefeuille de marché

Les courbes bleues et rouges sont tangentes en  $M$

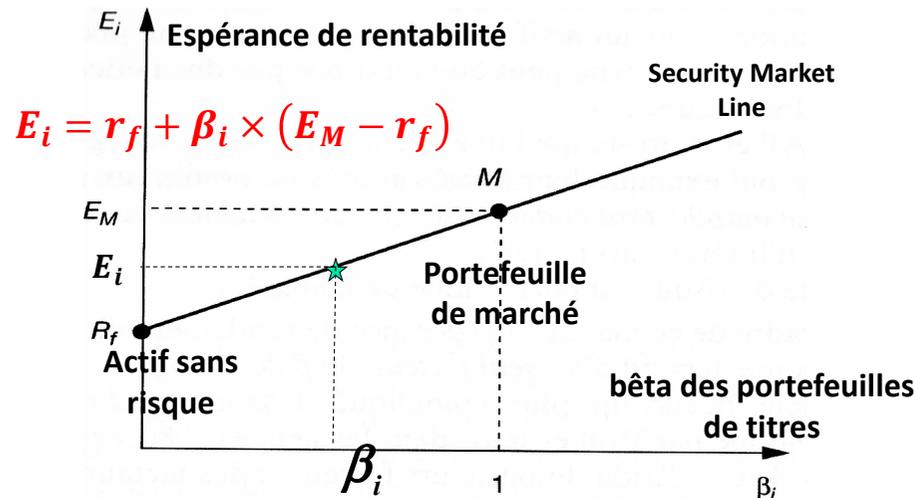
Voir transparents ci-dessous



14

## CML et Security Market Line (SML)

- À l'équilibre, tous les titres et tous les portefeuilles de titres sont situés sur la SML
- Les bêtas sont représentés sur l'axe des abscisses



15

## CML et SML : Récapitulatif

- Pour les portefeuilles situés sur la CML uniquement
  - Ceux qui combinent actif sans risque et portefeuille de marché
  - $E_P = r_f + \frac{E_M - r_f}{\sigma_M} \times \sigma_P$
- Pour tous les titres et tous les portefeuilles
  - $E_i = r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)$

16

## Exercices corrigés

17

## Exercice : Médaf pour un portefeuille de titres

- Rentabilité d'un portefeuille de titres
- $r_P = x r_1 + (1 - x) r_2 \Rightarrow E_P = x E_1 + (1 - x) E_2$ 
  - Linéarité de l'espérance
- MEDAF appliqué aux titres 1 et 2 :
$$E_1 = r_f + \beta_1 (E_M - r_f), E_2 = r_f + \beta_2 (E_M - r_f)$$
  - D'où :
$$E_P = x (r_f + \beta_1 (E_M - r_f)) + (1 - x) (r_f + \beta_2 (E_M - r_f))$$
$$E_P = r_f + (x \beta_1 + (1 - x) \beta_2) (E_M - r_f)$$
- Ceci est cohérent avec  $\beta_P = x \beta_1 + (1 - x) \beta_2$ 
  - Voir transparents sur la décomposition du risque

18

## Exercice : Médaf pour les portefeuilles sur la CML

- Les portefeuilles sur la CML sont constitués d'actif sans risque et de portefeuille de marché en quantité positive.
  - $r_P = x r_f + (1 - x) r_M, 1 - x \geq 0$
  - $r_P = \alpha_P + \beta_P r_M + \varepsilon_P$ 
    - Bêta du portefeuille :  $\beta_P = 1 - x$
    - Risque spécifique du portefeuille  $r_P$  nul :  $\varepsilon_P = 0$
- $$\sigma_P^2 = \text{Var}[r_P] = \text{Var}[(1 - x)r_M] = (1 - x)^2 \sigma_M^2 \Rightarrow \sigma_P = (1 - x) \sigma_M$$
- Equation de la CML :  $E_P = r_f + \left(\frac{E_M - r_f}{\sigma_M}\right) \times \sigma_P$
  - $\Rightarrow E_P = r_f + (1 - x) \times (E_M - r_f) = r_f + \beta_P \times (E_M - r_f)$
  - Pour les portefeuilles sur la CML, on retrouve directement la relation entre espérance et bêta (SML)

19

## Exercice : CML et SML

- On considère un portefeuille  $P$  sur la CML
- $r_P = x r_f + (1 - x) r_M, 1 - x \geq 0$
- On définit  $\beta_{iP}$  le Bêta d'un titre (ou portefeuille)  $i$  par rapport au portefeuille  $P$  :  $\beta_{iP} = \text{Cov}(r_i, r_P) / \text{Var}(r_P)$
- Simplifier l'expression de  $\beta_{iP}$
- Montrer qu'une relation du type Médaf s'applique si on remplace  $r_M$  par  $r_P$

20

## Exercice : CML et SML

- On considère un portefeuille  $P$  sur la CML
- $r_P = xr_f + (1 - x)r_M$ ,  $0 \leq x < 1$
- On définit  $\beta_{iP}$  le Bêta d'un titre (ou portefeuille)  $i$  par rapport au portefeuille  $P$  :  $\beta_{iP} = \text{Cov}(r_i, r_P) / \text{Var}(r_P)$
- Simplifier l'expression de  $\beta_{iP}$ 
  - $\text{Cov}(r_i, r_P) = \text{Cov}(r_i, xr_f + (1 - x)r_M) = (1 - x)\text{Cov}(r_i, r_M)$
  - $\text{Var}(r_P) = (1 - x)^2 \text{Var}(r_M)$
  - $\beta_{iP} = \frac{1}{1-x} \beta_{iM}$

21

## Exercice : CML et SML

- On considère un portefeuille  $P$  sur la CML
- $r_P = xr_f + (1 - x)r_M$ ,  $0 \leq x < 1$
- On définit  $\beta_{iP}$  le Bêta d'un titre (ou portefeuille)  $i$  par rapport au portefeuille  $P$  :  $\beta_{iP} = \text{Cov}(r_i, r_P) / \text{Var}(r_P)$
- $\beta_{iP} = \frac{1}{1-x} \beta_{iM}$
- Montrer qu'une relation du type Médaf s'applique si on remplace  $r_M$  par  $r_P$ 
  - Comme  $E_i = r_f + \beta_{iM}(E_M - r_f)$  et  $\beta_{iM} = (1 - x)\beta_{iP}$
  - $E_i = r_f + \beta_{iP}(1 - x)(E_M - r_f)$
  - $r_P = xr_f + (1 - x)r_M \Rightarrow E_P - r_f = (1 - x)(E_M - r_f)$
  - Soit  $E_i = r_f + \beta_{iP}(E_P - r_f)$
  - Ce qu'on voulait démontrer

22

23

24

Seul le risque de marché est rémunéré

25

Modèle d'évaluation des actifs financiers  
(MEDAF)

Décomposition du risque d'un titre

$$\underbrace{\sigma_i^2}_{\text{risque total}} = \underbrace{\beta_i^2 \times \sigma_M^2}_{\text{risque de marché}} + \underbrace{\text{Var}[\varepsilon_i]}_{\text{risque spécifique}}$$

$$E_i = r_f + \underbrace{\beta_i \sigma_M}_{\text{risque de marché}} \times \frac{E_M - R_f}{\underbrace{\sigma_M}_{\text{prix de marché du risque}}}$$

Seul le risque de marché est rémunéré

26

Pourquoi seul le risque de marché est-il rémunéré ?

- Partons de la décomposition des rentabilités
- $R_i = E_i + \beta_i \times (r_M - E_M) + \varepsilon_i$ 
  - Où  $\beta_i \times r_M$  est associé au risque de marché et  $\varepsilon_i$  est le risque spécifique
  - Une première approche consiste à supposer que le risque spécifique est « diversifiable »
  - Si les  $\varepsilon_i$  ne sont pas corrélés entre eux, si leur variance est constante et si les différents titres sont équipondérés, la variance du risque spécifique du portefeuille tend vers 0
    - Quand le nombre de titres tend vers l'infini
  - Ce risque pouvant être éliminé par les investisseurs, il n'est demandé aucune prime de rentabilité pour ce risque

27

Pourquoi seul le risque de marché est-il rémunéré ?

- Suite...
  - L'espérance de rentabilité du portefeuille
 
$$r_i = E_i + \beta_i \times (r_M - E_M) + \varepsilon_i$$
  - Est donc identique à celle du portefeuille
 
$$r_i = E_i + \beta_i \times (r_M - E_M)$$
  - Ce second portefeuille est colinéaire au portefeuille de marché
  - Comme tous les portefeuilles situés sur la CML et combinant portefeuille de marché et actif sans risque
  - On sait que pour un portefeuille sur la CML :

$$E_i = r_f + \frac{E_M - r_F}{\sigma_M} \times \sigma_i$$

28

## Pourquoi seul le risque de marché est-il rémunéré ?

- Suite...
  - $E_i = r_f + \frac{E_M - r_f}{\sigma_M} \times \sigma_i$
  - $r_i = E_i + \beta_i \times (r_M - E_M) \Rightarrow \sigma_i = \beta_i \sigma_M$
  - Ce qui donne la relation annoncée
  - $E_i = r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)$
- Seul le bêta du titre,  $\beta_i$  et pas la volatilité de la rentabilité  $\sigma_i$  détermine l'espérance de rentabilité  $E_i$
- Le raisonnement précédent a deux faiblesses
  - Premièrement, on suppose que les risques spécifiques sont pas (peu) corrélés entre eux
  - Exemple de Stellantis et de Renault : ce n'est pas le cas

29

## Pourquoi seul le risque de marché est-il rémunéré ?

- Démonstration intuitive (suite)
  - Le raisonnement précédent a deux faiblesses ...
  - Même en l'absence de corrélation, les risques spécifiques ne disparaissent que pour des portefeuilles comportant une infinité d'actifs
  - Or le MEDAF vaut même pour un petit nombre d'actifs
- On peut améliorer le raisonnement intuitif en revenant à l'équilibre des marchés financiers
  - À l'équilibre les investisseurs ne demandent que de l'actif sans risque et du portefeuille de marché
  - La demande de risque spécifique est nulle

30

## Exercice : l'offre agrégée de risques spécifiques est nulle

- Montrer que l'offre agrégée de risques spécifiques  $\sum x_i \varepsilon_i = 0$ 
  - Les  $x_i$  correspondent aux poids des titres  $i$  dans le portefeuille de marché
- Correction succincte
  - (aux constantes près),  $r_i = \beta_i r_M + \varepsilon_i$ ,  $r_M = \sum x_i r_i$
  - D'où  $r_M = (\sum x_i \beta_i) r_M + \sum x_i \varepsilon_i$
  - Comme  $\text{Cov}(r_M, \sum x_i \varepsilon_i) = 0$ ,  $\sum x_i \beta_i = 1$
  - D'où  $\sum x_i \varepsilon_i = 0$
- $\sum x_i \varepsilon_i = 0$  montre que le risque spécifique est plus que « diversifié » au niveau agrégé, il est nul.

31

32

## Écriture des rentabilités de portefeuilles

## Écriture des rentabilités de portefeuilles

- Nous allons considérer un marché avec un actif sans risque et deux actifs risqués
- Rentabilité de l'actif sans risque :  $r_f$
- Rentabilités des actifs risqués,  $M$  et  $T$  :  $r_M$  et  $r_T$ 
  - Par exemple un indice de marché  $M$  (CAC40 ou SP500) et le portefeuille tangent  $T$
- La rentabilité du portefeuille s'écrit :  $r_x = x_f r_f + x_M r_M + x_T r_T$  avec  $x_f, x_M, x_T$  poids des actifs et  $x_f + x_M + x_T = 1$
- Propriété :  $r_x - r_f = x_M(r_M - r_f) + x_T(r_T - r_f)$ 
  - Ne fait plus intervenir que les « excess returns »
  - $r_f = (x_f + x_M + x_T)r_f = x_f r_f + x_M r_f + x_T r_f$
  - $r_x = x_f r_f + x_M r_M + x_T r_T$
  - Par soustraction :  $r_x - r_f = x_M(r_M - r_f) + x_T(r_T - r_f)$

33

34

## Écriture des rentabilités de portefeuilles

- $r_x - r_f = x_M(r_M - r_f) + x_T(r_T - r_f)$
- On écrit les rentabilités en excès (du taux sans risque) uniquement en fonction des allocations dans les actifs risqués
- Cas particulier  $x_M + x_T = 1$  : investissement uniquement en actifs risqués
- Alors  $r_x - r_f = x_M(r_M - r_f) + x_T(r_T - r_f)$  devient
- $r_x - r_f = x_M r_M + x_T r_T - (x_M + x_T)r_f = x_M r_M + x_T r_T - r_f$
- Après simplification par  $r_f$  :  $r_x = x_M r_M + x_T r_T$
- On retrouve la formule déjà vue pour deux actifs risqués

35

## Écriture des rentabilités de portefeuilles

- $r_x - r_f = x_M(r_M - r_f) + x_T(r_T - r_f)$
- On écrit les rentabilités en excès (du taux sans risque) uniquement en fonction des allocations dans les actifs risqués
- Cas particulier  $x_T = 0$  : investissement dans l'actif risqué  $T$
- Alors  $r_x - r_f = x_M(r_M - r_f)$
- $r_x = x_M r_M + (1 - x_M)r_f$
- On retrouve la formule déjà vue pour quand on combine un actif sans risque et un actif risqué

36

## Ecriture des rentabilités de portefeuilles (rentabilités attendues)

- On notera par la suite  $\bar{r}_x = r_x - r_f$
- D'où :  $\bar{r}_x = x_M \bar{r}_M + x_T \bar{r}_T$
- On notera par la suite  $\bar{E}_x = E(\bar{r}_x) = E(r_x) - r_f = E_x - r_f$ , l'espérance de rentabilité du portefeuille  $x$  « en excès » du taux sans risque.
- $\bar{E}_x = x_M \bar{E}_M + x_T \bar{E}_T$
- Par linéarité de l'espérance

37

## Ecriture des rentabilités de portefeuilles (rentabilités attendues)

- Exemple numérique :
  - $r_f = 1\%$
  - $r_M \sim N(4\%, 25\%)$  (suit une loi normale de moyenne 4%, d'écart-type 25%)
  - $r_T \sim N(5\%, 20\%)$
  - $x_M = 0,5, x_T = 1$  (on remarque que  $x_M + x_T \neq 1$ )
- Calculer  $x_f$  ?
  - $x_f = -0,5$  (l'investissement en actifs risqués est financé partiellement par emprunt au taux sans risque)
- Calculer  $E_x$ 
  - $E_x = r_f + x_M \bar{E}_M + x_T \bar{E}_T$
  - $E_x = 1\% + 0,5 \times (4\% - 1\%) + 1 \times (5\% - 1\%) = 6,5\%$
  - L'espérance de rentabilité est plus élevée que celle des actifs risqués pris individuellement grâce à l'effet de levier.

38

## Ecriture des rentabilités de portefeuilles

- La rentabilité d'un portefeuille **composé d'actif sans risque et d'actifs risqués** peut s'écrire comme  $r_x = r_f + x_1(r_1 - r_f) + \dots + x_n(r_n - r_f)$ , avec  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ 
  - $r_x = x_0 r_f + x_1 r_1 + \dots + x_n r_n$
  - $r_f = x_0 r_f + x_1 r_f + \dots + x_n r_f$  car  $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$
  - Par différence :  $r_x - r_f = x_1(r_1 - r_f) + \dots + x_n(r_n - r_f)$
  - L'équation précédente ne fait apparaître que des rentabilités en excès du taux sans risque.
  - $x_1, \dots, x_n$  ne sont pas contraints (par une sommation à 1)
- On notera par la suite  $\bar{E}_i = E_i - r_f$ , l'espérance de rentabilité du titre  $i$  « en excès » du taux sans risque.
- Par linéarité de l'espérance  $\bar{E} = x_1 \bar{E}_1 + \dots + x_n \bar{E}_n$

39

## Exercice : écriture des rentabilités de portefeuilles

- Rappel : un portefeuille investi en actifs  $i = 0, 1, \dots, n$  dans des proportions  $x_0, x_1, \dots, x_n$  a pour rentabilité  $r_x = x_0 r_0 + x_1 r_1 + \dots + x_n r_n$  avec  $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$ 
  - Cela suppose qu'un montant non nul ait été investi au départ (afin que le dénominateur soit non nul)
  - Les actifs peuvent être risqués (rentabilités aléatoires), mais cela peut aussi inclure l'actif sans risque.
- Cas 1 :  $r_0 = r_f$  (actif sans risque) :
  - Montrer que  $r_x = r_f + x_1(r_1 - r_f) + \dots + x_n(r_n - r_f)$
  - Il suffit d'écrire  $x_0 = 1 - (x_1 + \dots + x_n)$  et de reporter dans l'équation donnant  $r_x$
  - Est-ce que  $x_1, \dots, x_n$  sont contraints ?
  - Non, car en éliminant  $x_0$ , on a déjà intégré la contrainte que la somme des poids est égale à 1

40

## Exercice : écriture des rentabilités de portefeuilles (suite)

- Interpréter la différence de rentabilité  $r_x - r_f$ 
  - Techniquement, c'est la rentabilité « en excès du taux sans risque »
  - Financièrement, considérons un investissement de 1 dans le portefeuille  $x$ , financé par un emprunt de 1 dans l'actif sans risque
  - Le montant net décaissé à la date initiale est  $1 - 1 = 0$  : portefeuille autofinancé ou dit « d'arbitrage »
  - On récupère  $1 + r_M - (1 + r_f) = r_M - r_f$  à la date future
- Cas 2 :  $r_0 = r_M$  (portefeuille « de marché » -indice boursier). Reprendre le raisonnement précédent
  - $r_x = r_M + x_1(r_1 - r_M) + \dots + x_n(r_n - r_M)$
- Interpréter la différence de rentabilité  $r_x - r_M$

41

## Exercice : écriture des rentabilités de portefeuilles (suite)

- Interpréter la différence de rentabilité  $r_x - r_M$ 
  - Le raisonnement est identique à celui mené dans le cas précédent.
  - Au lieu d'emprunter 1 au taux sans risque, on vend à découvert 1 de portefeuille  $M$ , ce qui permet de financer un investissement de 1 dans le portefeuille  $x$
  - Comme précédemment, l'investissement initial est nul
  - Le gain est proportionnel à  $r_x - r_M$
  - Tout se passe comme si on recevait  $r_x$  et que l'on payait  $r_M$  ou si l'on « échangeait » (swap) les deux rentabilités
  - Plus précisément pour une exposition initiale sur la partie longue et sur la partie courte égale à  $N$ , le gain est  $N(r_x - r_M)$

42

43

44

## Alpha de Jensen et ratio de Sharpe

45

## Alpha de Jensen : définition

- Considérons un portefeuille  $M$  composé uniquement d'actifs risqués et un second portefeuille  $i$ 
  - $r_i, r_M$  rentabilités des deux portefeuilles
  - $\beta_{iM} = \frac{\text{Cov}(r_i, r_M)}{\text{Var}(r_M)} = \rho_{iM} \frac{\sigma_i}{\sigma_M}$
  - $\rho_{iM}$  : coefficient de corrélation linéaire entre  $r_i$  et  $r_M$
- On définit l'alpha de Jensen de  $i$  par rapport à  $M$ ,  $\alpha_{iM}$ , comme
- $\alpha_{iM} = E[r_i] - r_f - \beta_{iM} \times (E[r_M] - r_f)$ 
  - $r_i - r_f, r_M - r_f$  : rentabilité en excès (% au taux sans risque)
  - Si  $M$  est le portefeuille tangent  $E[r_i] = r_f + \beta_{iM} \times (E[r_M] - r_f)$
  - $\alpha_{iM} = 0$

46

## Alpha de Jensen et portefeuille tangent

- **Propriété** : Si tous les  $\alpha_{iM}$  sont nuls,  $M =$  portefeuille tangent
  - $E[r_x] - r_f = \beta_{xM} \times (E[r_M] - r_f)$  pour tout portefeuille  $x$ 
    - Ceci découle de la démonstration du Médaf : A la place d'un titre particulier, nous aurions pu tout aussi bien considérer un portefeuille de titres donné
  - $x = T$  (portefeuille tangent),  $E[r_T] - r_f = \beta_{TM} (E[r_M] - r_f)$
  - Comme  $\beta_{TM} = \rho_{TM} \frac{\sigma_T}{\sigma_M}, \frac{E[r_T] - r_f}{\sigma_T} = \rho_{TM} \times \frac{E[r_M] - r_f}{\sigma_M}$
  - Soit  $s_T = \rho_{TM} s_M$ . D'où  $|s_T| = |\rho_{TM}| \times |s_M| \leq |s_M|$
  - Avec l'hypothèse  $s_M > 0, s_T \leq s_M$
  - $s_M \leq s_T$  puisque le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe
  - D'où  $s_M = s_T$
  - Il existe un unique portefeuille composé d'actifs risqués qui maximise le ratio de Sharpe (concavité de la frontière efficiente des actifs risqués)
  - $M = T$ , ce qu'on voulait démontrer

47

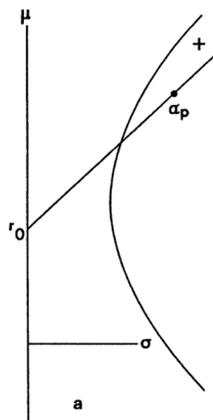
## Alpha de Jensen et ratio de Sharpe : remarque

- On note  $s_i, s_M$ , les ratios de Sharpe de deux portefeuilles
  - $s_i = (E[r_i] - r_f) / \sigma_i, s_M = (E[r_M] - r_f) / \sigma_M$
- **Propriété** : si  $s_i > s_M > 0$ , alors  $\alpha_{iM} > 0$ 
  - Démonstration :
  - $\alpha_{iM} = E[r_i] - r_f - \beta_{iM} \times (E[r_M] - r_f)$
  - En divisant les termes de gauche et de droite par  $\sigma_i$
  - $\alpha_{iM} / \sigma_i = s_i - (\beta_{iM} / \sigma_i) \times (E[r_M] - r_f)$
  - Or,  $\beta_{iM} = \frac{\rho_{iM} \sigma_i}{\sigma_M}$
  - D'où après simplifications :  $\alpha_{iM} / \sigma_i = s_i - \rho_{iM} s_M$
  - Comme  $\rho_{iM} \leq 1$  et  $s_M > 0, \rho_{iM} s_M \leq s_M$
  - $s_i - \rho_{iM} s_M \geq s_i - s_M > 0$
  - D'où  $\alpha_{iM} > 0$
  - Ce qu'on voulait démontrer

48

## Alpha de Jensen et ratio de Sharpe

- Propriété : si  $s_i > s_M > 0$ , alors  $\alpha_{iM} > 0$
- Interprétation géométrique
  - Les portefeuilles sous la frontière efficiente, mais au-dessus de la demi-droite  $r_0\alpha_P$  ont des alphas de Jensen positifs
  - Si  $M$  est le portefeuille tangent, il n'y a pas de portefeuille avec un alpha de Jensen positif
  - Plus  $s_M$  est proche du ratio de Sharpe maximal  $s_T$ , plus la zone des portefeuilles avec des alphas positifs est réduite
  - Et l'amélioration en termes de ratios de Sharpe est également moindre



49

## Alpha de Jensen et ratio de Sharpe

- Propriété : Soit  $M$  un portefeuille composé uniquement d'actifs risqués et de ratio de Sharpe positif. Si tous les  $\alpha$  de Jensen sont nuls,  $M$  est le portefeuille tangent.
- Démonstration
  - Considérons le portefeuille tangent  $T$
  - D'après l'hypothèse :  $\alpha_{TM} = 0$
  - D'après la propriété précédente : si  $s_T > s_M > 0$ , alors  $\alpha_{TM} > 0$
  - Donc  $s_T \leq s_M$  (sinon on aurait une contradiction)
  - Mais comme  $T$  maximise le ratio de Sharpe,  $s_T \geq s_M$
  - D'où  $s_T = s_M$
  - Or, il existe un unique portefeuille composé d'actifs risqués maximisant le ratio de Sharpe (par concavité de la frontière efficiente).
  - $M$  est donc le portefeuille tangent.
  - On obtient une seconde démonstration de la propriété déjà énoncée

50

## Alpha de Jensen et ratio de Sharpe

- Nous avons déjà démontré que si  $M$  est le portefeuille tangent, alors tous les alphas de Jensen sont nuls.
- Il est donc équivalent d'établir que tous les alphas de Jensen sont nuls et que  $M$  est le portefeuille tangent
  - On rappelle que le portefeuille tangent est l'unique portefeuille qui maximise le ratio de Sharpe.
- Il est donc équivalent de rechercher un portefeuille d'actifs risqués qui maximise le ratio de Sharpe ou qui soit tel que tous les alphas de Jensen soient nuls
  - Cette équivalence va être utile quand il s'agit d'étudier l'efficience d'un portefeuille benchmark.

51

## Alpha de Jensen et ratio de Sharpe : remarque

- Supposons  $\alpha_{iM} = E[r_i] - r_f - \beta_{iM} \times (E[r_M] - r_f) > 0$
- Comme  $\alpha_{iM} > 0$ , le portefeuille  $M$  n'est pas efficient
- La comparaison entre  $E[r_i]$  et  $r_f + \beta_{iM} \times (E[r_M] - r_f)$  n'est pas pertinente.
  - Le point de comparaison  $r_f + \beta_{iM} \times (E[r_M] - r_f)$  n'est pas pertinent
- L'interprétation selon laquelle le titre est sous-surévalué, c'est-à-dire que  $E[r_i]$  présente une anomalie, est discutable
- Si on considère comme benchmark un portefeuille efficient  $T$ 

$$E[r_i] = r_f + \beta_{iT} \times (E[r_T] - r_f)$$
  - Aucune anomalie n'apparaît dans le calcul de  $E[r_i]$

52

## Démonstration du Médaf (buck for the bang ratio)

53

## Démonstration(s) du Médaf

- On va donner une démonstration classique du Médaf.
- On considère des variations de la composition des portefeuilles autour du portefeuille tangent.
- $\bar{r}_x = x\bar{r}_i + \bar{r}_T$  pour un titre  $i$  quelconque
- $\bar{E}_x$  est égal à  $x\bar{E}_i + \bar{E}_T$
- $\sigma_x^2 = \text{var}(\bar{r}_x) = x^2 \text{cov}(\bar{r}_i, \bar{r}_i) + 2x \text{cov}(\bar{r}_i, \bar{r}_T) + \text{cov}(\bar{r}_T, \bar{r}_T)$
- On va calculer  $d\bar{E}_x/d\sigma_x$  (ou  $\frac{d\bar{E}}{d\sigma}$  pour simplifier les notations)
- Il est plus simple de calculer  $\frac{d\bar{E}}{d\sigma^2} = \frac{d\bar{E}/dx}{d\sigma^2/dx}$
- Puis on utilisera la relation  $\frac{dE}{d\sigma} = \frac{dE}{d\sigma^2} \times \frac{d\sigma^2}{d\sigma} = \frac{d\bar{E}}{d\sigma^2} \times 2\sigma$

54

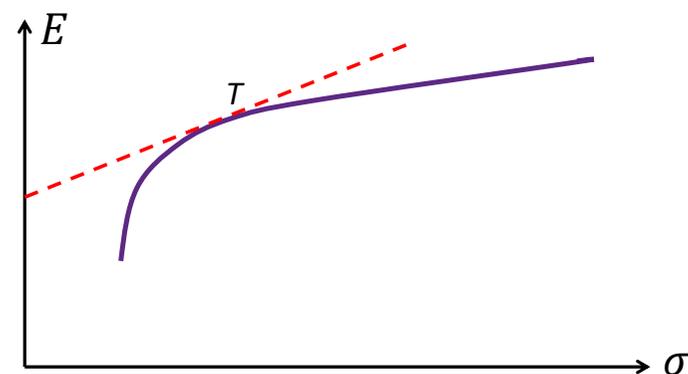
## Démonstration du Médaf

- Rappel  $\bar{r}_x = x\bar{r}_i + \bar{r}_T$ 
  - $\bar{E}_x$  est égal à  $x\bar{E}_i + \bar{E}_T$
  - La dérivée par rapport à  $x$  est égale à  $\bar{E}_i$
- $\sigma_x^2 = \text{var}(\bar{r}_x) = x^2 \text{cov}(\bar{r}_i, \bar{r}_i) + 2x \text{cov}(\bar{r}_i, \bar{r}_T) + \text{cov}(\bar{r}_T, \bar{r}_T)$ 
  - Dérivée par rapport à  $x$  :  $2x \text{cov}(\bar{r}_i, \bar{r}_i) + 2 \text{cov}(\bar{r}_i, \bar{r}_T) = 2 \text{cov}(r_i, x\bar{r}_i + \bar{r}_T) = 2 \text{cov}(\bar{r}_i, \bar{r}_x)$
  - $\text{cov}(\bar{r}_i, \bar{r}_x) = \text{cov}(r_i, r_x)$  ( $\bar{r}_i, \bar{r}_x$  ne diffèrent de  $r_i, r_x$  que d'une constante)
- $\frac{d\bar{E}}{d\sigma^2}$  : Ratio entre accroissement de l'espérance et de la variance pour une augmentation de l'allocation dans le titre  $i$ 
  - $\frac{dE}{d\sigma^2} = \frac{dE/dx}{d\sigma^2/dx} = \bar{E}_i / 2 \text{cov}(r_i, r_x)$  (buck for the bang ratio).
  - $\frac{dE}{d\sigma} = \frac{dE}{d\sigma^2} \times \frac{d\sigma^2}{d\sigma} = 2\sigma_x \bar{E}_i / 2 \text{cov}(r_i, r_x) = \sigma_x \bar{E}_i / \text{cov}(r_i, r_x)$

55

## Démonstration du Médaf

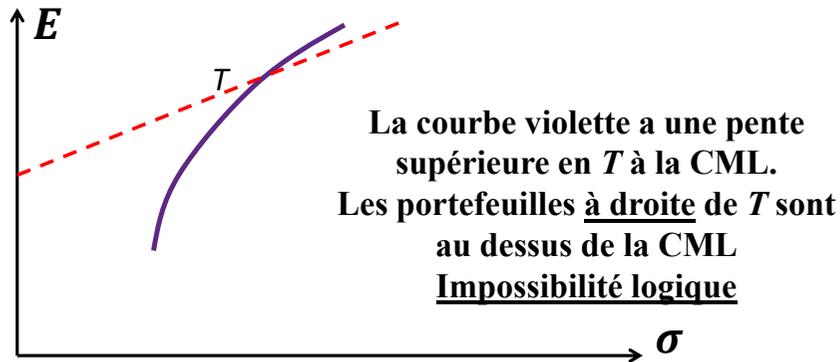
- $\frac{dE}{d\sigma} = \sigma_x \bar{E}_i / \text{cov}(r_i, r_x)$
- Pente de la courbe violette en  $x = 0$  :  $\sigma_T \bar{E}_i / \text{cov}(r_i, r_T)$



56

## Démonstration du Médaf

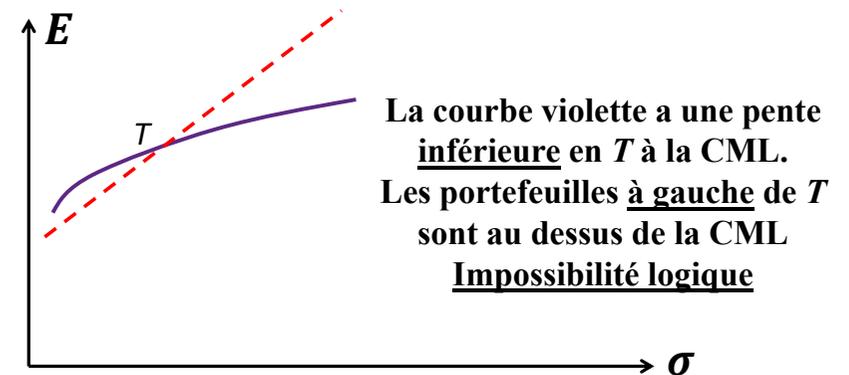
- Courbe rouge : CML
- Courbe violette
  - Portefeuilles constitués du titre  $i$  et du portefeuille tangent  $T$



57

## Démonstration du Médaf

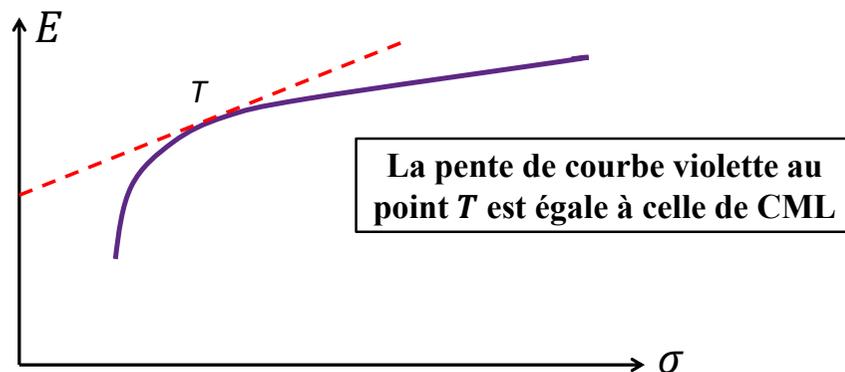
- Courbe rouge : CML
- Courbe violette
  - Portefeuilles constitués du titre  $i$  et du portefeuille tangent  $T$



58

## Démonstration du Médaf

- Pente de la tangente à la courbe violette en  $x = 0$  :  $\sigma_T \bar{E}_i / \text{cov}(r_i, r_T)$
- Pente de la CML :  $\frac{E_T - r_f}{\sigma_T} = \frac{\bar{E}_T}{\sigma_T}$



59

## Démonstration du Médaf

- Si on modifie la composition en actif risqué  $i$  autour du portefeuille tangent  $T$ ,  $\frac{dE}{d\sigma} = \sigma_T \bar{E}_i / \text{cov}(r_i, r_T)$  est égal à la pente de la CML  $\frac{E_T - r_f}{\sigma_T} = \frac{\bar{E}_T}{\sigma_T}$ 
  - $\sigma_T \bar{E}_i / \text{cov}(r_i, r_T) = \frac{\bar{E}_T}{\sigma_T}$
  - $\bar{E}_i / \text{cov}(r_i, r_T) = \bar{E}_T / \sigma_T^2$  indépendante de l'actif risqué  $i$ 
    - Constance du buck for the bang ratio
    - $\bar{E}_i = \bar{E}_T \text{cov}(r_i, r_T) / \sigma_T^2$
  - On rappelle que  $\beta_{iT} = \frac{\text{cov}(r_i, r_T)}{\sigma_T^2}$
- L'équation précédente se réécrit :  $\bar{E}_i = \beta_{iT} \bar{E}_T$
- Soit  $E_i = r_f + \beta_{iT} \times (E_T - r_f)$ , ce qu'on voulait démontrer

60

## Exercice : décomposition du risque total et coefficient de détermination

61

## Exercice : coefficient de détermination

- Coefficient de détermination : rappel

- <https://blog.nalo.fr/lexique/r-carre-ou-r2/>

### Définition du coefficient de détermination ( $R^2$ )

Le  $R^2$ , également connu sous le nom de coefficient de détermination, est une mesure statistique cruciale utilisée pour évaluer l'efficacité d'un modèle de régression linéaire dans la description de la relation entre les variables.

Il quantifie la proportion de la variance de la variable dépendante qui est prévisible à partir des variables indépendantes. Autrement dit, le  $R^2$  mesure dans quelle mesure les fluctuations d'une variable peuvent être expliquées par les variations d'une ou plusieurs autres variables, dans le cadre d'un modèle de régression.

Ce coefficient est exprimé sur une échelle de 0 à 1, où un  $R^2$  de 1 indique que le modèle de régression explique entièrement la variance de la variable dépendante, signifiant une adéquation parfaite.

62

## Exercice : coefficient de détermination

- Rappels : On considère l'équation de régression linéaire (associée à la droite dite « caractéristique ») reliant la rentabilité d'un portefeuille  $r_i$  à la rentabilité d'un benchmark (indice boursier),  $r_M$ 
  - $r_i, r_M$  sont des variables aléatoires
  - $r_i = a_i + \beta_{iM}r_M + \varepsilon_i$
  - $\varepsilon_i$  : risque spécifique (ou idiosyncratique) au titre  $i$
- Détermination des coefficients  $a_i$  et  $\beta_{iM}$  par la méthode des moindres carrés
  - $\beta_{iM} = \frac{\text{Cov}(r_i, r_M)}{\text{Var}(r_M)}$  (coefficient Bêta),  $a_i = E[r_i] - \beta_{iM}E[r_M]$
- $\sigma_i^2 = \text{Cov}(r_i, r_i) = \text{Var}(r_i) = \beta_{iM}^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$ 
  - Car  $\text{Cov}(a_i + \beta_{iM}r_M + \varepsilon_i, a_i + \beta_{iM}r_M + \varepsilon_i) = \beta_{iM}^2\text{Cov}(r_M, r_M) + 2\beta_{iM}\text{Cov}(r_M, \varepsilon_i) + \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i)$  et  $\text{Cov}(r_M, \varepsilon_i) = 0$

63

## Exercice : coefficient de détermination

- Données :
  - $E_M = 11\%$ ,  $\sigma_M = 20\%$
  - $E_i = 21\%$ ,  $\sigma_i = 30\%$
  - $r_f = 1\%$
  - $\text{Cov}(r_i, r_M) = 0,054$
- Calculer les ratios de Sharpe des portefeuilles  $i$  et  $M$ 
  - $s_i = \frac{E_i - r_f}{\sigma_i} = 2/3$ ,  $s_M = \frac{E_M - r_f}{\sigma_M} = 0,5$
- Calculer  $\beta_{iM}$ 
  - $\beta_{iM} = \text{Cov}(r_i, r_M) / \sigma_M^2 = 0,054 / 0,04 = 1,35$
- Calculer  $\rho_{iM}$ 
  - $\rho_{iM} = \text{Cov}(r_i, r_M) / (\sigma_M \sigma_i) = \frac{0,054}{0,06} = 0,9$
- Calculer  $\rho_{iM}$  d'une autre manière

64

## Exercice : coefficient de détermination

- Calculer  $\rho_{iM}$  d'une autre manière
  - $\beta_{iM} = \rho_{iM} \times \frac{\sigma_i}{\sigma_M}$ , d'où  $\rho_{iM} = \beta_{iM} \times \frac{\sigma_M}{\sigma_i} = 1,35 \times \frac{0,02}{0,03} = 0,9$
- Calculer le pourcentage de la variance du titre  $i$  associé aux mouvements du marché
  - $\frac{(\beta_{iM} \times \sigma_M)^2}{\sigma_i^2} = \frac{(1,35 \times 0,02)^2}{0,03^2} = 81\%$
- Calculer le pourcentage de la variance du titre  $i$  associé aux mouvements du marché par une autre méthode
  - On sait que c'est le  $R^2$  de la droite caractéristique (coefficient de détermination) et que c'est le carré du coefficient de corrélation
  - $R^2 = \rho_{iM}^2 = 0,9^2 = 81\%$

65

## Exercice : coefficient de détermination

- $R^2$  et coefficient de corrélation linéaire
  - Source : Wikipedia

### As squared correlation coefficient [edit]

In linear least squares [multiple regression](#) (with fitted intercept and slope),  $R^2$  equals  $\rho^2(y, f)$  the square of the [Pearson correlation coefficient](#) between the observed  $y$  and modeled (predicted)  $f$  data values of the dependent variable.

In a [linear least squares regression with a single explanator](#) (with fitted intercept and slope), this is also equal to  $\rho^2(y, x)$  the squared Pearson correlation coefficient between the dependent variable  $y$  and explanatory variable  $x$ .

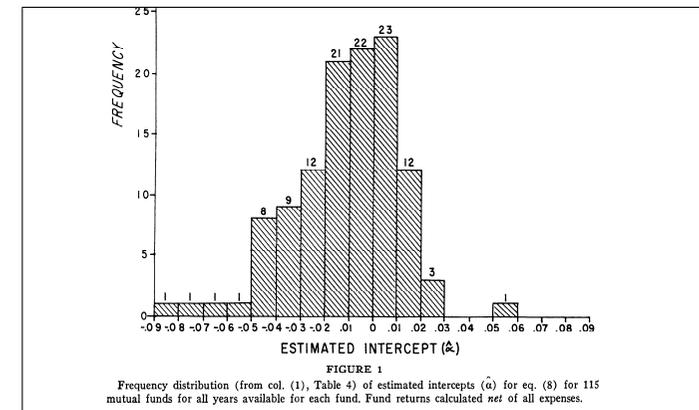
66

## Exercice : coefficient de détermination

- Calculer l'alpha de Jensen du titre  $i$ 
  - $\alpha_{iM} = E_i - r_f - \beta_{iM}(E_M - r_f) = 20\% - 1,35 \times 10\% = 6,5\%$
  - On constate que le titre  $i$  a un alpha de Jensen positif
  - C'est une mesure de performance relative du titre  $i$  par rapport au portefeuille  $M$
- Montrer que  $s_i > s_M > 0$  implique  $\alpha_{iM} > 0$ 
  - On rappelle que  $s_i = \frac{2}{3} > s_M = 0,5$
  - $M$  n'est pas efficient puisqu'il ne maximise pas le ratio de Sharpe
  - $s_i = \frac{E_i - r_f}{\sigma_i} > s_M = \frac{E_M - r_f}{\sigma_M}$
  - $\Rightarrow E_i - r_f > \frac{\sigma_i}{\sigma_M} (E_M - r_f) \geq \rho_{iM} \frac{\sigma_i}{\sigma_M} (E_M - r_f)$  car  $1 \geq \rho_{iM}$
  - Comme  $\beta_{iM} = \rho_{iM} \frac{\sigma_i}{\sigma_M}$ ,  $E_i - r_f > \beta_{iM} (E_M - r_f)$
  - Soit  $\alpha_{iM} > 0$

67

$$\tilde{R}_{jt} - R_{Ft} = \alpha_j + \beta_j[\tilde{R}_{Mt} - R_{Ft}] + \tilde{u}_{jt}. \quad (8)$$



- Déjà au milieu du siècle dernier, presque aucun fonds de placement n'avait d'alpha de Jensen positif
- Jensen (1968). The performance of mutual funds in the period 1945-1964. *The Journal of finance*.

68

- <https://www.youtube.com/watch?v=OWP6Hg2bvmo>



69

- Charreaux (2017) Michael C. Jensen—La théorie positive de l'agence appliquée à la finance et à la gouvernance. In *Les grands auteurs en finance*.

### 1.3. La mesure de performance des portefeuilles

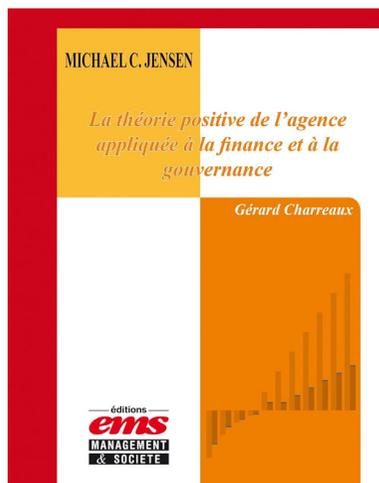
La préoccupation pragmatique, souvent présente dans l'œuvre de Jensen, l'a conduit à centrer sa thèse sur l'évaluation de la performance des portefeuilles. Il est ainsi l'auteur d'une des mesures de performance les plus connues, au même titre que les mesures concurrentes proposées par Sharpe<sup>14</sup> et Treynor, et qui sert également dans d'autres domaines que la gestion de portefeuille, en particulier pour évaluer la performance des entreprises cotées. La mesure de performance proposée (Jensen, 1969) repose directement sur le MEDAF et la théorie de l'efficience des marchés. Elle permet de juger de la capacité des gérants à prévoir les prix des actifs financiers et à réaliser, *ex post*, une performance supérieure à celle prédite par le MEDAF. Le travail de Jensen a

70

- Charreaux (2017) Michael C. Jensen—La théorie positive de l'agence appliquée à la finance et à la gouvernance. In *Les grands auteurs en finance*.

## Alpha de Jensen et IA

- **ChatGPT : Can you explain in three sentences how to construct positive Jensen's alpha portfolios?**
  - *To construct a portfolio with a positive Jensen's alpha, identify securities or funds with superior risk-adjusted performance by selecting those with historical returns that consistently outperform their expected returns under the Capital Asset Pricing Model (CAPM).*
  - *Combine these assets into a diversified portfolio, ensuring that the weights are optimized to balance alpha generation and risk exposure.*
  - *Finally, monitor and adjust the portfolio regularly to account for changes in market conditions, ensuring it continues to deliver excess returns beyond the benchmark.*



71

72

## Alpha de Jensen et IA

- ChatGPT : Can you be more specific about how the weights are calculated to balance alpha generation and risk exposure?
- Key Steps to Construct Positive Jensen's Alpha Portfolios:
  - *Identify Assets with Positive Alpha*
    - Calculate historical Jensen's alpha using CAPM to find securities outperforming expected returns.
  - *Understand Risk Interactions*
    - Compute the covariance matrix of asset returns to capture volatility and correlations.
  - *Formulate the Objective*
    - Maximize portfolio alpha ( $\sum_i x_i \alpha_i$ ) while controlling for risk exposure.
  - ...

73

## Alpha de Jensen et IA

- ChatGPT : Your proposed approach is based on historical data. Don't you think this will lead to rather poor out-of-sample performance?
- You're correct that reliance on historical data can lead to poor out-of-sample performance if not addressed carefully.
- This issue stems from several factors, including overfitting, market regime shifts, and the assumption that past performance reliably predicts future outcomes.

74

## Alpha de Jensen et IA

- ChatGPT: Can you provide any evidence that the academic references actually help to beat the stock market?
  - Evidence that academic methods can help beat the stock market is mixed and context-dependent.
  - While many studies demonstrate improvements in portfolio performance compared to naive approaches, consistently outperforming the market (adjusted for risk) remains challenging.
  - Consistent market outperformance remains elusive.
  - Their value lies in better aligning portfolios with investor goals and managing risks effectively, rather than guaranteeing alpha above the market.

75

## Alpha de Jensen et IA

- ChatGPT ! Can you provide a simple application exercise where Jensen's Alpha needs to be calculated along with Sharpe ratios? It should be at a master level.

### Scenario

You manage a portfolio that invests in a mix of technology and healthcare stocks. Over the past year, the portfolio achieved a mean annual return of 12% with a standard deviation of 15%. The benchmark index achieved a return of 10% with a standard deviation of 12%. The risk-free rate (proxied by 3-month U.S. Treasury Bills) is 2%. The portfolio's beta relative to the benchmark is 1.1.

76

# Alpha de Jensen et IA

## ■ L'énoncé de l'exercice :

### 1. Calculate Jensen's Alpha:

- Use the CAPM equation to compute the portfolio's expected return:

$$R_p^{\text{expected}} = R_f + \beta_p \cdot (R_m - R_f)$$

- Jensen's Alpha is then calculated as:

$$\alpha = R_p^{\text{actual}} - R_p^{\text{expected}}$$

### 2. Calculate Sharpe Ratios:

- For the portfolio:

$$\text{Sharpe Ratio}_p = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

- For the benchmark:

$$\text{Sharpe Ratio}_m = \frac{R_m - R_f}{\sigma_m}$$

### 3. Compare Results:

- Analyze whether the portfolio's risk-adjusted performance (Sharpe Ratio) and excess return over CAPM expectations (Jensen's Alpha) indicate superior management compared to the benchmark.

### 4. Discuss Insights and Limitations:

- Evaluate the implications of the results, considering the limitations of Sharpe Ratios and Jensen's Alpha as performance metrics.

## Exercice : ratio de Sharpe et relation entre rentabilité et risque

81

## Exercice : ratio de Sharpe et relation entre rentabilité et risque

- Données
  - $r_f = 1\%$
  - $r_i \sim N(?, 25\%)$  (suit une loi normale de moyenne à déterminer)
  - $r_T \sim N(5\%, 20\%)$
- Quelle est la valeur maximale de  $E_i$  ?
  - $E_i = r_f + \beta_{iT}(E_T - r_f) = 1\% + \beta_{iT} \times (5\% - 1\%)$
  - Or  $\beta_{iT} = \rho_{iT} \frac{\sigma_i}{\sigma_T} \leq \frac{\sigma_i}{\sigma_T} = \frac{25\%}{20\%} = 1,25$
  - D'où  $E_i \leq 1\% + 1,25 \times 4\% = 6\%$
  - Même sans connaître le coefficient de corrélation linéaire (ou le Bêta du titre), on peut obtenir un majorant de l'espérance de rentabilité
  - La rentabilité attendue par les actionnaires (coût du capital) ne peut pas excéder un seuil qui est assez bas

82

- Sur le web des normes irréalistes : rentabilités attendues trop optimistes et incompatibles avec les valorisations boursières
  - Source : Wikipedia

In recent years, many financial websites have promoted the idea that a Sharpe Ratio "greater than 1 is considered acceptable; a ratio higher than 2.0 is considered very good; and a ratio above 3.0 is excellent." While it is unclear where this rubric originated online, it makes little

- <https://www.cmcmarkets.com/en-au/cfd/learn/trading-strategies/sharpe-ratio>

### What is a good Sharpe ratio?

A Sharpe ratio less than 1 is considered bad. From 1 to 1.99 is considered adequate/good, from 2 to 2.99 is considered very good, and greater than 3 is considered excellent.

- <https://www.investopedia.com/ask/answers/010815/what-good-sharpe-ratio.asp>

- Usually, any Sharpe ratio greater than 1.0 is considered acceptable to good by investors.
- A ratio higher than 2.0 is rated as very good.
- A ratio of 3.0 or higher is considered excellent.
- A ratio under 1.0 is considered sub-optimal.

83

## Exercice : ratio de Sharpe et relation entre rentabilité et risque

- Cogley & Sargent (2008). The market price of risk and the equity premium: A legacy of the Great Depression? *Journal of Monetary Economics*.
- Ratios de Sharpe de l'ordre de 0,2 ou 0,3 pour les actions US

equation. Hansen and Jagannathan find that the required price of risk is quite large, on the order of 0.23.<sup>20</sup> Table 4 reproduces estimates in that ballpark using Shiller's annual data series for stock and bond returns.

Table 4: The Mean, Standard Deviation, and Sharpe Ratio for Excess Returns

	1872-2002	1872-1928	1929-2002	1929-1965	1966-2002
$E(R_{xt})$	0.0410	0.0266	0.0521	0.0708	0.0334
$\sigma(R_{xt})$	0.1734	0.1507	0.1892	0.2239	0.1474
$E(R_{xt})/\sigma(R_{xt})$	0.2364	0.1765	0.2754	0.3162	0.2266

Shiller's sample runs from 1872 to 2002, and for that period excess stock returns averaged 4.1 percent per annum with a standard deviation of 17.3 percent, implying a Sharpe ratio of 0.236. Before the Depression, however, the unconditional equity

84

May 2008

The Most Important Number in Finance

The Quest for the Market Risk Premium



- MRP (Market Risk Premium) :  $\bar{E}_M = E_M - r_f$ 
  - *Les analystes M&A de JP Morgan évaluent le ratio de Sharpe pour le SP500 à 0,3*

**C. Constant Sharpe ratio method**

Another useful metric to estimate the risk premium, the Sharpe ratio, has been inherited from portfolio management theory. The Sharpe ratio measures a portfolio's excess return per unit of risk and can be used to estimate the MRP:

$$\text{Market Sharpe ratio} = S_M = \frac{\text{Portfolio MRP}}{\text{Volatility of MRP}}$$

We estimate that, over the last 50 years, the Sharpe ratio for the broad market (using the S&P 500 index as a proxy) has been about 0.3, which is consistent with academic research. Assuming that this ratio is constant going forward, we can then solve for the forward-looking MRP by multiplying the S&P 500 Sharpe ratio by a measure of future market volatility. We estimate future market volatility via the VIX index, which measures the volatility implied from options on the S&P 500 index. Thus, the Sharpe ratio-implied MRP is:



**AQR Capital Management Internship**

Internship Sphere

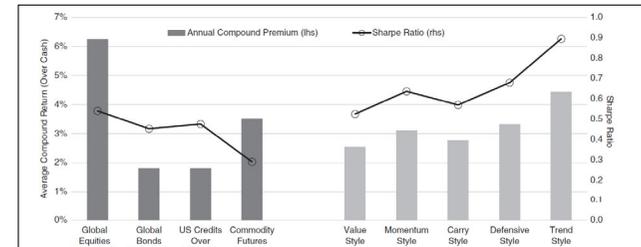
<https://internshipsphere.com/aqr-internship/>



*“It blows my mind how different our models are than 20 years ago. New signals, more dimensions, machine learning, alternative data sets and more.”*

*Ratios de Sharpe selon les classes d'actif*

- Les tenants de la gestion alternative cherchent à montrer que l'on peut obtenir de meilleurs ratios de Sharpe
  - *Essentiellement par une baisse de la volatilité*
  - *Source : AQR Capital*



**Figure 1.2** Annual Excess Returns and Sharpe Ratios of Main Asset Class Premia and Alternative Risk Premia, 1926–2020  
 Source: Data from AQR. Notes: Geometric means and Sharpe ratios of nine return series, which exclude cash return but are before subtracting trading costs and fees. Equities and (government) bonds are GDP-weighted multi-country composites. Credit is a US corporate portfolio over matching Treasury. Commodity is an equally-weighted portfolio of available commodity futures. The five long/short style premia use simple specifications applied in many asset classes (cf. Chapter 6 and Ilmanen et al. (2021a)) and one-month implementation lag, and are scaled to 5% volatility.

## *Exercice : ratio de Sharpe et relation entre rentabilité et risque*

- Le ratio de Sharpe pour un marché actions égal à 0,5
- Dans le cadre d'une gestion active, on se fixe un objectif de corrélation par rapport au portefeuille benchmark de 80%
- Montrer qu'il existe alors une relation affine entre espérance de rentabilité et risque (mesuré par l'écart-type des placements)
  - $\bar{E}_i = \beta_{iT} \bar{E}_T = \rho_{iT} \frac{\sigma_i}{\sigma_T} \bar{E}_T = \rho_{iT} s_T \sigma_i$
  - $\rho_{iT} = 0,8, s_T = 0,5$
  - D'où  $\bar{E}_i = 0,4 \times \sigma_i$
  - Si  $\sigma_i = 20\%$  et  $r_f = 2\%$ , on obtient  $E_i = 2\% + 0,4 \times 20\% = 10\%$
  - Remarque : le portefeuille tangent étant par définition optimal, diminuer la corrélation diminue l'espérance de rentabilité
  - C'est seulement si l'on considère un portefeuille benchmark non optimal que l'on peut compenser la baisse de rentabilité par des alphas de Jensen positifs.

89

90

91

92

## Médaf et ratios de Sharpe

## Médaf et ratios de Sharpe

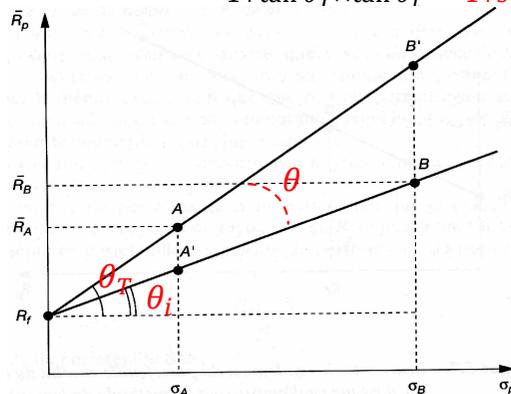
- $E_i = r_f + \beta_{iT}(E_T - r_f)$ 
    - Rappel :  $\beta_{iT} = \rho_{iT} \frac{\sigma_i}{\sigma_T}$ . D'où  $\frac{E_i - r_f}{E_T - r_f} = \beta_{iT} = \rho_{iT} \frac{\sigma_i}{\sigma_T}$
  - $\frac{E_i - r_f / \sigma_i}{E_T - r_f / \sigma_T} = \frac{s_i}{s_T} = \rho_{iT} \in [-1, 1]$ 
    - Ratio des ratios de Sharpe = coefficient de corrélation linéaire
- 
- Remarque :  $\rho_{iT} = 1 \Leftrightarrow s_i = s_T$  et  $\beta_{iT} = \frac{\sigma_i}{\sigma_T}$
  - $\rho_{iT} = 1 \Leftrightarrow E_i = r_f + \beta_{iT}(E_T - r_f) = r_f + s_T \sigma_i$
  - $\rho_{iT} = 1$  : relation affine entre  $E_i$  et  $\sigma_i$
  - $\sigma_i^2 = \beta_{iT}^2 \sigma_T^2 + \text{Var}[\tilde{\varepsilon}_i]$  :  $\rho_{iT} = 1 \Leftrightarrow \beta_{iT} = \frac{\sigma_i}{\sigma_T} \Leftrightarrow \text{Var}[\tilde{\varepsilon}_i] = 0$

93

94

## Médaf et ratios de Sharpe : Interprétation géométrique

- A représente le portefeuille tangent et B le titre i
- $s_i = \tan \theta_i$ ,  $s_T = \tan \theta_T$ .  $\theta = \theta_T - \theta_i$
- L'angle  $\theta$  est une mesure de l'écart à l'efficience du titre i
- $\tan \theta = \tan(\theta_T - \theta_i) = \frac{\tan \theta_T - \tan \theta_i}{1 + \tan \theta_T \times \tan \theta_i} = \frac{s_T - s_i}{1 + s_T \times s_i}$



95

96

## Médaf, valeur fondamentale, création de valeur

97

## Médaf et gestion financière

- Gestion de portefeuilles, sélection de titres (stock picking)
  - Si le benchmark choisi pour le portefeuille de marché est efficient (au sens des préférences moyenne-variance), alors on peut chercher des actions dont l'alpha de Jensen  $\alpha_i = E_i - r_f - \beta_i \times (E_M - r_f) > 0$
  - Ces actions sont sous-évaluées : recommandation d'achat
  - Rappel : relation inverse entre prix et taux d'actualisation (espérance de rentabilité)
  - A contrario, vente d'actions dont l'alpha de Jensen est nul
- Gestion de portefeuilles
  - Gestion indicielle passive (tracker, ETFs), recherche de portefeuilles efficients (smart bêtas, rule based investing)

98

## Médaf et gestion financière

- Rentabilité cible pour les investissements
  - Le TRI d'un investissement doit être au moins égal au benchmark fourni par le Médaf.
- Évaluation d'entreprises et calculs de VAN
  - Calcul de la valeur des actions dans le cadre d'une introduction en Bourse (IPO, Initial Public Offering), d'une offre publique d'achat (OPA) ou d'échange (OPE)
  - Taux d'actualisation donné par le Médaf
- Ratio fonds propres / dette (structure financière)
  - Évolution des Bêtas en fonction du levier d'endettement

99

## Valeur fondamentale

- Relation entre le prix aujourd'hui et le flux futur
  - La rentabilité réalisée est  $r = (P_1 + d_1 - P_0)/P_0$
  - La rentabilité espérée est  $E[(P_1 + d_1 - P_0)/P_0]$
  - L'équation de la SML donne :
  - $E[r] = r_f + \beta(E_M - r_f)$ 
    - $E[r] = E[(P_1 + d_1 - P_0)/P_0] = E[(P_1 + d_1)/P_0] - 1$
    - $E[(P_1 + d_1)/P_0] = 1 + r_f + \beta(E_M - r_f)$
  - $P_0 = E[P_1 + d_1]/(1 + r_f + \beta(E_M - r_f))$
  - Le prix aujourd'hui  $P_0$  est la valeur actuelle du flux futur espéré à la date 1  $E[P_1 + d_1]$  (dividende plus revente)
  - Le taux d'actualisation est  $r_f + \beta(E_M - r_f)$

100

## Alpha de Jensen et stock picking

- Alpha de Jensen :  $E[r] - r_f - \beta(E_M - r_f)$
- $E[r] = E[(P_1 + d_1)/P_0] - 1$
- Alpha de Jensen positif si :
- $E[(P_1 + d_1)/P_0] > 1 + r_f - \beta(E_M - r_f)$
- Soit  $P_0 < E[P_1 + d_1]/(1 + r_f + \beta(E_M - r_f))$
- Un alpha de Jensen positif correspond donc à un prix courant  $P_0$  sous-évalué
- C'est donc un signal d'achat, puisque la sous-évaluation de l'action permettra d'avoir une espérance de rentabilité plus élevée que la rentabilité théorique donnée par le Médaf.

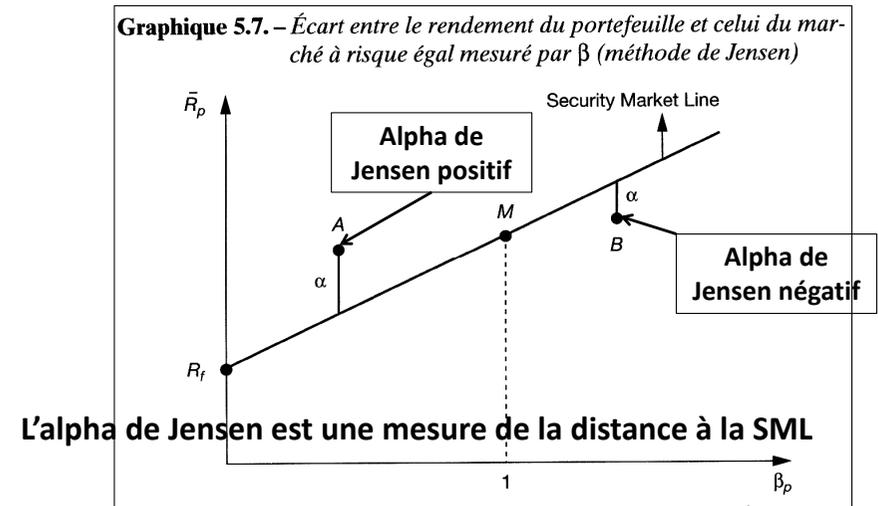
101

## Alpha de Jensen

Michael Jensen



- Alpha de Jensen :  $\alpha_i = E_i - r_f - \beta_i \times (E_M - r_f)$



102

## Valeur fondamentale

- $P_0 = E[d_1]/(1 + r) + E[d_2]/(1 + r)^2 + E[d_3]/(1 + r)^3 + \dots + E[P_n]/(1 + r)^n$ 
  - Où  $r = r_f + \beta(E_M - r_f)$
- Si le terme  $E[P_n]/(1 + r)^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ 
  - $\Leftrightarrow$  taux de croissance des cash-flows espérés  $< r$
- $P_0 = E[d_1]/(1 + r) + E[d_2]/(1 + r)^2 + E[d_3]/(1 + r)^3 + \dots$
- $E[d_1]/(1 + r) + E[d_2]/(1 + r)^2 + E[d_3]/(1 + r)^3 + \dots$  s'appelle la **valeur fondamentale**
- Elle peut coïncider avec la **valeur de marché** (efficience informationnelle)
- Le calcul de la valeur fondamentale implique de pouvoir calculer les numérateurs (analyse financière) et le taux d'actualisation, notamment  $E_M - r_f$

103

## Valeur fondamentale

- On peut s'intéresser à la valeur fondamentale des actions
- Au numérateur, on devrait avoir les flux nets (dividendes – rachats d'actions – augmentations de capital) versés aux actionnaires : modèles DDM
- On peut s'intéresser à la valeur économique d'une entreprise pour les bailleurs de fonds
- Au numérateur : flux nets versés aux actionnaires et aux créanciers.
- Et obtenir la valeur des actions en soustrayant à la valeur de l'entreprise, la valeur de la dette.
- Approche privilégiée aujourd'hui, du fait du caractère discrétionnaire de la distribution des dividendes.

104

## Valeur fondamentale et market timing (stratégies global macro)

- Gestion de portefeuille : market timing
  - Valeur fondamentale : valeur actuelle des (espérances) des cash-flows futurs au taux  $r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)$
  - Si prix de marché supérieur à valeur fondamentale, signal de vente (Shiller, bulles spéculatives) : surévaluation des niveaux et de l'évolution des dividendes futurs.
    - Approche des bulles spéculatives par les primes de risque implicites : Si la prime de risque (ex-ante – prospective) est basse, le prix des actions est surévalué
    - Décision de vente.
  - Si au contraire le prix de marché est inférieur à la valeur fondamentale, signal d'achat

105



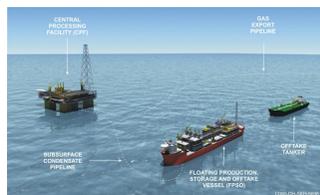
## Création de valeur

- Choix d'investissement
  - Montant investi  $I$  à la date  $t = 0$
  - Rapporte le flux  $F$  en  $t = 1$ 
    - Pour simplifier la présentation, on suppose que le projet d'investissement ne dure qu'une période
  - Valeur en  $t = 0$  (ou valeur actuelle) du flux futur
  - $V = E[F] / (1 + r_f + \beta(E_M - r_f))$
  - L'investissement n'est réalisé que si  $V - I > 0$
  - $V - I$  **Création de valeur pour l'investisseur**
  - $V - I$  correspond à la Valeur Actuelle Nette (VAN)
    - nette de l'investissement  $I$

106

## Création de valeur

- Choix d'investissement (suite)
  - Le projet d'investissement n'est réalisé que si  $V - I > 0$ 
    - En remplaçant  $V$  par  $E[F] / (1 + r_f + \beta(E_M - r_f))$
  - On montre  $V - I > 0 \Leftrightarrow E[(F - I)/I] > r_f + \beta(E_M - r_f)$ 
    - $E[(F - I)/I]$  taux de rentabilité attendu de l'investissement
    - $r_f + \beta(E_M - r_f)$  taux de rentabilité cible
    - Tel que donné par l'équation de la SML
  - Le projet n'est réalisé que si le taux de rentabilité attendu est supérieur au taux de rentabilité cible
    - Critère faisant intervenir le taux de rentabilité
  - $V/I$  correspond au  $q$  de Tobin



107

108

## Portefeuille orthogonal

109

## Portefeuille orthogonal

- On va s'intéresser au cas où le portefeuille « benchmark » ou « de marché »,  $x_M$  (de rentabilité  $r_M$ ) n'est pas forcément le portefeuille tangent  $x_T$  (de rentabilité  $r_T$ ).
- **Propriété** : Soit un proxy du portefeuille de marché  $r_M$ ,  $r_M \neq r_T$ . Il existe un portefeuille  $x_h$ , de rentabilité  $r_h$ , tel que  $r_T = (1-t)r_M + tr_h$  où  $r_T$  est la rentabilité du portefeuille tangent et  $\text{Cov}(r_h, r_M) = 0$ 
  - $r_T = (1-t)r_M + tr_h \Rightarrow r_h = (r_T - (1-t)r_M)/t$
  - $x_h = (x_T - (1-t)x_M)/t$  permet d'obtenir l'égalité précédente
  - En effet,  $r_h = x_h' r = ((x_T - (1-t)x_M)/t)' r = (r_T - (1-t)r_M)/t$
  - Il reste à déterminer  $t$
  - $\text{Cov}(r_M, r_h) = 0$  donne  $\text{Cov}(r_M, r_T - (1-t)r_M) = 0$
  - $\Rightarrow t = \frac{\text{Cov}(r_M - r_T, r_M)}{\text{Var}(r_M)}$

110

## Exercice : portefeuille orthogonal

- Données
  - $\rho_{TM} = 0,9$ ,  $\sigma_M = 15\%$ ,  $\sigma_T = 25\%$
- Calculer  $\beta_{TM}$ 
  - $\beta_{TM} = \frac{\text{Cov}(r_T, r_M)}{\text{Var}(r_M)} = \rho_{TM} \frac{\sigma_T}{\sigma_M} = 0,9 \times \frac{25\%}{15\%} = 1,5$
- En déduire  $t$ 
  - $\Rightarrow t = \frac{\text{Cov}(r_M - r_T, r_M)}{\text{Var}(r_M)} = 1 - \frac{\text{Cov}(r_T, r_M)}{\text{Var}(r_M)} = 1 - \beta_{TM} = -0,5$
- Déduire l'expression de la rentabilité du portefeuille orthogonal
  - $r_h = \frac{1}{t}r_T + \frac{t-1}{t}r_M = -\frac{1}{0,5}r_T + \frac{-0,5-1}{-0,5}r_M = -2r_T + 3r_M$
  - Remarque : la somme des poids est bien égale à 1. Si  $T, M$  ne comportent des actifs risqués, il en est de même pour  $h$
- Vérifier que  $r_h$  et  $r_M$  sont non-corrélés

111

## Exercice : portefeuille orthogonal

- Vérifier que  $r_h$  et  $r_M$  sont non-corrélés
  - $r_h = -2r_T + 3r_M$
  - $\text{Cov}(r_h, r_M) = \text{Cov}(-2r_T + 3r_M, r_M)$
  - $\text{Cov}(r_h, r_M) = -2\text{Cov}(r_T, r_M) + 3\text{Cov}(r_M, r_M)$
  - $\text{Cov}(r_h, r_M) = (-2\beta_{TM} + 3)\sigma_T^2$  car  $\beta_{TM} = \text{Cov}(r_T, r_M)/\sigma_T^2$
  - $\beta_{TM} = 1,5$ , d'où  $-2\beta_{TM} + 3$
- On a donc mis en évidence le portefeuille orthogonal  $h$ , formé en investissant dans les portefeuilles  $M$  et  $T$  et non corrélé (orthogonal) à  $M$

112

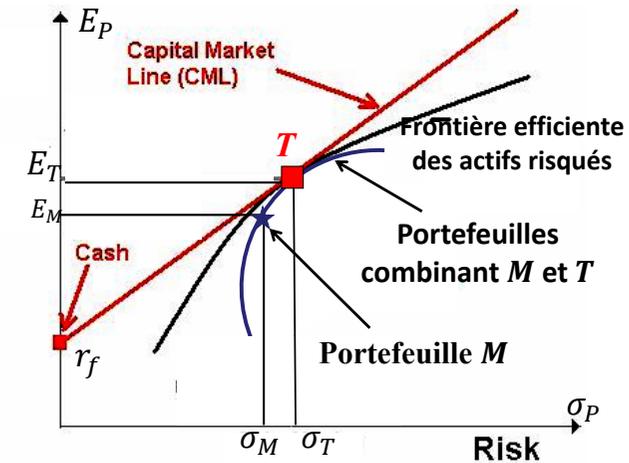
## Portefeuille orthogonal

- **Définition** :  $r_h$  est la rentabilité du portefeuille orthogonal à  $r_M$
- $r_T = (1 - t)r_M + tr_h$  : le portefeuille tangent s'obtient en combinant portefeuille de marché et portefeuille orthogonal.
- $r_h = (r_T - (1 - t)r_M)/t$  : le portefeuille orthogonal s'obtient en combinant portefeuille tangent et portefeuille de marché.
- Combinons  $T$  et  $M$  dans le demi-plan écart-type, espérance des rentabilités
  - Voir transparent suivant

113

## Portefeuille orthogonal : interprétation

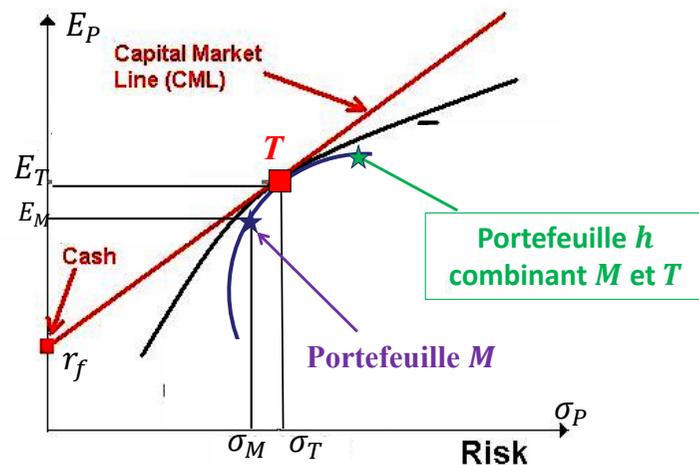
- Combinons  $T$  et  $M$  : courbe violette tangente à la CML en  $T$
- Le marché avec 3 actifs,  $M, T, r_f$  a la même CML que le marché initial (donc la même efficacité)



114

## Portefeuille orthogonal : interprétation

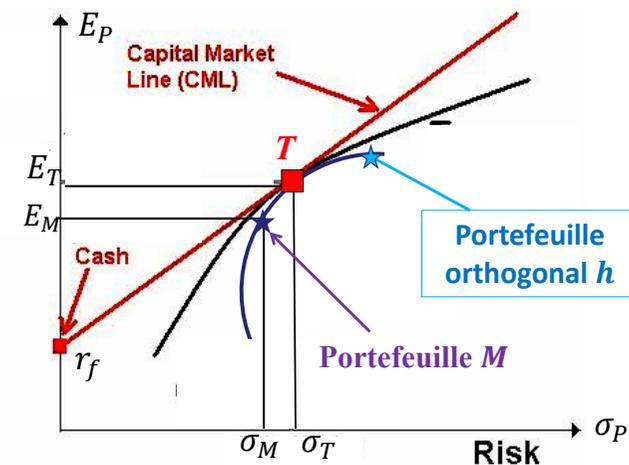
- Les portefeuilles  $h$  combinant  $M$  et  $T$  forment la courbe violette
- Parmi tous ces portefeuilles, on choisit le non-corrélé avec  $M$



115

## Portefeuille orthogonal : interprétation

- La courbe violette s'obtient en combinant  $h$  et  $M$
- Le marché formé à partir de  $M, h, r_f$  a la même CML que le marché initial



116

## Médaf et modèles multi-bêtas

117

## Médaf et modèles multi-Bêtas

- On se place dans le cadre suivant
  - Existence d'un actif sans risque (taux  $r_f$ )
  - $T$  le portefeuille tangent
  - $M$  un « proxy » du portefeuille de marché
  - $r_T$  et  $r_M$  les rentabilités des portefeuilles précédents
  - $r_T = (1 - t)r_M + tr_h = r_M + t(r_h - r_M)$
- On considère un titre (un portefeuille)  $i$  de rentabilité  $r_i$ 
  - $\beta_{iT} = \text{Cov}(r_i, r_T) / \sigma_T^2 = (1 - t) \text{Cov}(r_i, r_M) / \sigma_T^2 + t \text{Cov}(r_i, r_h) / \sigma_T^2$
  - $\beta_{iT} = (1 - t) \frac{\sigma_M^2}{\sigma_T^2} \times \beta_{iM} + t \frac{\sigma_h^2}{\sigma_T^2} \times \beta_{ih}$ 
    - Avec  $\beta_{iM} = \text{Cov}(r_i, r_M) / \sigma_M^2$ ,  $\beta_{ih} = \text{Cov}(r_i, r_h) / \sigma_h^2$
  - $\bar{E}_i = \beta_{iT} \bar{E}_T = \beta_{i,M} \pi_M + \beta_{ih} \pi_h$
  - $\pi_M = (1 - t) \bar{E}_T \frac{\sigma_M^2}{\sigma_T^2}$ ,  $\pi_h = t \bar{E}_T \frac{\sigma_h^2}{\sigma_T^2}$  :  $\pi_M, \pi_h$  primes de risque

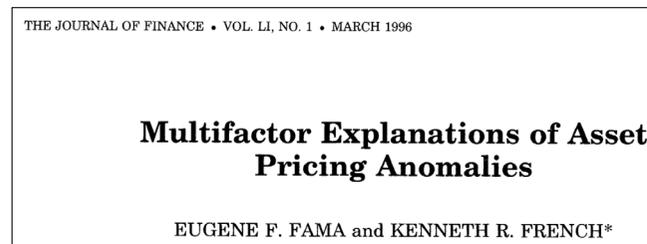
118

## Médaf et modèle multi-Bêtas

- $E_i = r_f + \pi_M \beta_{iM} + \pi_h \beta_{ih}$ 
  - Si  $r_M$  et  $r_h$  sont non-corrélés
  - $\beta_{hM} = \beta_{Mh} = 0$ , car  $\text{Cov}(r_M, r_h) = 0$
  - Par ailleurs  $\beta_{MM} = \beta_{hh} = 1$
- Considérons  $i = M$  et  $i = h$ 
  - $E_M = r_f + \pi_M \beta_{MM} + \pi_h \beta_{Mh} \Rightarrow \pi_M = E_M - r_f$
  - $E_h = r_f + \pi_M \beta_{hM} + \pi_h \beta_{hh} \Rightarrow \pi_h = E_h - r_f$
- $E_i = r_f + \beta_{iM}(E_M - r_f) + \beta_{ih}(E_h - r_f)$ 
  - Médaf avec un terme supplémentaire  $\beta_{ih}(E_h - r_f)$
  - Si  $M = T$ , on retrouve l'expression habituelle de la SML
  - L'expression plus générale ne suppose pas l'efficacité de  $M$
  - $M$  peut être par exemple un indice boursier CAC40 ou SP500, pas forcément le « portefeuille de marché »

119

## Médaf et modèle à trois facteurs (ou plus) de Fama et French



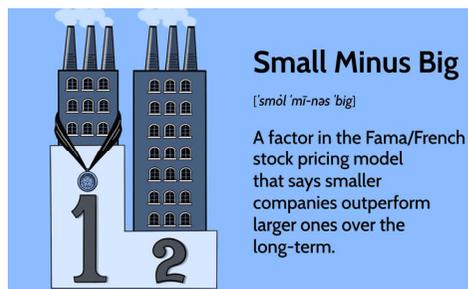
$$E(R_i) - R_f = b_i[E(R_M) - R_f] + s_i E(\text{SMB}) + h_i E(\text{HML})$$

$$R_i - R_f = \alpha_i + b_i(R_M - R_f) + s_i \text{SMB} + h_i \text{HML} + \varepsilon_i.$$

120

## Médaf et modèle à trois facteurs (ou plus) de Fama et French

- SMB et HML sont des performances de portefeuilles
- SMB : Small Minus Big, achat d'actions de petite capitalisation, vente d'actions de forte capitalisation
- HML : High Minus Low, achat d'actions avec ratio Book / Market élevé (value stocks), vente d'action avec un Book/Market bas (growth stocks)



121

## Médaf et modèle à trois facteurs (ou plus) de Fama et French

- Google Scholar est un outil utile qui permet de suivre la descendance d'un article : liens vers les articles faisant référence à l'article source

**Multifactor explanations of asset pricing anomalies**  
 EF Fama, KR French  
 The journal of finance, 1996 · Wiley Online Library

**Abstract**  
 Previous work shows that average returns on common stocks are related to firm characteristics like size, earnings/price, cash flow/price, book-to-market equity, past sales growth, long-term past return, and short-term past return. Because these patterns in average returns apparently are not explained by the CAPM, they are called anomalies. We find that, except for the continuation of short-term returns, the anomalies largely disappear in a three-factor model. Our results are consistent with rational ICAPM or APT

AFFICHER PLUS ▾

☆ Enregistrer 📄 Citer Cité 10412 fois Autres articles Les 15 versions

- Les articles de Fama et French sont parmi les plus cités dans le champ de la finance

122

## Médaf et modèle à trois facteurs (ou plus) de Fama et French

- **Fama & French (1996). Multifactor explanations of asset pricing anomalies. *The journal of finance*.**
  - 10 412 citations
- Fama & French (1992). The cross-section of expected stock returns. *the Journal of Finance*.
  - Cité 28653 fois
- Fama & French (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of financial economics*.
  - Cité 37389 fois
- Fama & French (2015). A five-factor asset pricing model. *Journal of financial economics*.
  - Cité 9903 fois

123

## Médaf et modèle à trois facteurs (ou plus) de Fama et French

- Équations de Fama et French
  - $r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(r_M - r_f) + s_iSMB + h_iHML + \varepsilon_i$
  - $E_i = r_f + \beta_i(E_M - r_f) + s_iE(SMB) + h_iE(HML)$
- Les équations précédentes
  - $r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(r_M - r_f) + s_i(SMB - r_f) + h_iHML + \varepsilon_i$
  - $E_i = r_f + \beta_i(E_M - r_f) + s_i(E(SMB) - r_f) + h_i(E(HML) - r_f)$
  - Ce qui apparait ce sont les rentabilités en excès  $E(SMB) - r_f$  et  $E(HML) - r_f$
- Qu'en penser ?

124

## Médaf et modèle à trois facteurs (ou plus) de Fama et French

### ■ Ce que Fama et French eux-mêmes en disent

In principle, the explanatory variables in the ICAPM (or the APT) are the expected returns on MMV portfolios in excess of the risk-free rate. SMB and HML in (1) are, however, each the difference between two portfolio returns. Equation (1) is still a legitimate three-factor risk-return relation as long as the two components of SMB (S and B) and the two components of HML (H and L) are MMV.  $R_B - R_f$  and  $R_L - R_f$  are then exact linear combinations of  $R_M - R_f$ ,  $R_S - R_f$ , and  $R_H - R_f$ , so subtracting  $R_B$  from  $R_S$  (to get SMB) and  $R_L$  from  $R_H$  (HML) has no effect on the intercepts or the explanatory power of the three-factor regressions.

- Il faut donc bien considérer des rentabilités en excès pour les portefeuilles SMB et HML
- Par ailleurs, la forme des primes de risque n'est valide que si  $r_M$ , SMB et HML sont linéairement indépendants
  - Toutes les corrélations nulles

125

## Médaf et modèle à trois facteurs (ou plus) de Fama et French

### ■ Que retenir des transparents précédents ?

- L'existence de supposées anomalies (alphas non nuls) est liée à un choix de portefeuille benchmark trop éloignés du portefeuille tangent.
- Combiner le portefeuille de marché avec les portefeuilles SMB et HML permet de mieux approcher le portefeuille tangent et d'avoir des alphas de Jensen plus proches de zéro.
- Le modèle multi-facteur est compatible avec l'approche fondée sur l'analyse des portefeuilles efficients.
- Fama et French utilisent d'ailleurs la procédure statistique qui consiste à comparer les ratios de Sharpe dans le marché à trois portefeuilles et le ratio de Sharpe du portefeuille tangent

The F-test of Gibbons, Ross, and Shanken (GRS 1989) rejects the hypothesis that (1) explains the average returns on the 25 size-BE/ME portfolios at the 0.004 level. This rejection of the three-factor model is testimony to the explan-

126

## Rentabilités espérées et réalisées

### ■ La grande déconnexion du 21<sup>e</sup> siècle (source AQR capital)

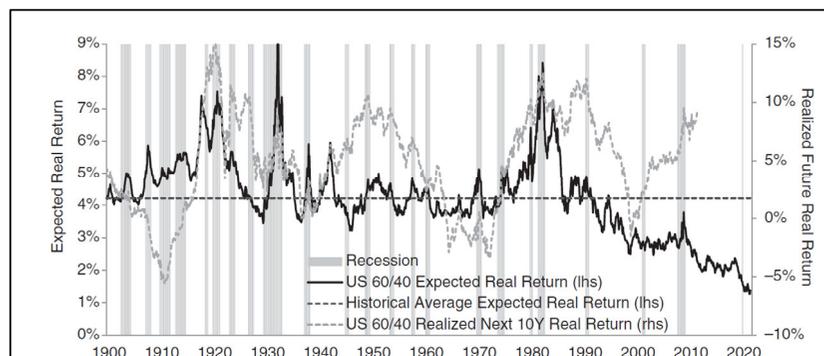


Figure 2.2 Expected and Realized Real Return of US 60/40 Stock/Bond Portfolio, Jan 1900–Sep 2021

Sources: AQR, Robert Shiller's website, Kozicki-Tinsley (2006), Federal Reserve Bank of Philadelphia, Blue Chip Economic Indicators, Consensus Economics, NBER. The 60/40 Expected Real Return is constructed from the stock and bond real yield series in Figure 1.1. The realized next 10-year real return for the 60/40 portfolio is based on the total returns of the S&P500 index and 10-year Treasuries, in excess of the realized inflation.

127

## Indices boursiers, private equity, modèles multifacteurs

### ■ Source AQR Capital

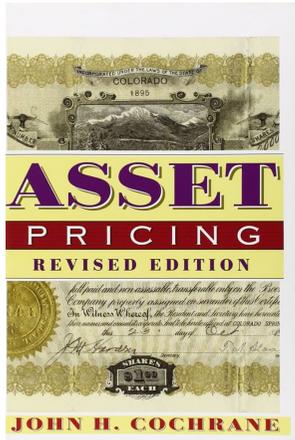
Possible Solution	Motivation	Challenges
1. More Equities	<b>Belief in Equity Premium:</b> Highest conviction potential long-term return source	<b>Concentration:</b> already dominant risk to many; not cheap
2. Add Illiquid / Private Assets	<b>'Endowment Model' Beliefs:</b> High returns historically; perceived illiquidity premium	<b>Illiquidity;</b> contain much equity exposure; also historically rich; overrated illiquidity premia
3. Add Factor Tilts and Alternative Risk Premia	<b>Multi-Factor Beliefs:</b> Evidence on multiple rewarded factors and potential diversification benefits	<b>Leverage</b> and other tools are required to meet return targets

Figure 3.11 Three Institutional Answers to the Low Expected Return Challenge

128

## Références (ouvrages)

- Cochrane (2009). *Asset pricing: Revised edition*. Princeton university press.



12

Regression-Based Tests of  
Linear Factor Models

129

## Références (ouvrages)

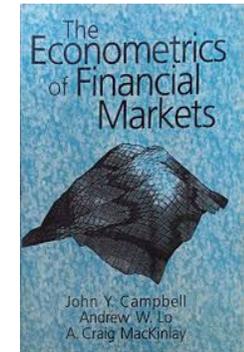
- Campbell, Lo & MacKinlay (1997). *The econometrics of financial markets*.
  - Chapitre 5 : *The Capital Asset Pricing Model*
  - Chapitre 6 : *Multifactor Pricing Models*



Crowd  
Ultra  
Awards  
Best  
inance Speaker



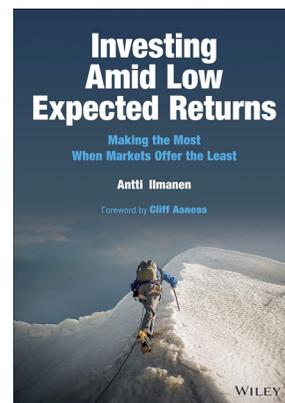
Andrew Lo



130

## Références (ouvrages)

- Ilmanen (2022). *Investing amid low expected returns: Making the most when markets offer the least*. John Wiley & Sons.



131

132

## Propriétés du portefeuille orthogonal

## Alphas de Jensen du portefeuille orthogonal

- L'alpha de Jensen du portefeuille orthogonal (par rapport au portefeuille benchmark),  $\alpha_h$ , est défini par :
- $E_h = \alpha_h + r_f + \beta_{hM}(E_M - r_f)$
- Avec  $\beta_{hM} = \frac{\text{Cov}(r_h, r_M)}{\sigma_M^2}$
- Or le portefeuille orthogonal vérifie  $\text{Cov}(r_h, r_M) = 0$
- Donc  $\beta_{hM} = 0$
- D'où  $\alpha_h = E_h - r_f$
- **Le portefeuille orthogonal est de Bêta nul et son alpha de Jensen est sa rentabilité en excès du taux sans risque.**
- Examinons les cas où  $\alpha_h = 0$  et  $\alpha_h \neq 0$

133

134

## Alphas de Jensen du portefeuille orthogonal

- Cas où  $\alpha_h = 0$ 
  - Calculons l'alpha de Jensen du portefeuille benchmark M
  - Par définition,  $\alpha_M$  est tel que :  $E_M = \alpha_M + r_f + \beta_{MM}(E_M - r_f)$
  - $\beta_{MM} = \frac{\text{Cov}(r_M, r_M)}{\text{Var}(r_M)} = 1$
  - D'où  $E_M = \alpha_M + r_f + (E_M - r_f)$ , donc  $\alpha_M = 0$
  - Dans le marché à deux titres risqués h et M, M est efficient (maximise le ratio de Sharpe) car tous les alphas sont nuls
  - Or, le portefeuille tangent qui maximise le ratio de Sharpe
  - D'où  $T = M$  (unicité du portefeuille tangent par concavité de la frontière efficiente) et  $s_M = s_T$
- **Cas où  $\alpha_h \neq 0$  : Dans ce cas, M n'est pas efficient**
  - Voir transparents sur ratio de Sharpe et alpha de Jensen
  - $s_M < s_T$

135

## Portefeuille tangent (exercice, décomposition du risque)

- Montrer que  $\sigma_T^2 = (1 - t)^2 \sigma_M^2 + t^2 \sigma_h^2$
- $r_T = (1 - t)r_M + tr_h$
- $\text{Var}(r_T) = (1 - t)^2 \text{Var}(r_M) + 2t(1 - t)\text{Cov}(r_M, r_h) + t^2 \text{Var}(r_h)$
- $\text{Cov}(r_M, r_h) = 0 \Rightarrow \text{Var}(r_T) = (1 - t)^2 \text{Var}(r_M) + t^2 \text{Var}(r_h)$
- Soit  $\sigma_T^2 = (1 - t)^2 \sigma_M^2 + t^2 \sigma_h^2$
- Ce qu'on voulait démontrer

136

## Portefeuille orthogonal : décomposition du ratio de Sharpe du marché

- Soit un portefeuille  $M$ , de rentabilité  $r_M$
- $x_h$  : portefeuille orthogonal à  $M$
- $s_M$  : ratio de Sharpe du portefeuille  $M$
- $s_h$  : ratio de Sharpe du portefeuille  $h$
- $s_T$  : ratio de Sharpe du portefeuille tangent  $T$ .
- Alors  $s_T^2 = s_M^2 + s_h^2$ 
  - Si  $M$  est proche du portefeuille tangent,  $s_h$  est proche de zéro.
- Preuve : voir les deux transparents suivants.

137

## Portefeuille orthogonal : décomposition du ratio de Sharpe du marché

- $s_T^2 = s_M^2 + s_h^2$  ?
  - Par définition :  $s_M = \frac{\bar{E}_M}{\sigma_M}$
  - Équation de la SML :  $\bar{E}_M = \beta_M \bar{E}_T$
  - Par définition :  $\beta_M = \frac{\text{Cov}(r_M, r_T)}{\text{Var}(r_T)}$
  - Comme  $r_T = (1-t)r_M + tr_h$ ,  $\beta_M = \frac{\text{Cov}(r_M, (1-t)r_M + tr_h)}{\text{Var}(r_T)}$
  - Bilinearité de la covariance :  $\text{Cov}(r_M, (1-t)r_M + tr_h) = (1-t)\text{Cov}(r_M, r_M) + t\text{Cov}(r_M, r_h)$
  - On rappelle que  $\text{Cov}(r_M, r_h) = 0$  et  $\text{Cov}(r_M, r_M) = \text{Var}(r_M)$
  - D'où  $\beta_M = \frac{(1-t)\text{Var}(r_M)}{\text{Var}(r_T)} = \frac{(1-t)\sigma_M^2}{\sigma_T^2}$
  - $s_M = \frac{\bar{E}_M}{\sigma_M} = \frac{\beta_M \bar{E}_T}{\sigma_M} = \frac{(1-t)\sigma_M^2}{\sigma_T^2} \times \frac{\bar{E}_T}{\sigma_M} = \frac{(1-t)\sigma_M}{\sigma_T} \times \frac{\bar{E}_T}{\sigma_T} = \frac{(1-t)\sigma_M}{\sigma_T} \times s_T$

138

## Portefeuille orthogonal : décomposition du ratio de Sharpe du marché

- En reprenant le même raisonnement avec  $s_h$ 
  - $s_h = \frac{t\sigma_h}{\sigma_T} \times s_T$ 
    - À refaire en exercice pour vérifier que la démonstration précédente est maîtrisée
- On rappelle que  $r_T = (1-t)r_M + tr_h$  et  $\text{Cov}(r_M, r_h) = 0$
- On rappelle que  $s_M = \frac{(1-t)\sigma_M}{\sigma_T} \times s_T$  et  $s_h = \frac{t\sigma_h}{\sigma_T} \times s_T$ 
  - $s_M^2 = \frac{(1-t)^2\sigma_M^2}{\sigma_T^2} \times s_T^2$  et  $s_h^2 = \frac{t^2\sigma_h^2}{\sigma_T^2} \times s_T^2$
  - $s_M^2 + s_h^2 = \left( \frac{(1-t)^2\sigma_M^2}{\sigma_T^2} + \frac{t^2\sigma_h^2}{\sigma_T^2} \right) \times s_T^2 = \left( \frac{(1-t)^2\sigma_M^2 + t^2\sigma_h^2}{\sigma_T^2} \right) \times s_T^2$
  - Comme  $(1-t)^2\sigma_M^2 + t^2\sigma_h^2 = \sigma_T^2$ , (voir exercice)
  - $\frac{(1-t)^2\sigma_M^2 + t^2\sigma_h^2}{\sigma_T^2} = 1$
- Au total,  $s_T^2 = s_M^2 + s_h^2$ , ce qu'on voulait démontrer

139

## Portefeuille orthogonal : décomposition du ratio de Sharpe du marché (remarque)

- On part de la relation entre les ratios de Sharpe  $s_T^2 = s_M^2 + s_h^2$
- $s_h$  : ratio de Sharpe du portefeuille orthogonal
- $s_h = \frac{E_h - r_f}{\sigma_h}$ ,
- Avec  $E_h = E[r_h]$ ,  $\sigma_h = \sigma(r_h)$
- Nous avons vu que  $E_h - r_f = \alpha_h$  (alpha de Jensen du portefeuille orthogonal)
- On obtient :  $s_T^2 = s_M^2 + \left( \frac{\alpha_h}{\sigma_h} \right)^2$
- Soit  $s_T^2 = s_M^2$ , si et seulement si  $\alpha_h = 0$
- On retrouve que la nullité de l'alpha de Jensen du portefeuille orthogonal caractérise l'efficacité du portefeuille  $M$

140

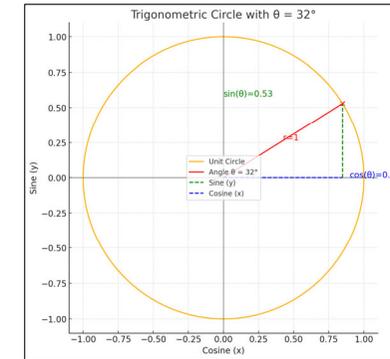
## Interprétation géométrique de la décomposition de la performance du marché

- Interprétation du résultat  $s_M^2 + s_h^2 = s_T^2$ 
  - Ou du résultat équivalent  $\frac{s_M^2}{s_T^2} + \frac{s_h^2}{s_T^2} = 1$
  - Nous savons déjà que  $\frac{s_M}{s_T} = \rho_{MT}$
  - De même  $\frac{s_h}{s_T} = \rho_{hT}$
- Il s'agit donc de montrer que  $\rho_{MT}^2 + \rho_{hT}^2 = 1$ 
  - Les deux vecteurs  $r_M$  et  $r_h$  engendrent un plan et sont orthogonaux
  - Notons  $\theta$  l'angle entre  $r_T$  et  $r_M$
  - $\rho_{MT} = \cos \theta$  : interprétation géométrique du coefficient de corrélation

141

## Interprétation géométrique de la décomposition de la performance du marché

- On demande à ChatGPT d'écrire un code Python pour représenter le cercle trigonométrique, avec un angle  $\theta = 32^\circ$
- **cos  $\theta$**  : longueur du segment en bleu, **sin  $\theta$**  longueur du segment en vert

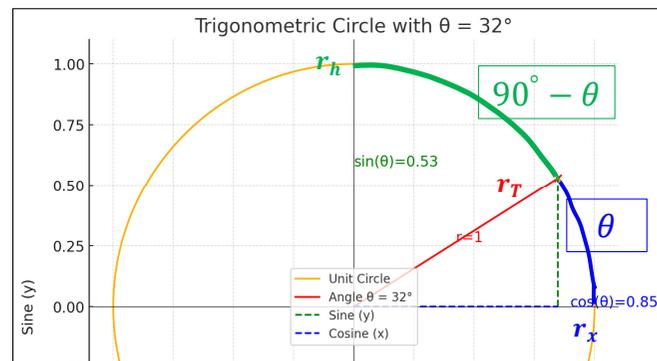


- Le théorème de Pythagore implique que  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

142

## Portefeuille orthogonal : interprétations géométriques

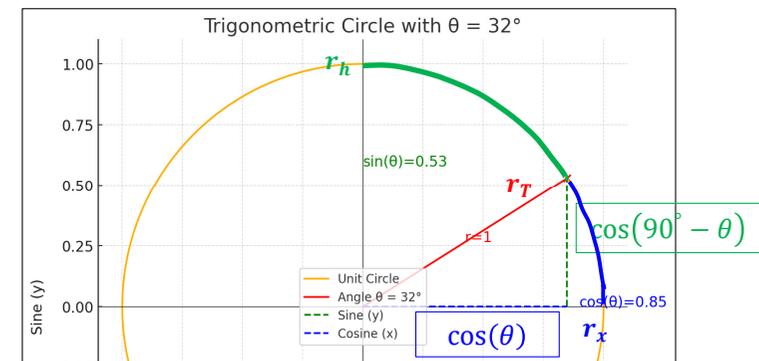
- Le vecteur  $r_M$  est placé sur l'axe des abscisses
- $\theta$  : angle entre  $r_T$  et  $r_M$
- $r_T$  est placé sur l'axe associé au segment rouge
- $r_h$  : orthogonal à  $r_M$  (axe des abscisses) donc placé sur l'axe des ordonnées
- Angle entre  $r_h$  et  $r_T$  égal à  $90^\circ - \theta$



143

## Interprétation géométrique de la décomposition de la performance du marché

- $\rho_{hT}$  est le cosinus de l'angle entre  $r_h$  et  $r_T$ , soit  $90^\circ - \theta$
- **$\rho_{hT} = \cos(90^\circ - \theta)$**  : longueur du segment en vert
- **cos  $\theta$**  : longueur du segment en bleu
- Pythagore :  $\cos^2 \theta + \cos^2(90^\circ - \theta) = 1$
- Soit  $\rho_{MT}^2 + \rho_{hT}^2 = 1$ , ce qu'on voulait démontrer



144

## Exercice : Covariance entre les rentabilités de deux portefeuilles

145

## Exercice : Covariance entre les rentabilités de deux portefeuilles

- Soit  $x, y$  deux allocations d'actifs risqués et  $r_x, r_y$  les rentabilités (en excès du taux sans risque) correspondante
- $r_x = x_1 r_1 + x_2 r_2, r_y = y_1 r_1 + y_2 r_2$
- On note  $\Omega$  la matrice de variance-covariance de  $(r_1, r_2)$ 
  - Exemple  $n = 2$  :  $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}$ ,
  - $\omega_{11} = \text{Cov}(r_1, r_1) = \text{Var}(r_1) = \sigma_1^2$
  - $\omega_{12} = \text{Cov}(r_1, r_2) = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$
  - $\omega_{21} = \text{Cov}(r_2, r_1) = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 = \omega_{12}$
  - $\omega_{22} = \text{Cov}(r_2, r_2) = \text{Var}(r_2) = \sigma_2^2$
- Montrer que  $\text{Cov}(r_x, r_y) = x' \Omega y$

146

## Exercice : Covariance entre les rentabilités de deux portefeuilles

- $\text{Cov}(r_x, r_y) = x' \Omega y$  ?
  - $\text{Cov}(r_x, r_y) = \text{Cov}(x_1 r_1 + x_2 r_2, y_1 r_1 + y_2 r_2)$
  - En utilisant la bilinéarité de la covariance,
  - $\text{Cov}(x_1 r_1 + x_2 r_2, y_1 r_1 + y_2 r_2) = x_1 y_1 \omega_{11} + x_1 y_2 \omega_{12} + x_2 y_1 \omega_{21} + x_2 y_2 \omega_{22}$
  - $\Omega y = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} y_1 + \omega_{12} y_2 \\ \omega_{21} y_1 + \omega_{22} y_2 \end{pmatrix}$
  - $x' \Omega y = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \omega_{11} y_1 + \omega_{12} y_2 \\ \omega_{21} y_1 + \omega_{22} y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 \omega_{11} + x_1 y_2 \omega_{12} + x_2 y_1 \omega_{21} + x_2 y_2 \omega_{22}$
  - Ce qui montre l'identité  $\text{Cov}(r_x, r_y) = x' \Omega y$
- Remarque :  $\text{Var}(r_x) = \text{Cov}(r_x, r_x) = x' \Omega x$

147

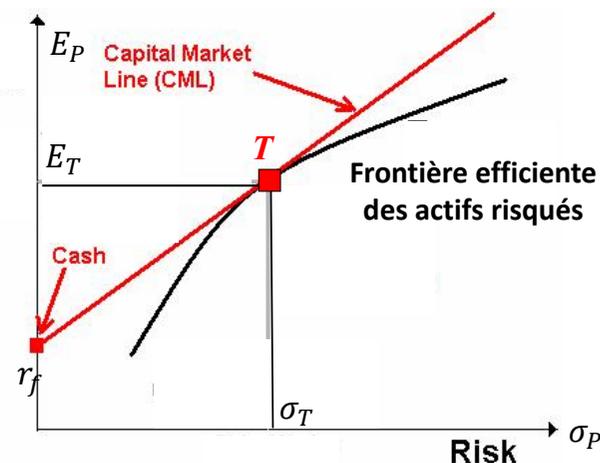
148

## Composition du portefeuille tangent

## Composition du portefeuille tangent

- Rappel : Le portefeuille tangent  $T$  maximise le ratio de Sharpe et est sur la frontière efficiente des actifs risqués
- La CML est la frontière efficiente en présence d'actif sans risque

Tout portefeuille sur la CML est de ratio de Sharpe maximal



149

150

## Composition du portefeuille tangent

## Composition du portefeuille tangent

- Rappel : La rentabilité d'un portefeuille composé d'actif sans risque et d'actifs risqués peut s'écrire comme
- $r_x = x_1 r_1 + \dots + x_n r_n = x' r$ 
  - $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  caractérisent l'allocation en titres risqués
- $\Omega$  : matrice carrée  $n \times n$  dont les termes sont les covariances entre les rentabilités
- Rappel :  $\text{Var}(r_x) = x' \Omega x$
- Portefeuilles efficients au sens moyenne variance : On minimise la variance sous contrainte d'espérance de rentabilité
- Ce qui revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :
- $\min_{x \in \mathbb{R}^n} x' \Omega x$  sous la contrainte  $x' \bar{E} = \mu =$  rentabilité cible

- $\min_{x \in \mathbb{R}^n} x' \Omega x$  sous la contrainte  $x' \bar{E} = \mu =$  rentabilité cible
- Le lagrangien s'écrit  $\mathcal{L}(x, \lambda) = x' \Omega x - \lambda(x' \bar{E} - \mu)$
- Où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange
- On a un terme quadratique en  $x$ ,  $x' \Omega x$  et un terme linéaire en  $x$ , associé à la contrainte
- Les conditions du premier ordre s'écrivent :  $\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x} = 0$
- On peut vérifier que  $\frac{\partial x' \Omega x}{\partial x} = 2 \Omega x$
- On a également  $\frac{\partial x' \bar{E}}{\partial x} = \bar{E}$

151

152

## Composition du portefeuille tangent

- $\mathcal{L}(x, \lambda) = x' \Omega x - \lambda(x' \bar{E} - \mu)$  et  $\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x} = 0$
- On peut vérifier que  $\frac{\partial x' \Omega x}{\partial x} = 2 \Omega x$ 
  - Cas  $n = 1$ ,  $x' \Omega x = x_1^2 \omega_{11}$ .  $\frac{\partial x_1^2 \omega_{11}}{\partial x_1} = 2 \omega_{11} x_1$
  - Cas  $n = 2$ ,  $x' \Omega x = x_1^2 \omega_{11} + 2 x_1 x_2 \omega_{21} + x_2^2 \omega_{22}$
  - $\frac{\partial x' \Omega x}{\partial x_1} = 2 \omega_{11} x_1 + 2 \omega_{21} x_2 = 2(\omega_{11} x_1 + \omega_{21} x_2)$
  - $\frac{\partial x' \Omega x}{\partial x_2} = 2 \omega_{21} x_1 + 2 \omega_{22} x_2 = 2(\omega_{21} x_1 + \omega_{22} x_2)$
  - On a déjà vu que  $\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} x_1 + \omega_{12} x_2 \\ \omega_{21} x_1 + \omega_{22} x_2 \end{pmatrix}$
- On a également  $\frac{\partial x' \bar{E}}{\partial x} = \bar{E}$

153

## Composition du portefeuille tangent

- Conditions du premier ordre :  $\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x} = 0$ , avec  $\mathcal{L}(x, \lambda) = x' \Omega x - \lambda(x' \bar{E} - \mu)$
- D'où  $\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x} = 2 \Omega x - \lambda \bar{E} = 0$
- $2 \Omega x = \lambda \bar{E}$ , système de  $n$  équations à  $n$  inconnues
- On supposera que  $\Omega$  est inversible (pas d'actifs risqués redondants impliquant des colinéarités)
- En prémultipliant l'équation précédente par  $\Omega^{-1}$ , l'inverse de  $\Omega$ , on obtient :
- $x = \frac{\lambda}{2} \Omega^{-1} \bar{E}$
- Il en résulte que toutes les allocations en actifs risqués sur la CML sont proportionnelles au vecteur  $\Omega^{-1} \bar{E}$

154

## Composition du portefeuille tangent

- $x = \frac{\lambda}{2} \Omega^{-1} \bar{E}$
- Il en résulte que toutes les allocations en actifs risqués sur la CML sont proportionnelles au vecteur  $\Omega^{-1} \bar{E}$
- Il reste à déterminer la composition du portefeuille tangent  $L$
- Le seul sur la CML qui ne comporte que des actifs risqués
- Revenons à  $r_x = x_1 r_1 + \dots + x_n r_n$
- Toute la richesse investie en actifs risqués :  $x_1 + \dots + x_n = 1$
- On note  $e$  le vecteur colonne (avec  $n$  lignes) dont tous les termes sont égaux à 1
- $x_1 + \dots + x_n = 1 \Leftrightarrow e' x = 1$

155

## Composition du portefeuille tangent

- $x = \frac{\lambda}{2} \Omega^{-1} \bar{E}$  : portefeuilles sur la CML
- $e' x = 1$  : le portefeuille tangent ne comprend que des actifs risqués
- D'où  $e' x = \frac{\lambda}{2} e' \Omega^{-1} \bar{E} = 1$ , ce qui donne  $\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{e' \Omega^{-1} \bar{E}}$
- La composition du portefeuille tangent est  $x_T = \frac{\Omega^{-1} \bar{E}}{e' \Omega^{-1} \bar{E}}$
- Dès que l'on dispose des moments d'ordre 1,  $\bar{E}$  (espérances de rentabilités) et d'ordre 2,  $\Omega$  (covariances), on connaît la composition du portefeuille tangent
  - En effectuant de simples opérations matricielles
  - Sur Excel ou tout langage de programmation (Python, R, Matlab, etc).

156

## Ratios de Sharpe du portefeuille tangent

157

## Ratios de Sharpe du portefeuille tangent

- Rappel : Composition du portefeuille tangent :  $x_T = \frac{\Omega^{-1}\bar{E}}{e'\Omega^{-1}\bar{E}}$
- Espérance de rentabilité du portefeuille tangent, au-delà du taux sans risque  $r_f$  :  $\bar{E}_T = x_T'\bar{E} = \bar{E}'x_T$ 
  - Si  $A, B$  sont deux matrices,  $(AB)' = B'A'$
  - Si  $A$  est une matrice carrée symétrique  $A' = A$  ( $\Omega^{-1}$  est symétrique)
- D'où  $\bar{E}_T = \frac{\bar{E}'\Omega^{-1}\bar{E}}{e'\Omega^{-1}\bar{E}}$
- Variance de la rentabilité du portefeuille tangent :  $x_T'\Omega x_T$ 
  - $x_T' = \frac{\bar{E}'\Omega^{-1}}{e'\Omega^{-1}\bar{E}}$ ,  $x_T'\Omega x_T = \left(\frac{\bar{E}'\Omega^{-1}}{e'\Omega^{-1}\bar{E}}\right)\Omega\left(\frac{\Omega^{-1}\bar{E}}{e'\Omega^{-1}\bar{E}}\right) = \frac{\bar{E}'\Omega^{-1}\bar{E}}{(e'\Omega^{-1}\bar{E})^2}$
- Écart-type de la rentabilité :  $\sigma_T = \frac{(\bar{E}'\Omega^{-1}\bar{E})^{1/2}}{e'\Omega^{-1}\bar{E}}$
- Ratio de Sharpe du portefeuille tangent :  $s_T = \frac{\bar{E}_T}{\sigma_T} = (\bar{E}'\Omega^{-1}\bar{E})^{1/2}$

158

159

160

## Une deuxième démonstration du Médaf

- Cette démonstration n'est pas à voir pour le partiel

161

## Une deuxième démonstration du Médaf

- Préliminaires : Approximations et développements limités
- $x \rightarrow f(x) = (1 + x)^\alpha$
- $f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}$ 
  - $\alpha = 2$ .  $f(x) = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$ .  $f'(x) = 2 + 2x$
  - $\alpha = \frac{1}{2}$ .  $f(x) = \sqrt{1 + x}$ .  $f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1+x}}$
- $x \ll \text{petit}$  »,  $f(x) = (1 + x)^\alpha \approx 1 + f'(0)x = 1 + \alpha x$ 
  - $\alpha = 2$ .  $f(x) \approx 1 + 2x$
  - $\alpha = \frac{1}{2}$ .  $f(x) \approx 1 + \frac{x}{2}$

162

## Une démonstration du Médaf : Approximation du risque d'un portefeuille

- $\tilde{r}_x = x\tilde{r}_i + (1 - x)\tilde{r}_T$ . Portefeuille combinant  $i$  et  $T$
- Risque associé à  $\tilde{r}_x$  pour  $x$  petit (au voisinage de  $\tilde{r}_T$ )
- $\text{Var}[\tilde{r}_x] = x^2\sigma_i^2 + 2x(1 - x)\rho_{iT}\sigma_i\sigma_T + (1 - x)^2\sigma_T^2$ 
  - Si  $x$  petit,  $ax^2 + bx + c \approx bx + c$
  - Même raisonnement qu'auparavant : On néglige les termes en  $x^2$
  - $\text{Var}[\tilde{r}_x] \approx \sigma_T^2 - 2x(\sigma_T^2 - \rho_{iT}\sigma_i\sigma_T)$
  - $\beta_{iT} = \rho_{iT} \frac{\sigma_i}{\sigma_T}$ . D'où  $\rho_{iT} = \beta_{iT} \frac{\sigma_T}{\sigma_i}$
  - $\text{Var}[\tilde{r}_x] \approx \sigma_T^2 - 2x \left( \sigma_T^2 - \beta_{iT} \frac{\sigma_T}{\sigma_i} \sigma_i \sigma_T \right) = \sigma_T^2 (1 - 2(1 - \beta_{iT})x)$
  - $\sigma_x \approx \left( \sigma_T^2 (1 - 2(1 - \beta_{iT})x) \right)^{1/2} \approx \sigma_T (1 - (1 - \beta_{iT})x)$

163

## Une démonstration du Médaf : Relation rentabilité - risque

- $\tilde{r}_x = x\tilde{r}_i + (1 - x)\tilde{r}_T$ . Portefeuille combinant  $i$  et  $T$ 
  - $\tilde{r}_x - r_f = x(\tilde{r}_i - r_f) + (1 - x)(\tilde{r}_T - r_f)$
  - Rappel : on note  $E[\tilde{r}_i] = E_i$ ,  $E[\tilde{r}_T] = E_T$
  - On note  $\bar{E}_i = E[\tilde{r}_i] - r_f$ ,  $\bar{E}_T = E[\tilde{r}_T] - r_f$
  - $E[\tilde{r}_x] - r_f = x\bar{E}_i + (1 - x)\bar{E}_T = \bar{E}_T + x(\bar{E}_i - \bar{E}_T)$
- D'où :  $E[\tilde{r}_x] - r_f = \bar{E}_T \left( 1 + x \left( \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - 1 \right) \right)$

164

## Une démonstration du Médaf: Relation rentabilité - risque

### ■ Approximation du ratio de Sharpe

- $s_x = \frac{E[\tilde{r}_x] - r_f}{\sigma_x} \approx \frac{\bar{E}_T}{\sigma_T} \times \frac{1+x\left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - 1\right)}{1-(1-\beta_{iT})x} = s_T \times \frac{1+x\left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - 1\right)}{1-(1-\beta_{iT})x}$
- $(1 - (1 - \beta_{iT})x)^\alpha \approx 1 - \alpha(1 - \beta_{iT})x$
- Car si  $x$  petit,  $-(1 - \beta_{iT})x$  petit.
- $\frac{1}{1-(1-\beta_{iT})x} = (1 - (1 - \beta_{iT})x)^{-1} \approx 1 + (1 - \beta_{iT})x$
- $s_x \approx s_T \left(1 + x \left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - 1\right)\right) (1 + (1 - \beta_{iT})x)$
- Pour  $x$  petit, on peut négliger les termes en  $x^2$
- $s_x \approx s_T \left(1 + x \left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT}\right)\right)$

165

## Une démonstration du Médaf: Relation rentabilité - risque

- $s_x \approx s_T \left(1 + x \left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT}\right)\right)$
- Si  $T$  est le portefeuille tangent,  $s_x \leq s_T$ 
  - Le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe
  - $\frac{s_x}{s_T} \approx 1 + x \left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT}\right) \leq 1$
  - Si  $\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT} > 0$ ,  $1 + x \left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT}\right) > 1$ , si  $x > 0$
  - Si  $\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT} < 0$ ,  $1 + x \left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT}\right) > 1$ , si  $x < 0$
- D'où  $\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} = \beta_{iT}$ , ou  $\bar{E}_i = \beta_{iT} \bar{E}_T$
- $E_i - r_f = \beta_{iT}(E_T - r_f)$  ou  $E_i = r_f + \beta_{iT}(E_T - r_f)$

166

## Médaf et buck for the bang ratio

- On rappelle que  $(E_i - r_f)/(2\text{cov}(r_i, r_T))$  est le « buck for the bang ratio ».
- On a montré que  $\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} = \beta_{iT}$ .
- Comme  $\beta_{iT} = \frac{\text{COV}(r_i, r_T)}{\text{COV}(r_T, r_T)}$
- $(E_i - r_f)/(2\text{cov}(r_i, r_T)) = (E_T - r_f)/(2\text{cov}(r_T, r_T))$
- Il en résulte que **le buck for the bang ratio ne dépend pas de l'actif  $i$  considéré** (quand le portefeuille de référence est l'actif tangent)
- Réciproquement, si le buck for the bang ratio ne dépend pas de l'actif  $i$  considéré, on obtient la relation  $E_i = r_f + \beta_{iT}(E_T - r_f)$

167

168

## Une autre démonstration du Médaf

- Cette démonstration n'est pas à voir pour le partiel

169

## Une autre démonstration du Médaf

- On va (à nouveau) démontrer :
  - $E_i = r_f + \beta_i \times (E_T - r_f)$  où  $T$  est le portefeuille tangent
  - On a déjà donné des démonstrations « intuitives »
  - Ici, on propose une démonstration formelle, un peu fastidieuse à écrire, mais simple dans son principe.
- La démonstration est (presque) identique à la démonstration précédente, mais on explicite les dérivées (sans faire de développements limités)

170

## Une autre démonstration du Médaf

- Proportion de la richesse investie dans le titre  $i$  :  $x$
- Proportion de la richesse investie dans le portefeuille tangent :  $1 - x$
- $r_i, r_T$  rentabilités titre  $i$  et portefeuille tangent
- $E_i, E_T$  espérances des rentabilités
- $\sigma_i, \sigma_T$  écart-types des rentabilités
- $C_{iT} = \text{Cov}(r_i, r_T)$  covariance des rentabilités
- $\beta_i = \frac{C_{iT}}{\sigma_T^2}$  bêta du titre  $i$
- Rentabilité du portefeuille  $r_x = xr_i + (1 - x)r_T$

171

## Une autre démonstration du Médaf

- Rentabilité du portefeuille constitué de titre  $i$  et de  $T$ 
$$r_x = xr_i + (1 - x)r_T$$
  - Remarque : si tout est investi en portefeuille tangent  $r_0 = r_T$
- Espérance de la rentabilité

$$E[r_x] = xE_i + (1 - x)E_T$$

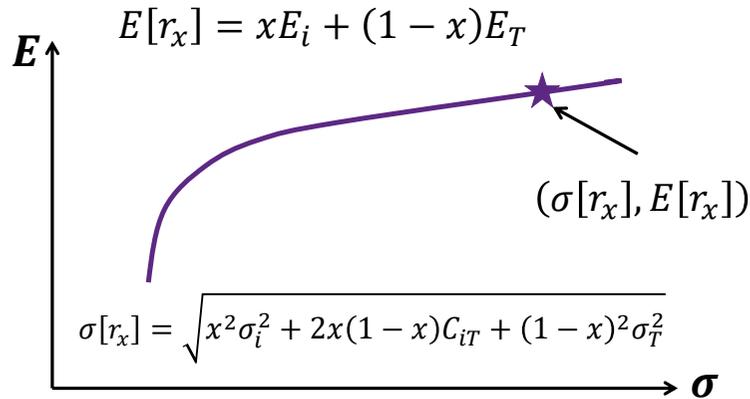
- Écart-type de la rentabilité

$$\sigma[r_x] = \sqrt{x^2\sigma_i^2 + x(1 - x)C_{iT} + (1 - x)^2\sigma_T^2}$$

172

### Une autre démonstration du Médaf

- La courbe violette est formée par l'ensemble des points  $(\sigma[r_x], E[r_x])$ 
  - Courbe paramétrée par  $x$

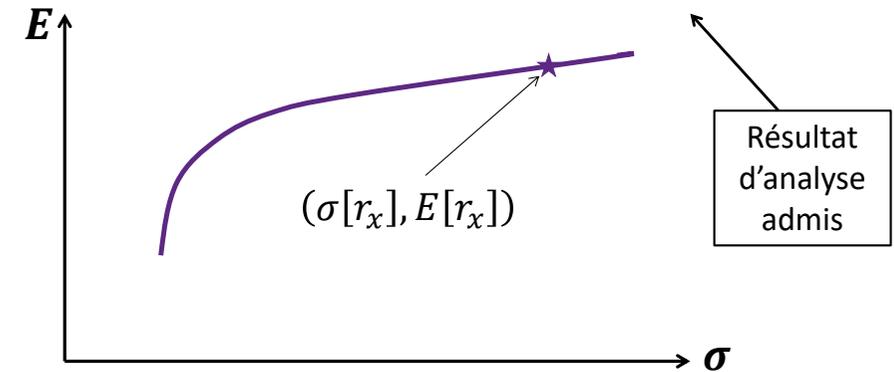


173

### Une autre démonstration du Médaf

- La pente de la courbe violette en un point  $x$  est donné par

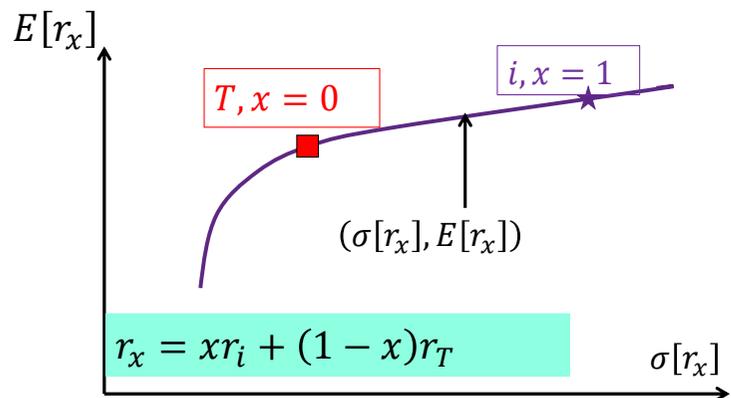
$$\frac{dE}{d\sigma} = \frac{dE[r_x]}{d\sigma[r_x]} = \frac{\frac{dE[r_x]}{dx}}{\frac{d\sigma[r_x]}{dx}}$$



174

### Une autre démonstration du Médaf

- Pour calculer la pente de la courbe reliant les points associés au titre  $i$  et au portefeuille de marché  $M$  :
  - Il faut calculer  $\frac{dE[r_x]}{dx}$  et  $\frac{d\sigma[r_x]}{dx}$



175

### Une autre démonstration du Médaf

- Calcul de la dérivée de l'espérance de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre  $i$ ,  $X$

$$E[r_x] = xE_i + (1-x)E_T$$

$$\frac{dE[r_x]}{dx} = E_i - E_T$$

- Ne dépend pas de  $x$
- Calcul de la dérivée de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre  $i$ ,  $x$

$$\sigma[r_x] = \sqrt{x^2\sigma_i^2 + 2x(1-x)C_{iT} + (1-x)^2\sigma_T^2}$$

176

## Une autre démonstration du Médaf

- Calcul de la dérivée de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre  $i$ ,  $X$

$$\sigma[r_x] = \sqrt{x^2\sigma_i^2 + 2x(1-x)C_{iT} + (1-x)^2\sigma_T^2}$$

- On a besoin de connaître la dérivation des fonctions composées

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} \times \frac{df(y = g(x))}{dy}$$

- Dans notre cas  $\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} \times \frac{df(y = g(x))}{dy}$

- et  $\begin{cases} f(y) = \sqrt{y} \\ g(x) = \text{Var}[r_x] \end{cases}$

177

## Une autre démonstration du Médaf

- Calcul de la dérivée de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre  $i$ ,  $x$

$$g(x) = \text{Var}[r_x] = x^2\sigma_i^2 + 2x(1-x)C_{iT} + (1-x)^2\sigma_T^2$$

- D'où  $\frac{dg(x)}{dx} = 2x\sigma_i^2 + 2(1-2x)C_{iT} - 2(1-x)\sigma_T^2$

- $f(y) = \sqrt{y}$  d'où  $\frac{df(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$\frac{df(y = g(x))}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{Var}[r_x]}} = \frac{1}{2\sigma[r_x]}$$

178

## Une autre démonstration du Médaf

- Calcul de la dérivée de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre  $i$ ,  $X$

$$\frac{d\sigma[r_x]}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} \times \frac{df(y = g(x))}{dy}$$

$$\begin{cases} \frac{dg(x)}{dx} = 2x\sigma_i^2 + 2(1-2x)C_{iT} - 2(1-x)\sigma_T^2 \\ \frac{df(y = g(x))}{dy} = \frac{1}{2\sigma[r_x]} \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma[r_x]}{dx} = \frac{x\sigma_i^2 + (1-2x)C_{iT} - (1-x)\sigma_T^2}{\sigma[r_x]}$$

179

## Une autre démonstration du Médaf

- La pente de la courbe reliant le titre  $i$  au portefeuille tangent  $T$  est donc donnée par :

$$\frac{dE}{d\sigma} = \frac{dE[r_x]}{d\sigma[r_x]} = \frac{\frac{dE[r_x]}{dx}}{\frac{d\sigma[r_x]}{dx}}$$

- avec  $\begin{cases} \frac{d\sigma[r_x]}{dx} = \frac{x\sigma_i^2 + (1-2x)C_{iT} - (1-x)\sigma_T^2}{\sigma[r_x]} \\ \frac{dE[r_x]}{dx} = E_i - E_T \end{cases}$

- Il faut calculer cette pente au point  $T$ , c'est-à-dire quand

$$x = 0, r_x = r_T$$

180

## Une autre démonstration du Médaf

- Pente de la courbe reliant le titre  $i$  au portefeuille tangent  $T$  au point  $T$  correspondant à  $x = 0$

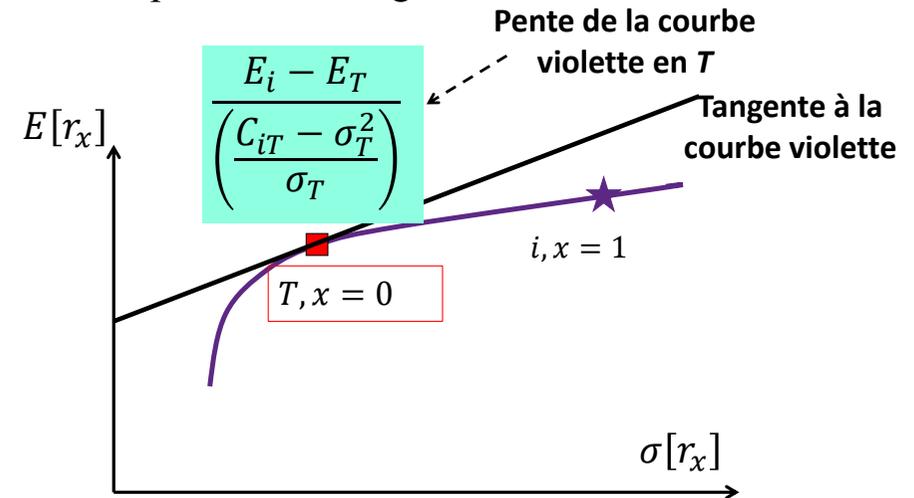
$$\begin{cases} \frac{d\sigma[r_x]}{dx} |_{x=0} = \frac{C_{iT} - \sigma_T^2}{\sigma_T} \\ \frac{dE[r_x]}{dx} |_{x=0} = E_i - E_T \end{cases}$$

$$\frac{dE}{d\sigma} |_{x=0} = \frac{\frac{dE[r_x]}{dx}}{\frac{d\sigma[r_x]}{dx}} |_{x=0} = \frac{E_i - E_T}{\left(\frac{C_{iT} - \sigma_T^2}{\sigma_T}\right)}$$

181

## Une autre démonstration du Médaf

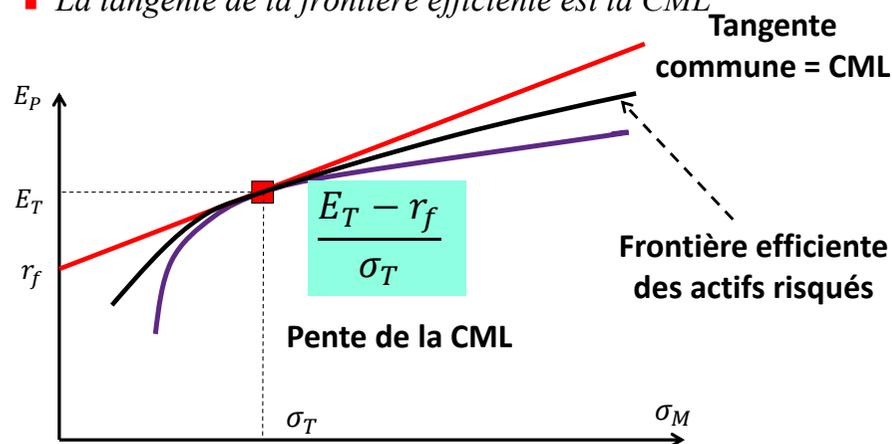
- Pente de la courbe reliant les points associés au titre  $i$  et au portefeuille tangent  $T$  :



182

## Une autre démonstration du Médaf

- La pente de la courbe violette en  $T$  est égale à la pente de la frontière efficiente en  $T$ 
  - Les tangentes des courbes violette et noire sont identiques
  - La tangente de la frontière efficiente est la CML

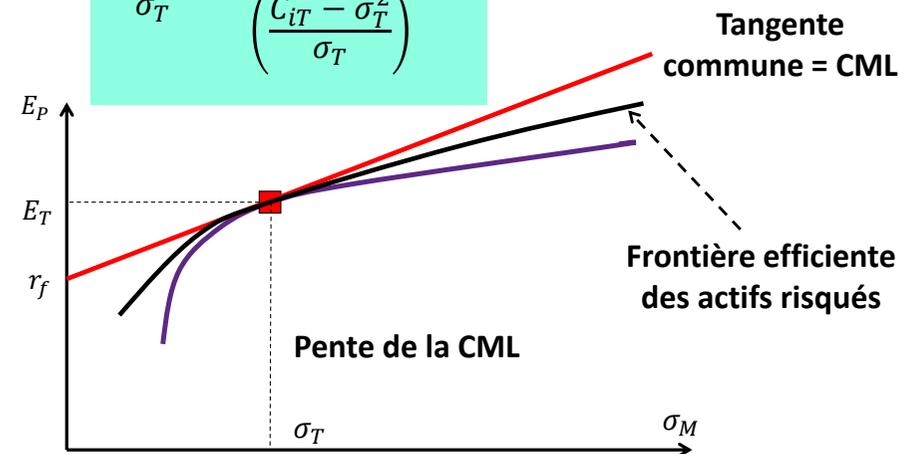


183

## Une autre démonstration du Médaf

- L'égalité des pentes donne l'équation suivante :

$$\frac{E_T - r_f}{\sigma_T} = \frac{E_i - E_T}{\left(\frac{C_{iT} - \sigma_T^2}{\sigma_T}\right)}$$



184

## Une autre démonstration du Médaf

- En reprenant l'équation précédente :

- $$\frac{E_T - r_f}{\sigma_T} = \frac{E_i - E_T}{\left(\frac{C_{iT} - \sigma_T^2}{\sigma_T}\right)} \Rightarrow E_i - E_T = \left(\frac{C_{iT}}{\sigma_T^2} - 1\right) \times (E_T - r_f)$$

- *En développant le terme de droite et après simplification*

- $$E_i = r_f + \frac{C_{iT}}{\sigma_T^2} \times (E_T - r_f)$$

- *Comme  $\beta_i = \frac{C_{iT}}{\sigma_T^2}$*

- *On peut écrire l'espérance de rentabilité du titre i comme :*

- $$E_i = r_f + \beta_i \times (E_T - r_f)$$

## Le modèle zéro bêta de Fisher Black

## Le modèle zéro bêta de Fisher Black

- Le modèle zéro bêta de Fisher Black
  - Ne suppose pas l'existence d'un actif sans risque
  - $P$  portefeuille d'actifs risqués situé sur la frontière efficiente
  - $Z$  portefeuille d'actifs risqués de bêta nul par rapport à  $P$
  - $E_i = E_Z + \beta_i \times (E_T - E_Z)$
- On obtient donc une relation similaire à celle du Médaf, mais dans un cadre moins restrictif
  - C'est le portefeuille « zéro-bêta » qui fait formellement office d'actif sans risque.
- Une démonstration du résultat est donnée dans les transparents suivants
  - Elle est en fait très proche de la démonstration précédente

189

190

## Le modèle « zéro-bêta » de Black

- L'existence d'un taux « sans risque »  $r_f$  ne va pas de soi
  - Il n'existe pas d'émetteur exempt de risque de défaut
  - Les banques font faillite
    - Lehman Brothers (2008), Washington Mutual (2008) aux États-Unis
    - Plus récemment, banques chypriotes : Laiki, Bank of Cyprus (2013)
    - Les garanties implicites données aux emprunteurs diminuent
    - Bails-in plutôt que Bails-outs
  - Les états font aussi défaut
    - Grèce (2012), dette fédérale des États-Unis (1979, 2013 ?)
    - L'introduction de clauses d'action collectives dans les dettes des États de la zone euro est-il le prélude à des annulations partielles de dette comme un instrument « courant » de gestion
    - Techniquement, échanges forcés de dette, plutôt qu'annulations

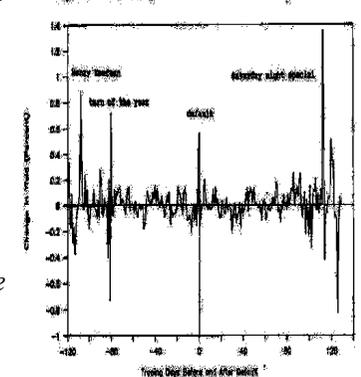
191

## Le modèle « zéro-bêta » de Black

- Existence d'un taux sans risque  $r_f$  ?
  - « Petit défaut » temporaire de 1979
    - <http://dmarron.com/2011/05/26/the-day-the-united-states-defaulted-on-treasury-bills/>
    - Augmentation d'environ 0,6% des taux des Treasury Bills (emprunts d'État à court-terme)
    - Cette augmentation n'a pas été compensée par une diminution immédiate quand le problème a fini par être résolu
  - Échéance du 17 octobre 2013
    - *There's still a lot of confusion about what October 17 represents when it comes to the debt ceiling and the risk of a U.S. default.*
    - CNN, 10 octobre 2013



Figure 1. Daily Changes in T-Bill Yields (26 to 94-Day T-Bills)



192

## Le modèle « zéro-bêta » de Black

	BidPx / AskPx	AskYld	PxCh
31) 10/10/13	0.115 / 0.110	0.112	+0.070
32) CMB10/15	/	/	/
33) 10/17/13	0.280 / 0.275	0.279	+0.140
34) 10/24/13	0.315 / 0.310	0.314	+0.145
35) 10/31/13	0.335 / 0.330	0.335	+0.175
36) 11/07/13	0.260 / 0.255	0.259	+0.120
37) W1 1MTH	0.270 / 0.265	0.269	+0.120
38) 1M ROLL	6.000 / -7.000	/	/
39) 11/14/13	0.185 / 0.180	0.183	+0.070
40) 11/21/13	0.040 / 0.035	0.035	+0.010
41) 11/29/13	0.030 / 0.025	0.025	+0.015
42) 12/05/13	0.035 / 0.025	0.025	+0.010
43) 12/12/13	0.065 / 0.060	0.061	+0.035
44) 12/19/13	0.045 / 0.040	0.041	+0.015
45) 12/26/13	0.050 / 0.040	0.041	+0.015
46) 01/02/14	0.045 / 0.040	0.041	+0.020
47) 01/09/14	0.050 / 0.045	0.046	+0.030
48) W1 3MTH	/	/	/
49) 3M ROLL	/	/	/

Tbills	.27
Short Coupons	.32 (October 31 maturity)
UST Repo	.16
OIS	.11
Libor	.174
US Financial CP	.13

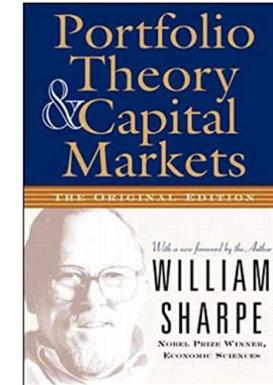
Les taux interbancaires non sécurisés sont inférieurs aux taux de la dette publique ...

- Existence d'un taux sans risque  $r_f$ 
  - Niveau des taux des Treasury Bills
    - Le 8 octobre 2013
    - Source Bloomberg
    - Rectangle rouge : taux en % pour des échéances inférieures à 1 mois
    - Le 10/10, le 17/10, le 24/10, ...
    - Rectangle vert : taux pour des échéances un peu plus lointaines
    - Ces taux sont presque nuls
    - Les craintes se concentrent sur les échéances courtes
  - Autres taux de référence à un mois
    - Interbancaire, repos, strips, OIS, CP, ...

193

## Le modèle « zéro-bêta » de Black

- Fischer Black a montré en 1972 qu'on pouvait s'affranchir de l'existence d'un placement sans risque
  - Sharpe (1970). *Portfolio theory and capital markets*. McGraw-Hill.
  - Black (1972). Capital market equilibrium with restricted borrowing. *The Journal of business*.



194

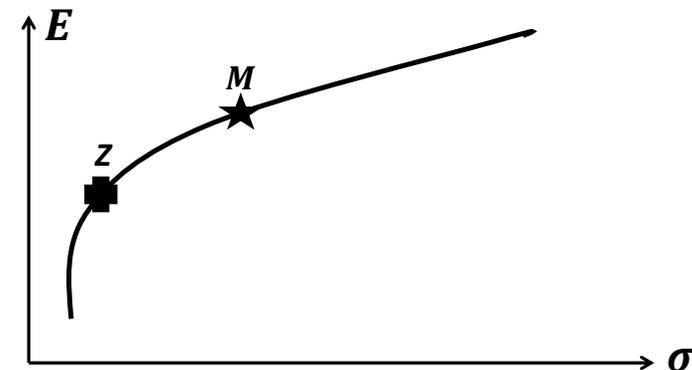
## Le modèle « zéro-bêta » de Black

- La démonstration fait appel aux raisonnements déjà vus et à un résultat supplémentaire :
- Théorème de séparation en deux fonds pour la frontière efficiente des actifs risqués :
  - En l'absence de contraintes sur les montants de titres achetés ou vendus, les portefeuilles sur la frontière efficiente sont constitués à partir de deux portefeuilles **arbitraires** pris sur cette frontière
  - Les investisseurs ne détiennent donc que des portefeuilles composés de ces deux titres
  - Le portefeuille de marché (demande agrégée) est donc lui-même composé de ces deux « fonds »
- Le portefeuille de marché est donc sur la frontière efficiente

195

## Le modèle « zéro-bêta » de Black

- Le portefeuille de marché  $M$  est sur la frontière efficiente des actifs risqués (transparent précédent)
- La rentabilité des portefeuilles sur la frontière est de la forme  $r = xr_M + (1 - x)r_Z$  (théorème de séparation en deux fonds de Sharpe)

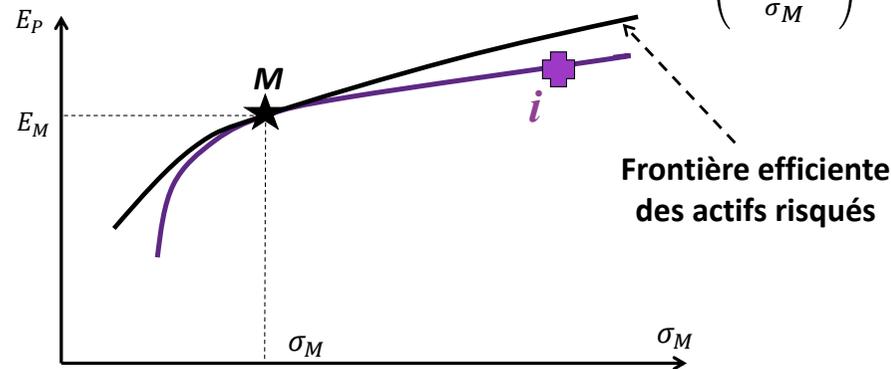


196

## Le modèle « zéro-bêta » de Black

- On rappelle qu'il y a tangence au point  $M$  entre la frontière efficiente (en noir) et l'ensemble des portefeuilles formé de  $M$  et du titre  $i$  (courbe mauve)

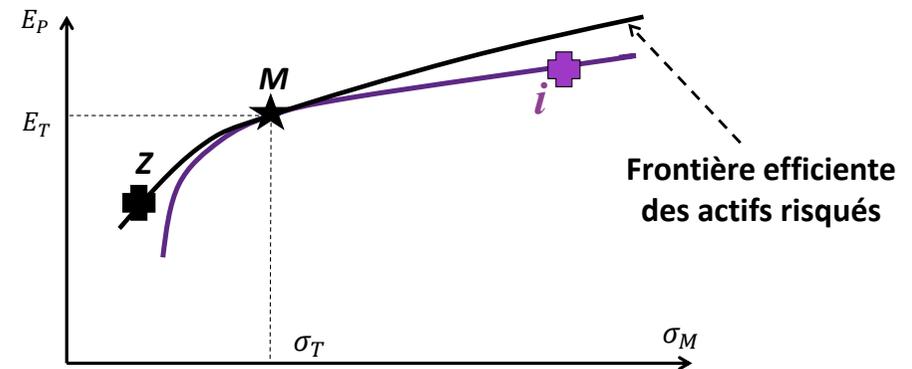
- On a démontré que la pente de la courbe mauve est  $\frac{E_i - E_M}{\left(\frac{C_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$



197

## Le modèle « zéro-bêta » de Black

- On a vu que la pente de la courbe mauve (en  $M$ ) est  $\frac{E_i - E_M}{\left(\frac{C_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$
- De même la pente de la courbe noire est  $\frac{E_Z - E_M}{\left(\frac{C_{ZM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)} = \frac{E_i - E_M}{\left(\frac{C_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$



198

## Le modèle « zéro-bêta » de Black



- Fin de la démonstration et établissement du résultat
  - Choisissons  $Z$  sur la frontière efficiente, tel que  $C_{ZM} = 0$
  - Rappel de notations  $C_{ZM} = \text{Cov}(r_M, r_Z)$
  - $\beta_Z = \text{Cov}(r_Z, r_M) / \sigma_M^2 = 0$
  - $Z$  : portefeuille zéro-bêta
    - Remarque : on peut toujours se ramener au cas  $C_{ZM} = 0$
    - Sinon on prend  $Z'$  tel que  $r_{Z'} = x r_M + (1-x) r_Z$
    - $\beta_{Z'} = x \beta_M + (1-x) \beta_Z = x + (1-x) \beta_Z$
    - Il suffit de prendre  $x = \beta_Z / (\beta_Z - 1)$  pour que  $\beta_{Z'} = 0$
  - $\frac{E_Z - E_M}{\left(\frac{C_{ZM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)} = \frac{E_i - E_M}{\left(\frac{C_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$  devient  $\frac{E_Z - E_M}{-\sigma_M} = \frac{E_i - E_M}{\left(\frac{C_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$
  - Après simplification :  $E_i = E_Z + \beta_i \times (E_M - E_Z)$

199

## Le modèle « zéro-bêta » de Black

- $E_i = E_Z + \beta_i \times (E_M - E_Z)$
- Relation affine entre espérance de rentabilité du titre  $i$ ,  $E_i$  et bêta du titre,  $\beta_i$ .
  - Cette relation est presque identique à celle du Médaf
- $E_i = r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)$
- On remplace le taux risque  $r_f$  par l'espérance du taux de rentabilité du portefeuille zéro-bêta  $E_Z$ 
  - Le Médaf subsiste donc même en l'absence d'un taux sans risque
  - Black a également développé une extension du Médaf quand les taux des emprunts sont plus élevés que ceux des prêts

200

## Exercices

*Exercice : existence d'une relation affine entre rentabilité espérée et Bêta quand M est sur la frontière efficiente*

- On suppose que le portefeuille de marché  $M$  est sur la frontière efficiente
- Montrer que l'on a toujours une relation affine entre espérance de rentabilité des titres et Bêtas.
  - On supposera que le théorème de séparation en deux fonds de Sharpe s'applique
  - C'est-à-dire que la frontière efficiente des actifs risqués s'obtient à partir de deux portefeuilles quelconques pris sur cette frontière.

201

202

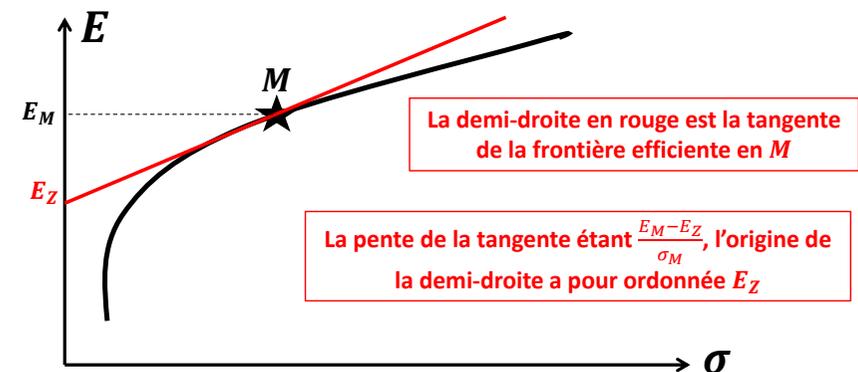
*Exercice : existence d'une relation affine entre rentabilité espérée et Bêta quand M est sur la frontière efficiente*

- On suppose que le portefeuille de marché  $M$  est sur la frontière efficiente
- Montrer que l'on a toujours une relation affine entre espérance de rentabilité des titres et Bêtas.
  - On rappelle qu'en l'absence d'actif sans risque, à l'équilibre, le portefeuille de marché est sur la frontière efficiente
  - C'était le point de départ du Médaf zéro-Bêta de Black
  - Une fois  $M$  sur la frontière efficiente, on a montré que  $E_i = E_Z + \beta_{iM} \times (E_M - E_Z)$  où  $Z$  est le portefeuille zéro-Bêta.
- Localiser le portefeuille  $Z$  sur la frontière efficiente des actifs risqués

203

*Exercice : existence d'une relation affine entre rentabilité espérée et Bêta quand M est sur la frontière efficiente*

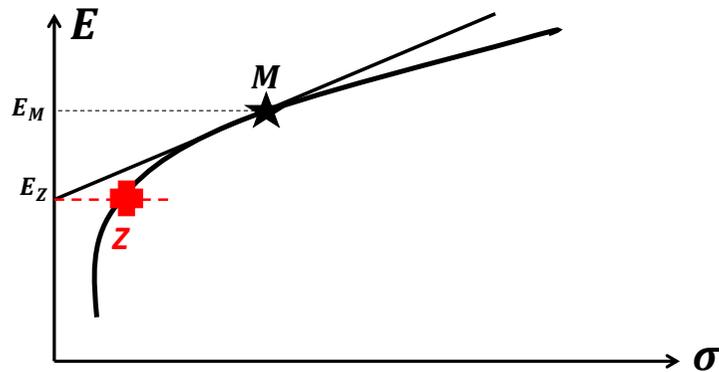
- Localiser le portefeuille  $Z$  (zéro-Bêta) sur la frontière efficiente des actifs risqués
  - On reprend à nouveau la démonstration de Black
  - La pente de la frontière efficiente en  $M$  est égale à  $\frac{E_M - E_Z}{\sigma_M}$



204

*Exercice : existence d'une relation affine entre rentabilité espérée et Bêta quand M est sur la frontière efficiente*

- Localiser le portefeuille Z (zéro-Bêta) sur la frontière efficiente des actifs risqués
  - *Connaissant  $E_Z$ , on peut alors localiser Z, sur la frontière efficiente des actifs risqués*



205

*Exercice : existence d'une relation affine entre rentabilité espérée et Bêta quand M est sur la frontière efficiente*

- Que se passe-t-il s'il existe un actif sans risque (de taux  $r_f$ ) ?
  - *La relation  $E_i = E_Z + \beta_{iM} \times (E_M - E_Z)$  ne repose pas sur l'existence d'un actif sans risque*
  - *Mais si un tel actif existe, son Bêta est nul*
  - *D'où  $r_f = E_Z$*
  - *On retrouve la formule usuelle  $E_i = r_f + \beta_{iM} \times (E_M - r_f)$*
  - *En se reportant au graphique du transparent précédent, on constate que M est le portefeuille tangent*
  - *Remarque : En l'absence d'actif sans risque, on ne peut pas parler de portefeuille tangent*

206

207

208