

Cours de Finance (M1)

Exercices : frontière efficiente, CML



Are Markets Efficient? <http://harvardcon.org/?p=2816> Harvard
Economic Review (avec la permission de Dilbert !)

1

Exercices corrigés

- Risque et coefficient de corrélation
- Portefeuille de variance minimale
- Trois actifs parfaitement corrélés
- Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs
- De l'utilité des « mauvaises actions »
- Variation du taux sans risque et classement des actifs risqués
- Portefeuille tangent, ratio de Sharpe, taux sans risque
- Simulation d'allocations
- Vente à découvert, actifs parfaitement corrélés
- Corrélation parfaite, arbitrage
- Corrélation = -1

2

Risque et coefficient de corrélation

- Problème : risque et coefficient de corrélation
 - Portefeuille de deux titres **1, 2**
 - Espérances de rentabilités : $E_1 = 10\%$, $E_2 = 20\%$
 - Écart-types des rentabilités $\sigma_1 = 30\%$, $\sigma_2 = 40\%$
 - $x_1 = x_2 = 50\%$
 - A) Représenter graphiquement dans le plan (E_P, σ_P) , le portefeuille précédent quand le coefficient de corrélation ρ entre les rentabilités des titres **1 et 2** varie entre -1 et $+1$.
 - B) Trouver le coefficient de corrélation tel que l'écart-type de la rentabilité du portefeuille est égal à l'écart-type de la rentabilité du titre **1**.

5

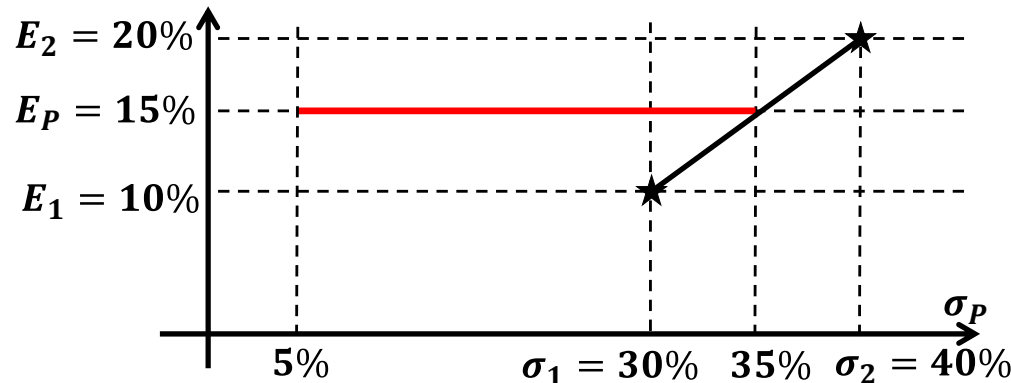
Risque et coefficient de corrélation

- Problème : risque et coefficient de corrélation
 - Il suffit de reprendre les formules donnant E_P et σ_P
 - $E_P = x_1 E_1 + x_2 E_2 = 0,5 \times 10\% + 0,5 \times 20\% = 15\%$
 - E_P ne dépend pas de ρ
 - $\sigma_P^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \rho \sigma_1 \sigma_2$
 - Avec $x_1 = x_2 = 50\%$, $\sigma_1 = 30\%$, $\sigma_2 = 40\%$
 - $2x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 = 0,06 \geq 0$
 - $-1 \leq \rho \leq +1$
 - σ_P croît de manière affine avec ρ
 - Valeur maximale de σ_P quand $\rho = +1$
 - On a alors
 - $\sigma_P = |x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2| = 0,5 \times 30\% + 0,5 \times 40\% = 35\%$

6

Risque et coefficient de corrélation

- Problème : risque et coefficient de corrélation (suite)
 - σ_P croît de manière affine avec ρ
 - Valeur minimale de σ_P quand $\rho = -1$
 - $\sigma_P = |x_1 \sigma_1 - x_2 \sigma_2| = |0,5 \times 30\% - 0,5 \times 40\%| = 5\%$



7

Risque et coefficient de corrélation

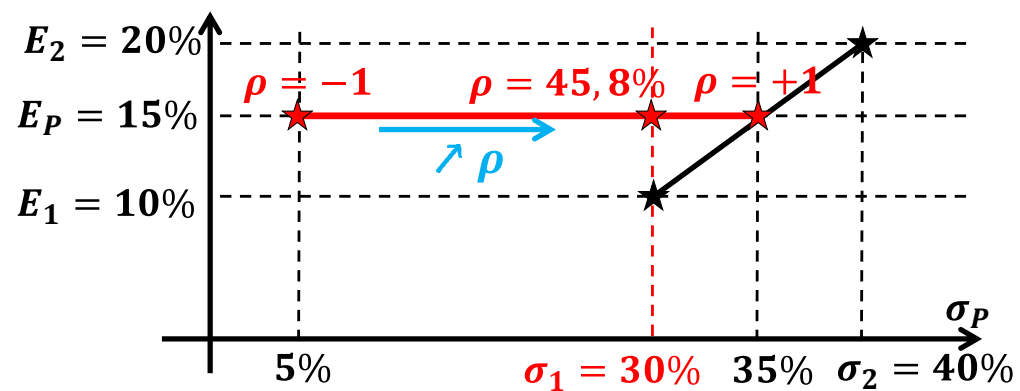
- Problème : risque et coefficient de corrélation (suite)
 - B) Trouver le coefficient de corrélation tel que l'écart-type de la rentabilité du portefeuille est égal à l'écart-type de la rentabilité du titre **1**.
 - Il faut trouver ρ tel que
 - $\sigma_P^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \rho \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1^2$
 - Comme $x_1 = x_2 = 1/2$, il faut trouver ρ tel que
 - $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho \sigma_1 \sigma_2 = 4\sigma_1^2$
 - $2\rho \sigma_1 \sigma_2 = 3\sigma_1^2 - \sigma_2^2$
 - Comme $\sigma_1 = 0,3$, $\sigma_2 = 0,4$
 - $\rho = 11/24 = 45,8\%$

8

Risque et coefficient de corrélation

■ Problème : risque et coefficient de corrélation (suite)

- Les trois situations étudiées $\rho = \pm 1, \rho = 45,8\%$



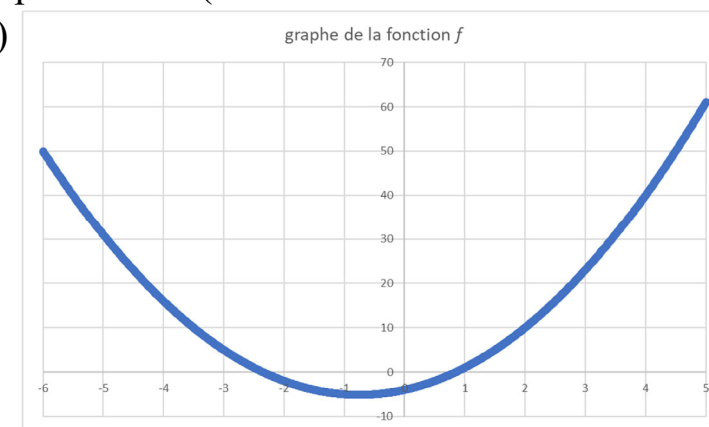
Choix de portefeuille (corrigé de l'exercice 3, partiel janvier 2019)

- Rappel sur les polynômes du second degré
 - Programmes de première Voir les nombreuses vidéos sur youtube
 - <https://www.youtube.com/watch?v=lQxJhGg2GQY&index=3&t=0s&list=PLVUDmbpupCaorRlxu3gIJSnQOy-n61hW>
- $x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$
 - $a, b, c \in \mathbb{R}$
 - f : fonction réelle (Leibniz (1602))
 - x : variable, $f(x)$: image de f pour la valeur x de la variable.
 - Exemple : $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$,

13

Rappels de mathématiques de première, minimisation d'un trinôme

- $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$
- Graphe de la fonction f : ensemble des points $(x, f(x))$ pour x réel (ou dans l'ensemble de variation)



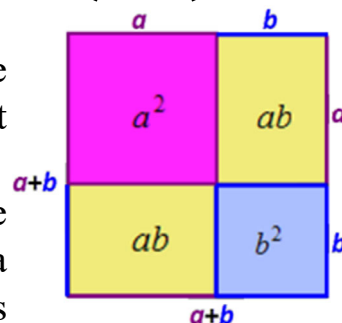
14

Rappels de mathématiques de première, minimisation d'un trinôme

- Identité remarquable (Babylone – 1000 bc).
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, pour a, b réels
- Démonstration ($a, b > 0$) : on considère un carré de longueur de côté $a + b$: son aire est $(a + b)^2$

On découpe ce carré un carré bleu de côté b , un carré rose de côté a et deux rectangles jaunes.

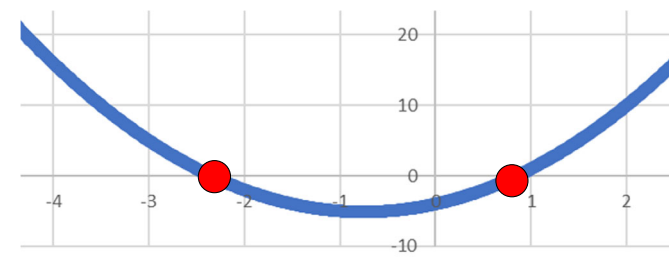
L'identité remarquable exprime que l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux petits carrés et des deux rectangles jaunes



15

Rappels de mathématiques de première, minimisation d'un trinôme

- Racine d'un polynôme de second degré
- Un nombre réel x tel que $ax^2 + bx + c = 0$



- Il s'agit de l'abscisse d'un point d'intersection du graphe de la fonction associée au polynôme et de l'axe des abscisses

16

Rappels de mathématiques de première, minimisation d'un trinôme

- Un polynôme du second degré peut avoir zéro, une ou deux racines réelles
- Forme canonique (exemple) : $2x^2 + 8x - 1$
- $2x^2 + 8x - 1 = 2(x^2 + 2 \times (2x) + 2^2) + 2^3 - 1$
- $2x^2 + 8x - 1 = 2 \times (x + 2)^2 + 7$
- Comme $(x + 2)^2 \geq 0$ et vaut 0 en $x = -2$, la valeur minimale du polynôme est atteinte en $x = -2$ et vaut 7 (ici il n'y a pas de racine réelle).
 - Ici, la valeur minimale est atteinte quand la dérivée du polynôme est égale à zéro:
 - $\frac{d(2x^2+8x-1)}{dx} = 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

17

Application : portefeuille de variance minimale

- On suppose que l'on a deux actifs de volatilité (écart-type de la rentabilité) 30%.
- On note $x_1 = 1 - x_2$, la proportion de la richesse investie dans l'actif 1 et ρ le coefficient de corrélation linéaire
- La variance (carré de l'écart-type) de la rentabilité du portefeuille est égale à $(30\%)^2 \times (x_1^2 + 2 \times \rho x_1 x_2 + x_2^2)$
- $x_1^2 + 2 \times \rho x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2(1 - \rho)x_1 x_2 = 1 + 2(1 - \rho) \times (-x_1 x_2)$
- $\rho \leq 1$: variance minimale si $x_1(x_1 - 1)$ est minimal

18

Application : portefeuille de variance minimale

- $x_1(x_1 - 1) = x_1^2 - x_1 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$
- La variance est alors minimale pour $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ (portefeuille équilibré)
- Composition du portefeuille de variance minimale (dans notre exemple) est indépendante du niveau du coefficient de corrélation linéaire ρ
- Cette variance minimale est égale à $(30\%)^2 \times \left(\frac{1+\rho}{2}\right)$
- Si $\rho = -0,5$, l'écart-type minimal est 15%
- Si $\rho = -1$, l'écart-type minimal est 0%

19

Exercice : portefeuille de variance minimale

Cet exercice nécessite de savoir trouver le minimum d'une fonction

- Problème : portefeuille de variance minimale
 - On considère deux titres risqués 1, 2
 - Espérances des rentabilités : E_1, E_2
 - Écart-types des rentabilités σ_1, σ_2
 - Coefficient de corrélation entre les rentabilités ρ
- A) Variance du portefeuille
 - ω_1, ω_2 : fractions de la richesse allouées aux titres 1, 2
 - Rappeler l'expression de la variance du portefeuille σ_p^2
 - Dépend-elle des espérances de rentabilité ?
 - À quoi correspond la fonction $\omega_1 \rightarrow \sigma_p^2(\omega_1)$?

20

Exercice : portefeuille de variance minimale

- Problème : portefeuille de variance minimale
 - $\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 + x_2^2 \sigma_2^2$
 - Où $x_2 = 1 - x_1$
 - σ_p^2 ne dépend pas de E_1, E_2
 - $\sigma_p^2(x_1)$ est un trinôme
 - Polynôme du second degré de la forme $ax_1^2 + bx_1 + c$
 - Le graphe de la fonction $\omega_1 \rightarrow \sigma_p^2(x_1)$ est une parabole
- B) Minimum de $\sigma_p^2(x_1)$, pas de contrainte de vente à découvert
 - Trouver l'allocation x_1 , telle que la variance du portefeuille est minimale
 - Quand x_1 devient-il négatif?

21

Exercice : portefeuille de variance minimale

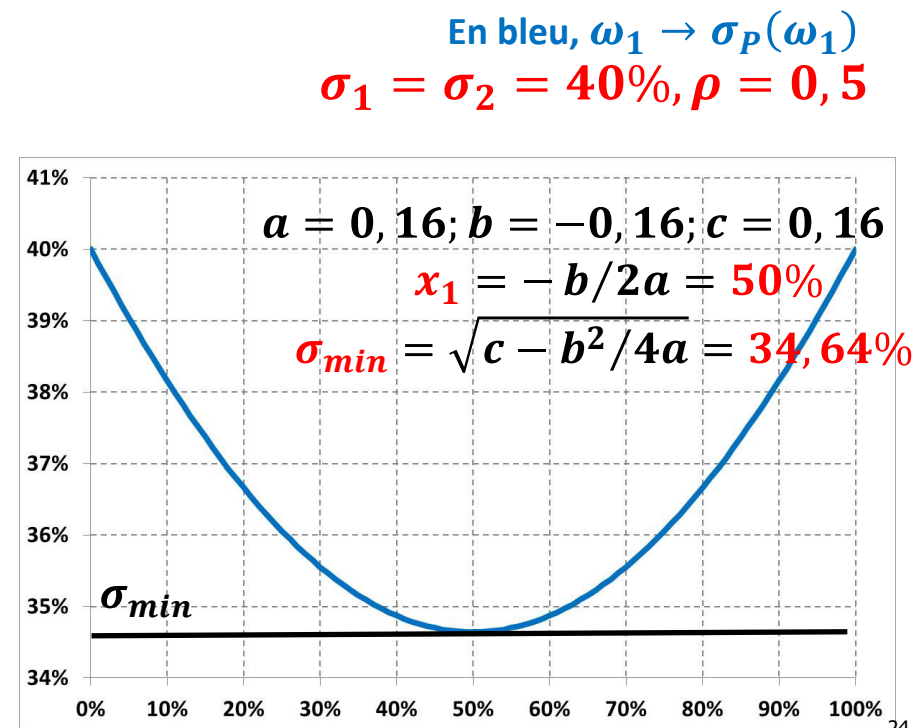
- Allocation x_1 minimisant de $\sigma_p^2(x_1)$
 - $\sigma_p^2(x_1) = x_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 + x_2^2 \sigma_2^2$
 - Où $x_2 = 1 - x_1$
 - $\sigma_p^2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c$
 - $a = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$
 - $b = 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2$
 - $c = \sigma_2^2$
- Si $a > 0$, $\sigma_p^2(x_1)$ est minimal en $x_1 = -b/2a$
 - Calcul de la dérivée de $\sigma_p^2(x_1)$
 - $d\sigma_p^2(x_1)/dx_1 = 2ax_1 + b = 0 \Leftrightarrow x_1 = -b/2a$
- $\omega_1 < 0 \Leftrightarrow b > 0 \Leftrightarrow \rho\sigma_1 > \sigma_2 \Leftrightarrow \beta_{1/2} > 1$

22

Exercice : portefeuille de variance minimale

- Problème : portefeuille de variance minimale
 - Minimum de $\sigma_p^2(x_1)$, pas de contrainte de vente à découvert
- C) Quel est le minimum de la variance du portefeuille ?
- Minimum de $\sigma_p^2(x_1)$
 - $\sigma_p^2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c$
 - $a = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$
 - $b = 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2$
 - $c = \sigma_2^2$
 - Écriture de la forme canonique du trinôme
 - $\sigma_p^2(x_1) = a(x_1 - b/2a)^2 + c - b^2/4a$
- Le minimum de $\sigma_p^2(x_1)$ est donc $c - b^2/4a = -\Delta/4a$
 - Où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant du trinôme

23



24

Exercice : portefeuille de variance minimale

- Problème : portefeuille de variance minimale
- D) Il n'est maintenant plus possible de vendre à découvert le titre 1. Quelle est l'impact de cette contrainte ?
 - Il faut minimiser $\sigma_P^2(x_1)$ sous la contrainte $x_1 \geq 0$
 - Si la contrainte n'est pas active, comme dans le cas précédent, où $x_1 = 50\%$, rien ne change
 - Si $x_1 = -b/2a < 0$ ou de manière équivalente si $\rho\sigma_1 > \sigma_2$, l'optimum précédent ne satisfait pas la contrainte de vente à découvert
 - On obtient alors le graphique suivant
 - Allocation en abscisse
 - Écart-type des rentabilités du portefeuille en ordonnée

25

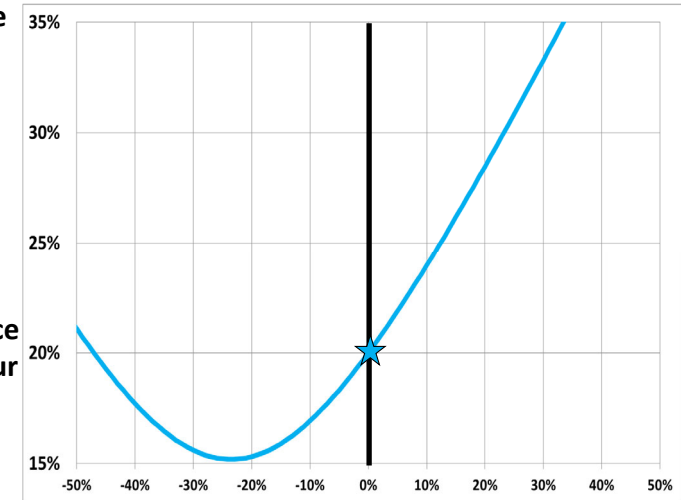
contrainte $x_1 \geq 0$

Exercice : portefeuille de variance minimale

- portefeuille de variance minimale : cas où $\rho\sigma_1 > \sigma_2$

Minimum de la variance obtenu pour $x_1 < 0$
À droite du point minimum, la variance croît avec x_1

Pour $x_1 \geq 0$,
 $\sigma_P^2(x_1) \geq \sigma_P^2(0)$
le portefeuille de variance minimale est obtenu pour
 $x_1 = 0$
Optimum en coin



26

Choix de portefeuille (corrigé de l'exercice 3, partiel janvier 2019)

- Suite du corrigé de l'exercice...
 - Voir annales

27

28

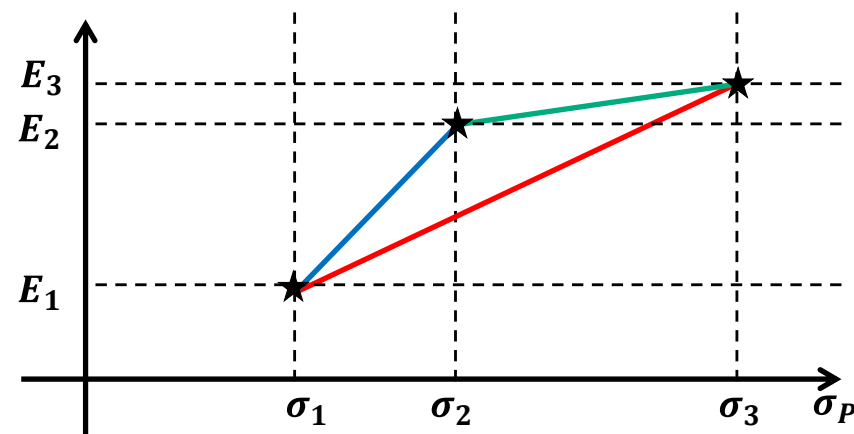
Trois actifs parfaitement corrélés

- Problème : trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
 - $E_1 < E_2 < E_3$, $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$
 - $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
 - $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 1$
- Quelle forme prend la frontière efficiente ?
 - On distinguera deux cas de figure
 - Remarque : on sait comment combiner les titres deux à deux séparément
 - Il s'agit des segments de droite qui relient les points associés aux titres dans le plan (E_P, σ_P)
 - Un dessin met en évidence deux cas de figure

29

Trois actifs parfaitement corrélés

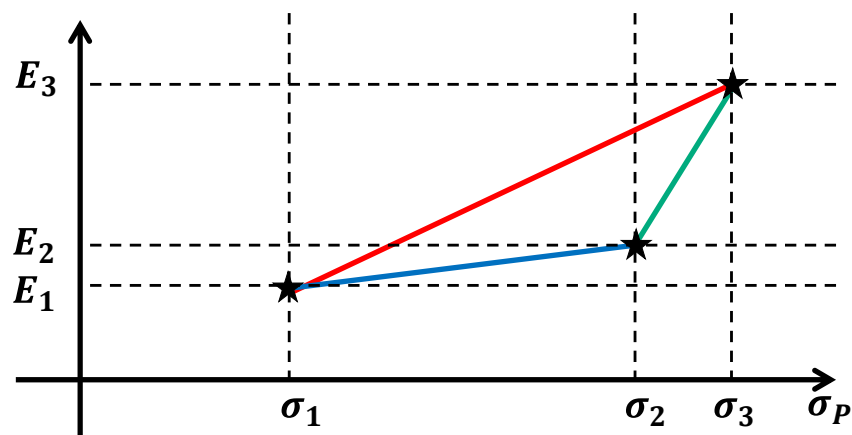
- Problème : trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
 - Premier cas de figure



30

Trois actifs parfaitement corrélés

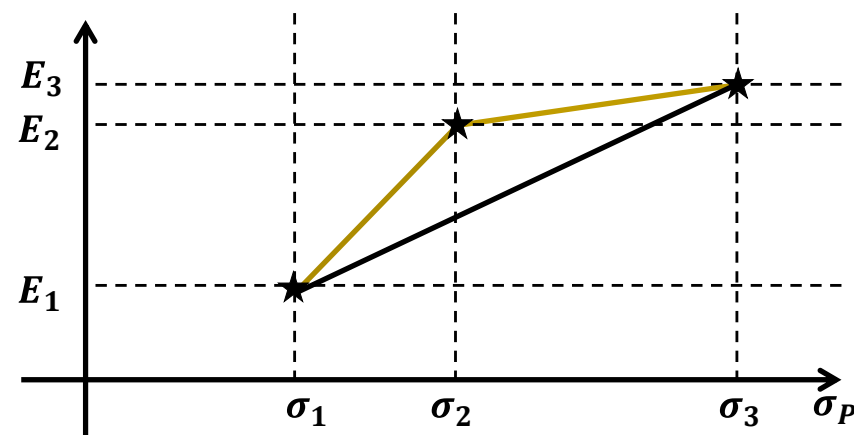
- Problème : trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
 - Second cas de figure



31

Trois actifs parfaitement corrélés

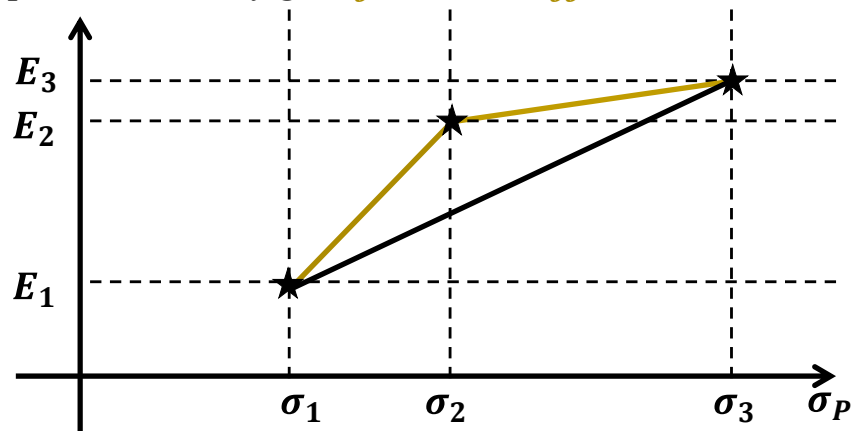
- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
 - Ensemble des portefeuilles atteignables : intérieur du triangle
 - $E_P = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3$, $\sigma_P = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3$



32

Trois actifs parfaitement corrélés

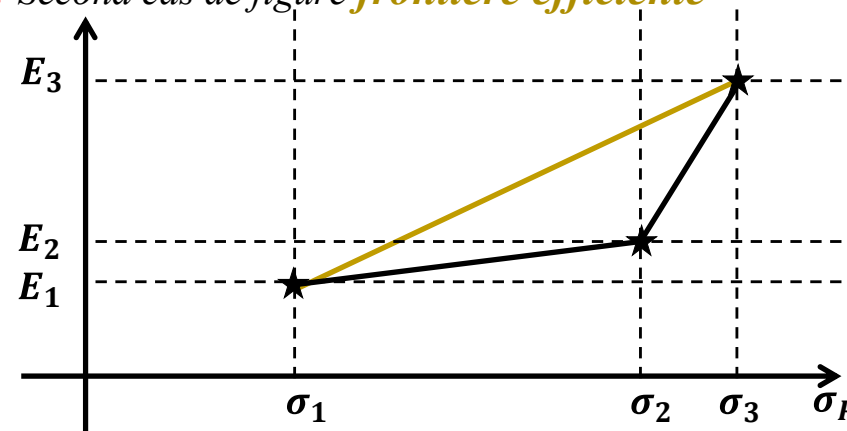
- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
 - Ensemble des portefeuilles atteignables : intérieur du triangle
 - premier cas de figure **frontière efficiente**



33

Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
 - Ensemble des portefeuilles atteignables : intérieur du triangle
 - Second cas de figure **frontière efficiente**



34

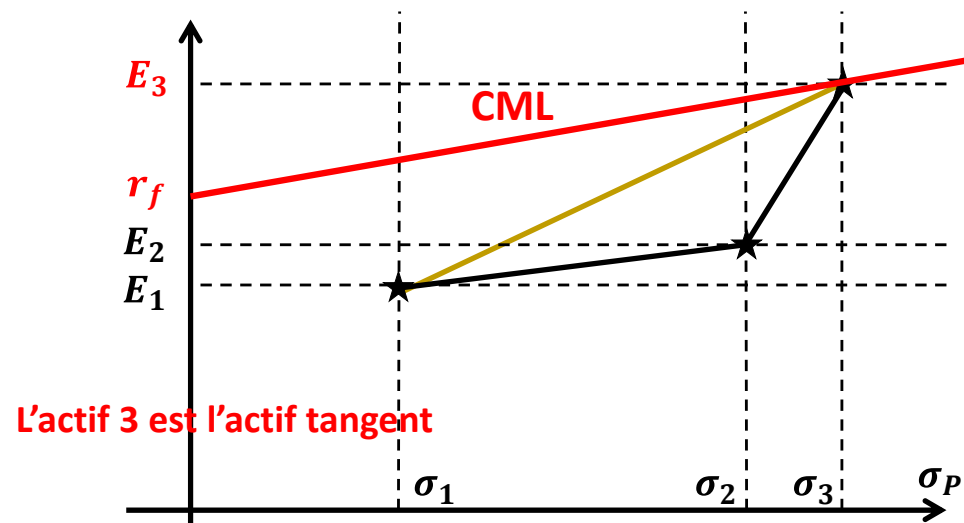
Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
- Introduction d'un placement sans risque, taux r_f
 - Quelle est la forme du portefeuille « tangent » intervenant dans la CML ? On distinguera les deux cas précédents, ainsi que l'influence du niveau du taux sans risque.
 - Le portefeuille tangent est constitué d'actifs risqués
 - La pente de la demi-droite reliant l'actif sans risque à un portefeuille est le ratio de Sharpe de ce portefeuille
 - Le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe
 - Les deux graphiques suivants montrent deux situations correspondant à deux valeurs de r_f

35

Trois actifs parfaitement corrélés

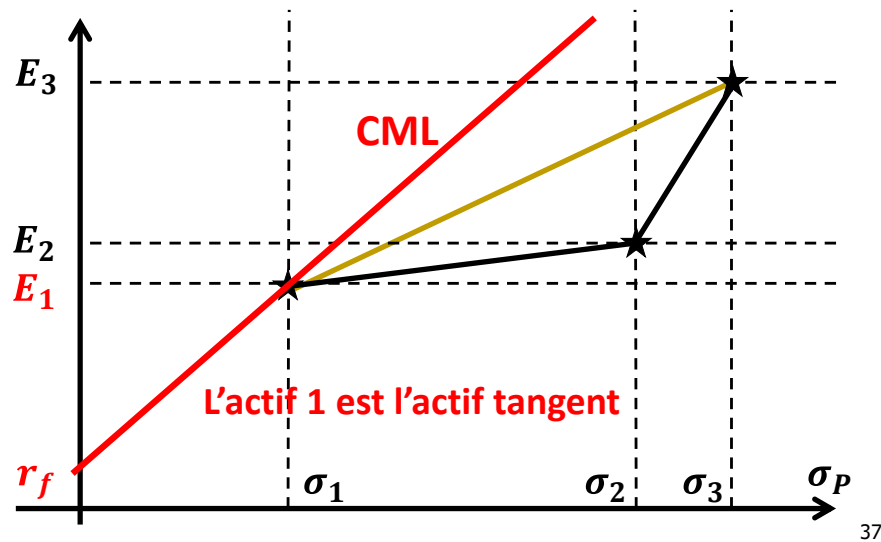
- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert



36

Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert



37

Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
 - Selon la valeur du taux sans risque r_f , le portefeuille tangent est toujours constitué uniquement d'un des trois actifs
 - On omet les cas dégénérés où le portefeuille tangent n'est pas unique, correspondant à l'égalité des ratios de Sharpe.
 - Le portefeuille tangent maximisant le ratio de Sharpe, il suffit donc de calculer les ratios de Sharpe des trois actifs
 - Le portefeuille tangent est constitué à 100% de l'actif de ratio de Sharpe maximal $E_i - r_f / \sigma_i$
 - Il n'y a aucune demande pour les deux autres actifs, qui sont parfaitement corrélés
 - Ils n'apportent donc aucun bénéfice en termes de diversification et ils sont dominés

38

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles (mutuellement) exclusifs
 - Source : Finance 3^e édition, Pearson, Collection Synthex
 - Farber, Laurent, Oosterlink & Pirotte
 - Pages 62 et suivantes
 - Tante Gaga est soumise à un choix cornélien : dans quelle sicav va-t-elle investir son épargne ? Elle a reçu des offres de trois banques (A, B et C) ayant des caractéristiques très différentes
 - $E_A = 5\%, \sigma_A = 6\%$
 - $E_B = 10\%, \sigma_B = 10\%$
 - $E_C = 13\%, \sigma_C = 20\%$
 - Le taux sans risque, r_f est égal à 3%

41

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles (mutuellement) exclusifs
 - Supposons que l'objectif de tante Gaga est d'obtenir une espérance de rentabilité de 9%
 - A) Quelle allocation d'actifs devrait-elle réaliser selon la sicav choisie et quel serait le risque correspondant ?
 - B) Que devrait-elle choisir ?
 - $E_A = 5\%, \sigma_A = 6\%$
 - $E_B = 10\%, \sigma_B = 10\%$
 - $E_C = 13\%, \sigma_C = 20\%$
 - $r_f = 3\%$

42

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles
 - Notons x la part de la richesse investie dans la sicav
 - $E_P = xE_i + (1 - x)r_f = 9\%, \sigma_P = X\sigma_i, i = A, B, C$
 - D'où $X = \frac{E_P - r_f}{E_i - r_f}$
 - $x_A = 300\%, \sigma_P = 18\%$
 - $x_B = 86\%, \sigma_P = 8,57\%$
 - $x_C = 60\%, \sigma_P = 12\%$
 - Remarque : si A est choisie, tante Gaga empruntera pour investir un montant supérieur à son épargne initiale
 - Tante Gaga choisit la solution qui minimise le risque, c'est-à-dire la sicav B

43

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles
 - Tante Gaga est maintenant prête à accepter que le risque de son portefeuille soit de 15%
 - C) Quelle allocation d'actifs devrait-elle réaliser selon la sicav choisie et quelle serait l'espérance de rentabilité correspondante ?
 - D) Que devrait-elle choisir ?
 - E) Le choix de la sicav dépend-il de son objectif ?
 - $E_A = 5\%, \sigma_A = 6\%$
 - $E_B = 10\%, \sigma_B = 10\%$
 - $E_C = 13\%, \sigma_C = 20\%$
 - $r_f = 3\%$

44

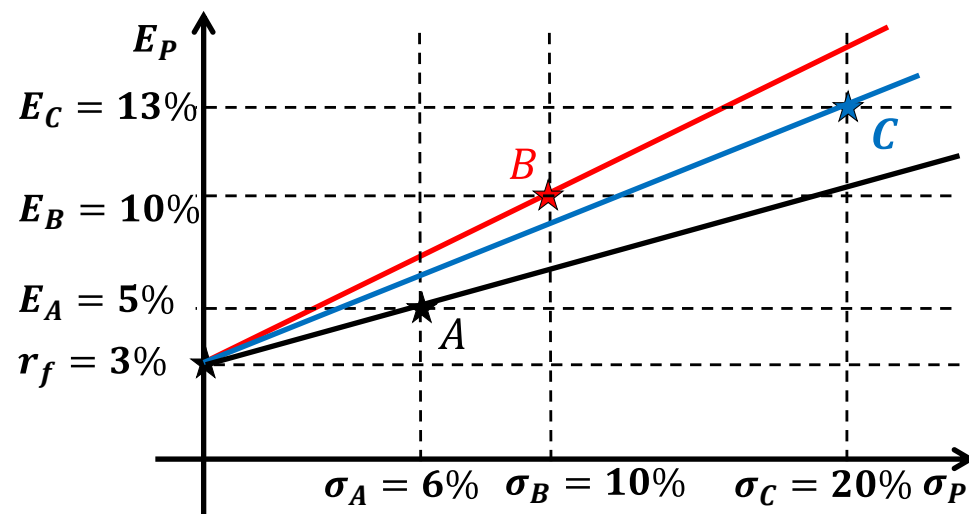
Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles
 - Si Tante Gaga exprime son objectif en termes de risque, la proportion à investir dans la sicav choisie est
 - $x = \sigma_P / \sigma_i$, $i = A, B, C$ avec $\sigma_P = 15\%$
 - L'espérance de rentabilité est alors
 - $E_P = xE_i + (1 - x)r_f = r_f + \frac{E_i - r_f}{\sigma_i} \times \sigma_P$
 - $X_A = 250\%$, $E_P = 8\%$
 - $X_B = 150\%$, $E_P = 13,50\%$
 - $X_C = 75\%$, $E_P = 10,50\%$
 - Tante Gaga choisit la solution qui lui donne la rentabilité attendue la plus élevée : la sicav B de nouveau

45

Révisions, exercices finance de marché

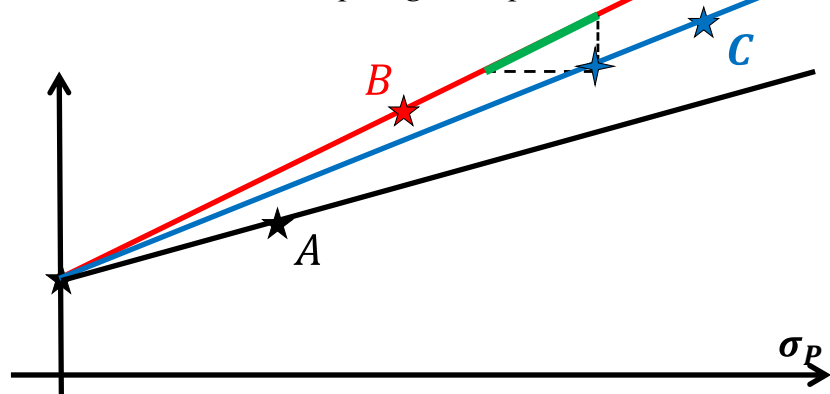
- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles



46

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

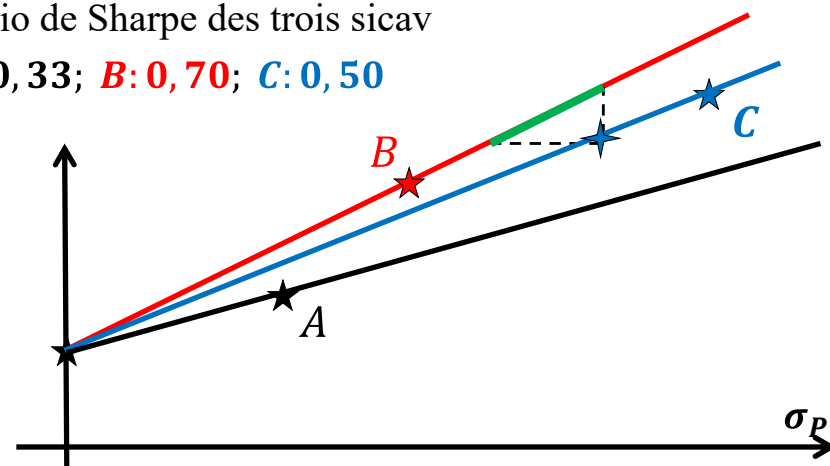
- B est toujours préférée
 - Si le portefeuille $\star$ est sélectionné, impliquant le choix C
 - Tous les portefeuilles en vert seraient préférables
 - Choix de la sicav selon la plus grande pente



47

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Pente des demi-droites $\frac{E_i - r_f}{\sigma_i}$ (ratio de Sharpe)
- Ratio de Sharpe des trois sicav
- A: 0,33; B: 0,70; C: 0,50



48

Exercice : de l'utilité des mauvaises actions...

- Contexte : on rappelle (article JFE) que la quasi-totalité de la création de richesse est due à un très faible pourcentage de grandes sociétés
- Deux types d'actions (à partir des rentabilités ex-post)
 - Actions du type Amazon, Apple, etc. forte rentabilité moyenne
 - Autres actions : rentabilité moyenne = taux sans risque
- Les actions peu performantes doivent-elles être éliminées ?

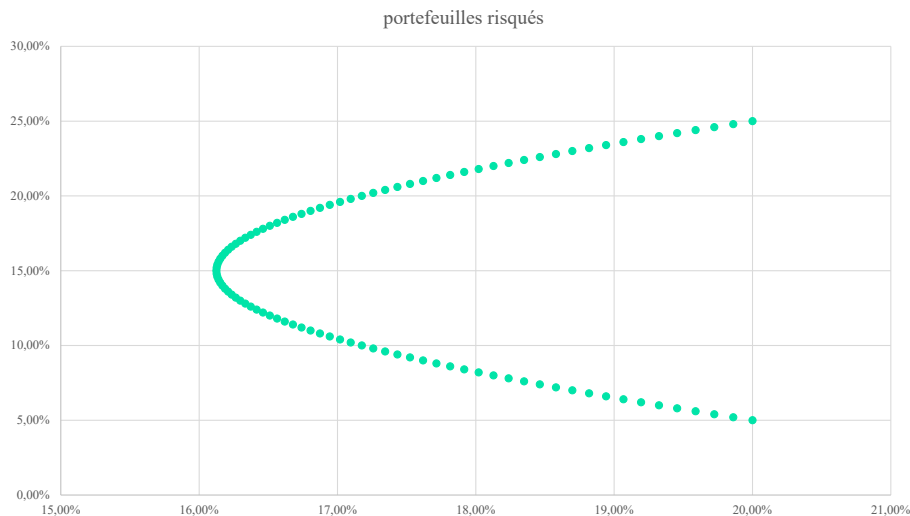
49

Exercice : de l'utilité des mauvaises actions...

- Hypothèses
 - $E_1 = 25\%$, $E_2 = r_f = 5\%$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$, $\rho = 0,3$
- Question 1 : représenter graphiquement les portefeuilles composés des titres risqués 1 et 2
 - Avec des allocations positives (pas de vente à découvert)
 $x_1 \geq 0, x_2 = 1 - x_1 \geq 0$. On notera $y = x_2/x_1, y \geq 0$
- Question 2 : (difficile) écrire le ratio de Sharpe $S(y)$ en fonction de y et du ratio de Sharpe de l'actif 1, $S_1 = \frac{E_1 - r_f}{\sigma_1}$, puis montrer que $S(y) \leq S_1$. Conclure.
- Question 3 (difficile) : montrer que ce résultat reste vrai uniquement sous les conditions $E_2 = r_f, E_1 > r_f$.

50

Portefeuilles risqués :



51

52

Exercice : Variation du taux sans risque et classement des actifs risqués selon le ratio de Sharpe

- Représenter graphiquement une frontière efficiente des actifs risqués (plan écart-type, espérance des rentabilités),
- Représenter la demi-droite reliant l'actif sans risque au portefeuille tangent
 - *On rappelle que le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe (ou la pente de la demi-droite)*
- Faire de même en augmentant le taux sans risque. Comparer les ratios de Sharpe des deux portefeuilles tangents.
- En déduire qu'un changement de taux sans risque change la hiérarchie des classements selon le ratio de Sharpe
- Qu'en conclure à propos du Médaf ?

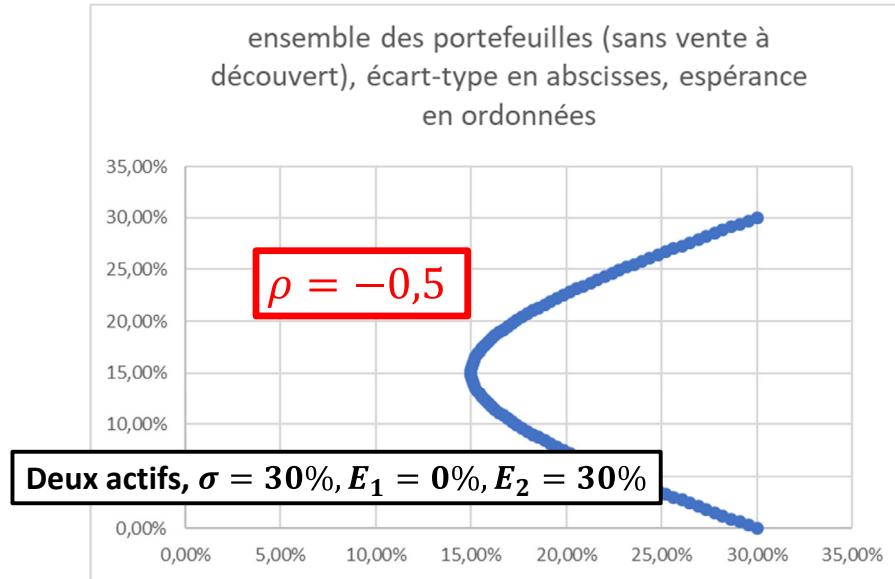
53

54

55

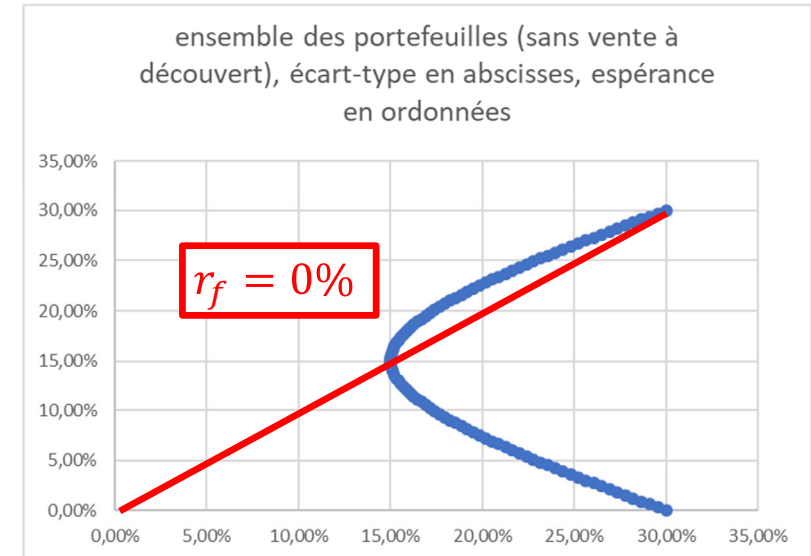
56

Portefeuille tangent, ratio de Sharpe, taux sans risque



57

$$\sigma = 30\%, \rho = -0,5, E_1 = 0\%, E_2 = 30\%$$



58

$$\sigma = 30\%, \rho = -0,5, E_1 = 0\%, E_2 = 30\%, r_f = 0\%$$

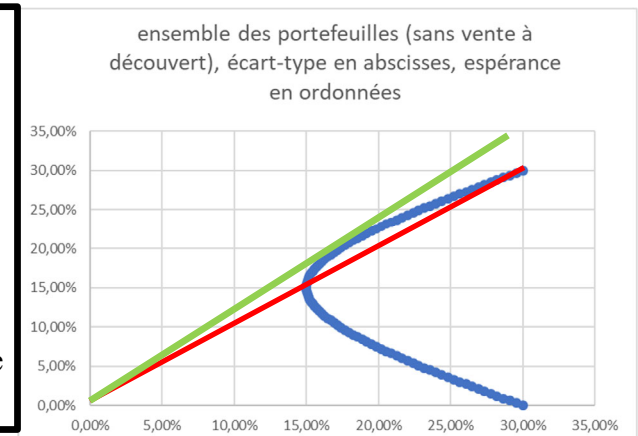
- $E_p = x_1 E_1 + x_2 E_2 = x_2 \times 30\%$
- Ratio de Sharpe du portefeuille du portefeuille composé de l'actif 2 ($x_2 = 1, x_1 = 0$) : $\frac{E_2 - r_f}{\sigma} = 1$
- Ratio de Sharpe du portefeuille de variance minimale ($x_2 = x_1 = 0,5$) : $\frac{15\% - 0\%}{15\%} = 1$
 - Ces deux portefeuilles sont sur la première bissectrice
- Tous les portefeuilles au dessus de la première bissectrice ont des ratios de Sharpe supérieurs à 1
- Ils sont préférés à l'actif 2 et au portefeuille de variance minimale

59

$$\sigma = 30\%, \rho = -0,5, E_1 = 0\%, E_2 = 30\%, r_f = 0\%$$

- Portefeuille tangent entre le portefeuille de variance minimale et l'actif 2 : $0 < x_1 < 0,5$

La demande en actif 1 (d'espérance de rentabilité nulle) est positive, même s'il est risqué et que sa rentabilité n'est pas supérieure au taux sans risque : c'est parce que l'actif 1 a un bénéfice de couverture du risque



60

Composition du portefeuille tangent

- Portefeuille tangent : maximise le ratio de Sharpe
- $S(\omega_2) = \frac{30\% \times x_2}{30\% \times \sqrt{x_1^2 + 2 \times \rho x_1 x_2 + x_2^2}}$
- Cherchons x_2 qui minimise $\frac{1}{S(x_2)^2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2\rho \frac{\omega_1}{\omega_2} + 1$.
- En notant $y = \frac{x_1}{x_2}$, on doit minimiser $y^2 + 2\rho y + 1$.
 - Condition du premier ordre : $2y + 2\rho = 0$
 - Ce qui donne $\frac{x_1}{1-x_1} = -\rho$
 - $x_1 = -\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{3}$ si $\rho = -0,5$

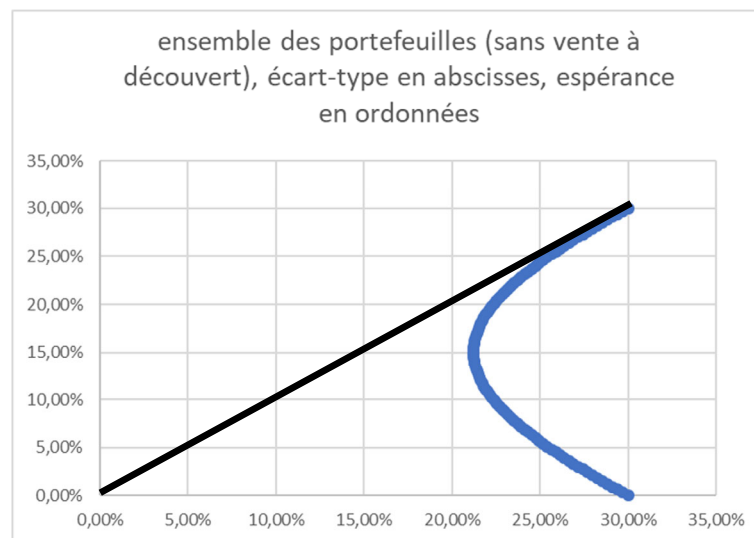
61

Composition du portefeuille tangent

- La maximisation du ratio de Sharpe n'est pas immédiate.
- Il existe une approche plus simple pour déterminer la composition du portefeuille tangent T .
- $E_1 = r_f + \beta_1 \times (E_T - r_f)$
- $E_1 = r_f (= 0) \Rightarrow \beta_1 = 0$
- Comme $\beta_1 = \frac{\text{cov}(R_1, R_T)}{\text{var}(R_T)}$ et $R_T = x_1 R_1 + (1 - x_1) R_2$
- $\text{cov}(R_1, R_T) = x_1 \sigma_1^2 + (1 - x_1) \rho \sigma_1 \sigma_2 = 0$
- $\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow x_1 + (1 - x_1) \rho = 0$
- $x_1 = -\frac{\rho}{1-\rho}$ (on retrouve le résultat du transparent précédent)

62

$$\sigma = 30\%, \rho = 0, E_1 = 0\%, E_2 = 30\%, r_f = 0\%$$



63

$$\sigma = 30\%, \rho = 0, E_1 = 0\%, E_2 = 30\%, r_f = 0\%$$

- Ratio de Sharpe maximal quand $x_1 = -\frac{\rho}{1-\rho} = 0$
- La demande en actif 1 est nulle
- Le titre ne pourrait pas être émis, sauf à baisser son prix de vente, pour que E_1 augmente.
- Il faut que $\rho < 0$, pour que le portefeuille tangent contienne de l'actif 1, si son espérance de rentabilité est égale au taux sans risque
- Question : si on veut émettre un montant $\bar{x}_1$, quel devrait être ce niveau E_1 ?

64

- Si on veut émettre un montant $\bar{x}_1$, quel devrait être E_1 ?
 - On suppose $0 < \bar{x}_1 < 1$ (à l'équilibre quantités positives détenues dans les deux actifs)
- $E_1 = r_f + \beta_1(E_T - r_f)$ où l'indice T fait référence au portefeuille tangent
 - On ne suppose pas ici que $r_f = 0$
 - $\beta_1 = \frac{\text{COV}(R_1, R_T)}{\text{var}(R_T)}$, $R_T = \bar{x}_1 R_1 + (1 - \bar{x}_1) R_2$
 - $\beta_1 = \frac{\bar{x}_1 \sigma_1^2 + (1 - \bar{x}_1) \rho \sigma_1 \sigma_2}{\bar{x}_1^2 \sigma_1^2 + 2\bar{x}_1(1 - \bar{x}_1) \rho \sigma_1 \sigma_2 + (1 - \bar{x}_1)^2 \sigma_2^2}$
 - Comme $\sigma_1 = \sigma_2$, $\beta_1 = \frac{\bar{x}_1 + (1 - \bar{x}_1) \rho}{\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_1(1 - \bar{x}_1) \rho + (1 - \bar{x}_1)^2}$
 - β_1 est connu. Si $\rho = 0$, $\beta_1 = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_1^2 + (1 - \bar{x}_1)^2}$

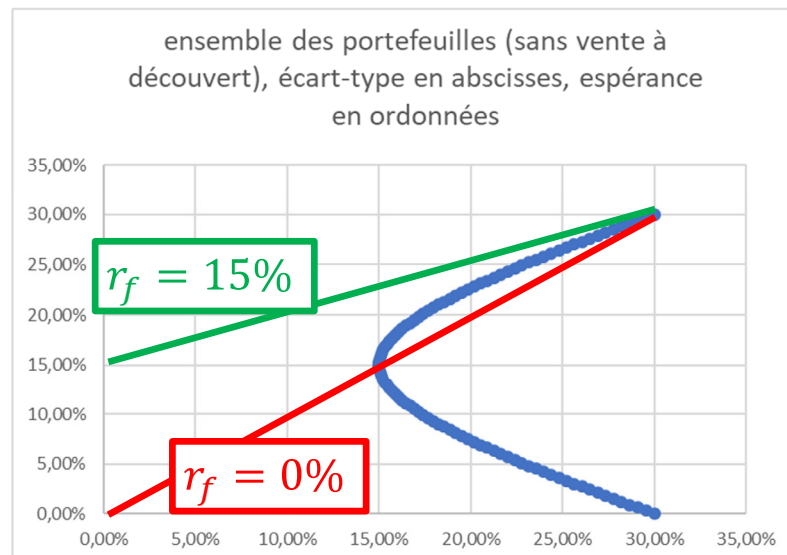
65

$$\sigma = 30\%, \rho = 0, E_1 = ?, E_2 = 30\%, r_f = 0\%$$

- $E_1 = r_f + \beta_1(\bar{x}_1 E_1 + (1 - \bar{x}_1) E_2 - r_f)$
- $E_1 = \frac{r_f + \beta_1((1 - \bar{x}_1) E_2 - r_f)}{1 - \beta_1 \bar{x}_1}$
 - Remarque : on vérifie facilement que $0 < \beta_1 \bar{x}_1 < 1$
 - Si $r_f = 0$, $E_1 = \frac{\beta_1(1 - \bar{x}_1)}{1 - \beta_1 \bar{x}_1} \times E_2$
 - On obtient $E_1 = \frac{\bar{x}_1}{1 - \bar{x}_1} \times E_2 = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \times E_2$
 - Exemple numérique : $\bar{x}_1 = \frac{1}{3}$, $E_1 = \frac{E_2}{2} = 15\%$

66

$$\sigma = 30\%, \rho = -0,5, E_1 = 0\%, E_2 = 30\%$$



67

Ratio de Sharpe et taux sans risque

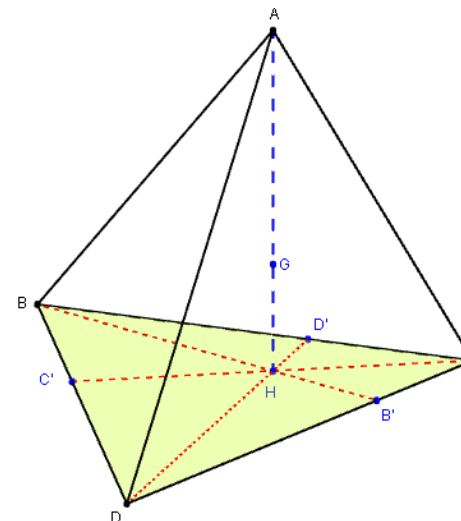
- Le taux sans risque passe de 0% à 15%. Comparer les portefeuilles tels que $0,5 < x_2 < 1$ à l'actif 2 ($x_2 < 1$) dans chacun des deux cas
- Cas 1 : $r_f = 0\%$, les ratios de Sharpe des portefeuilles tels $0,5 < x_2 < 1$ sont supérieurs à celui de l'actif 2 ; ils sont donc préférés à l'actif 2.
- Cas 2 : $r_f = 15\%$, les ratios de Sharpe des portefeuilles tels $0,5 < x_2 < 1$ sont inférieurs à celui de l'actif 2. C'est l'actif 2 qui est préféré.
- Un changement de r_f entraîne un changement de l'ordre de préférence selon le ratio de Sharpe.

68

Simulation d'allocations de portefeuille (voir exercices et révisions)

- Simulation aléatoire et uniforme d'allocations x_i , $i = 1, \dots, n$
 - On se restreint à des allocations positives : $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ (n , nombre d'actifs), ω_i pourcentage de la richesse investie dans l'actif i
 - En outre, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.
 - Ceci définit un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, connu comme le simplexe régulier (probability simplex)
 - Dans le cas $n = 3$, le simplexe est un triangle équilatéral
 - Dans le cas $n = 4$, le simplexe est un tétraèdre régulier (figure géométrique à quatre faces dans le plan, chaque face étant un triangle équilatéral)
 - Problème posé au bac, il y a peu.

69



Simplexe probabiliste (représentation géométrique de portefeuilles avec 4 actifs risqués) : Tétraèdre régulier construit avec le logiciel du collègue géogebra. Il y a quatre sommets, 6 arêtes et 4 faces, chacune étant un triangle équilatéral

70

Simulations d'allocations de portefeuille

- Tirage uniforme dans le simplexe (interdiction de vente à découvert), cas $n = 3$
 - $U_1, \dots, U_n$ variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$ indépendantes
 - $-\ln(U_1) \dots, -\ln(U_n)$. $T = -\ln(U_1) - \ln(U_2) - \ln(U_3)$,
 $x_i = \frac{-\ln(U_i)}{T}$, $i = 1, 2, 3$
 - Autre approche : On ordonne les variables $U_1, \dots, U_{n-1}$ de la plus petite à la plus grande, soit $0 < U^1 < \dots < U^{n-1} < 1$, les variables ordonnées. On définit $U^0 = 0$, $U^n = 1$, puis on considère les n écarts $S_{i-1} = U_i - U^{i-1}$, $i = 1, \dots, n$.
 - Les écarts $S_0, \dots, S_{n-1}$ suivent une loi uniforme sur le simplexe

71

Simulations d'allocations de portefeuille

- Simulation à partir des écarts (espacements) entre les statistiques d'ordre de variables aléatoires uniformes indépendantes

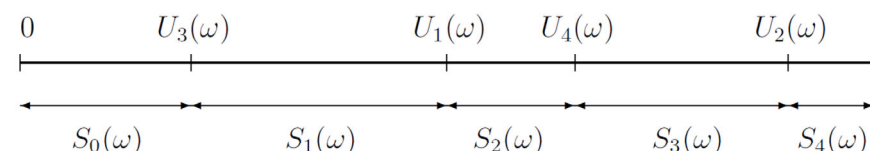


FIGURE 1.4 – Espacements d'un 4-échantillon

72

Tirage uniforme sur une sphère (simulation uniforme d'actifs risqués, en présence d'un actif non risqué)

- On va chercher des allocations d'actifs risqués $(x_1, \dots, x_n)$
- x_i pourcentage de la richesse investie dans l'actif risqué i
- $\sum_{i=1}^n x_i = 1 - x_0$. x_0 , proportion de la richesse investie dans l'actif sans risque.
- Quand on introduit l'actif sans risque, on n'a plus la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i = 1$
- Pour que le problème de simulation uniforme soit bien posé, on introduit la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$
- Les x_i sont sur une sphère centrée sur l'origine et de rayon unitaire

73

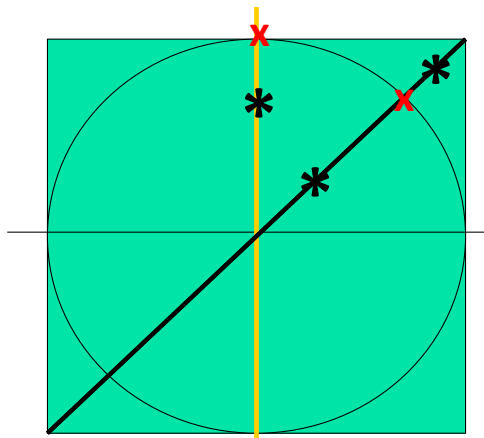
Tirage uniforme sur une sphère (simulation uniforme d'actifs risqués, en présence d'un actif non risqué)

- Tirage aléatoire d'un point sur une sphère ?
- On va commencer par tirer de manière uniforme dans le cube contenant la sphère
- Les côtés du cube sont de longueur 2 et le cube est centré sur l'origine
- $y_i = 2 \times \left(\text{alea}() - \frac{1}{2} \right)$, $i = 1, \dots, n$
 - dans Excel `alea()` génère une va uniforme sur $[0,1]$
- On projette ensuite le point $(y_1, \dots, y_n)$ sur la sphère (le cercle dans les illustrations qui suivent) : $x_i = \frac{y_i}{\sqrt{\sum_k y_k^2}}$, $i = 1, \dots, n$. On a bien $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$

74

Tirage uniforme sur une sphère (simulation uniforme d'actifs risqués, en présence d'un actif non risqué)

- S'agit-il d'un tirage uniforme ?
 - * correspond à (y_1, y_2) , x correspond à (x_1, x_2)
projection sur le cercle

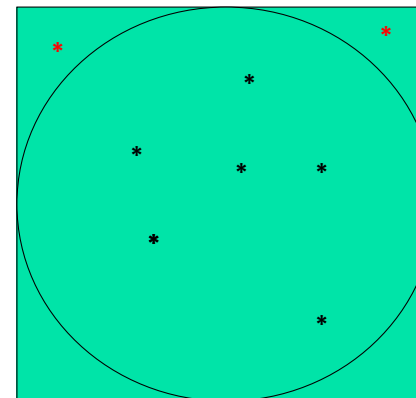


La probabilité de tirer selon la première bissectrice (équipondération) est $\sqrt{2}$ fois plus élevée que selon l'axe des abscisses ou des ordonnées (un seul actif)

75

Méthode de rejet

- On tire de manière uniforme dans l'hypercube (les côtés sont de longueur égale à 2). Si $\sum_{j=1}^n y_j^2 > 1$, on oublie le tirage. Sinon on retient $(y_i / \sum_{j=1}^n y_j^2)_{i=1, \dots, n}$



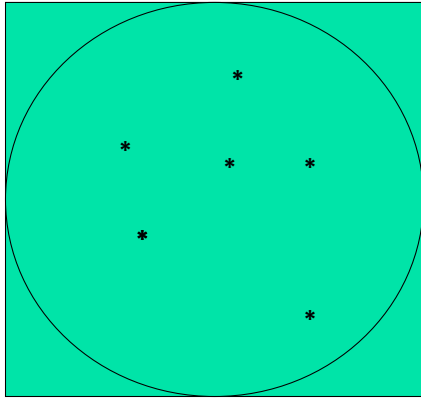
En noir, points acceptés
En rouge, points rejetés

<https://fr.wikipedia.org/wiki/N-sph%C3%A8re>

76

Méthode de rejet

- On tire de manière uniforme dans l'hypercube (les côtés sont de longueur égale à 2). Si $\sum_{j=1}^n y_j^2 > 1$, on oublie le tirage. Sinon on retient $x_i = y_i / \sum_{j=1}^n y_j^2$, $i = 1, \dots, n$



Problème : rejet fréquent quand n grand. Volume de l'hypercube 2^n , Volume de l'hypersphère $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$, taux de rejet rapport entre les volumes

<https://fr.wikipedia.org/wiki/N-sph%C3%A8re>

77

Simulations d'allocations positives ?

- On peut corriger le biais précédent, en ne prenant en compte que les points tombant à l'intérieur du cercle.
- Pour $n = 3$, l'algorithme consiste donc à ne prendre en compte que les tirages (y_1, y_2, y_3) tels que $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \leq 1$
 - Remarque : le nombre de tirages retenus rapporté au nombre de tirages est une mesure du rapport entre la surface du cercle, π et celle du carré, 4
 - On n'utilise pas tous les tirages : peu économique en grande dimension
 - Remarque : En dimension 2, on aurait pu faire simplement, par exemple en tirant de manière uniforme la valeur de l'angle dans $[0, 2\pi]$. Mais, on ne peut pas généraliser.

78

Simulations sur la sphère

- On peut aussi utiliser des simulations de lois normales
- Soit $U_1, \dots, U_n$, n variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0, 1]$.
- On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,
- On considère les n variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes $X_1 = \Phi^{-1}(U_1), \dots, X_n = \Phi^{-1}(U_n)$
- On génère des allocations, $x_1 = \frac{X_1}{\sum_i X_i^2}, \dots, x_n = \frac{X_n}{\sum_i X_i^2}$

79

Simulations sur la sphère

- Les allocations $(x_1, \dots, x_n)$ sont uniformément distribuées sur la sphère
 - De par les propriétés des lois normales
 - La loi de $(X_1, \dots, X_n)$ est invariante par rotation
 - Il en est donc de même pour la loi de $(x_1, \dots, x_n)$
 - Les courbes d'isodensité de $(X_1, \dots, X_n)$ sont des sphères centrées sur l'origine.
- Cette approche peut être utilisée pour trouver, par simulation, la composition du portefeuille tangent
 - Kim, & Lee (2016). A uniformly distributed random portfolio. Quantitative Finance.

80

Simulations sur la sphère

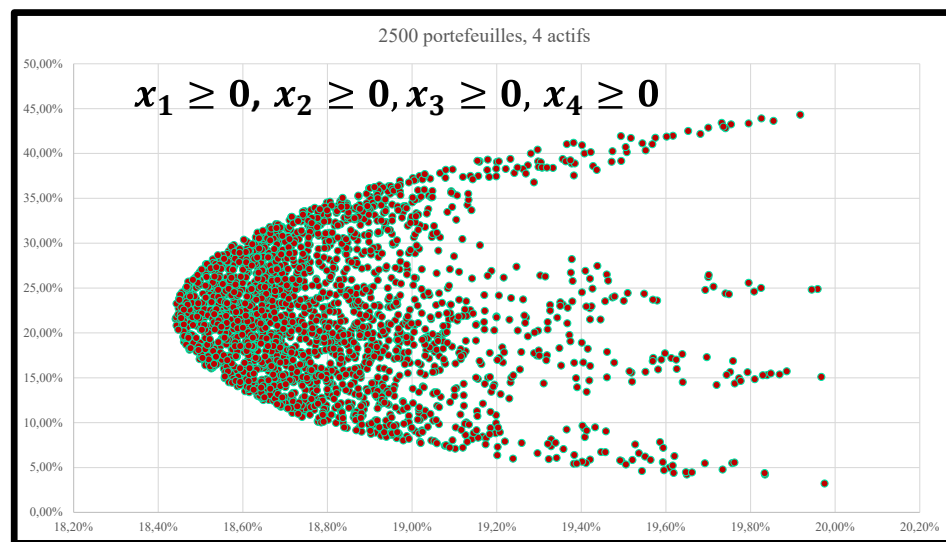
- En effet, le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe.
- C'est vrai aussi pour tout portefeuille de la CML, c'est-à-dire combinant actif sans risque et portefeuille tangent
- Notons x_0 l'allocation en actif sans risque et $x_1, \dots, x_n$ les allocations en actifs risqués. $x_1 + \dots + x_n = 1 - x_0$
- $E_P - r_f = x_0 r_f + (\sum_{i \geq 1} x_i E_i) - r_f = \sum_{i \geq 1} x_i (E_i - r_f)$
- Notons $\bar{E}_i = E_i - r_f$, l'espérance de rentabilité nette du taux sans risque. $\sum_{i \geq 1} x_i \bar{E}_i = x' \bar{E}$ où x' est le transposé du vecteur (colonne) x
- Le ratio de Sharpe s'écrit comme $\frac{x' \bar{E}}{(x' \Omega x)^{1/2}}$

81

Simulations d'allocations positives

- Remarque : L'algorithme précédent permet de réaliser des tirages (x_1, x_2, x_3) uniformément distribués sur la sphère unité.
- On remarque que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ et $x_1^2 \geq 0, x_2^2 \geq 0, x_3^2 \geq 0$
- On peut donc utiliser cet outil pour simuler des allocations dans le simplexe (c'est-à-dire en cas d'interdiction des ventes à découvert).
- Mais (x_1^2, x_2^2, x_3^2) ne correspond pas à un d'un tirage uniforme dans le simplexe
 - Si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, ce n'est pas le cas de U^2 (plus grande densité de valeurs proches de zéro)

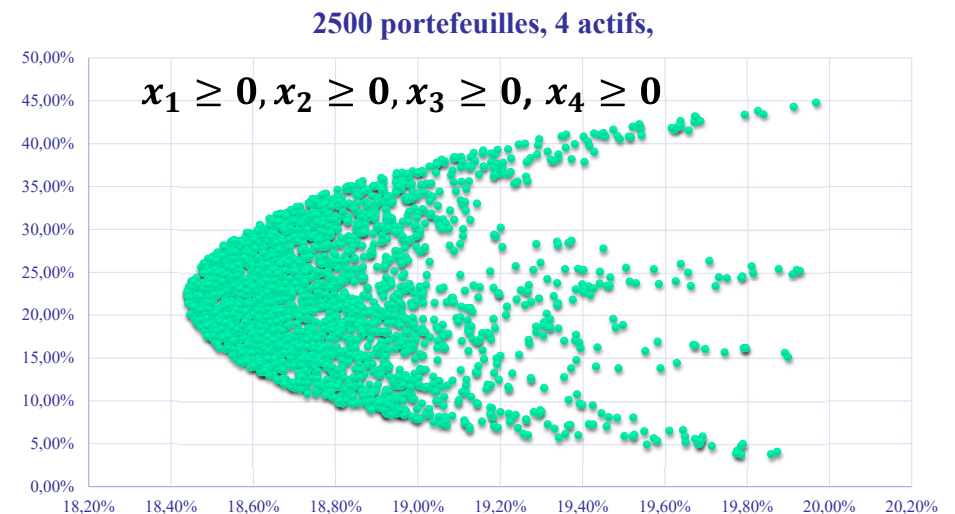
82



$E_1 = 3\%, E_2 = 15\%, E_3 = 25\%, E_4 = 25\%,$
 $\sigma_1 = 20\%, \sigma_2 = 20\%, \sigma_3 = 20\%, \sigma_4 = 20\%,$
 $\rho = 40\%$ (équi-corrélation)

83

Il est intéressant d'étudier la partie droite : elle correspond à des allocations de 100% dans chacun des 4 actifs



$E_1 = 3\%, E_2 = 15\%, E_3 = 25\%, E_4 = 45\%,$
 $\sigma_1 = 20\%, \sigma_2 = 20\%, \sigma_3 = 20\%, \sigma_4 = 20\%, \rho = 40\%$ (équi-corrélation)

84

Simulation aléatoire dans un simplexe régulier et sur une sphère

■ Références mathématiques :

- *Kim & Lee (2016). A uniformly distributed random portfolio. Quantitative Finance.*
- *Rubinstein, & Melamed (1998). Modern simulation and modeling (Vol. 7). Wiley.*
- *Polycopié de Charles Suquet sur la simulation, Université des Sciences et Technologies de Lille*
- *Onn & Weissman (2011). Generating uniform random vectors over a simplex with implications to the volume of a certain polytope and to multivariate extremes. Annals of Operations Research.*

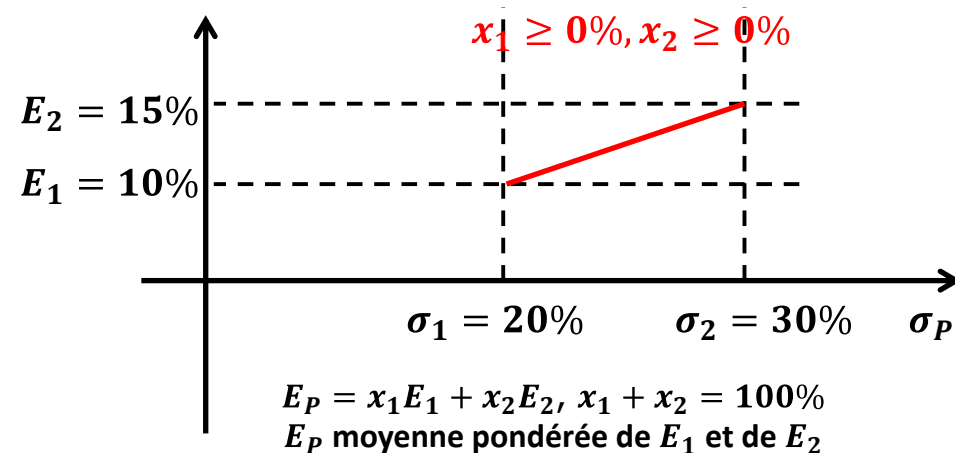
Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- Problème : titres avec des rentabilités parfaitement corrélés
 - Deux titres 1, 2
 - Espérances de rentabilités : $E_1 = 10\%$, $E_2 = 15\%$
 - Écart-types des rentabilités $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 30\%$
 - Coefficient de corrélation entre les rentabilités : $\rho_{12} = +1$
 - A) Représenter graphiquement dans le plan (E_P, σ_P) (écart-type des rentabilités en abscisse, espérance des rentabilités en ordonnée), l'ensemble des portefeuilles formés des titres 1 et 2. On suppose qu'on ne peut vendre à découvert aucun des deux titres.
 - B) Représenter dans le plan (E_P, σ_P) , l'ensemble des portefeuilles formés des titres 1 et 2. On ne peut vendre à découvert 2, mais c'est possible pour 1

89

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

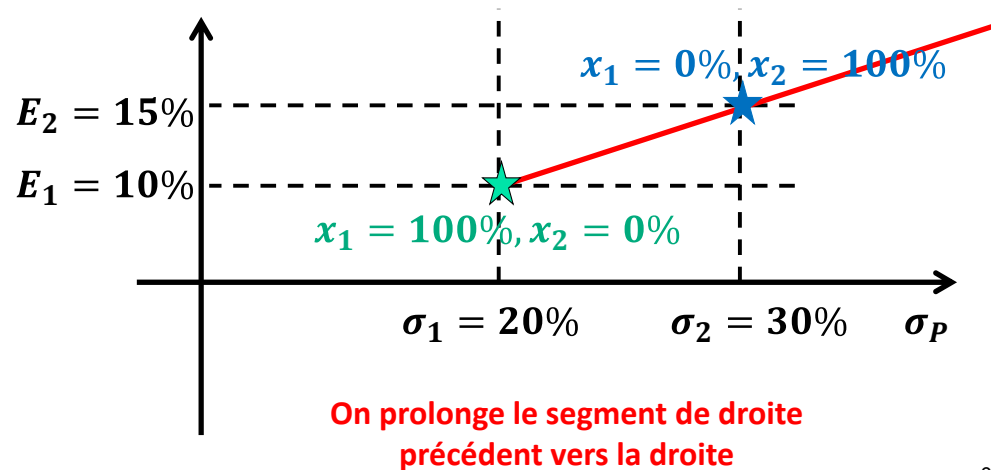
- A) On suppose qu'on ne peut vendre à découvert aucun des deux titres.



90

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

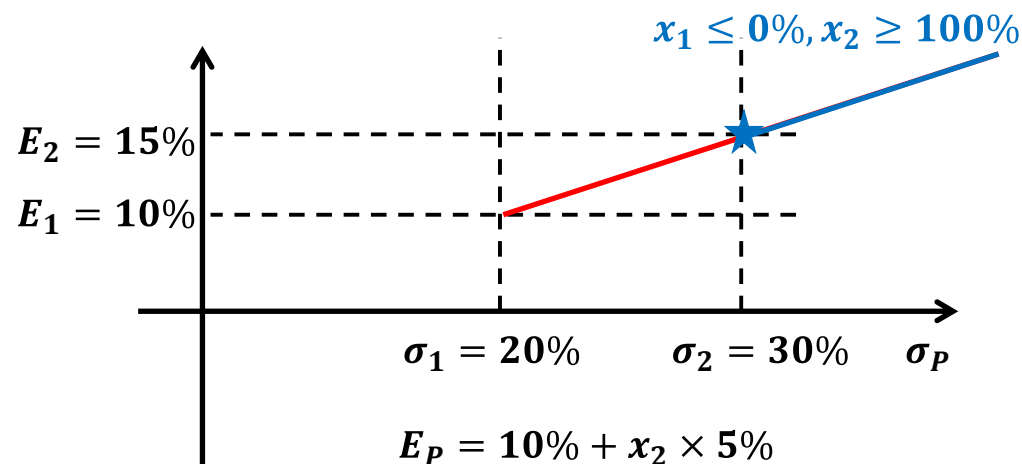
- B) On ne peut vendre à découvert 2, mais c'est possible pour 1



91

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- B) On ne peut vendre à découvert 2, mais c'est possible pour 1



92

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- Pour résoudre le problème B), il faut se souvenir que
 - Quand le coefficient de corrélation est égal à $+1$ ou à -1 , on a affaire à des segments de droites ou à des demi-droites
 - $E_P = x_1 E_1 + x_2 E_2 = (1 - x_2) \times 10\% + x_2 \times 15\%$
 - $E_P = 10\% + x_2 \times 5\%$
 - Interdiction de vendre à découvert le titre 2, $x_2 \geq 0$
 - $x_2 \geq 0 \Leftrightarrow E_P \geq 10\% = E_1$
 - L'espérance des rentabilités des portefeuilles, E_P , est toujours supérieure à l'espérance de rentabilité du titre 1
 - La demi-droite en bleu correspond aux cas où le titre 1 est vendu à découvert ($x_1 \leq 0\%$) et où $x_2 \geq 100\%$

93

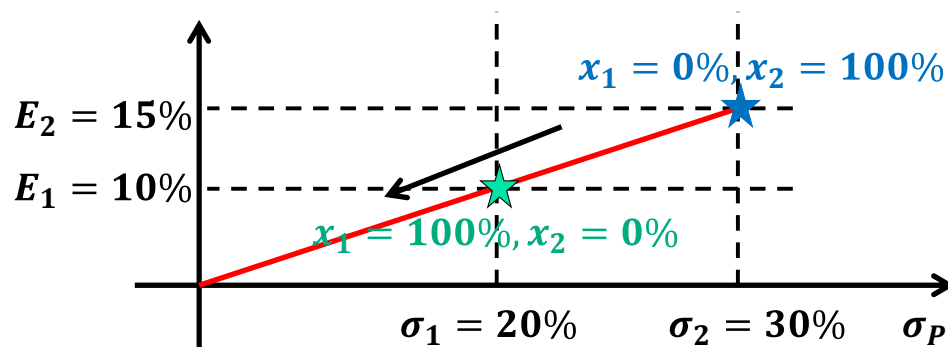
Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- Titres avec des rentabilités parfaitement corrélés (suite)
 - C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre 2 mais pas le titre 1. Représenter dans le plan (E_P, σ_P) , l'ensemble des portefeuilles formés des titres 1 et 2.
 - On reprend des éléments de l'analyse précédente, mais il y a une difficulté supplémentaire
 - Commençons par ce qui est similaire au cas précédent
 - Contrainte d'absence de vente à découvert de 1 : $x_1 \geq 0$
 - $E_P = x_1 E_1 + x_2 E_2 = x_1 E_1 + (1 - x_1) E_2 = E_2 + x_1 \times (E_1 - E_2)$
 - $E_P = 15\% - x_1 \times 5\%$
 - $x_1 \geq 0 \Leftrightarrow E_P \leq 15\%$

94

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre 2 mais pas le titre 1.

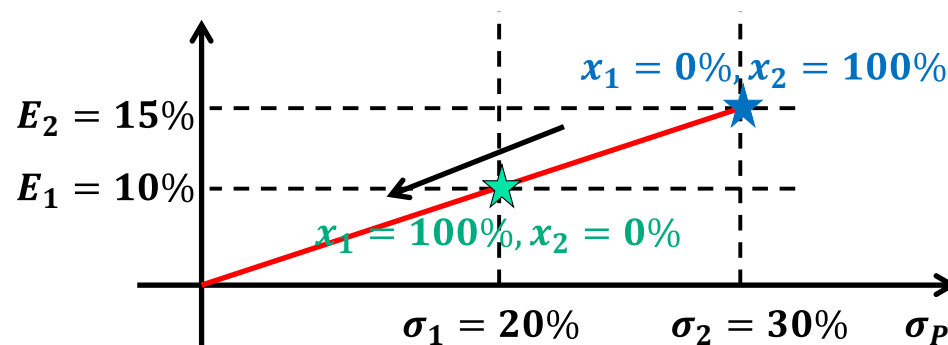


On prolonge le segment de droite précédent vers la gauche $x_1 \geq 0 \Leftrightarrow E_P \leq 15\%$

95

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre 2 mais pas le titre 1.



À chaque valeur de x_1 est associé un point sur le segment de droite rouge

En augmentant x_1 , on se déplace dans le sens de la flèche

96

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre 2 mais pas le titre 1.
 - En prolongeant le segment de droite précédent vers la gauche, on obtient une espérance de rentabilité égale à 0
 - $E_P = 15\% - x_1 \times 5\%$
 - Pour $x_1 = 300\% \geq 0$, $E_P = 0$
 - On peut voir sur le graphique qu'alors $\sigma_P = 0$
 - Ceci provient de $E_2/E_1 = \sigma_2/\sigma_1 = 1,5$
 - Autre approche : quand $\rho_{12} = +1$
 - $\sigma_P = |x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2| = |x_1\sigma_1 + (1 - x_1)\sigma_2|$
 - $\sigma_P = |\sigma_2 + x_1(\sigma_1 - \sigma_2)| = |30\% - x_1 \times 10\%|$
 - $x_1 = 300\% \Rightarrow \sigma_P = 0\%$

97

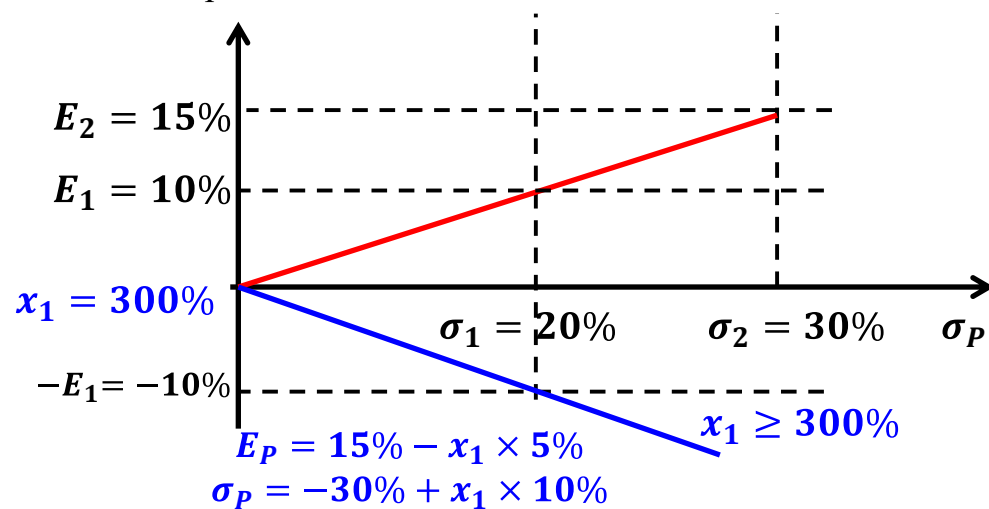
Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre 2 mais pas le titre 1.
 - Remarque
 - On a ainsi formé un portefeuille tel que $E_P = 0$, $\sigma_P = 0$
 - Actif sans risque/dépôt à vue non rémunéré sans risque de défaut
 - On a vu en cours que l'ensemble des portefeuilles constitués de 1 et de 2 pouvait être formé de deux demi-droites
 - Ici, si $x_1 \geq 300\%$,
 - $E_P = 15\% - x_1 \times 5\% \leq 0$
 - $\sigma_P = |30\% - x_1 \times 10\%|$
 - $x_1 \geq 300\%$, $30\% - x_1 \times 10\% \leq 0$
 - $\sigma_P = -30\% + x_1 \times 10\%$

98

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

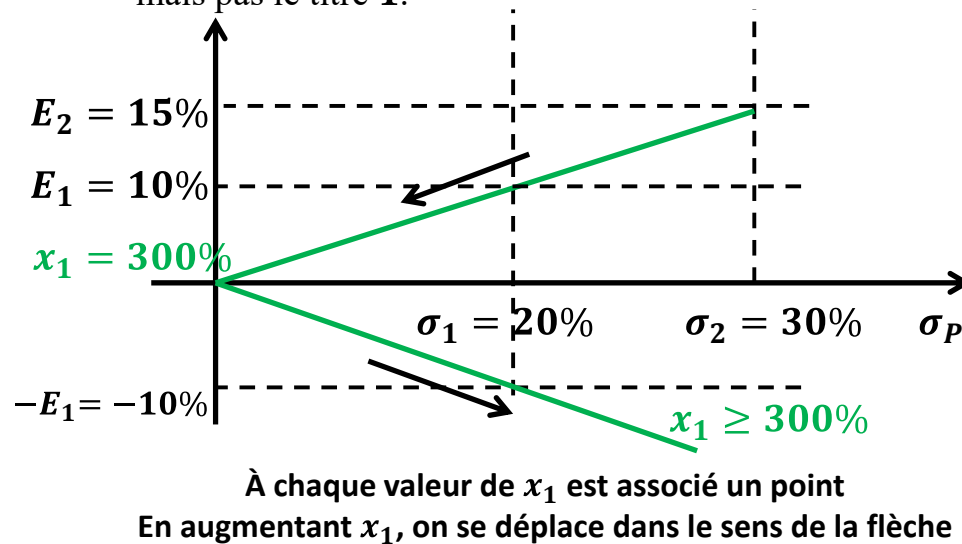
- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre 1 mais pas le titre 2.



99

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre 2 mais pas le titre 1.



100

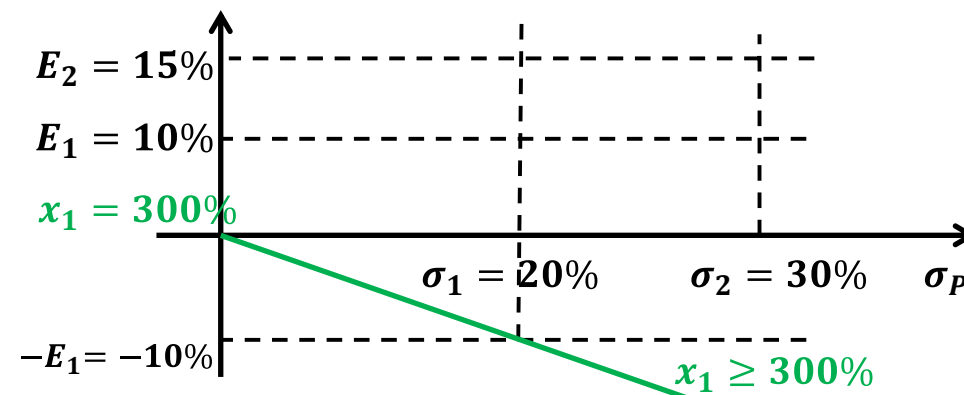
Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- D) Ensemble des portefeuilles formés des titres **1** et **2** qui ne sont jamais choisis par les investisseurs

101

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- D) Ensemble des portefeuilles formés des titres **1** et **2** qui ne sont jamais choisis par les investisseurs ayant des préférences moyenne-variance



Tous les titres sur la demi-droite en vert sont dominés par l'actif sans risque / dépôt à vue non rémunéré

102

103

104

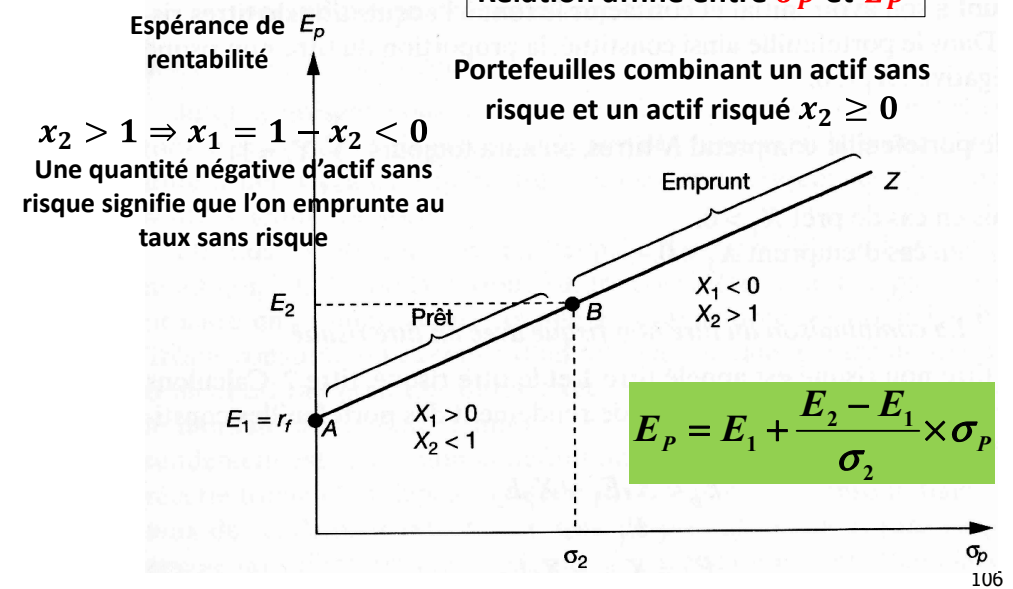
Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

- Examen du cas où des titres ou des portefeuilles de titres sont parfaitement corrélés
 - Situation déjà examinée pour deux titres risqués
 - L'ensemble des portefeuilles constitués des deux titres en quantités positives est représenté par le segment de droite reliant les points associés à ces deux titres
 - Que se passe-t-il si on peut vendre à découvert ces deux titres ?
- Dans le cas où on combine un actif sans risque et un titre risqué, l'ensemble des portefeuilles est représenté par une demi-droite
 - Y a-t-il un lien avec le cas précédent ?

105

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

Graphique 2.10



106

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

Le segment de droite reliant les points A et B représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2, en quantités positives, pour un niveau de corrélation égal à 1

- Corrélation $\rho_{12} = 1$
- Segment de droite ?

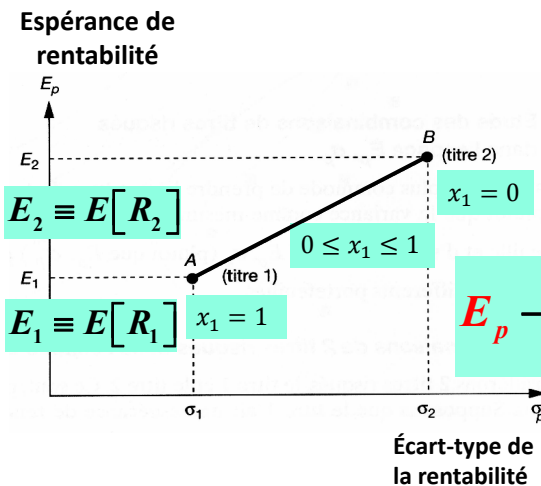
$$E_P = x_1 \times E[R_1] + (1 - x_1) \times E[R_2]$$

$$E_P - E_2 = x_1 \times (E_1 - E_2)$$

$$\sigma_P = x_1 \sigma_1 + (1 - x_1) \sigma_2$$

$$\sigma_P - \sigma_2 = x_1 (\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$E_P - E_2 = (\sigma_P - \sigma_2) \times \frac{E_1 - E_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$



Relation affine entre espérance de rentabilité et écart-type des rentabilités

107

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

- Etude du cas $\rho_{12} = +1$
 - Fraction de la richesse investie dans le titre 1 : $x_1 = x$
 - Rentabilité du portefeuille $R_P = xR_1 + (1 - x)R_2$
 - Espérances des rentabilités $E_1 = E[R_1]$, $E_2 = E[R_2]$

$$E[R_P] = E_P = xE[R_1] + (1 - x)E[R_2] = E_2 + x(E_1 - E_2)$$

- Variance des rentabilités :

$$\text{Var}[R_P] = \sigma_P^2 = x^2 \sigma_1^2 + 2\rho_{12}x(1 - x)\sigma_1\sigma_2 + (1 - x)^2 \sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = x^2 \sigma_1^2 + 2x(1 - x)\sigma_1\sigma_2 + (1 - x)^2 \sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = (x\sigma_1 + (1 - x)\sigma_2)^2$$

108

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

$$\sigma_P^2 = (x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2)^2$$

■ Écart-type des rentabilités

$$\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2|$$

- Fait intervenir une valeur absolue
- Si $x_1 = x \geq 0$ et $x_2 = 1-x \geq 0$,
- alors $x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 \geq 0$
- Puisque $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$
- Dans ce cas, $\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2| = x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2$
- Prenons $\sigma_2 = 20\%$, $\sigma_1 = 10\%$, $x = 3$, $1-x = -2$
- $x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 = 3 \times 10\% + (1-3) \times 20\% = -10\%$
- $\sigma_P = |-10\%| = 10\%$

109

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

■ Écart-type des rentabilités

$$\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2|$$

- Si $x < 0$ ou $1-x < 0$,
- $x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2$ peut devenir négatif
- $\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2| = -(x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2)$
 - Si $x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 \leq 0$
- $\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2| = x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2$
 - Si $x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 \geq 0$
 - On peut transformer la condition de signe sur $x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2$ en une condition sur x

110

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

- On peut transformer la condition de signe sur $x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2$ en une condition sur x
- $x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 = \sigma_2 + x(\sigma_1 - \sigma_2)$
- On va supposer que $\sigma_2 > \sigma_1$
 - $\sigma_1 - \sigma_2 < 0$
 - $x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 > 0 \Leftrightarrow x(\sigma_1 - \sigma_2) > -\sigma_2$
 - $x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 > 0 \Leftrightarrow x < -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$
- Si $x = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$,
- $\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2| = 0$
- On a alors un portefeuille non risqué construit à partir de deux titres risqués

111

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

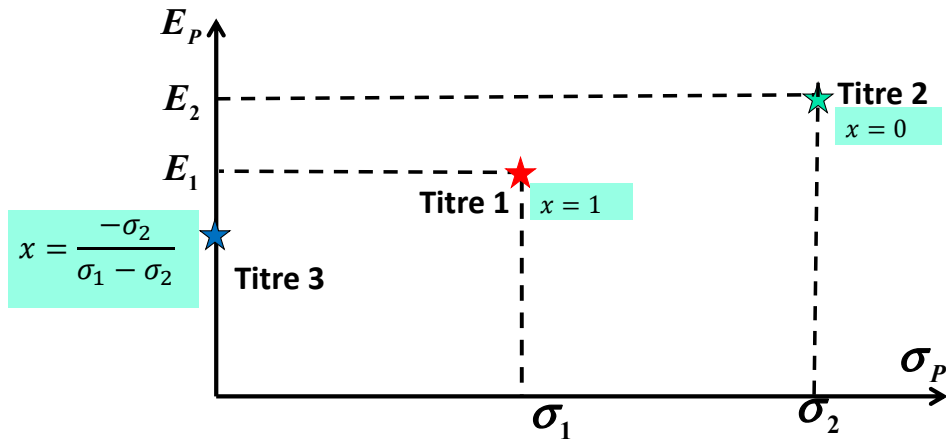
- Espérance de rentabilité de ce portefeuille non risqué
- $x = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$
- $E_P = E_2 + x(E_1 - E_2)$
 - E_P espérance de rentabilité du portefeuille non risqué
 - E_1 espérance de rentabilité du titre 1
 - E_2 espérance de rentabilité du titre 2
- $E_P = E_2 - \sigma_2(E_1 - E_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)$
- Considérons le portefeuille non risqué comme un titre
 - Noté 3
 - $E_3 = E_P, \sigma_3 = \sigma_P = 0$

112

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

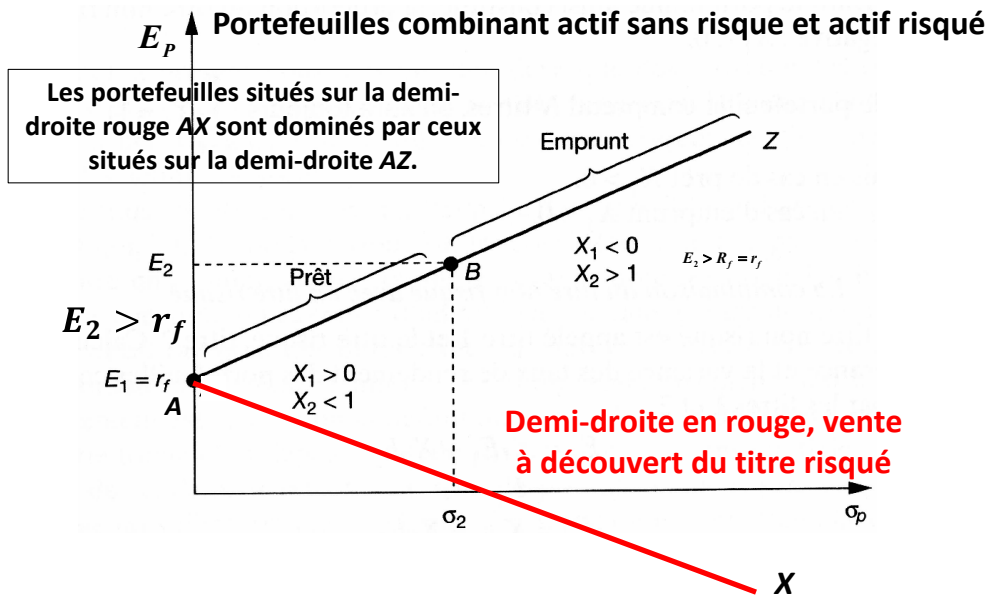
$$\rho_{12} = +1$$

- Représentation des titres 1 et 2 et du portefeuille sans risque (3)
 - *Plan écart-type des rentabilités - espérance des rentabilités*
 - *Cas où $E_2 > E_1, \sigma_2 > \sigma_1$*



Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$



Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- Le portefeuille 3 non risqué est constitué de titres 1 et 2
- Tout portefeuille constitué de titres 3 et de titres 1 est donc composé de titres 1 et de titres 2
- En étudiant la CML, on a vu l'ensemble des portefeuilles constitué d'un placement sans risque et d'un titre risqué
 - *Ici le placement sans risque est le titre 3*
- Il s'agit de la réunion de deux demi-droites
 - *La demi-droite inférieure correspond à des espérances de rentabilité inférieures au taux sans risque.*
 - *Et à des ventes à découvert du titre risqué :*
 - *En effet, $E_P = (1 - x_2)r_f + x_2E_2 = r_f + x_2(E_2 - r_f)$*
 - *$E_P = R_F + x_2(E_2 - r_f) < r_f \Leftrightarrow x_2 < 0$*

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

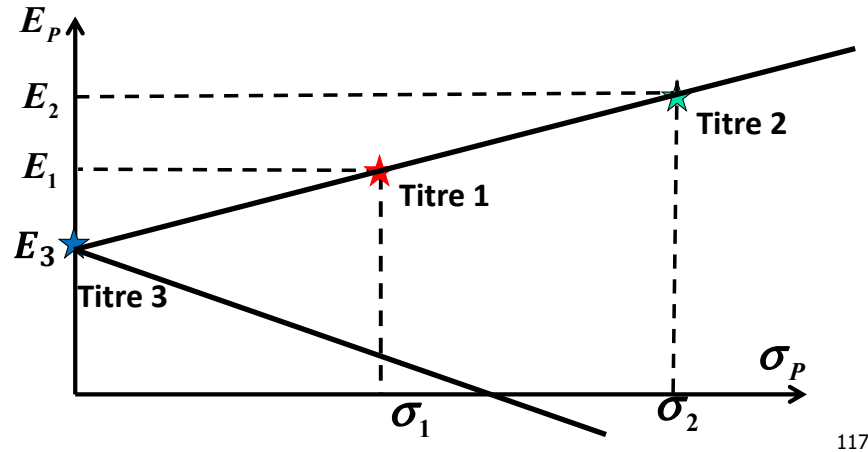
$$\rho_{12} = +1$$

- Le portefeuille 3 non risqué est constitué de titres 1 et 2
- Tout portefeuille constitué de titres 3 et de titres 1 est donc composé de titres 1 et de titres 2
- En étudiant la CML, on a vu l'ensemble des portefeuilles constitué d'un placement sans risque et d'un titre risqué
 - *Ici le placement sans risque est le titre 3*
- Il s'agit de la réunion de deux demi-droites
 - *La demi-droite inférieure correspond à des espérances de rentabilité inférieures au taux sans risque.*
 - *Et à des ventes à découvert du titre risqué :*
 - *En effet, $\mathbf{E_P} = (1 - x_2)\mathbf{r_f} + x_2\mathbf{E_2} = \mathbf{r_f} + x_2(\mathbf{E_2} - \mathbf{X_2})$*
 - *$\mathbf{E_P} = \mathbf{r_f} + x_2(\mathbf{E_2} - \mathbf{x_2}) < \mathbf{r_f} \Leftrightarrow x_2 < 0$*

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

- Représentation des titres 1 et 2 et du portefeuille sans risque (3)
 - Plan écart-type des rentabilités - espérance des rentabilités
 - Cas où $E_2 > E_1, \sigma_2 > \sigma_1$

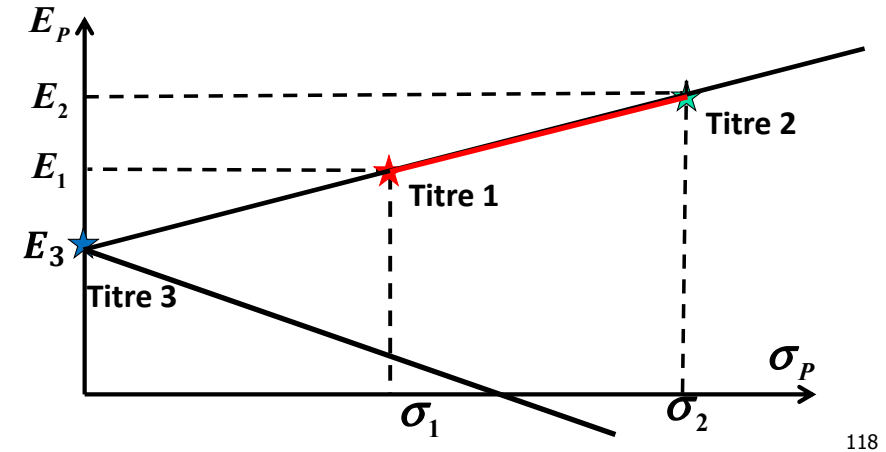


117

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

- Ensemble des portefeuilles formés de 1 et de 2
 - Pour toutes les valeurs de x
 - En rouge, portefeuilles sans vente à découvert, $0 \leq x \leq 1$



118

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

- On rappelle que si $x = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$,
- $\sigma_P = |x\sigma_1 + (1 - x)\sigma_2| = 0$
- $E_P = E_3 = E_2 - \sigma_2(E_1 - E_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)$
- S'il existe un placement sans risque au taux r_f , alors $E_3 = r_f$
 - En l'absence d'opportunités d'arbitrage
 - Si $E_3 > r_f$, on peut emprunter $k > 0$ euros au taux r_f et investir cette somme dans le titre 3
 - La mise de fonds à la date courante est nulle
 - À la date suivant la date courante, on doit rembourser l'emprunt soit $k \times (1 + r_f)$

119

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

- À la date suivant la date courante, on doit rembourser l'emprunt soit $k \times (1 + r_f)$
- On récupère $k \times (1 + E_3)$ du placement en titre 3
- Soit $k \times (E_3 - r_f) > 0$
- Comme k est arbitrairement grand, le profit à la date future est arbitrairement grand
- Le risque est nul : les rentabilités sont non aléatoires
- La mise de fonds initiale est nulle
- La situation précédente est une opportunité d'arbitrage
- On admet couramment qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage sur les marchés « sans frictions »
- Donc, on ne peut avoir $E_3 > r_f$

120

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

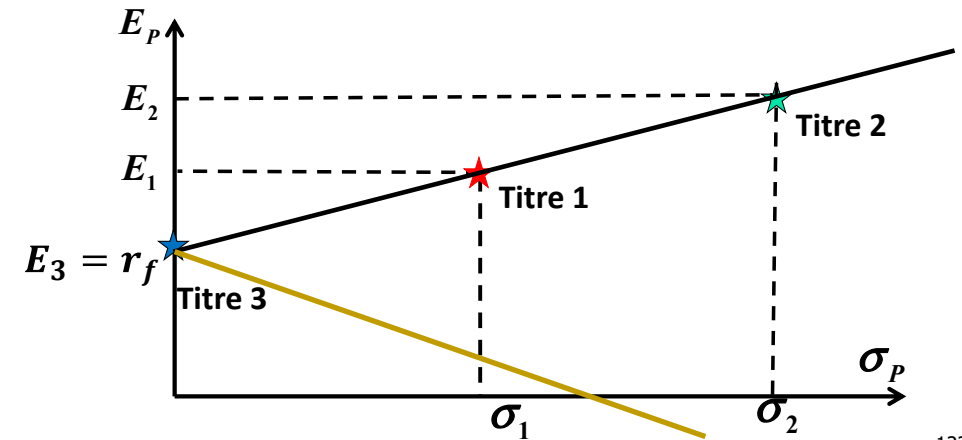
- Si l'on suppose maintenant que $E_3 < r_f$
 - On prête une somme k au taux r_f
 - On vend à découvert des titres 3 pour un montant k
 - L'investissement net à la date courante est nul
 - On récupère à la date suivant la date courante le montant
 - $k \times (r_f - E_3) > 0$
 - On a à nouveau construit une opportunité d'arbitrage
 - S'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage, on ne peut pas avoir $E_3 < r_f$
- La seule valeur de E_3 compatible avec l'absence d'opportunité d'arbitrage est $E_3 = r_f$

121

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

- La demi-droite noire représente les portefeuilles constitués de placement sans risque et de titre 2
- Le titre 1 était en fait un portefeuille constitué de placement sans risque et de titre 2



122

Exercice $\rho_{12} = -1$

■ Exercice : étude du cas extrême $\rho_{12} = -1$

- Ensemble des portefeuilles constitués de deux actifs quand le coefficient de corrélation est égal à -1 ?

- Fraction de la richesse investie dans le titre 1 : $x_1 = x$
- Rentabilité du portefeuille $R_P = xR_1 + (1-x)R_2$
- Espérances des rentabilités : $E_1 = E[R_1], E_2 = E[R_2]$

$$E[R_P] = E_P = xE[R_1] + (1-x)E[R_2] = E_2 + x(E_1 - E_2)$$

- Variance des rentabilités :

$$\text{Var}[R_P] = \sigma_P^2 = x^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}x(1-x)\sigma_1\sigma_2 + (1-x)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = x^2\sigma_1^2 - 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2 + (1-x)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = (x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2)^2$$

125

Exercice $\rho_{12} = -1$

- Écart-type des rentabilités

$$\sigma_P = |x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2|$$

- Fait intervenir une valeur absolue

$$\begin{cases} \sigma_P = x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2, & \text{si } x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2 \geq 0 \\ \sigma_P = -x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2, & \text{si } x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2 \leq 0 \end{cases}$$

- $\sigma_P = 0$ si $x = \sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2)$. Alors,

$$x \geq 0, 1-x = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \geq 0$$

- Dans le cas $\rho_{12} = -1$ on peut constituer un portefeuille sans risque (titre 3) à partir des titres risqués 1 et 2.

- Taux sans risque associé $E_P = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} E_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} E_2$

126

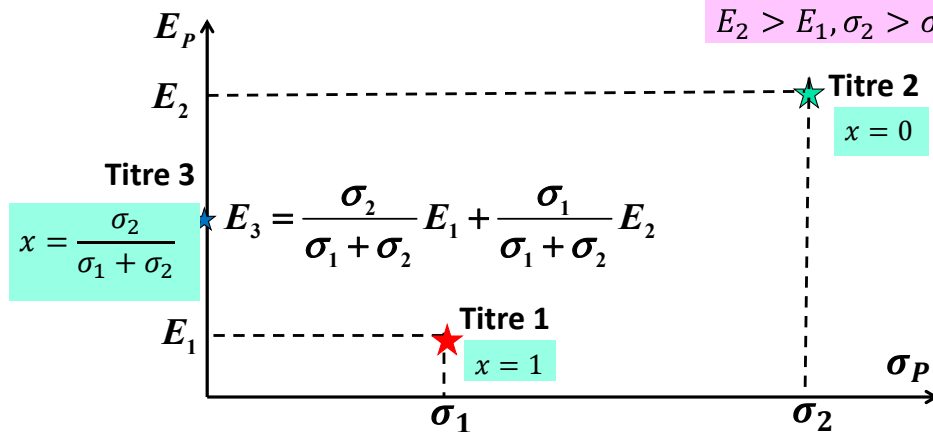
Exercice $\rho_{12} = -1$

- Représentation des deux titres 1 et 2 et du titre 3 (sans risque)

- Plan (écart-type des rentabilités, espérance des rentabilités)

- Pour simplifier l'analyse, on se restreint au cas :

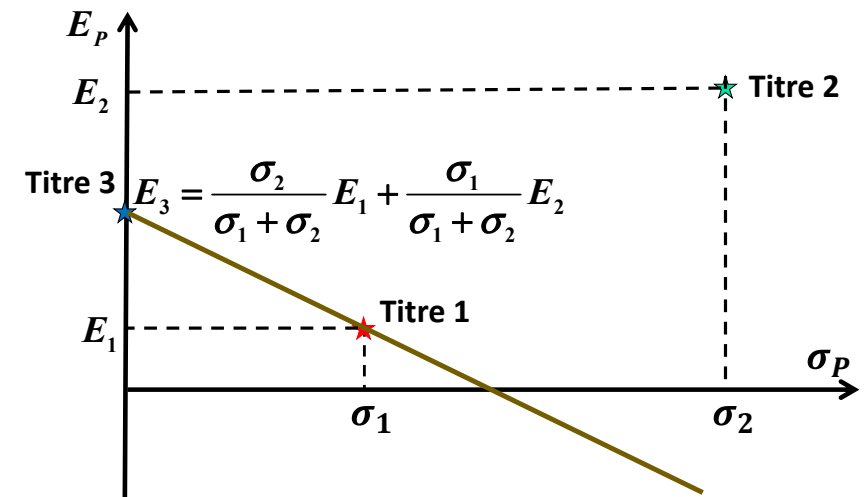
$$E_2 > E_1, \sigma_2 > \sigma_1$$



127

Exercice $\rho_{12} = -1$

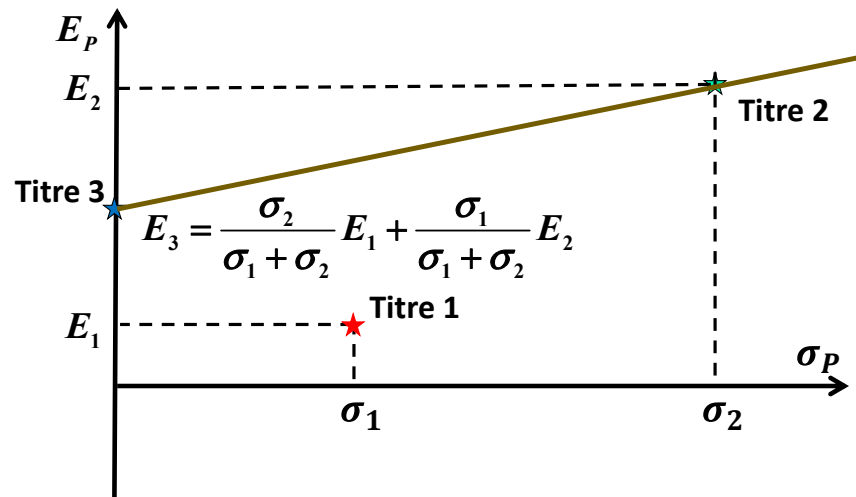
- Si on combine les titres 1 et 3, on obtient la demi-droite reliant les points associés aux titres 1 et 3



128

Exercice $\rho_{12} = -1$

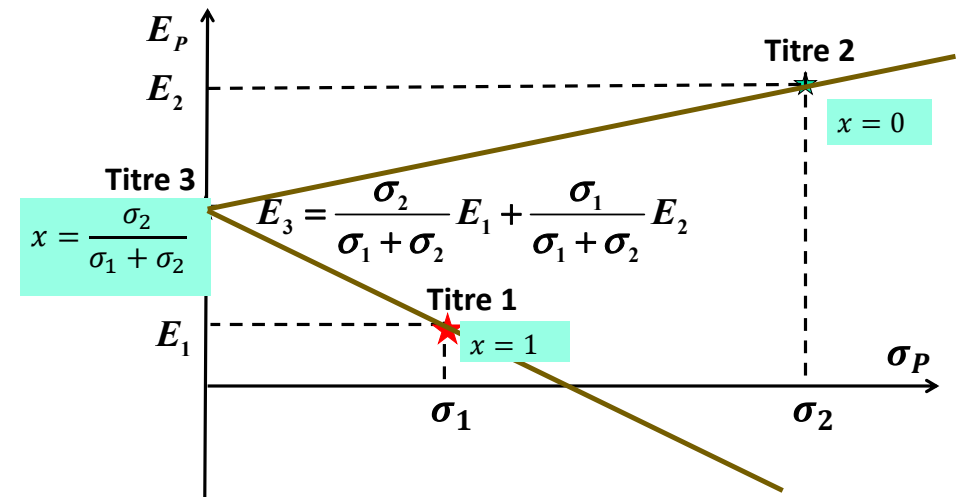
- Si on combine les titres 2 et 3, on obtient la demi-droite reliant les points associés aux titres 2 et 3



129

Exercice $\rho_{12} = -1$

- Au total, l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2 est représenté par la réunion des deux demi-droites précédentes



130

Exercice $\rho_{12} = -1$

- On remarque que l'ensemble des portefeuilles constitués des titres risqués 1 et 2, quand $\rho_{12} = -1$
- a exactement la même forme géométrique que l'ensemble des portefeuilles constitués de l'actif sans risque et d'un actif risqué
 - Réunion de deux demi-droites
 - Ce n'est pas une coïncidence car quand $\rho_{12} = -1$, on peut reconstituer un actif sans risque 3, à partir des titres 1 et 2.
 - Le portefeuille 3 comporte une quantité non nulle de titre 1

$$x = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} > 0$$

- L'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2 est identique à l'ensemble des portefeuilles combinant le titre 1 et le portefeuille 3.

131

Exercice $\rho_{12} = -1$

- Étude du cas où les ventes à découvert sont interdites :

$$0 \leq x \leq 1$$

- Le transparent précédent représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2, de rentabilité
- $R_P = x \times R_1 + (1 - x) \times R_2$, $x \in \mathbb{R}$
- Dans le plan (écart-type des rentabilités, espérance des rentabilités)
- L'ensemble des portefeuilles de rentabilité $R_P = x \times R_1 + (1 - x) \times R_2$, $x \in [0, 1]$
- est donc inclus dans la réunion des deux demi-droites présentées dans le transparent précédent.
- Déterminons quelle partie de deux demi-droites retenir

132

Exercice $\rho_{12} = -1$

- Examinons comment la rentabilité des portefeuilles constitués de titres 1 et 2 dépend de x

$$R_P = x \times R_1 + (1 - x) \times R_2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- On rappelle que :

$$E[R_P] = E_P = xE[R_1] + (1 - x)E[R_2] = E_2 + x(E_1 - E_2)$$

- Avec $E_1 < E_2$, E_P est une fonction affine décroissante de x

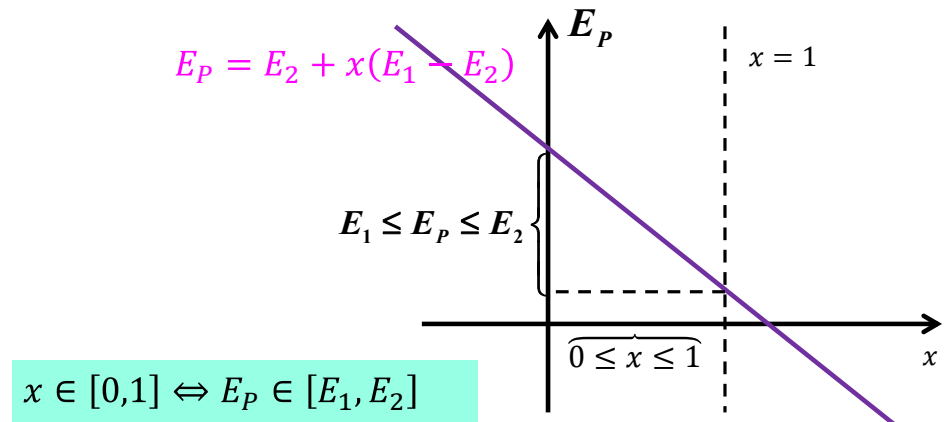
- Quand $x < 0$, $E_P > E_2$
- Quand $x > 1$, $E_P < E_1$
- Quand x croît de 0 à 1, E_P décroît de E_2 à E_1

- Au total $x \in [0, 1] \Leftrightarrow E_P \in [E_1, E_2]$

133

Exercice $\rho_{12} = -1$

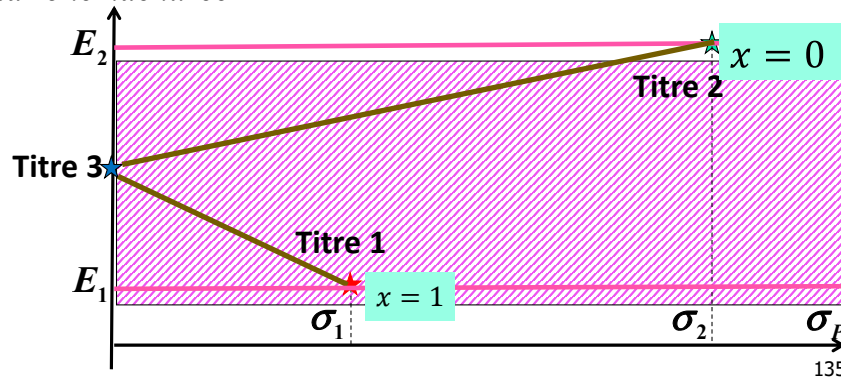
- Espérance de rentabilité des portefeuilles constitués de titres 1 et 2 en fonction de x



134

Exercice $\rho_{12} = -1$

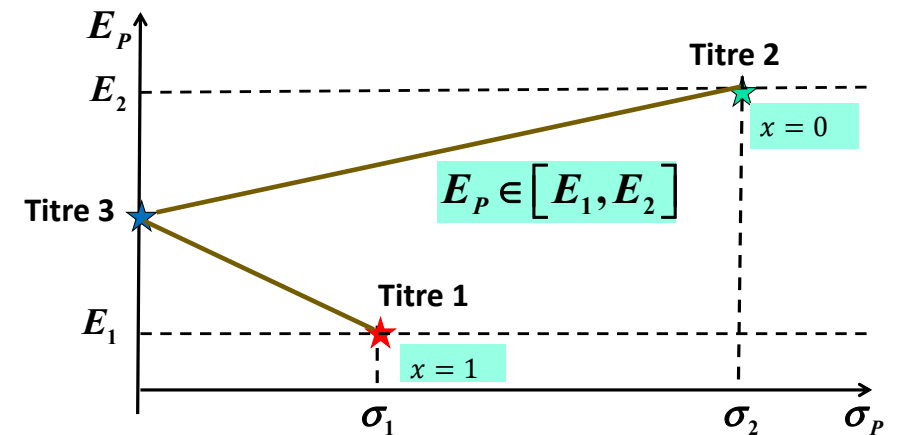
- Ventes à découvert interdites : $E_P \in [E_1, E_2] \Leftrightarrow x \in [0, 1]$
- La zone hachurée en rose correspond à l'ensemble des portefeuilles tels que : $E_P \in [E_1, E_2]$
- Les portefeuilles formés des titres 1 et 2 en quantités positives correspondent à l'intersection des deux demi-droites précédentes et de la zone hachurée



135

Exercice $\rho_{12} = -1$

- Ventes à découvert interdites : $0 \leq x \leq 1$
- L'ensemble des portefeuilles formés des titres 1 et 2 en quantités positives est la réunion des deux segments de droite



136