

Diversification du risque



Don't put all your
eggs in one basket

Variance du taux de rentabilité d'un portefeuille de
deux titres : $\sigma_p^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho_{1,2} \omega_1 \omega_2 \sigma_1 \sigma_2 + \omega_2^2 \sigma_2^2$

- Coefficient de corrélation, décomposition des risques, Bêtas, relation entre rentabilité et risque
- Diversification des risques
 - *Coefficient de corrélation linéaire*
 - *Coefficient de corrélation linéaire et risque*
 - *Diversification du risque*
- Objectifs pédagogiques de la séance
 - *Comprendre la notion de diversification des risques*
 - *Savoir manipuler un coefficient de corrélation*

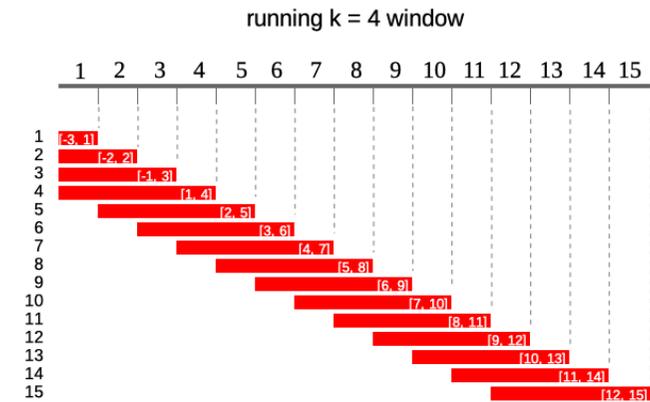
Probabilités et rentabilités : rappels

- La mesure de probabilité la plus simple ?
- Probabilité uniforme
 - Pile ou Face : $P(\{F\}) = P(\{P\}) = \frac{1}{2}$
 - Dé à six faces : $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$
 - Séquences de hausses ou baisses pour une marche aléatoire
 - $P(\{HH\}) = P(\{FH\}) = P(\{HF\}) = P(\{FF\}) = \frac{1}{4}$
 - $P(\{HHH\}) = \dots = P(\{FFF\}) = \frac{1}{8}$
- Mesure empirique : probabilité uniforme sur les dates passées
 - t : date courante, k longueur de l'échantillon
 - Pour les banques de marché, $k = 252$ (jours) – réglementation Bâle 3
 - $\{t, \dots, t - 251\}$: fenêtre glissante (rolling/running windows)
 - $P(\{t\}) = \dots = P(\{t - 251\}) = \frac{1}{252}$

5

Probabilités et rentabilités : rappels

- Ci-dessous : (15) fenêtres glissantes, $k = 4$



6

Probabilités et rentabilités : rappels

- Rentabilités observées (un seul actif)
 - Fréquence quotidienne (cours en fin de journée – closing price)
 - r_t : rentabilité de l'actif observée à la date t
 - $r_t = \frac{P_t - P_{t-1} + d_t}{P_{t-1}}$: rentabilité simple
- Rentabilité future
 - t date courante, $t + 1$ date future
 - \tilde{r}_{t+1} : vu en t comme une variable aléatoire
 - Marchés efficients : imprévisibilité des cours futurs
 - Idem : sur quel côté la pièce va retomber avant d'être lancée ?
 - Valeurs possibles de r_{t+1} : r_t, \dots, r_{t-251}
 - $P(\{\tilde{r}_{t+1} = r_t\}) = \dots = P(\{\tilde{r}_{t+1} = r_{t-251}\}) = \frac{1}{252}$
 - Loi uniforme sur l'ensemble des valeurs $\{r_t, \dots, r_{t-251}\}$

7

Probabilités et rentabilités : rappels

- Espérance de la variable aléatoire \tilde{r}_{t+1}
 - \tilde{r}_{t+1} peut prendre les valeurs r_t, \dots, r_{t-251}
 - Avec les probabilités $\frac{1}{252}$
 - L'espérance est la moyenne des valeurs possibles pondérée par les probabilités
 - Soit $\frac{1}{252} \times (r_t + \dots + r_{t-251}) = E[\tilde{r}_{t+1}]$
 - Ce qui correspond à la moyenne (empirique ou dans l'échantillon) non pondérée des rentabilités passées
- Autre exemple : jeu de dés (à six faces)
 - Espérance : $\frac{1}{6} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5$

8

Probabilités et rentabilités : rappels

- Variance de la variable aléatoire \tilde{r}_{t+1}
 - $\text{Var}[\tilde{r}_{t+1}] = E[\tilde{r}_{t+1}^2] - (E[\tilde{r}_{t+1}])^2 = E[(\tilde{r}_{t+1} - E[\tilde{r}_{t+1}])^2]$
- Écart-type de \tilde{r}_{t+1} : $\sqrt{\text{Var}[\tilde{r}_{t+1}]}$
- Stationnarité (à l'ordre 2) : $\forall t_1, t_2 : E[\tilde{r}_{t_1}] = E[\tilde{r}_{t_2}]$ et $\text{Var}[\tilde{r}_{t_1}] = \text{Var}[\tilde{r}_{t_2}]$

9

Probabilités et rentabilités : rappels

- Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $E[a \times \tilde{r}_t + b] = a \times E[\tilde{r}_t] + b$
 - En effet, $\frac{1}{252} \times ((ar_{t-1} + b) + \dots + (ar_{t-252} + b)) = \frac{a}{252} \times (r_{t-1} + \dots + r_{t-252}) + b$
- Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\text{Var}[a \times \tilde{r}_t + b] = a^2 \times \text{Var}[\tilde{r}_t]$
 - En effet : $a\tilde{r}_t + b - E[a\tilde{r}_t + b] = a \times (\tilde{r}_t - E[\tilde{r}_t])$
 - $E[(a(\tilde{r}_t - E[\tilde{r}_t]))^2] = a^2 E[(\tilde{r}_t - E[\tilde{r}_t])^2]$
- D'où $\sigma(a\tilde{r}_t + b) = |a| \times \sigma(\tilde{r}_t)$

10

Probabilités et rentabilités : rappels

- Cas de deux rentabilités : \tilde{r}_1, \tilde{r}_2
 - \tilde{r}_1 : rentabilité du titre 1
 - \tilde{r}_2 : rentabilité du titre 2
- Covariance entre \tilde{r}_1 et \tilde{r}_2
 - $\text{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2] = E[\tilde{r}_1\tilde{r}_2] - E[\tilde{r}_1]E[\tilde{r}_2] = E[(\tilde{r}_1 - E[\tilde{r}_1]) \times (\tilde{r}_2 - E[\tilde{r}_2])]$
- Remarques et propriétés :
 - Covariance entre \tilde{r}_1 et \tilde{r}_1 : $\text{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_1] = \text{Var}[\tilde{r}_1]$
 - $\text{Cov}[\tilde{r}_2, \tilde{r}_1] = \text{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]$ (symétrie)
 - $a, b \in \mathbb{R}$, $\text{Cov}[a\tilde{r}_1 + b, \tilde{r}_2] = a\text{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]$
 - $a \in \mathbb{R}$, $\text{Cov}[a, \tilde{r}_2] = 0$

11

Probabilités et rentabilités : rappels

- Coefficient de corrélation linéaire entre \tilde{r}_1 et \tilde{r}_2
 - $\rho_{12} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]}{\sqrt{\text{Var}[\tilde{r}_1]} \times \sqrt{\text{Var}[\tilde{r}_2]}}$
 - $-1 \leq \rho_{12} \leq +1$ (preuve : voir infra)
- Soit X, Y, Z trois variables aléatoires $\text{Cov}[X + Y, Z] = \text{Cov}[X, Z] + \text{Cov}[Y, Z]$ (additivité)
 - Démonstration : $\text{Cov}[X + Y, Z] = E[(X + Y)Z] - E[X + Y]E[Z]$
 - $E[(X + Y)Z] = E[XZ] + E[YZ]$
 - $E[X + Y]E[Z] = E[X]E[Z] + E[Y]E[Z]$
 - D'où
 - $\text{Cov}[X + Y, Z] = E[XZ] - E[X]E[Z] + E[YZ] - E[Y]E[Z] = \text{Cov}[X, Z] + \text{Cov}[Y, Z]$

12

Probabilités et rentabilités : rappels

- Espérance de la rentabilité d'un portefeuille
 - $\tilde{r}_p = x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2$, avec $0 \leq x \leq 1$
 - $E[\tilde{r}_p] = xE[\tilde{r}_1] + (1-x)E[\tilde{r}_2] = E[\tilde{r}_2] + x(E[\tilde{r}_1] - E[\tilde{r}_2])$
 - On a ici omis la dépendance par rapport à la date courante
 - On a utilisé la propriété d'additivité de l'espérance : $E[x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2] = E[x\tilde{r}_1] + E[(1-x)\tilde{r}_2]$
- Variance de la rentabilité d'un portefeuille :
 - $\text{Var}[x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2] = x^2\text{Var}[\tilde{r}_1] + 2x(1-x)\text{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2] + (1-x)^2\text{Var}[\tilde{r}_2]$
 - *Démonstration : commençons par montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires, $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + 2\text{Cov}[X, Y] + \text{Var}[Y]$*
 - $\text{Var}[X + Y] = \text{Cov}[X + Y, X + Y] = \text{Cov}[X, X + Y] + \text{Cov}[Y, X + Y]$
 - $\text{Cov}[X, X + Y] = \text{Cov}[X, X] + \text{Cov}[X, Y] = \text{Var}[X] + \text{Cov}[X, Y]$
 - $\text{Cov}[Y, X + Y] = \text{Cov}[X, Y] + \text{Cov}[Y, Y] = \text{Cov}[X, Y] + \text{Var}[Y]$

13

Probabilités et rentabilités : rappels

- $\text{Var}[x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2] = ?$
 - $\text{Var}[x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2] = \text{Var}[x\tilde{r}_1] + 2\text{Cov}[x\tilde{r}_1, (1-x)\tilde{r}_2] + \text{Var}[(1-x)\tilde{r}_2]$
 - $\text{Var}[x\tilde{r}_1] = x^2\text{Var}[\tilde{r}_1]$
 - $\text{Cov}[x\tilde{r}_1, (1-x)\tilde{r}_2] = x(1-x)\text{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]$
 - $\text{Var}[(1-x)\tilde{r}_2] = (1-x)^2\text{Var}[\tilde{r}_2]$
 - $\text{Var}[x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2] = x^2\text{Var}[\tilde{r}_1] + 2x(1-x)\text{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2] + (1-x)^2\text{Var}[\tilde{r}_2]$
 - Comme $\rho_{12} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]}{\sqrt{\text{Var}[\tilde{r}_1]} \times \sqrt{\text{Var}[\tilde{r}_2]}}$
 - $\text{Var}[\tilde{r}_x] = x^2\sigma^2[\tilde{r}_1] + 2x(1-x)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + (1-x)^2\sigma^2[\tilde{r}_2]$
 - $E[\tilde{r}_x] = E[\tilde{r}_2] + x(E[\tilde{r}_1] - E[\tilde{r}_2])$

14

Probabilités et rentabilités : rappels

- Variance et covariance : interprétation géométrique
 - \vec{r}_1 : vecteur de coordonnées $(r_{1,t-252} - \bar{r}_1, \dots, r_{1,t-1} - \bar{r}_1)$ où $\bar{r}_1 = E[\tilde{r}_1]$
 - \vec{r}_2 : vecteur de coordonnées $(r_{2,t-252} - \bar{r}_2, \dots, r_{2,t-1} - \bar{r}_2)$
 - *Produit scalaire* $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = (r_{1,t-252} - \bar{r}_1)(r_{2,t-252} - \bar{r}_2) + \dots + (r_{1,t-1} - \bar{r}_1)(r_{2,t-1} - \bar{r}_2)$
 - à $\frac{1}{252}$ près c'est $\text{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]$
 - *Norme de \vec{r}_1* : $\|\vec{r}_1\| = \sqrt{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1}$
 - à $\frac{1}{\sqrt{252}}$ près c'est $\sigma[\tilde{r}_1]$
 - *Norme de \vec{r}_2* : $\|\vec{r}_2\| = \sqrt{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2}$
 - à $\frac{1}{\sqrt{252}}$ près c'est $\sigma[\tilde{r}_2]$

15

Probabilités et rentabilités : rappels

- (\vec{r}_1, \vec{r}_2) engendrent un plan (sauf si colinéarité)
 - $P_{\vec{r}_1}(\vec{r}_2)$: projeté orthogonal de \vec{r}_2 sur \vec{r}_1
-
- $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \|\vec{r}_1\| \times \|P_{\vec{r}_1}(\vec{r}_2)\|$
 - $\|P_{\vec{r}_1}(\vec{r}_2)\| = \|\vec{r}_2\| \times \cos \theta$
 - $\cos \theta = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1\| \times \|\vec{r}_2\|} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]}{\sigma[\tilde{r}_1] \times \sigma[\tilde{r}_2]} = \rho_{12} \in [-1, 1]$
 - $\rho_{12} = 1$ si les deux séries de rentabilité vont parfaitement dans le même sens ($\theta = 0^\circ$)
 - $\rho_{12} = -1$ si les deux séries de rentabilité vont parfaitement dans le sens opposé ($\theta = 180^\circ$)

16

Décomposition du risque d'un titre, d'un portefeuille

- \tilde{r}_i, \tilde{r}_T rentabilité de deux portefeuilles
- $\rho_{iT} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_T]}{\sigma[\tilde{r}_i] \times \sigma[\tilde{r}_T]} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_T]}{\sigma_i \sigma_T}$
- Définissons $\beta_{iT} = \rho_{iT} \frac{\sigma_i}{\sigma_T} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_T]}{\sigma_i \sigma_T} \times \frac{\sigma_i}{\sigma_T} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_T]}{\sigma_T^2}$
 - Soit $\beta_{iT} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_T]}{\text{Var}[\tilde{r}_T]}$, puisque $\sigma_T^2 = \text{Var}[\tilde{r}_T]$
- Définissons $\tilde{\varepsilon}_i = \tilde{r}_i - \beta_{iT} \tilde{r}_T$ (ou $\tilde{r}_i = \beta_{iT} \tilde{r}_T + \tilde{\varepsilon}_i$)
 - $\text{Cov}[\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{r}_T] = \text{Cov}[\tilde{r}_i - \beta_{iT} \tilde{r}_T, \tilde{r}_T] = \text{Cov}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_T] - \beta_{iT} \text{Var}[\tilde{r}_T] = 0$.
 - $\tilde{\varepsilon}_i$ et \tilde{r}_T sont non corrélés
 - $\text{Var}[\tilde{r}_i] = \text{Var}[\beta_{iT} \tilde{r}_T] + 2\text{Cov}[\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{r}_T] + \text{Var}[\tilde{\varepsilon}_i]$
- $\text{Var}[\tilde{r}_i] = \beta_{iT}^2 \text{Var}[\tilde{r}_T] + \text{Var}[\tilde{\varepsilon}_i]$ ou $\sigma_i^2 = \beta_{iT}^2 \sigma_T^2 + \text{Var}[\tilde{\varepsilon}_i]$
 - Décomposition du risque
 - $\tilde{\varepsilon}_i = \tilde{r}_i - \beta_{iT} \tilde{r}_T$. $\tilde{\varepsilon}_i$: **risque résiduel**

17

18

19

20

La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire



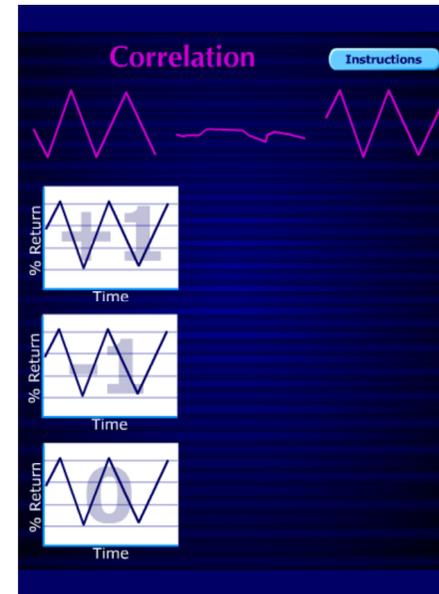
Corrélation positive



Corrélation négative

21

Le concept de corrélation



Source, Columbia preMBA finance

Exercice

- corrélation positive parfaite
- Corrélation négative parfaite
- Pas de corrélation

22

La théorie du portefeuille : écart-type du taux de rentabilité

- Rentabilité d'un portefeuille
 - $R_P = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2, \omega_1 + \omega_2 = 1$
 - ω_1 fraction de la richesse investie dans le titre 1
- Écart-type de la rentabilité d'un portefeuille
 - $\sigma[R_P] = \sigma_P, \sigma[R_1] = \sigma_1, \sigma[R_2] = \sigma_2,$
- $\sigma_P = \sqrt{\omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \omega_2^2 \sigma_2^2}$
 - ρ_{12} est le **coefficient de corrélation linéaire** entre R_1 et R_2
 - $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$
- σ_P dépend de ρ_{12} qui mesure le degré de liaison entre R_1 et R_2

23

La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

- Si $\rho_{12} > 0$, les prix des actions 1 et 2 tendent à varier dans le même sens
 - C'est le cas le plus fréquent
- Si $\rho_{12} < 0$, les prix des actions 1 et 2 tendent à varier dans des sens opposés
 - Cas rare (parapluies et crèmes solaires)
- Si les prix des actions varient de manière indépendante, alors $\rho_{12} = 0$

24

La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

- Coefficient de corrélation linéaire entre R_1 et R_2
- $\rho_{12} = E \left[\left(\frac{R_1 - E_1}{\sigma_1} \right) \times \left(\frac{R_2 - E_2}{\sigma_2} \right) \right]$
 - $\frac{R_1 - E_1}{\sigma_1}$: *rentabilité centrée réduite du titre 1*
- Mesure de la tendance des rentabilités à varier dans le même sens ou en sens inverse
- Le coefficient de corrélation linéaire a une valeur comprise entre -1 et $+1$: $-1 \leq \rho_{12} \leq +1$

25

La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

- Illustrations numériques $\rho_{12} = E \left[\left(\frac{R_1 - E_1}{\sigma_1} \right) \times \left(\frac{R_2 - E_2}{\sigma_2} \right) \right]$
 - *Titre 1*
 - Rentabilités du titre 1 les 4 dernier jours : $+1\%$, -1% , -1% , $+1\%$
 - Probabilités assignées à chacune de ces quatre journées = $1/4$
 - On rappelle que $E_1 = 0\%$, $\sigma_1 = 1\%$
 - Ici $\frac{R_1 - E_1}{\sigma_1} = R_1$
 - *Titre 2*
 - Rentabilités du titre 2 les 4 dernier jours : $+1\%$, -1% , -1% , $+1\%$
 - Probabilités assignées à chacune de ces quatre journées = $1/4$
 - On remarque que $R_2 = R_1$
- $\rho_{12} = 1/4 \times (1 \times 1) + 1/4 \times (-1 \times -1) + 1/4 \times (-1 \times -1) + 1/4 \times (1 \times 1) = +1$

26

La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

- Illustrations numériques $\rho_{12} = E \left[\left(\frac{R_1 - E_1}{\sigma_1} \right) \times \left(\frac{R_2 - E_2}{\sigma_2} \right) \right]$
 - Rentabilités du titre 1 les 4 dernier jours : $+1\%$, -1% , -1% , $+1\%$
 - *Les rentabilités du titre 2 sont maintenant égales à :*
 - $+2\%$, -2% , -2% , $+2\%$
 - On sait que $E_2 = 0\%$, $\sigma_2 = 2\%$
 - Les valeurs des rentabilités du titre 2 après centrage et réduction sont : $\frac{R_2 - E_2}{\sigma_2} = +1\%$, -1% , -1% , $+1\%$
 - *Ces valeurs normalisées sont identiques à celle du titre 2 dans le transparent précédent*
 - *Le calcul du coefficient de corrélation est identique*
 - $\rho_{12} = 1/4 \times (1 \times 1) + 1/4 \times (-1 \times -1) + 1/4 \times (-1 \times -1) + 1/4 \times (1 \times 1) = +1$

27

La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

- Illustrations numériques $\rho_{12} = E \left[\left(\frac{R_1 - E_1}{\sigma_1} \right) \times \left(\frac{R_2 - E_2}{\sigma_2} \right) \right]$
 - Rentabilités du titre 1 les 4 dernier jours :
 - $+1\%$, -1% , -1% , $+1\%$
 - Les rentabilités du titre 2 sont maintenant égales à :
 - -1% , $+1\%$, $+1\%$, -1%
 - On sait que $E_2 = 0\%$, $\sigma_2 = 1\%$
 - Les valeurs des rentabilités du titre 2 après centrage et réduction sont : $\frac{R_2 - E_2}{\sigma_2} = R_2 = -R_1 = -1\%$, $+1\%$, $+1\%$, -1%
 - *Le calcul du coefficient de corrélation donne :*
 - $\rho_{12} = 1/4 \times (1 \times -1) + 1/4 \times (-1 \times 1) + 1/4 \times (-1 \times 1) + 1/4 \times (1 \times -1) = -1$

28

La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

- Illustrations numériques $\rho_{12} = E \left[\left(\frac{R_1 - E_1}{\sigma_1} \right) \times \left(\frac{R_2 - E_2}{\sigma_2} \right) \right]$
 - Rentabilités du titre 1 les 4 dernier jours :
 - +1%, -1%, -1%, +1%
 - Les rentabilités du titre 2 sont maintenant égales à :
 - +1%, -1%, +1%, -1%
 - On vérifie que $E_2 = 0\%$, $\sigma_2 = 1\%$
 - Les valeurs des rentabilités du titre 2 après centrage et réduction sont : $\frac{R_2 - E_2}{\sigma_2} = R_2 = +1\%, -1\%, +1\%, -1\%$
- Le calcul du coefficient de corrélation donne
- $\rho_{12} = 1/4 \times (1 \times 1) + 1/4 \times (-1 \times -1) + 1/4 \times (-1 \times 1) + 1/4 \times (1 \times -1) = 0$

29

La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

On peut obtenir différentes valeurs du coefficient de corrélation ρ_{12} alors même que $E_1, E_2, \sigma_1, \sigma_2$ sont identiques

- Dernier exemple
 - Rentabilités du titre 1 les 6 dernier jours :
 - +1%, -1%, -1%, +1%, -1%, +1%
 - Les rentabilités du titre 2 sont maintenant égales à :
 - +1%, -1%, -1%, -1%, +1%, +1%
 - On vérifie que $E_2 = E_1 = 0\%$, $\sigma_2 = \sigma_1 = 1\%$
 - Les valeurs des rentabilités du titre 2 après centrage et réduction sont : $\frac{R_2 - E_2}{\sigma_2} = R_2 = +1\%, -1\%, -1\%, -1\%, +1\%, +1\%$
- Le calcul du coefficient de corrélation donne
- $\rho_{12} = 1/6 \times (1 \times 1) + 1/6 \times (-1 \times -1) + 1/6 \times (-1 \times -1) + 1/6 \times (1 \times -1) + 1/6 \times (-1 \times 1) + 1/6 \times (1 \times 1) = 0,33$
- Ici, les rentabilités des titres 1 et 2 sont identiques 4 jours sur 6, et opposées les deux autres jours.

30

Théorie du portefeuille : diversification, illustration numérique

- Reprenons un de nos exemples précédents avec deux titres
 - Rentabilités du titre 1 les 4 dernier jours égales à :
 - +1%, -1%, -1%, +1%, $E_1 = 0\%$, $\sigma_1 = 1\%$
 - Rentabilités du titre 2 les 4 dernier jours égales à : $\rho_{12} = 0$
 - +1%, -1%, +1%, -1%, $E_2 = 0\%$, $\sigma_2 = 1\%$
- Considérons un portefeuille équilibré $\omega_1 = \omega_2 = 0,5$
 - Les rentabilités sont données par $\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2$
 - +1%, -1%, 0%, 0%
 - L'espérance de rentabilité est $\omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 = 0\%$
 - La variance du taux de rentabilité est égale à $1/4 \times (1)^2 + 1/4 \times (-1)^2 + 1/4 \times 0^2 + 1/4 \times 0^2 = 1/2$
 - L'écart-type est égal à $1/\sqrt{2} \approx 0,71\%$
 - Diminution du risque sans diminution de l'espérance de rentabilité
 - Cette diminution du risque n'est effective que les 2 dernières journées

31

coefficient de corrélation linéaire



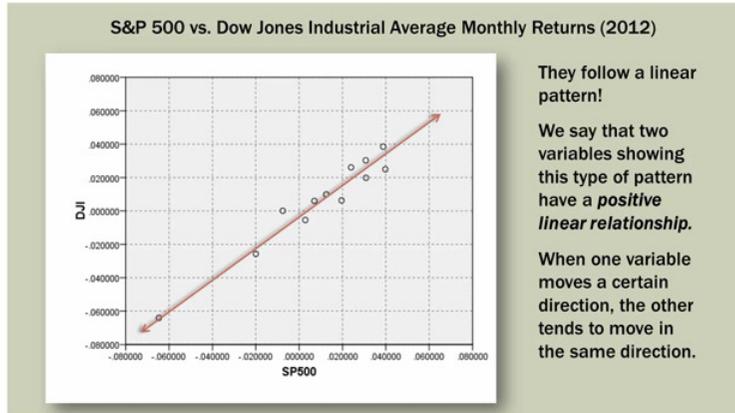
- Prix non synchrones : perturbations dans les calculs
 - Ajustements statistiques à prévoir pour estimations non biaisées

 Spanish Stock Exchange (BME)	CET (UTC+1, DST)	9:00	08:00	17:30	No
 Helsinki Stock Exchange (OMX)	EET (UTC+2, DST)	10:00	08:00	18:30	No
 Hong Kong Stock Exchange (HKEX)	HKT (UTC+8)	09:20	01:20	16:00	12:00 to 13:30
 Hong Kong Futures Exchange (HKFE)	HKT (UTC+8)	09:15	01:15	16:00	12:00 to 13:30
 Bombay Stock Exchange (BSE)	IST (UTC+5.5)	9:15	03:45	15:30	No
 National Stock Exchange of India (NSE)	IST (UTC+5.5)	9:15	03:45	15:30	No

32

La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

Corrélation positive : pente positive (mais pente \neq corrélation, mais Bêta)

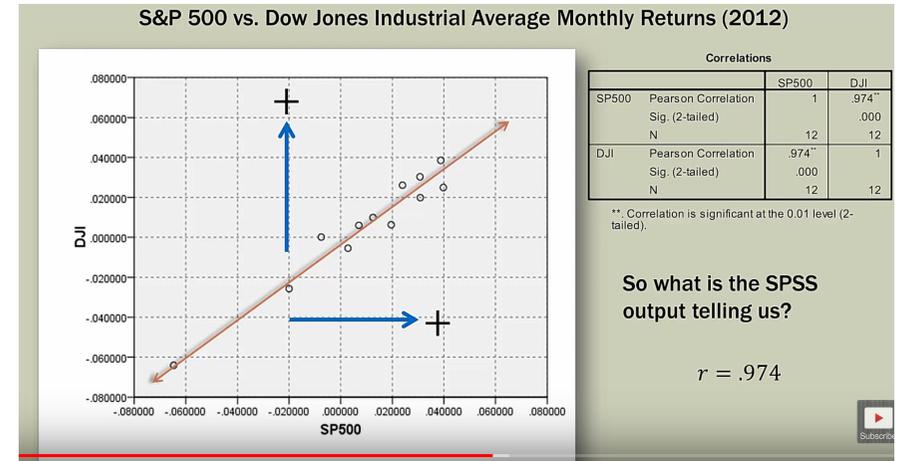


Statistics 101: Understanding Correlation

Youtube : <https://youtu.be/4EXNedimDMs> (affichage de sous-titres)

33

La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

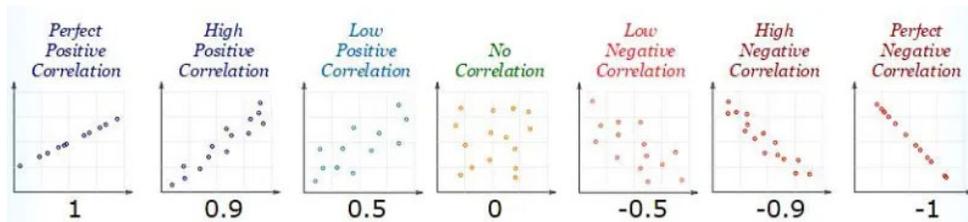


Ici, coefficient de corrélation linéaire = 0.974

34

La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

- A chaque point est associé une date
 - En abscisse la rentabilité d'un titre à cette date
 - En ordonnée, la rentabilité de l'autre titre

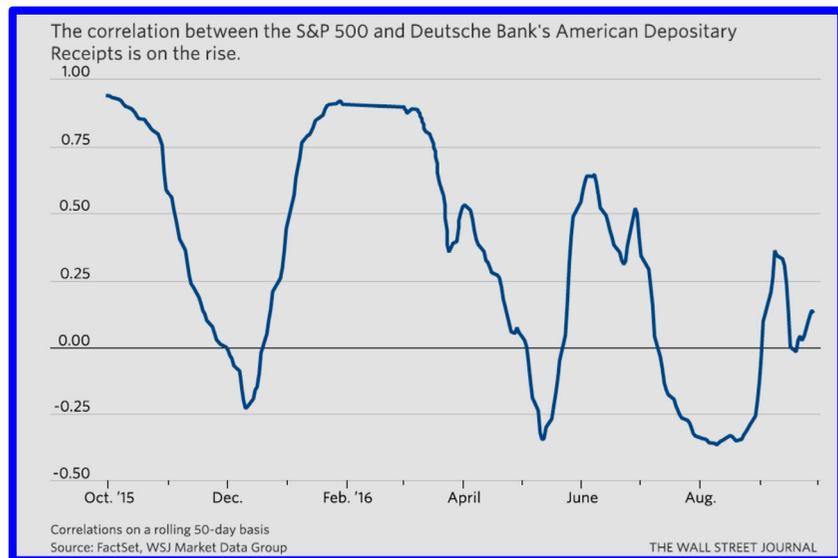


- Plus le nuage de point est allongé, plus le coefficient de corrélation linéaire (sa valeur absolue) est élevé.
 - On a supposé dans le graphique ci-dessus qu'il y a des relations linéaires entre les deux rentabilités.

35

36

Corrélation entre la rentabilité de l'indice S&P500 et de l'action Deutsche Bank (calculée en \$) fluctue entre 90% et -30%



Fin septembre 2015 – Fin septembre 2016, calculée sur 50 jours glissants

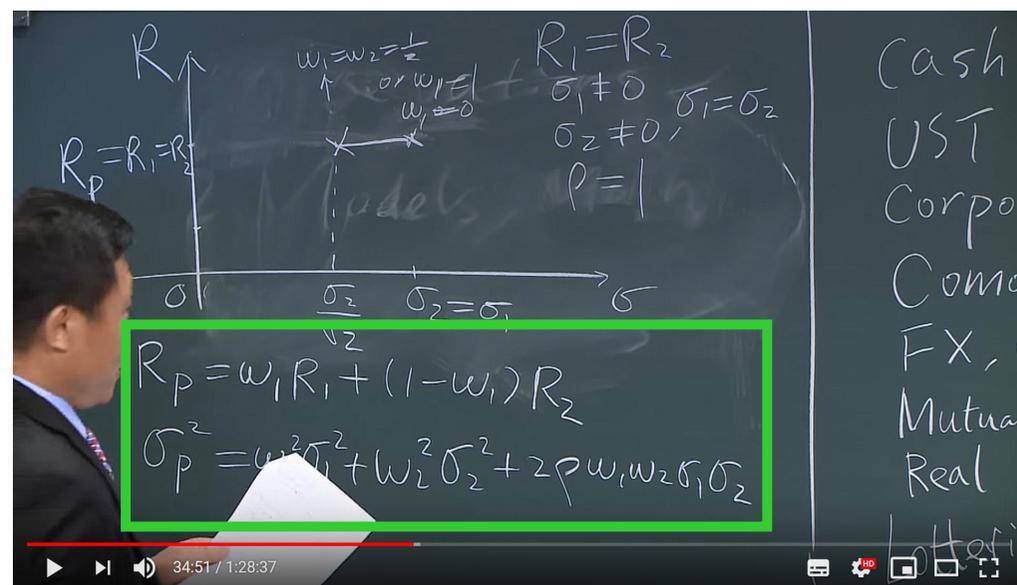
Bloomberg (août 2019), à propos du changement de signe de la corrélation entre les rentabilités des actions et des obligations



<https://www.youtube.com/watch?v=73wgRVkAU5I>

Ecart-type de la rentabilité d'un portefeuille composé de deux actifs

$$\sigma_P = \sqrt{\omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \omega_2^2 \sigma_2^2}$$



MIT Massachusetts Institute of Technology

18.S096, Fall 2013

Topics in Mathematics with Applications in Finance

Jake Xia

Lecture 16: Portfolio Management

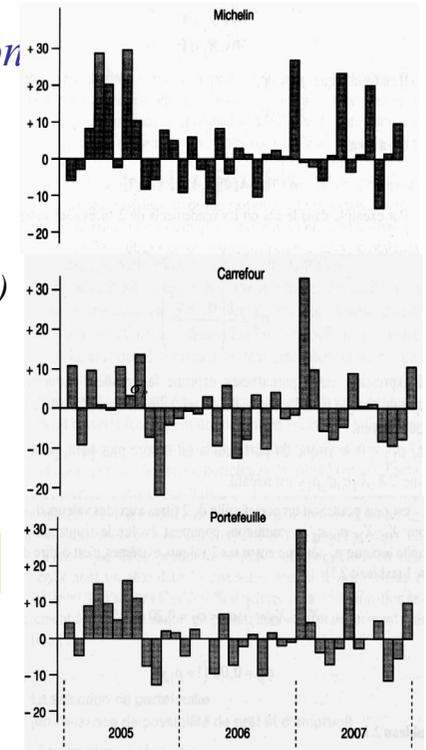
MITOPENCOURSEWARE MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

CC BY-NC-SA

<https://www.youtube.com/watch?v=8TJQhQ2GZ0Y> (lecture en streaming dans youtube permet d'afficher les sous-titres)

41

Le concept de diversification



- Actions Michelin (1), Carrefour (2)

$\sigma_1 = 35\%, \sigma_2 = 42\%$

- Coefficient de corrélation :

$\rho_{12} = 0,32$

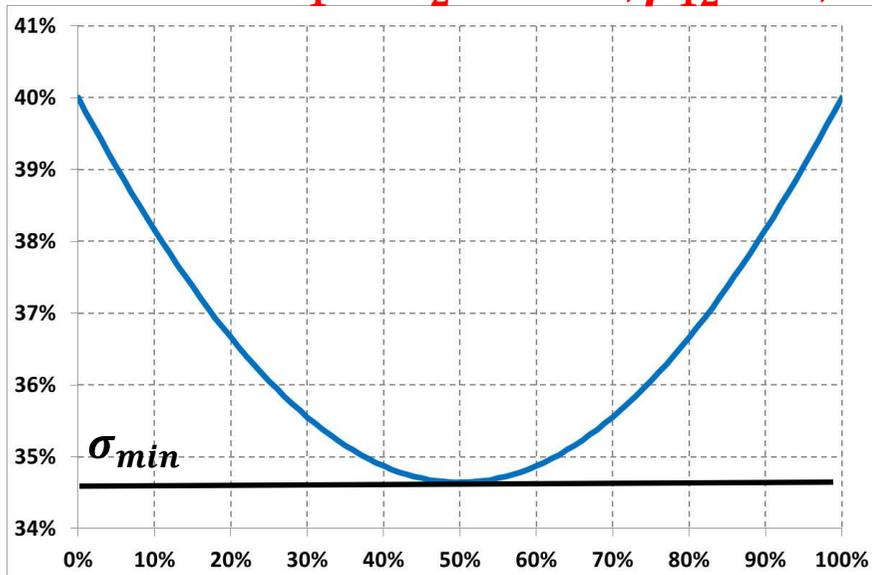
$\omega_1 = \omega_2 = 50\%$

$\sigma_P = 30\%$

- σ_P , le risque d'un portefeuille équilibré n'est que de 30%

En bleu, $\omega_1 \rightarrow \sigma_P(\omega_1)$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 40\%, \rho_{12} = 0,5$



43

Ensembles des portefeuilles composés des titres 1 et 2 (différents niveaux de corrélation)

- Impact du coefficient de corrélation sur le niveau de risque d'un portefeuille

- Exemple :

- $\sigma_1 = 25\%, \sigma_2 = 15\%, E_1 = E_2 = 15\%$

- $\omega_1 = 50\%, \omega_2 = 1 - \omega_1 = 50\%$

- $\sigma_P^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho_{1,2} \omega_1 \omega_2 \sigma_1 \sigma_2 + \omega_2^2 \sigma_2^2$

$\rho_{1,2}$	-100%	-50%	0%	50%	100%
σ_P	5%	11%	15%	18%	20%
E_P	15%	15%	15%	15%	15%

- $E_P = \omega_1 E_1 + \omega_2 E_2$

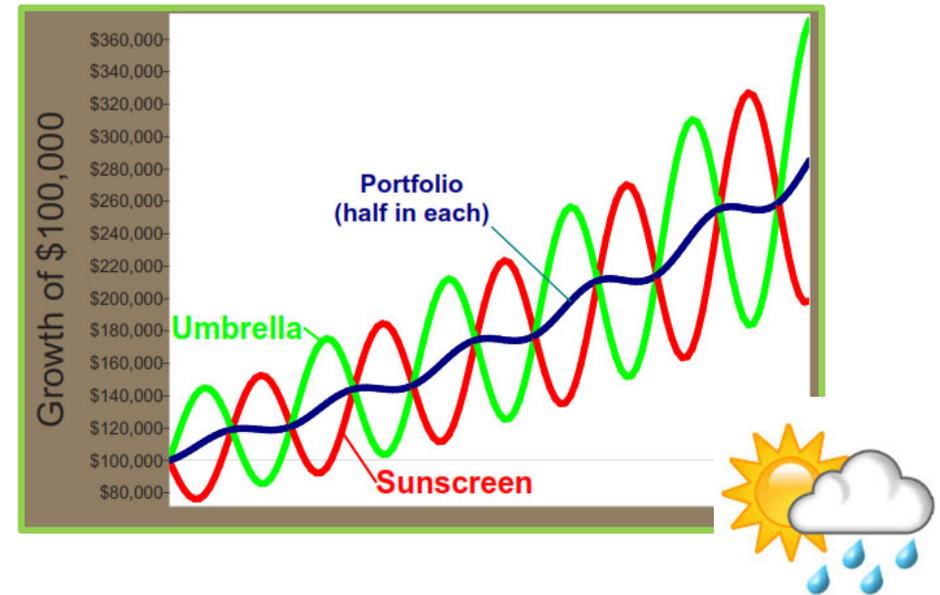
44

La compagnie verte vend des parapluies
la compagnie rouge des crèmes solaires



45

En fusionnant ces deux entreprises, les résultats sont plus stables

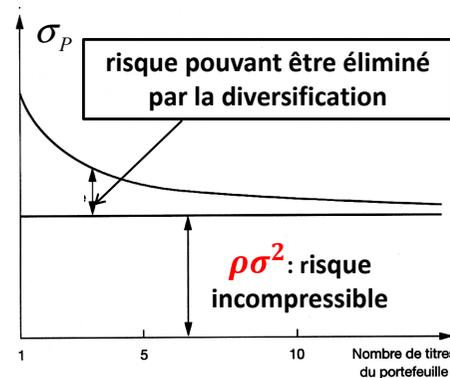


46

Réduction du risque avec le nombre de titres dans le portefeuille

■ **Variance du portefeuille** $\sigma_p^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \rho\sigma^2 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

- σ_p^2 décroît avec le nombre de titres n
- σ^2 variance d'un titre,
- ρ : coefficient de corrélation
- **Risque incompressible $\rho\sigma^2$**



47

Réduction du risque avec le nombre de titres dans le portefeuille

Nombre de titres	Réduction du risque en % du potentiel
1	0 %
2	34,6 %
3	51,5 %
4	61,4 %
5	73,9 %
10	85,7 %
12	91,5 %
15	96,7 %
20	98,2 %
30	98,4 %

Source : Pogue et Solnik (1974).

Réduction rapide du risque en fonction du nombre de titres

Avec 20 titres, 98% du risque diversifiable est éliminé



48

I: Nombre de titres

Démonstration du résultat précédent

■ Rappel

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \rho_{ij} \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j$$

■ Titres symétriques

$$\rho_{ij} = \rho, i, j = 1, \dots, n \quad \sigma_i = \sigma, i = 1, \dots, n$$

■ Portefeuille équipondéré $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n$

■ Comme $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i = 1/n, i = 1, \dots, n$

$$\sigma_p^2 = \frac{\sigma^2}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n 1 \right) + \frac{\rho \sigma^2}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n 1 \right) = \frac{\sigma^2}{n} + \rho \sigma^2 \times \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

Théorie du portefeuille : diversification

- Risques non « diversifiables » ?
- Le tableau ci-contre montre qu'une « mauvaise année »

Indices Paris			
Libellé	Dernier	Var.	Var/1janv.
CAC 40	3 329.92(c)	+4.66%	-40.66%
CAC MID&SMALL 1	4 732.55(c)	+0.19%	-38.91%
SBF 120	2 392.03(c)	+4.23%	-41.09%

- Comme 2008
- Les performances des actifs risqués peuvent être fortement négatives

Indices Internationaux			
Libellé	Dernier	Var.	Var/1janv.
Dax Xetra	4 781.33(c)	+3.43%	-40.73%
Dow Jones	8 852.22(c)	-1.41%	-38.27%
Euro Stoxx 50	2 532.17(c)	+4.47%	-42.46%
Footsie 100	4 063.01(c)	+5.22%	-37.07%
Nasdaq Comp.	1 711.29(c)	-0.37%	-35.48%
Nikkei 225	8 693.82(c)	+2.78%	-43.21%

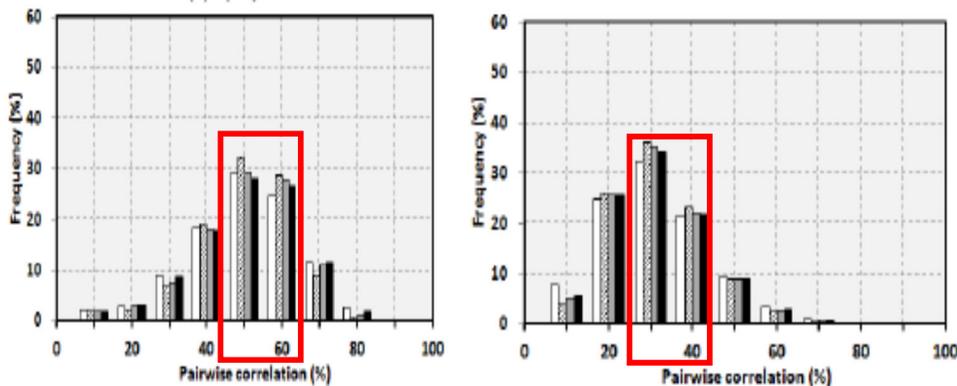
- Uniformément négative
- Par taille
- Par zone géographique
- Par secteur d'activité

- Ceci ne remet pas en cause le principe de diversification

Indices sectoriels Paris			
Libellé	Dernier	Var.	Var/1janv.
Biens de consommat	799.40(c)	+3.23%	-40.68%
Hygiène santé phar	673.13(c)	+6.97%	-30.84%
Industries	702.77(c)	+0.62%	-49.27%
Matériaux de base	1 232.13(c)	+4.74%	-49.23%
Pétrole & Gaz	684.52(c)	+8.82%	-38.02%
Services	696.50(c)	+4.83%	-42.48%
Services aux colle	1 114.92(c)	+6.79%	-42.73%
Sociétés financier	639.62(c)	+1.12%	-41.59%
Télécommunications	988.30(c)	+4.75%	-15.14%
Technologie	448.78(c)	+4.13%	-41.14%

Théorie du portefeuille : diversification

- En période de crise financière, les corrélations tendent à être plus élevées
 - 120 plus grandes entreprises européennes
 - Corrélations en 2008 et en 2013



Théorie du portefeuille : diversification

- Risques non diversifiables ?
- Facteurs économiques communs
 - Sources de risque affectant simultanément tous les secteurs de l'économie
- Contagion
 - Propagation d'une difficulté locale à l'ensemble de l'économie



Théorie du portefeuille : diversification

- La diversification des portefeuilles permet de réduire le risque
- Sans diminution de l'espérance de rentabilité
- Elle a des limites : risque incompressible
- La tendance à la diversification internationale et l'interconnexion des économies rendent les krachs financiers globaux



53

Risques et diversification des risques

- Capital Humain = VAN des revenus futurs issus de l'activité professionnelle
 - *Le principal actif, aucune diversification*
 - *Peut être très risqué (entrepreneurs, professions libérales, banquiers d'affaires, artistes, sportifs)*
- Résidence principale
 - *À nouveau beaucoup de risque, d'autant plus que le financement par endettement est élevé*
 - *Concentration du risque*
- Pourquoi ?
 - *Tolérance au risque, biais d'optimisme, normes sociales (effets de distinction).*

54

Risques et diversification des risques

- Actifs financiers
 - *Les riches diversifient beaucoup mieux leur patrimoine financier*
 - *Ils ont aussi plus d'actifs financiers (en proportion de leur patrimoine).*
 - *Home bias : diversification internationale insuffisante*
 - *Fiscalité ? Prescripteurs ? Peur de l'étranger ?*
 - *Les seniors prennent plus de risques que les jeunes*
 - *À richesse donnée*
 - *Sachant que qu'il y a beaucoup plus de seniors riches que de jeunes riches*
 - *Contraire à la théorie ?*

55

Risques et diversification des risques

- Pour de nombreuses entreprises à l'actionnariat diversifié, pas d'intérêt clair à diversifier les risques
 - *Les risques sont transmis aux actionnaires qui peuvent les diversifier.*
 - *Fin des conglomérats financiers (ITT)*
 - *Même s'il existe des pratiques de couverture financière ou d'assurance des risques industriels (transferts de risque)*
- Sauf le cas d'entreprises patrimoniales ou familiales
 - *Quelques actionnaires importants*
 - *On revient au cas des particuliers*

56