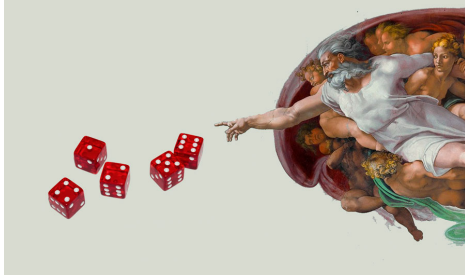


Compléments méthodologiques à propos de l'aléatoire



1

Aléatoire et finance

- Contingence et nécessité
- Ontologie du hasard
- Hasard épistémique et hasard essentiel
- L'émergence du concept de probabilité
- Une approche axiomatique des probabilités
- Probabilités subjectives et marchés
- Des probabilités classiques au principe d'indifférence
- Hasard non calculable
- Hasard accidentel

2

3

4

Contingence et nécessité

5

Contingence et nécessité

- Les simulateurs physiques utilisant les principes de la mécanique classique, les suites récurrentes ne peuvent produire que du « pseudo-aléatoire »
 - *Car le futur est parfaitement défini à partir du présent*
 - *Déterminisme causal, déterminisme absolu : ce qui ne peut pas ne pas être*
 - *Une seule trajectoire, un seul scénario associé au futur qui est aussi immuable que le passé*
- En finance, cette approche n'est pas soutenable
 - *On est amené à envisager plusieurs scénarios pour l'évolution des prix, des valeurs boursières*
 - *Le futur doit être ouvert : Pluralité des possibles*
 - *Contingent (bilatéral) : ce qui peut être ou ne pas être*

6

Contingence et nécessité

- Logique modale aléthique (ou aristotélicienne ou classique) : 4 modalités + contingent bilatéral
 - *Nécessaire (ce qui ne peut pas ne pas être)*
 - *Contingent (ce qui peut ne pas être)*
 - Contingent s'oppose à nécessaire
 - *Possible (ce qui peut être)*
 - *Impossible (ce qui ne peut pas être)*
 - Possible s'oppose à impossible
 - *Contingent (possible) bilatéral : ce qui peut être ou ne pas être*
- En termes d'événements économiques et financiers
 - *A nécessaire : $P(A) = 1$, A contingent : $P(A) < 1$*
 - *A possible : $P(A) > 0$, A impossible : $P(A) = 0$*
 - *Contingent (possible) bilatéral : $0 < P(A) < 1$*

7

Contingence et nécessité

- On voit apparaître une tension entre deux pôles contradictoires : le **nécessaire** et le **contingent**
 - *Dans la suite, on considèrera implicitement le contingent bilatéral et on parlera alors de possibilité*
- Le nécessaire : **ce qui ne peut être autrement**
 - *Spinoza, Laplace ou Leibniz introduisent une rationalité dans le nécessaire, un enchaînement de causes et d'effets*
 - *Par opposition à la prédestination ou au bon vouloir et aux « superpouvoirs » divins*
- La nécessité telle qu'elle apparaît chez Spinoza :
 - *Il n'est rien donné de **contingent** dans la nature, mais **tout y est déterminé par la nécessité** de la nature divine à exister et à produire quelque effet d'une certaine manière.*

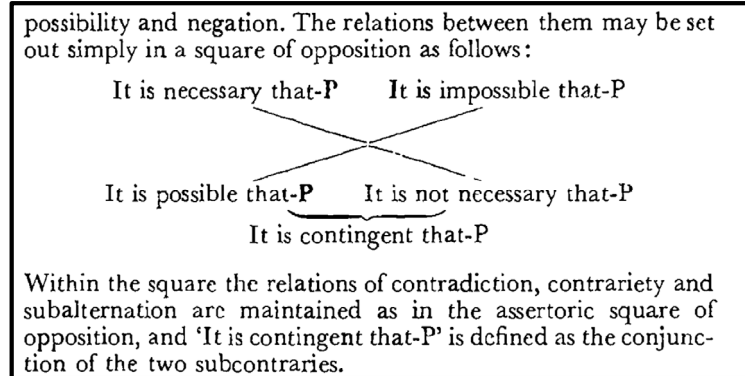
8

Contingence et nécessité

WILLIAM KNEALE
AND
MARTHA KNEALE

The Development of Logic

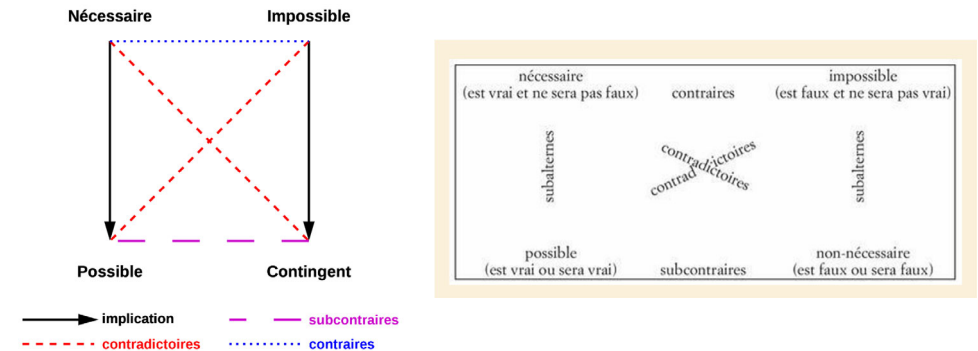
- Le carré modal : relations entre les modalités de la logique aristotélicienne.



9

Contingence et nécessité

- Le carré modal : relations entre les modalités de la logique aristotélicienne (source Vuillemin et Wikipédia)



10

Contingence et nécessité

- Le **contingent** s'oppose au nécessaire
- Ce qui arrive (ou pourrait arriver) **sans nécessité** :
 - « *Hasard ontologique* » : au cœur de la physique moderne, notamment de la mécanique quantique
 - Une particule peut se désintégrer à tout moment de par sa nature même, sans cause extérieure
- Pour parler de probabilité d'un événement, il faut qu'il y ait pluralité des possibles (ou contingence)
 - Le cours de Total peut augmenter ou ne pas augmenter
 - Il n'est pas prédéterminé
- Spinoza, Laplace ou Leibniz réfutent que les lois de la nature relèvent du contingent
 - Sans méconnaître la complexité d'une représentation du réel

11

Contingence et nécessité

- La notion de contingence est centrale en finance
 - L'analyse qu'en fait Aristote dans le problème des futurs contingents est compatible avec l'approche financière
 - Pluralité de scénarios futurs possibles
- Mais récusée par les philosophes médiévaux et classiques
 - Le déterminisme strict règne en maître
 - Seul le hasard épistémique a voix au chapitre
- La contingence est au cœur de la mécanique quantique
 - En l'absence d'interaction, cad en cas de cohérence, une particule est dans une superposition d'états
 - Tout se passe comme si les cours boursiers non observés montaient et baissaient en même temps
 - Plus de bivalence « hausse » ou « baisse » mais contingence

12

Contingence et nécessité

- Si le concept de probabilité n'apparaît qu'au 17^e siècle, Aristote présente de manière claire la notion de hasard épistémique et d'opinion probable (plausible).

Le chapitre IX du *De Interpretatione* d'Aristote
Vers une réhabilitation de l'opinion comme connaissance probable des choses contingentes

Jules Vuillemin

- <https://www.erudit.org/fr/revues/philoso/1983-v10-n1-philoso1300/203211ar.pdf>

- Le « problème des futurs contingents »
 - « *C'est nécessairement que demain il y aura ou il n'y aura pas bataille navale. Mais ce n'est pas pour autant ni qu'une bataille navale arrive nécessairement demain ni qu'elle n'arrive pas* ».
 - « *Ce n'est pas sur le modèle des choses qui sont que se comportent les choses qui, n'étant pas, sont en puissance d'être ou de ne pas être.* »

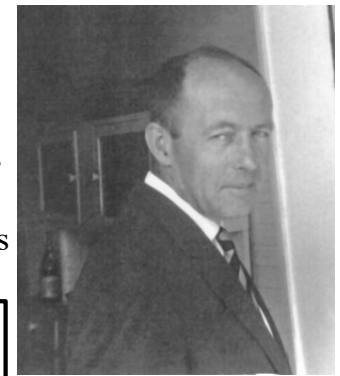
13

Contingence et nécessité

- Jules Vuillemin établit que les prémisses des probabilités transparaissent dans le texte d'Aristote sur les futurs contingents

Ainsi l'intuition développée dans le *de Interpretatione* n'est pas logiquement contradictoire. Elle exige toutefois qu'on distingue, dans le possible qui regarde la réalité et se distingue donc du pur possible logique ou mathématique, l'essence et l'accident. Seul l'accident relève de la probabilité. Être déjà vrai ou faux, pour un accident, c'est être déjà tombé dans le domaine de la réalité, c'est-à-dire avoir une probabilité égale à 1 ou à 0. Ne pas avoir de valeur de vérité déterminée, c'est avoir une probabilité comprise entre ces deux extrêmes. Alors toutes les expressions modales utilisées au chapitre IX se traduisent en des expressions probabilistes et les paradoxes que les logiciens ont signalés s'évanouissent⁶⁶.

Chaire de philosophie de la connaissance
 Collège de France



14

Contingence et nécessité

- L'interprétation probabiliste du problème des futurs contingents

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1. p est possible | $\pi(A) \geq 0$ |
| p est nécessaire | $\pi(A) = 1$ |
| p est impossible | $\pi(A) = 0$ |
| 2. Il est nécessaire que p ou non p | $\pi(A \cup \sim A) = 1$ |
| Il est impossible que p et non p | $\pi(A \cap \sim A) = 0$ |
| p | |
| S'il est nécessaire que p ou non p | Si $\pi(A \cup \sim A) = 1$, cela |
| p ce n'est pas pour autant qu'il | n'entraîne pas que $\pi(A) =$ |
| est nécessaire que p ou qu'il est | 1 ou que $\pi(\sim A) = 1$ |
| nécessaire que non p. | |

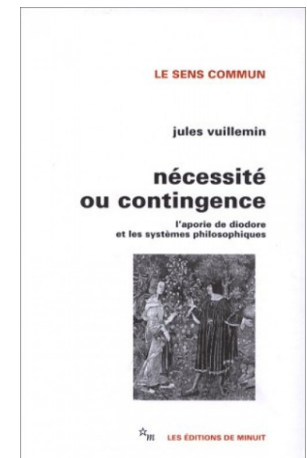
15

Contingence et nécessité

- « C'est parce qu'il y a des propositions portant sur le futur qui ne sont ni vraies ni fausses qu'il y a, pour Aristote, du probable ».



Jules Vuillemin



16

Contingence et nécessité

- Il y a de fortes résistances à reconnaître la contingence
 - La contingence est une dissonance qui doit être réduite.
 - La négation de la contingence est une forme de réduction de la dissonance (voir infra sur la dissonance cognitive)
- Citations de Daniel Kahneman (Système 1 / système 2)
 - « Nous sommes bien trop disposés à ne pas admettre que ce que nous voyons dans la vie est dû au hasard »
 - « On peut facilement se raconter une histoire, trouver des causes pour expliquer »
 - “The idea that the future is unpredictable is undermined every day by the ease with which the past is explained”
- Ces résistances sont illustrées dans les transparents suivants, par quelques citations célèbres.

17

Contingent et nécessaire

- Il n’y a rien de **contingent** dans la nature des choses ; elles sont au contraire déterminées par la nécessité de la nature divine à exister et opérer d’une manière certaine.
 - **Spinoza**, Ethique I, proposition 29
- Pour toute chose, il doit y avoir une cause, ou **raison assignable**, pourquoi elle existe ou pourquoi elle n’existe pas
 - Raison assignable = ce que par quoi un événement arrive = cause efficiente : « une pierre tombe à cause du vent (vent : cause efficiente)
- Pour les tenants de l’efficience informationnelle, c’est l’arrivée de nouvelles informations relatives à la valeur d’une action qui causent les variations du prix de l’action.

18

Contingence et nécessité

- La raison (suffisante) déterminante de Leibniz
 - « C’est que jamais rien n’arrive, sans qu’il y ait une cause ou du moins une **raison déterminante**, c’est-à-dire quelque chose qui puisse servir à **rendre raison a priori**, pourquoi cela est existant plutôt que non existant, et pourquoi cela est ainsi plutôt que de toute autre façon ».
- Le « démon (ou au génie) de Laplace
 - « Une **intelligence** qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent (...) **Rien ne serait incertain pour elle**, et l’avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. »

19

Contingence et nécessité

- Spinoza, Laplace : connaissance imparfaite des causes, ce qui amène à imaginer plusieurs futurs possibles
 - La **possibilité** et la **contingence** (...) ont été tenues par quelques-uns pour des affections des choses, alors qu’elles **ne sont rien cependant que les défauts de notre entendement**.
 - Spinoza, pensées métaphysiques, Du nécessaire, de l’impossible, le possible et le contingent
- Laplace : ce qu’on appelle hasard n’est que
« l’expression de l’ignorance où nous sommes des véritables causes »

20

Contingence et nécessité

- Principe de la raison suffisante : rien n'arrive sans raison
 - « Et pourtant, rien n'est mû par hasard, mais il faut toujours qu'il existe une cause déterminée »
 - Aristote (1071b-1072a), La Métaphysique, Livre douzième, Nécessité d'un premier Moteur éternel. <https://philosophie.cegeptr.qc.ca/wp-content/documents/M%C3%A9taphysique.pdf>
 - « Jamais rien n'arrive sans qu'il y ait une cause ou du moins une raison déterminante, c'est-à-dire qui puisse servir à rendre raison a priori pourquoi cela est existant plutôt que non existant et pourquoi cela est ainsi plutôt que de toute autre façon »
 - Leibniz, Essais de théodicée, 1710.
- Pour Leibniz, cela ne veut pas pour autant dire que ces raisons déterminantes nous soient accessibles
 - A nouveau, problème de l'abduction, c'est-à-dire recherche des déterminants des cours boursiers

21

Contingence et nécessité

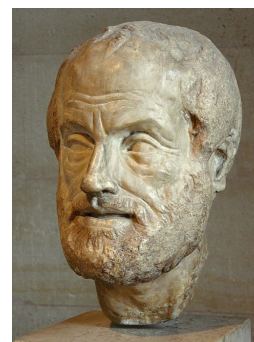
- Laplace (*Essai philosophique sur les probabilités*, 1814)
 - <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k96200351/f9.image.texteImage>
 - « Mais l'ignorance des différentes causes à l'origine des événements et leurs complexités nous empêchent d'atteindre la même certitude dans la plupart des phénomènes ».
 - « Ainsi il y a des choses qui sont incertaines pour nous, des choses qui sont plus ou moins probables, et nous cherchons à compenser notre impossibilité de les connaître en déterminant leurs différents degrés de vraisemblance ».
 - « C'est ainsi que nous devons à la faiblesse de l'esprit humain l'une des plus délicates et des plus ingénieuses théories mathématiques, les probabilités ».

22

Contingence et nécessité

- A. Comte est le plus virulent contempteur des probabilités
 - Les efforts des géomètres pour élever le calcul des probabilités (...) n'ont abouti (...) qu'à présenter, relativement à la théorie de la certitude, (...) quelques propositions presque triviales.
 - ... L'intervention du calcul des probabilités serait du reste ici ou puérile ou « sophistique », comme en tant d'autres occasions.
 - C'est ainsi que l'absence de toute discipline philosophique a radicalement vicié la première page du vrai système de nos connaissances théoriques et rationnelles (...) les consécérations accordées au prétendu calcul des chances suffiraient à caractériser pour tous les bons esprits les ravages scientifiques d'une telle anarchie mathématique.
 - On doit déplorer l'espèce d'encouragement dont les géomètres ont quelquefois honoré une aberration aussi profondément irrationnelle en faisant de vains et puérils efforts pour déterminer d'après leur illusoire théorie des chances le nombre de cas propres à légitimer chacune de ces indications statistiques

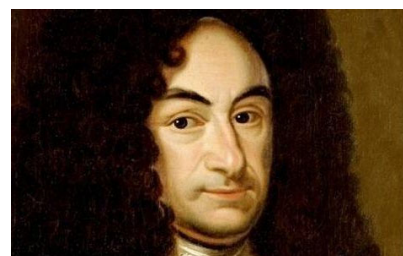
23



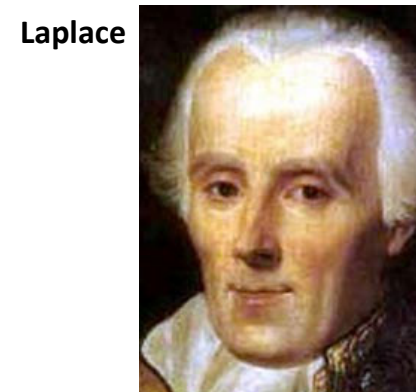
Aristote



Spinoza

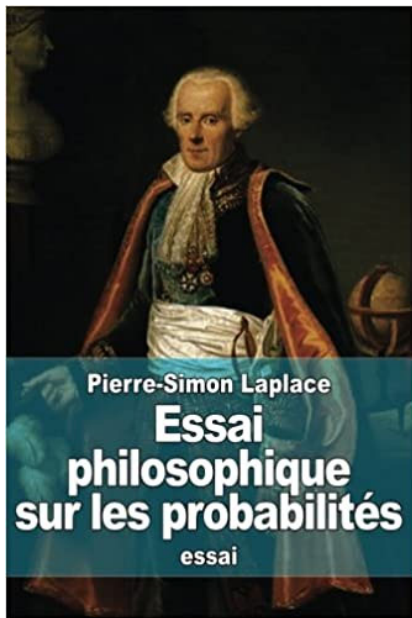


Leibniz



Laplace

24



Blaise Pascal



Ontologie du hasard

29

Les conceptions ou dimensions du hasard

- Hasard comme expérience de pensée (ou intuition mathématique) : idéalisation du jeu de pile ou face
- Hasard naturalisé et formalisé : stratégies mixtes en théorie des jeux (Von Neumann)
- Hasard comme négation de la prévisibilité (Piaget)
- Pseudo-hasard ou hasard épistémique
- Hasard « associé » à la négation de la nécessité : affirmation de la contingence et du caractère ouvert du futur
 - *Futurs contingents (Aristote)*
- Hasard quantique ou « vrai hasard »
- Théorie des nombres et définitions du hasard vs axiomatique de Kolmogorov
- Hasard à la Cournot

30

Ontologie du hasard

- On peut à la question du hasard et de l'aléatoire sous plusieurs angles
- Diachronique :
 - *Comment le hasard apparaît dans l'histoire (Hacking) ?*
 - *Comment le concept de hasard se développe dans le cerveau de l'enfant et de l'adolescent (approche constructiviste de Piaget) ?*
- Les tentatives de construction et de définition du hasard
 - *Dans le domaine physique : physique statistique, jeux de hasard*
 - *En mathématiques : théorie des nombres, approches théoriques des probabilités*
 - *Par « construction positive », on s'intéresse à l'existence de méthodes physiques, mathématiques ou algorithmiques permettant de « produire » de l'aléatoire*

31

Ontologie du hasard

- Même à supposer que les lois de la Nature s'accordent avec le déterminisme, nous avons pu définir une **antinomie** : nécessaire s'oppose à contingent.
- Dès que nous disposons d'un **langage** ou d'un **système logique** qui admet la **négation** d'un concept existe
 - *Imprévisible s'oppose ainsi à prévisible*
- Le concept ainsi défini ne se réfère pas nécessairement à quelque d'existant dans la Nature, mais c'est une existence logique ou langagière (on utilise le terme **nominal**)

32

Ontologie (existence) du hasard

- $\exists \neg P$: l'imprévisible existe ...
 - Si P est une proposition telle que le futur est prévisible et si on note $\neg$, l'opérateur de négation, la proposition $\exists \neg P$ (l'imprévisible existe) est bien formulée
 - Cette proposition est-elle « vraie » ? Ici est-elle en rapport avec quelque chose d'existant dans le monde (de la finance) ?
 - Dans la construction, $\exists \neg P$ hasard n'est pas construit « positivement », ce qui pose la question de son existence.
- Selon le déterminisme (ou le nécessitarisme), il n'y a rien de tel que le hasard dans le monde
 - Chance, when strictly examined, is a mere negative word, and means not any real power which has anywhere a being in nature.
 - Hume (An Enquiry Concerning Human Understanding)

33

Ontologie du hasard

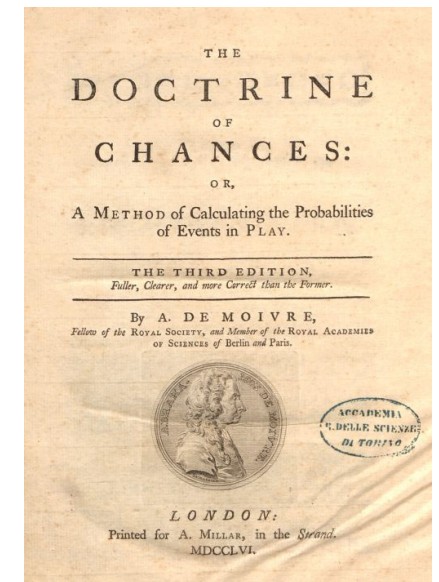
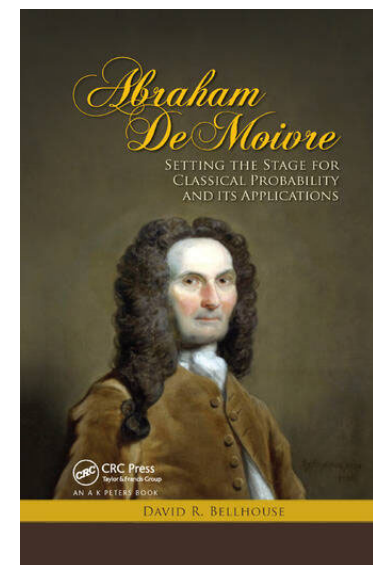
- Un tenant du déterminisme pourrait dire : « *Le contingent n'existe pas* »
 - Ce à quoi selon l'argument de Platon, on pourrait lui rétorquer que le contingent doit bien exister pour qu'on puisse affirmer quelque chose à son sujet.
 - La contradiction n'est qu'apparente : examinons la proposition « le Père Noël n'existe pas ». Tout le monde en comprend la signification et tout adulte admettra qu'elle est vraie
 - Ce que la proposition signifie, c'est qu'il existe un personnage imaginaire que nous avons baptisé « Père Noël ». Il existe dans les contes pour enfants, mais il n'existe aucun personnage associé. Les « modes d'existence » sont différents.
 - Pour un tenant du déterminisme, croire au hasard, c'est croire au Père Noël !

34

Ontologie du hasard

- Abraham De Moivre explicite bien cette conception nominaliste du hasard :
 - *Le Hasard, dans des écrits ou discours athées, est un son complètement dénué de sens : il n'implique de détermination à aucun mode d'Existence ; ni en fait à l'Existence elle-même, pas plus qu'à la non-existence ; il ne peut être ni défini ni compris ; aucune Proposition le concernant ne peut être ni affirmée ni réfutée, excepté celle-ci, « C'est simplement un mot ».*
- Il récuse d'ailleurs cette approche nominaliste, puisque pour lui, le lancé de dés est une véritable expérience aléatoire.

35

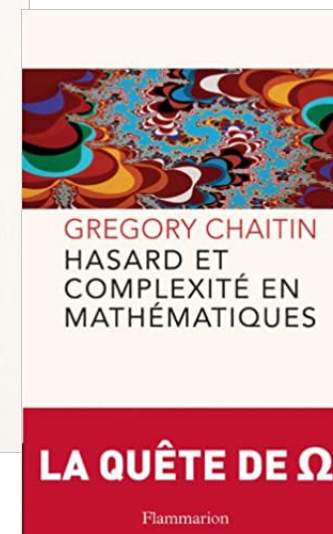
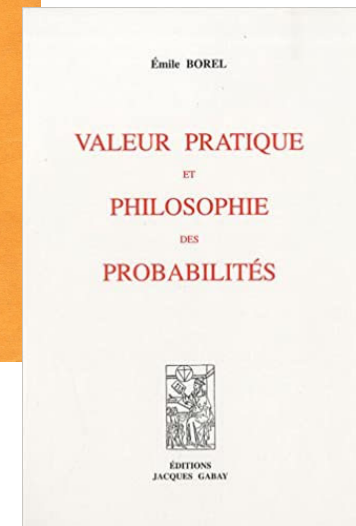
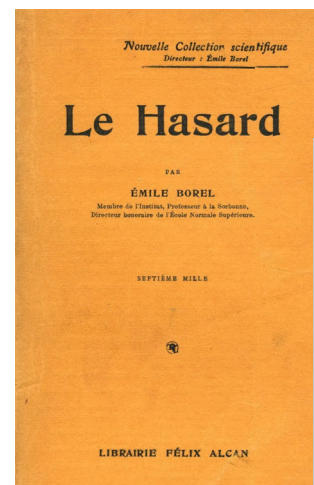


36

Ontologie (existence) du hasard

- Si l'on peut « fabriquer » du pseudo-hasard, le hasard « pur » ne peut être construit.
 - D'où la question : Peut-on **définir** quelque chose que l'on ne peut pas **construire** ?
- Chaitin : paradoxe du hasard indéfinissable de Borel
 - Considérons les nombres dont le développement binaire est associé à une suite aléatoire et ceux qui ne le sont pas
 - Considérons à présent un premier nombre aléatoire.
 - Il a fallu le déterminer selon un certain procédé ou règle, qui ne peut être aléatoire (sinon raisonnement circulaire).
 - S'il est construit à partir d'une règle (algorithme), il est calculable donc non aléatoire...
- La réponse des maths à la question précédente : oui

37



En référence au « paradoxe du hasard indéfinissable » de Borel, repris par Chaitin

38

Ontologie du hasard

- L'expérience aléatoire doit être définie de manière négative : une expérience dont on ne peut connaître l'issue, c'est-à-dire non prévisible.
 - Cette expérience peut être temporelle : par exemple, prévoir la valeur boursière d'une entreprise à un horizon d'un an.
 - Ou non temporelle : estimer la valeur d'une entreprise aujourd'hui à partir des informations (états financiers) disponibles
- C'est pourquoi l'aléatoire ne peut pas être « construit ».
 - Logique à quatre modes d'Aristote : possible, impossible (s'oppose au possible), déterminé, contingent (s'oppose au déterminé).
 - L'aléatoire est associé au contingent et suppose l'existence de plusieurs « possibles » (s'oppose au déterminé).

39

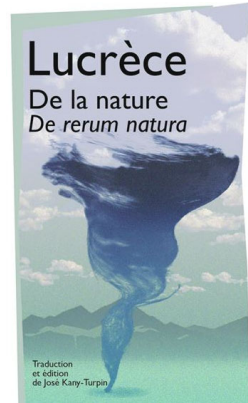
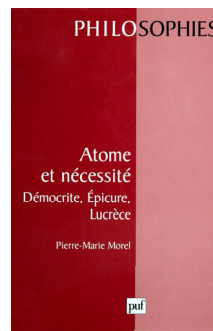
Ontologie du hasard

- Le hasard a-t-il une existence en dehors du langage ou de l'abstraction ?
 - Ontologie renvoie à la question de l'existence
 - Peut-on rencontrer le hasard dans la nature, sur les marchés financiers ?
- Dans la théorie des marchés efficients, les cours boursiers suivent des marches aléatoires.
 - Random walks
 - Du fait de l'efficacité informationnelle, d'absence d'opportunités d'arbitrage
- Les concepts de hasard, d'aléatoire, d'expérience aléatoire sont au cœur de la finance moderne

40

Le « vrai » hasard ? Epicure et Lucrèce

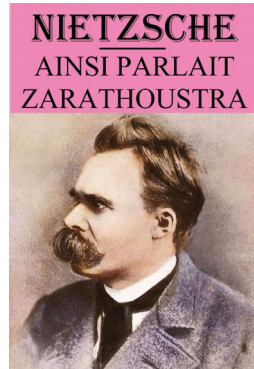
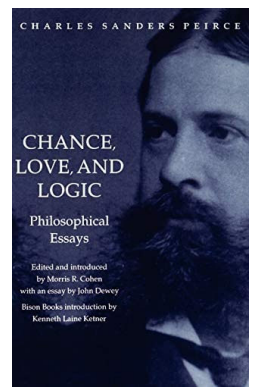
- Qualifier Epicure de théoricien du hasard serait un anachronisme, mais ...
- certains écrits d'Epicure font penser à la physique statistique
 - *L'atomisme, repris à Démocrite*
 - *Clinamen : déviation spontanée de la course des atomes*
 - « Il leur arrive, on ne saurait dire où ni quand, de s'écarter un peu de la verticale, si peu qu'à peine on peut parler de déclinaison »
 - – De la nature des choses – (Lucrèce) est un poème composé à partir de l'ouvrage d'Epicure – La Nature -
 - « Tu concevras alors quels infinis hasards bercent les éléments dans l'étendue épars. »



41

Le « vrai » hasard

- Charles Sanders Peirce s'est (en autres choses ...) intéressé au rôle du hasard et son rapport avec la connaissance scientifique
 - Turley (1969). *Peirce on chance. Transactions of the Charles S. Peirce Society.*
 - Peirce (1998). *Chance, love, and logic: Philosophical essays. U of Nebraska Press.*
- Nietzsche - Ainsi parlait Zarathoustra
 - *En vérité, c'est une bénédiction et non une malédiction lorsque j'enseigne : « Sur toutes choses, se trouve le ciel hasard (...) »*
 - « Par hasard » — c'est là la plus vieille noblesse du monde, je l'ai rendue à toutes choses, je l'ai délivrée de la servitude du but.
 - (...) J'ai trouvé dans toutes choses cette certitude bienheureuse : elles préfèrent danser sur les pieds du hasard.
 - (...) que tu es un lieu de danse pour les hasards divins, que tu es une table divine pour le jeu de dés et les joueurs divins !



2

Hasard épistémique et hasard essentiel

45

Le concept d'aléatoire en finance

- Plusieurs concepts de hasard ou d'aléatoire
 - En finance, ce qui prévaut est l'**imprévisibilité** (des cours boursiers)
 - Prévisibilité implique la présence de « free lunches », d'arbitrages qui impliquent une (certaine) efficience des marchés.
 - Et non pas l'**absence de causes**
 - Impact des ordres d'achat et de vente : direct via les mécanismes d'appariement des ordres et indirect via le contenu informationnel des ordres : aspect endogène au marché
 - Arrivée d'informations économiques et financières non anticipées (exogènes au marché) et transmission des informations privées lors de la négociation sur les marchés financiers :
 - Même s'il est très difficile de remonter des variations des cours aux causes économiques et financières ou à la dynamique propre des acheteurs et des vendeurs;

46

Imprévu et imprévisible

- Le terme « hasard » est entendu dans deux sens différents, celui d'*imprévu* et celui d'*imprévisible*
- Événement imprévu ou *fortuit* renvoie à ce qui n'a pas été prévu, mais aurait pu l'être a posteriori
- Parce que les causes de l'événement auraient pu être identifiées a priori, si l'on y avait porté attention.
- L'imprévu peut avoir une dimension subjective, voire psychologique : d'où le terme imprévoyant.
- Le démiurge de Laplace a la capacité de tout prévoir.
- Dans l'antiquité, les devins et oracles étaient supposés porter une connaissance de l'avenir inaccessible au commun des mortels ...

47

Hasard épistémique

- « Épistémique » est ce qui a voir avec la connaissance
- Le hasard épistémique ne remet pas en question le déterminisme ou relation nécessaire de cause à effet (ou conséquence)
 - Compatible avec la physique classique
 - Théorie cinétique des gaz : implication de la mécanique newtonienne
- Deux variantes du hasard épistémique
 - Multiplicité de causes, en partie indéterminées et mal quantifiées
 - Conditions initiales du lancer de pièce (cause mal quantifiée)
 - Informations financières simultanées dont l'impact sur les valeurs boursières est difficilement quantifiable.
 - Abduction (Pierce) : effets certains, causes incertaines

48

Hasard épistémique

- Deux variantes du hasard épistémique
 - 1) *ignorance des conditions initiales : multiplicité des causes, causes mal déterminées et quantifiées*
 - 2) *relations non linéaires entre causes et effets : sensibilité très grande aux conditions initiales*
- Hasard épistémique : ne remet pas en cause le déterminisme
 - *Tout se passe « comme si » certains phénomènes relevaient du hasard*
 - *On parle parfois de hasard épistémologique*
 - *Approche privilégiée dans le domaine scientifique jusqu'aux débats sur l'interprétation de la mécanique quantique*
 - *Comme en témoignent les citations des transparents suivants*

49

Hasard épistémique

- Si l'on est face à du hasard épistémique, alors la prévision boursière est en théorie possible
- À condition de dissiper (un peu) l'ignorance
- Chose peu facile :
 - *Quantités de phénomènes ont des causes multiples, inconnues ou mal quantifiées*
 - *Le rapport de cause à effet peut être hautement non linéaire*
- C'est l'objectif et ce que prétend faire le fonds Medallion
- Il faudra par ailleurs préciser ce qu'on entend par « prévision boursière »
 - *En précisant notamment le concept de primes de risques attachées à des facteurs de risque commun*

50

Hasard épistémique



- Mais s'il est difficile de prévoir un phénomène aussi simple que le résultat d'un lancer de dé
 - *On connaît les relations entre les causes et les effets*
 - Les équations de la mécanique
 - *Mais les conditions initiales sont entachées d'aléa*
 - Vitesse de lancer, angle, nature de la surface
- Il est peu crédible de prétendre prédire l'évolution du cours de l'euro par rapport au dollar
 - *Conditions initiales nombreuses et mal identifiées*
 - *mécanismes complexes entre causes (arrivée de nouvelles informations) et conséquences (variations des prix)*

51

Hasard épistémique : citations

- Le hasard épistémique n'est pas le « vrai hasard »
 - *« Rien alors n'est ni ne devient soit par l'effet du hasard, soit d'une manière indéterminée, rien qui sera ou ne sera pas, mais tout arrive nécessairement et sans aucune indétermination ».*
 - Aristote, chapitre IX du De Interpretatione
 - *« Le hasard n'a aucune réalité en lui-même : ce n'est qu'un terme propre à désigner notre ignorance sur la manière dont les différentes parties d'un phénomène se coordonnent entre elles et avec le reste de la Nature ».*
 - Pierre-Simon Laplace (1773, 1776)
 - *« Ce que nous appelons hasard n'est et ne peut être que la cause ignorée d'un effet connu »*
 - Voltaire – dictionnaire philosophique, 1764, article Atomes

52

Hasard épistémique : citations

- « Ce qui peut sembler contingent à quelqu'un en une circonstance, pour un autre (ou plutôt pour le même) en un autre temps, une fois les causes connues, sera nécessaire; si bien que la contingence est surtout en rapport avec notre connaissance »
 - Bernoulli, De l'Art de Conjecturer.
- « Il n'y a point de hasard à proprement parler, mais il y a son équivalent : l'ignorance où nous sommes des vraies causes des événements a sur notre esprit l'influence qu'on suppose au hasard »
 - D'Alembert (1750)
- Il est cependant certain que tout ce qui arrive est le résultat de quelque loi, est un effet de certaines causes, et pourrait être prévu si l'on connaissait ces causes et leurs lois.
 - John Stuart Mill - – Système de logique déductive et inductive (livre II : du raisonnement)

53

Hasard épistémique : citations

- La possibilité et la contingence ne sont rien que des défauts de notre entendement.
 - Spinoza – Pensées Métaphysiques
- « Le hasard n'est que la mesure de notre ignorance. Les phénomènes fortuits sont par définition ceux dont nous ignorons les lois ».
 - Henri Poincaré – Calcul des Probabilités
- « Le hasard n'est que le nom donné à notre ignorance ; pour un être omniscient la probabilité n'existerait pas... Quels que soient les progrès des connaissances humaines, il y aura toujours place pour l'ignorance, et par suite pour le hasard et la probabilité ».
 - Emile Borel – Le Hasard
- « Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard » -
 - Henri Poincaré (Calcul des Probabilités)

54

Hasard épistémique : citations

- On peut dire que le hasard est le nom commun que l'on attribue à un ensemble de causes trop complexe pour pouvoir l'analyser
 - René de Possel - Sur la Théorie Mathématique des Jeux de Hasard et de Réflexion (1937)
- Lorsque nous lançons des dés, ce qui nous manque, c'est manifestement une connaissance suffisante des conditions initiales.
 - Karl Popper – La logique de la découverte scientifique
- Nous pensons, bien que depuis les travaux de Heisenberg d'éminents savants ne soient pas de cet avis, que la notion de hasard est une notion que le savant introduit parce qu'elle est commode et féconde, mais que la nature ignore.
 - Paul Lévy (1940)
- La fiction du hasard n'est possible que parce que notre science n'embrasse pas toutes les causes qui produisent le cas.
 - Vaihinger (1920)

55

Hasard essentiel (ou ontologique ou « vrai hasard »)

- Hasard attaché à l'objet (chose) étudié
 - « de re », à propos de la chose
 - « Les cours boursiers sont aléatoires »
 - Proposition relative au cours boursiers qui peut être vraie que l'on y croit ou pas : pas de subjectivité → de re
 - Les cours boursiers sont (nécessairement) aléatoires.
 - « Les marchés boursiers sont (nécessairement) efficaces »
 - Si l'efficacité est vue comme résultant de la rencontre d'une offre et d'une demande, tout marché qui organise cette rencontre l'est.
 - L'efficacité est alors une caractéristique essentielle du marché : « de re »
 - « Nécessairement, les marchés boursiers sont efficaces »
 - Peut se voir comme une proposition relative aux marchés boursiers
 - C'est une opinion, c'est ce que l'on dit à propos des marchés boursiers : « de dicto »

56

Hasard essentiel (ou ontologique ou « vrai hasard »)

- Ce qui est associé à la connaissance, au discours que l'on peut porter sur l'objet (proposition relative à l'objet)
 - « de dicto » : ce qui est dit (de la chose)
 - « Fama pense que **les cours boursiers suivent une marche aléatoire** »
 - Croyance de Fama en la vérité de la proposition → de dicto
 - « Il est nécessaire que les marchés boursiers soient efficients » → de dicto
 - De dicto : dimension épistémique
- Opacité des « attitudes propositionnelles » (Quine)
 - Quine **pense que la société (du CAC 40) dont le PER est le plus élevé est surévaluée.**
 - S'il s'agit d'une propriété : on considère l'ensemble des 40 sociétés, il est nécessaire que celle dont le PER est le + élevé soit surévaluée : de dicto
 - La société particulière à laquelle se réfère Quine est surévaluée : de re

57

Hasard essentiel (ou ontologique ou « vrai hasard »)

- Le caractère aléatoire des cours boursiers peut avoir une dimension épistémique ou ontologique
 - « *On sait que les cours boursiers sont aléatoires* » : de dicto, relatif à une connaissance
 - *Les cours boursiers sont aléatoires : propriété intrinsèque des cours boursiers*
- Comment faire la différence entre les deux dimensions ?
 - *Ce qui est épistémique doit faire l'objet d'un « test de réalité »*
 - *Il faut trouver un moyen (statistique) de valider l'hypothèse et donc disposer d'observations (de données)*
 - *Pour un réaliste (le monde existe indépendamment de ce que l'on peut en connaître), ontologie et épistémè*

58

59

60

L'émergence du concept de probabilité

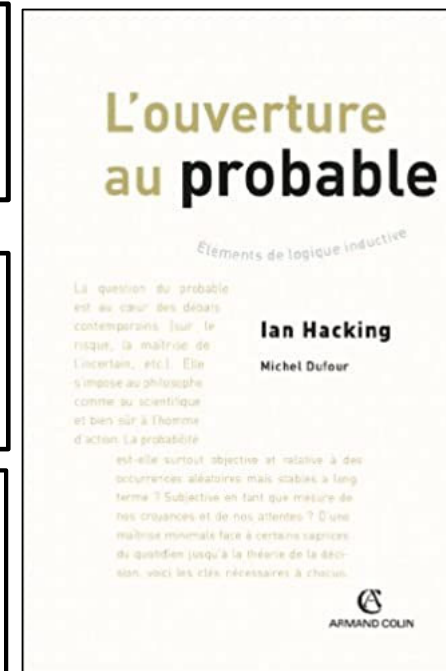
Complément des transparents présentés dans cette partie du cours et des problèmes du TD1 : « L'ouverture au probable : éléments de logique inductive », adaptation en français de l'ouvrage « An introduction to Probability and Inductive Logic ». Contient du cours et des exercices.

Ce qui peut être lu :

- Partie 1 : logique
- Partie 2 : comment calculer les probabilités
- Partie 4 : Les divers types de probabilité
- Partie 5 : probabilité épistémique
- Partie 6 : probabilité fréquentiste

« Aucune maîtrise préalable en logique ou en mathématiques – hormis les quatre opérations – n'est requise pour prendre le risque de la lecture.

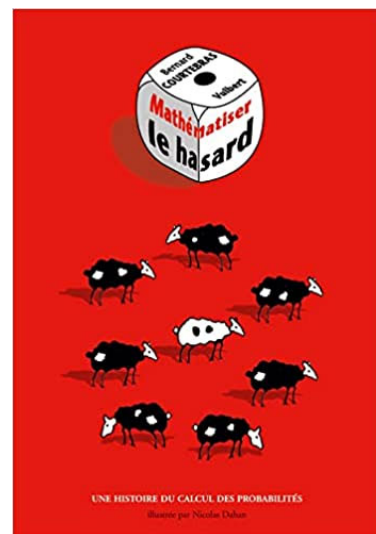
Ce livre constitue revient sur des notions vues au Lycée ou dans le cycle L, tout en évitant les redondances.



61

62

De la difficulté d'enseigner et d'aborder le « calcul des probabilités »

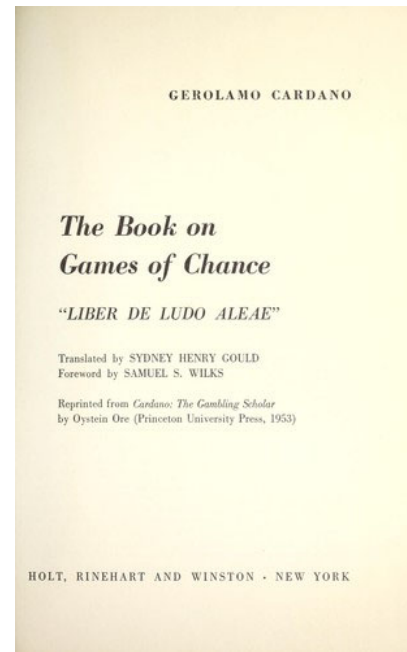


63

L'émergence de l'aléatoire en occident

- Jérôme Cardan mathématicien et joueur de dés invétéré explicite le concept d'équiprobabilité dans le Liber de ludo aleae vers 1564.
 - Le « hasard » apparaît dans les jeux d'argent
 - « Le principe le plus fondamental de tous, dans le jeu, est simplement des conditions égales en ce qui concerne (...) le dé lui-même ».
 - « Dans la mesure où vous vous écarterez de cette égalité, si c'est en faveur du joueur qui vous est opposé, vous êtes fou, et si c'est en votre faveur, vous êtes injuste. »
 - Cardan s'intéresse à des « dés honnêtes », mais comment déterminer a priori si le dé est non pipé ?

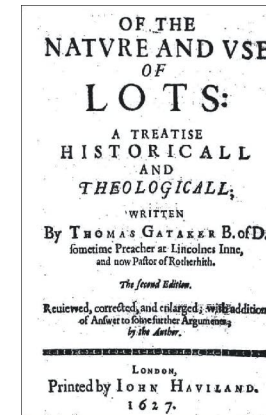
64



65

L'émergence de l'aléatoire en occident

- Thomas Gataker (1627) est l'un des premiers à analyser les loteries comme résultant du hasard



Chance and random events

Chance or randomness lies at the heart of a lottery, with random events being the subject matter of lotteries. Because the nature of chance is so significant for our present concerns, this Chapter gives due consideration to clarifying the nature of lots and lotteries and the questions which need to be asked about them. Concerning 'chance' and 'random events' we will consider four things. The name of it. (Chance); The nature of the thing so named. Two distinct Acts concurring in it; and Certain conclusions or aphorisms concerning it.

66

L'émergence de l'aléatoire en occident

- On peut déceler les prémisses du calcul des probabilités dès le Moyen-Âge
- Au 13e siècle, le "traité des contrats" (Pierre de Jean Olivi) énonce que le **profit est juste** s'il est le fruit du « risque » (doute sur le résultat futur).
 - « De tels marchands exposent leur argent, ainsi que leurs personnes, puis les marchandises achetées par leur argent, à de nombreux **périls**, et ils ne sont pas certains que les marchandises achetées leur permettront de retrouver leur capital. »
- **Periculum** : dommage **fortuit** que peut subir un bien
 - Si à l'origine, le risque est **subi**, dès le 13e siècle, **periculum** recouvre la notion de risque **délibérément pris**

67

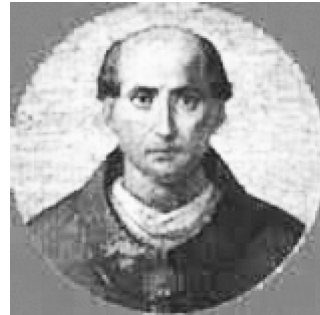
L'émergence de l'aléatoire en occident

- Décrétale naviganti de Grégoire IX (Liber Extra)
 - Il ne suffit pas d'assumer le seul risque de mer (*foenus nauticum*, puis prêt à la grosse aventure) ou invoquer l'incertitude du gain final pour que l'apporteur de capital ait droit à une rémunération (échappe à l'usure)
- Mais Olivi fait appel aux « mathématiques financières »
 - « le marchand à qui il a remis ce capital lui a acheté la cause du profit futur de ce capital, pour un prix équivalent à la probabilité du gain futur telle qu'elle peut être raisonnablement estimée avant que le gain ne se réalise.
 - la valeur de la probabilité appréciable ou de l'espoir probable de gain qui pourra être tiré de ce capital (...). cette probabilité possède une certaine valeur, appréciable par un certain prix temporel, elle peut donc être licitement vendue

68



Grégoire IX



Pierre de Jean Olivi

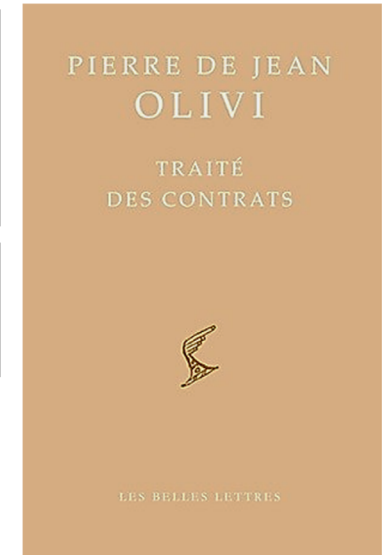
69

L'émergence de l'aléatoire en occident

Piron, S. (2007). *Le traitement de l'incertitude commerciale dans la scolastique médiévale*. Electronic Journal for History of Probability and Statistics.

Piron, S. (2004). L'apparition du resicum en Méditerranée occidentale, XIIe-XIIIe siècles.

Piron, S. (1997). Marchands et confesseurs. Le Traité des contrats d'Olivi dans son contexte



70

L'émergence de la probabilité

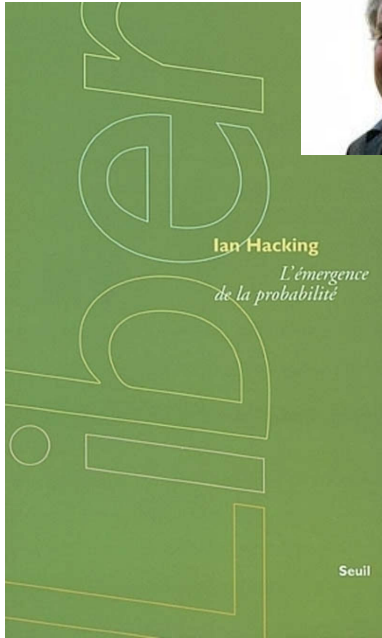
- Mais pour Ian Hacking, « l'archéologue de la probabilité », la « probabilité numérique » émergea vers 1660.
 - *Changement de sens de la notion de **signe**, qui, au lieu de renvoyer à une évidence externe aux choses et aux phénomènes du monde, devient l'expression d'une évidence interne, immanente aux phénomènes*
 - Exemple de signe dans ce contexte : le côté pile ou face sur lequel la pièce retombe
 - *Méthodologie inspirée par Foucault : chapitres II et III, Les mots et les choses*

71

L'émergence de la probabilité

- Hacking met en avant une dualité fondamentale
 - *Probabilité vue comme degré de croyance (ou raison de croire), épistémique (relative à la connaissance), subjective (mais non pas irrationnelle), logique et relative à des propositions*
 - Peut s'appliquer à des événements singuliers
 - Intègre des a priori sur les probabilités (bayésianisme)
 - *Probabilité « statistique », « fréquentiste », plus centrée sur l'observation de fréquences aléatoires stables dans le long terme (loi des grands nombres), objective et relative à des événements*
 - Implique l'utilisation de tirages aléatoires indépendants ou expériences aléatoires
 - Pas compatible avec les événements singuliers, la non-stationnarité
 - S'applique bien aux sciences expérimentales

72



**Ian Hacking, « l'archéologue
de la probabilité »**

L'analyse historique et conceptuelle de Hacking de l'émergence de la probabilité numérique vers 1660 permet d'ordonner les nombreuses et parfois complexes interprétations des probabilités, autour d'une dualité consubstantielle : probabilité épistémique (degré de croyance) et probabilité de type fréquentiste.

Cette dualité est au cœur de la finance. L'économétrie de la finance est marquée par l'approche fréquentiste. Les marchés financiers, eux par la probabilité épistémique, à laquelle ils donnent objectivité et rationalité. En outre, ce sont les dynamiques de prix des marchés financiers (no free lunch) qui permettent de comprendre la notion mathématique complexe d'aléatoireité.

Une approche axiomatique des probabilités

77

Ontologie du hasard : le renversement de Kolmogorov

- L'ingéniosité de Kolmogorov a permis de sortir de l'ambiguïté épistémique
 - *Comment manipuler quelque chose dont l'existence même n'est pas établie ?*
 - *On a commencé au 17^e siècle à quantifier le hasard, via la mesure de probabilité, en établir les propriétés importantes sans l'avoir défini*
- La construction de Kolmogorov évite cet écueil.
- Cette construction mathématique est-elle applicable à des données réelles ?
 - *C'est l'objet des tests statistiques et de la détermination d'intervalle de confiance.*

78

Ontologie du hasard : le grand renversement

- Kolmogorov (suite) : si l'aléatoire existe, on peut déduire logiquement un certain nombre de propriétés des suites aléatoires : loi des grands nombres, théorème central limite, par exemple.
- Confronté à des données (physiques, boursières), on pourra *avec un certain degré de confiance*, considérer que ces données sont issues d'un processus aléatoire.
 - *C'est l'objectif de la statistique mathématique d'établir ce degré de confiance selon les procédures les plus rigoureuses possibles*
 - *Mais la certitude (d'être en présence de l'aléatoire) est pratiquement et logiquement impossible, encore plus en finance, qu'en physique : expérimentation plus limitée en finance, performativité de la connaissance.*

79

Ontologie du hasard : le grand renversement

- Jusque dans les années 1930, les mathématiciens faisaient du « calcul des probabilités », sans avoir défini l'aléatoire.
- Mais quelle que soit l'approche utilisée (probabilités dites classiques, fréquences empiriques, probabilités subjectives), on retrouvait quelques propriétés :
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour deux événements disjoints.
 - $P(A) + P(A^c) = 1$ (A^c est le complémentaire de A)
 - $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ pour deux événements indépendants.
- Kolmogorov (1933) change la perspective : si le hasard existe et est mesurable, il doit suivre un certain nombre d'axiomes.

80

L'axiomatique de Kolmogorov (1933)

- Sert aujourd'hui de référence (à juste titre)
 - Renverse le paradigme antérieur ayant émergé en 1660
 - On ne cherche plus à définir l'aléatoire **à partir de son rapport** au « réel »
 - On pose quelques axiomes simples vérifiés aussi bien dans les approches épistémiques et fréquentiste des probabilités.
 - Principe d'additivité des probabilités d'événements disjoints et définition formelle de l'indépendance.
 - Kolmogorov ne définit pas ce qu'est une expérience aléatoire
 - Néanmoins, ses explications vont vers l'expérience de pensée, une **idéatisation** du lancer de dés.
- On s'intéresse dans un second temps si la théorie peut décrire correctement des situations « réelles »
 - Ce sera la problématique de la statistique mathématique

81

L'axiomatique de Kolmogorov



Andrei Kolmogorov: un grand mathématicien au cœur d'un siècle tourmenté : <https://www.youtube.com/watch?v=73FdVyUUNlY>

82

Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903, Tambov, Russia—1987 Moscow)



- Measure Theory
- Probability
- Analysis
- Intuitionistic Logic
- Cohomology
- Dynamical Systems
- Hydrodynamics
- Kolmogorov complexity

83

L'axiomatique de Kolmogorov (1933)

- Commençons par quelques rappels (et compléments)
- On considère un espace fondamental Ω ou « univers » ou « ensemble des issues possibles » ou ensemble des « événements élémentaires »
 - Mais il faut bien comprendre que ceci n'a aucun rapport avec une expérimentation, un « tirage ».
- La première partie du livre de Kolmogorov traite du cas où le cardinal de Ω est fini
 - On considère une famille de sous-ensembles de Ω , comprenant Ω , stable par réunion et passage au complémentaire : algèbre $\mathcal{F}$
 - Pour simplifier $\mathcal{F} = 2^\Omega$: ensemble de tous les sous-ensembles inclus dans Ω
 - Ex : $\Omega = \{0,1\}$. $\mathcal{F} = \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \emptyset\}$

84

L'axiomatique de Kolmogorov (1933)

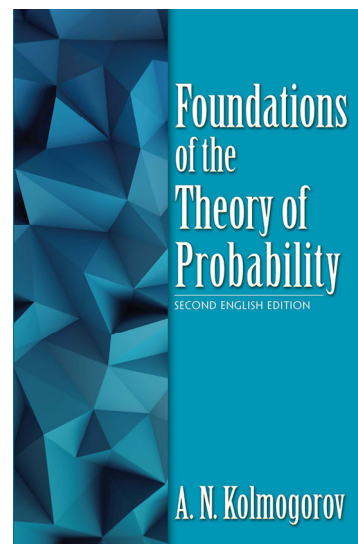
- Une probabilité P est une fonction de $\mathcal{F} = 2^\Omega$ dans $[0,1]$
 - $A \subset \Omega \rightarrow P(A) \in [0,1]$
- P vérifie les axiomes suivants :
- $P(\Omega) = 1$.
 - Un événement de probabilité 1 peut être interprété comme certain, mais rien dans la théorie n'impose cette interprétation.
 - Exemple, la longueur d'un sous-ensemble de l'intervalle $[0,1]$ (quand elle existe) définit une probabilité...
 - La longueur de l'intervalle $[0,1]$ est 1
 - Il ne viendrait à personne l'idée de dire que l'intervalle $[0,1]$ est certain
- Additivité : $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Et c'est tout... On fait des mathématiques.

85

Indépendance de deux événements :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Lien avec des "tirages aléatoires indépendants" ?



"One of the most important problems in the philosophy of the natural sciences is to **make precise the premises** which would make it possible to regard any given **events as independent**".

This question, however, is beyond the scope of this book.

A. Kolmogorov

86

L'axiomatique de Kolmogorov (1933)

- « variable aléatoire » : une **fonction** mesurable
 - Ainsi l'application $x \in [0,1] \rightarrow x \in [0,1]$ est une variable aléatoire (c'est l'application identité ...)
 - On laisse de côté volontairement la question de la définition des ensembles mesurables qui n'a pas d'importance pour cet exemple.
- Les « **expériences aléatoires** » ne sont jamais définies
 - Le lancer de dés est une analogie
 - **Applicabilité** (connexion avec le « monde réel ») ?
 - Repose l'analyse de suite infinies, alors qu'on ne dispose jamais que d'un nombre fini d'observations
 - Présentation scolaire des probabilités discutable car donne à penser que l'expérience aléatoire est objectivement définie

87

L'axiomatique de Kolmogorov (1933)

- Probabilité : « mesure » positive de masse totale égale à un
 - Exemple : longueur d'intervalles inclus dans $[0,1]$
 - La longueur de l'intervalle $A = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ est égale à 0,5. La longueur de l'intervalle $B = [\frac{1}{2}, 1]$ est égale à 0,5
 - $A \cap B = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. La longueur de $A \cap B$ est égale à 0,25 soit le produit des longueurs de A et de B
 - Il ne viendrait à l'esprit de personne de dire que les deux intervalles $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$ sont indépendants... **C'est pourtant le cas.**
 - On doit **imaginer** qu'il existe une « variable aléatoire » U uniformément distribuée dans $[0,1]$ et on dira les événements $\{U \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]\}$ et $\{U \in [\frac{1}{2}, 1]\}$. Cela oblige à **imaginer** qu'il existerait un autre espace fondamental Ω' d'événements sur lequel est défini la fonction U .
 - On a mis la poussière sous le tapis : qu'est-ce qu' Ω' ?

88

Probabilités subjectives et marchés financiers

89

Probabilité et degré de croyance (credence)

- Pendant l'antiquité et jusqu'au moyen âge, le **probable** était lié à un **argument d'autorité** et reflétait un **degré de croyance**
 - *Pour Aristote, « sont probables les opinions qui sont reçues par tous les hommes, ou par la plupart d'entre eux, ou par les sages, et parmi ces derniers, soit par tous, soit par la plupart, soit enfin par les plus notables et les plus illustres »*
- C'est avec la prise de distance par rapport à l'église catholique, que l'argument d'autorité s'estompe et qu'il faut recourir à l'observation des faits, au raisonnement pour établir des degrés de croyance (probabilités épistémiques)

90

Probabilités subjectives ?

L. Savage



- Degré de croyance dans la survenance d'un événement ou dans la plausibilité d'une hypothèse
 - Événement de nature unique : **fait singulier**
 - Ne se prête pas à une répétition d'expériences
- Opinion personnelle, dires d'expert, opinion collective ?
 - Probabilité que Emmanuel Macron soit réélu selon **vous-même**, d'après les **sondages**, les **bookmakers** ?
 - Ces degrés de croyance peuvent être réévalués en fonction des interactions avec d'autres agents ou de nouvelles informations
 - Paradoxe d'Aumann, Keynes (1921)
- Les marchés financiers (ou de « paris ») donnent une réalité aux probabilités « subjectives »

91

Probabilités « subjectives »

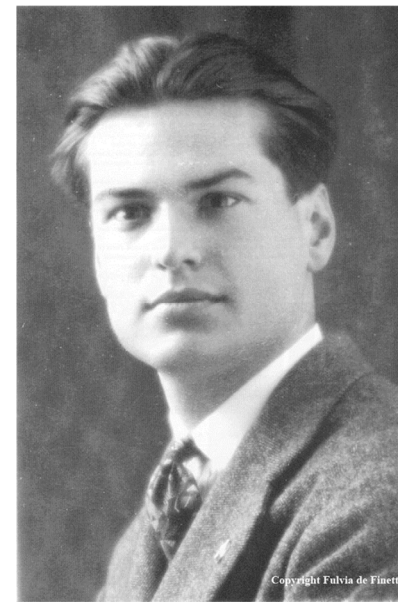
- Le terme subjectif est péjoratif, comparé à objectif.
- On insiste souvent, **à tort**, sur le caractère plus ou moins arbitraire d'une estimation par un « sujet »
 - Quand bien même il s'agirait d'un expert
 - *par rapport à une approche par répétition d'expériences indépendantes et identiques : approche fréquentiste*
 - *Approche fréquentiste discutable en finance*
- La notion de probabilités subjectives remonte à l'analyse des paris et a un lien étroit avec l'**investissement financier**, notamment l'activité de négoce des produits structurés et des options par les grandes banques

92

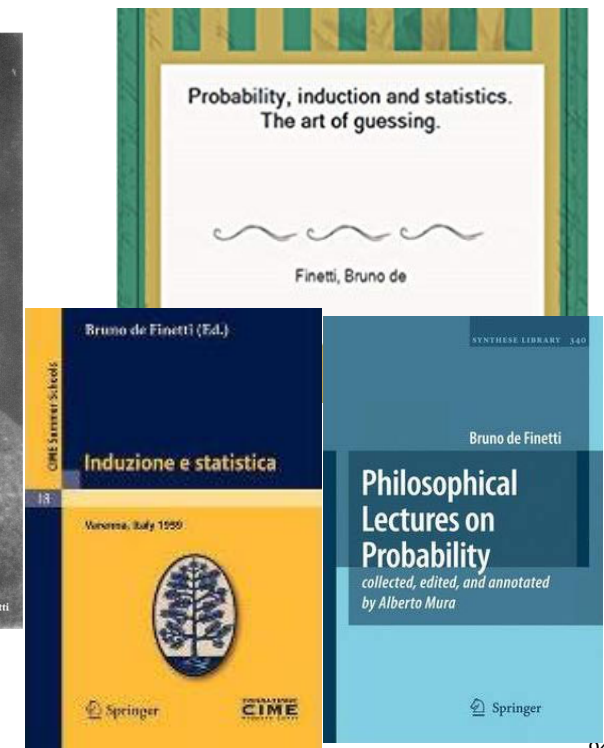
La cohérence des degrés de croyance

- Ramsey (1926), De Finetti (1937) mettent en avant que l'ensemble des « **degrés de croyance** » dans des événements futurs suivent les **axiomes des probabilités**
 - « Supposons qu'un individu soit obligé d'évaluer le prix p pour lequel il serait disposé d'échanger la possession d'une somme quelconque S (positive ou négative) **subordonnée** à l'arrivée d'un événement donné, E , avec la possession de la somme pS »
 - « Nous dirons par définition que ce nombre p est la mesure du degré de probabilité attribué par l'individu considéré à l'événement E , ou, plus simplement, que p est la probabilité de E (selon l'individu considéré ; cette précision pourra d'ailleurs être sous-entendue s'il n'y a pas d'ambiguïté) ».
 - La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Bruno de Finetti (1937), page 6

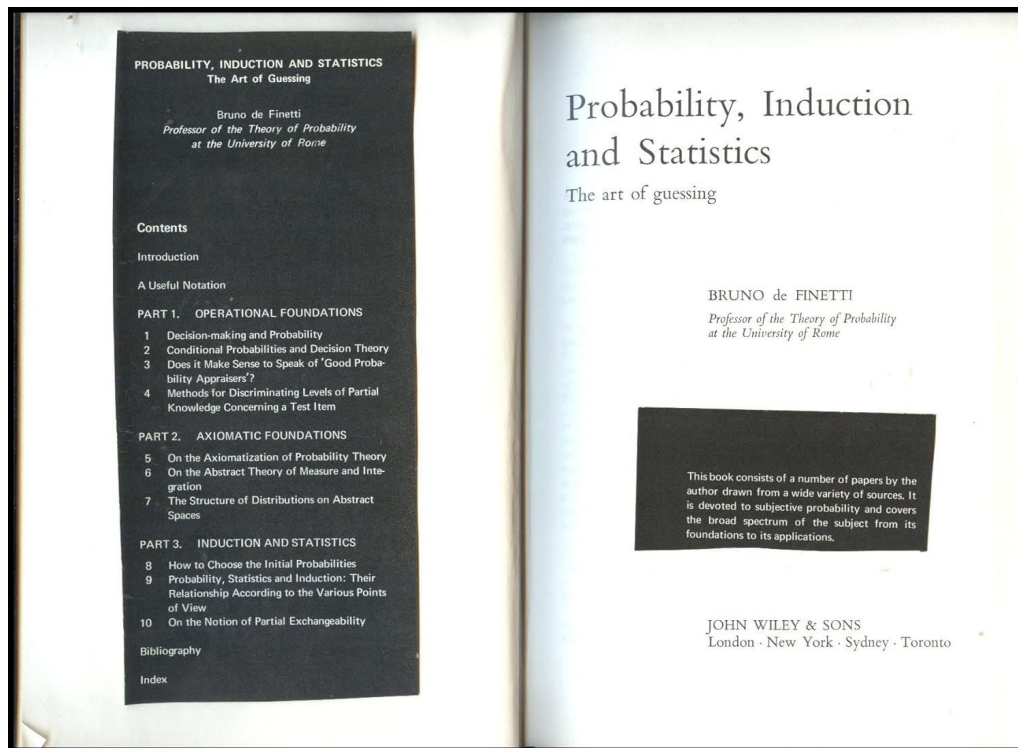
93



De Finetti et Ramsey, les génies précoces



94



95



Frank Ramsey : Truth and probability (1926), General Propositions and Causality (1929)



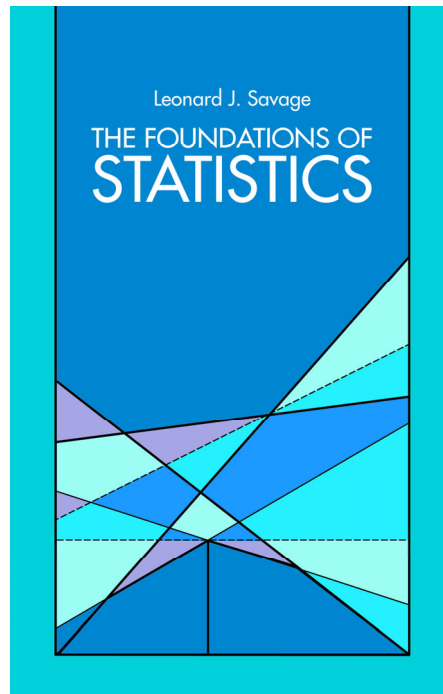
Un « dutch book » est un système de paris, qui permet des gains certains (arbitrages) car il n'est pas fondé sur un système de probabilités

“These are the laws of probability, which we have proved to be necessarily true of any consistent set of degrees of belief” (1926). Voir TD2 sur l'analyse des systems de paris.

96



A partir d'axiomes sur le comportement des individus face au risque, comme le « sure thing principle », Savage étend le concept de « probabilité subjective » dans l'évaluation du risque.



97

Dutch Book et probabilités subjectives

- Pour une banque ou un broker « vendant » et « achetant » des paris, **les prix qui sont pratiqués vérifient les axiomes des probabilités** : Ramsey (1926), de Finetti (1931)
 - *Contexte concurrentiel : même prix à l'achat et à la vente.*
 - *Achat/vente : pari pour/contre*
 - *Exemple : David contre Goliath, qui va gagner ?*
 - *Pari 1 : On reçoit/paye un euro si David gagne/perd. La mise est égale à p*
 - *Pari 2 : On reçoit/paye un euro si Goliath gagne/perd. La mise est égale à q*
 - *Si $p + q < 1$, on joue à la fois David et Goliath et on gagne à coup sûr $1 - (p + q)$.*

98

Dutch Book et probabilités subjectives

- On peut complexifier le raisonnement précédent
- Supposons qu'outre David et Goliath, nous ayons un combattant supplémentaire Zorglub.
- Il y a d'abord un combat triangulaire dont l'issue est de savoir quels seront les protagonistes du second combat.
- Dans ce cas, on peut parier sur la victoire de Goliath contre David, sachant que Zorglub ne sera pas au second tour.
- Ou la victoire de David contre Goliath, sachant que Zorglub ne sera pas au second tour.
- La somme des primes pour ces paris est égale à la prime du pari selon lequel Zorglub sera éliminé au premier tour

99

Probabilités subjectives et marchés

- Supposons maintenant qu'il y a un marché de brokers.
- Si deux brokers pratiquent des prix différents pour un même pari, on peut alors les arbitrer.
 - *Acheter le pari au prix bas, vendre le pari au prix élevé*
 - *C'est une opportunité d'arbitrage qui n'existe pas dans un marché sans « frictions », car elle permet des gains illimités*
 - *Frictions : restrictions à l'achat et à la vente, des dépôts de garanties à financer, des prix différents à l'achat et à la vente*
- Prix des paris : associés à une mesure de probabilité non individuelle, dérivée du marché, observable et « opérable »
 - *Il existe des contrats financiers de transfert de risque associés à ces probabilités*

100

Quelles approches du hasard en finance ?



- **Approche fréquentiste** des probabilités appliquées aux rentabilités boursières
 - Les principaux éléments de décision (espérance et écart-types des rentabilités, ...) peuvent alors être déterminés par des méthodes statistiques standard
 - Ces quantités sont supposées (relativement) stables au cours du temps : **rolling regressions**
- **Approches utilisant les probabilités subjectives issues du marché (market implied ou risque-neutre)**
 - *Couverture des risques possibles*
- Analyse des événements rares et extrêmes
 - *Scénarios prospectifs de stress (tests de résistance ou stress-tests)*

101

102

103

104

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

Des probabilités classiques au principe d'indifférence



- Pascal, Laplace, ...
 - Une nouvelle approche des jeux de «hasard»
 - Tirage de dés, jeu à pile ou face
 - Angle d'une aiguille lancée en l'air (Buffon)
 - Souvent liée à une **égale répartition des chances**
 - Probabilités uniformes
 - Tirage à pile ou face
 - Deux événements : pile et face
 - Probabilité que la pièce tombe sur pile = $\frac{1}{2}$
- Le lancer idéalisé d'une pièce est alors vu comme une « **expérience aléatoire** » reproductible

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- Le lancer idéalisé d'une pièce illustre l'émergence du **contingent**
 - Il n'y a pas de cause particulière (efficiente) à ce qu'une pièce retombe sur pile ou sur face
 - La trop grande complexité à déterminer sur quel côté la pièce doit (nécessairement) tomber ouvre la voie à un ensemble de possibles
- Le principe de la raison suffisante (déterminante) de Leibniz vu comme un **principe logique** « rien n'arrive sans raison » aboutit (paradoxalement) à l'**égale répartition des chances** : $p = \frac{1}{2}$ ou équiprobabilité
 - Les forces qui gouvernent le mouvement de la pièce s'appliquent avec une égale intensité pour qu'elle retombe sur pile ou sur face
 - Probabilités déterminées **a priori** par **symétrie**



Pièce ancienne : pile ou **croix**.



Pièce républicaine : pile ou **face**.

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- L'égalité répartition des chances ouvre la voie à un **calcul (combinatoire) des probabilités** :
 - Laplace (essai, p. 11) : « probabilité : rapport du nombre de cas favorables à celui de tous les cas possibles ».
- Et à la notion d'**indépendance**.
 - Soit 2 tirages d'une pièce, l'ensemble des possibles est PP, PF, FP, FF. L'égalité répartition des chances entre 2 tirages consécutifs implique que chacun des 4 états a une probabilité de $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, où $A, B = P, F$
 - Les probabilités contemporaines (Kolmogorov) définissent d'abord l'indépendance par $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$,
 - On analyse ensuite des suites de tirages pour « savoir » s'ils sont indépendants.

109

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- L'égalité répartition des chances about aussi au concept de **probabilité conditionnelle** :
 - Probabilité d'obtenir un 3 « sachant » que le résultat est impair

$$= \frac{P(\{D=3\} \cap D \in \{1,3,5\})}{P(D \in \{1,3,5\})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3},$$
 - $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, probabilité de A sachant B
- Ce qui nous amène au théorème de Bayes
 - $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
 - $P(A)$: probabilité a priori de A (ou probabilité marginale)
 - L'observation de B, permet de réviser la probabilité de A, $P(A|B)$ est souvent appelée probabilité a posteriori

110

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- Supposons maintenant que la pièce puisse être « biaisée »
 - Il est en pratique très difficile de biaiser une pièce, contrairement à un dé : essayez !
 - L'absence de symétrie a priori ne permet alors pas de conclure à l'équiprobabilité.
 - « Il pourroit se faire en effet (& je suis même porté à le croire), que le cas pile croix ne fût pas exactement aussi probable que le cas croix seul ; mais le rapport des probabilités me paroit inappréciable »
 - d'Alembert Opusculs Mathématiques tome 2, pages 21-22, 1761
 - Pourtant pour Laplace (essai philosophique sur les probabilités, 1814), « s'il existe dans la pièce, une inégalité qui fasse paraître une des faces plutôt que l'autre, *sans que l'on connaisse quelle est la face favorisée par cette inégalité* ; la probabilité d'amener croix (pile) au premier coup sera toujours $\frac{1}{2}$ ».

111

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

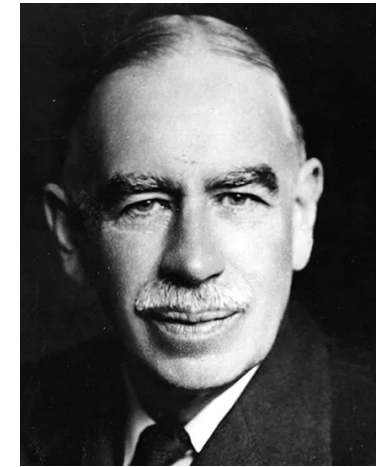
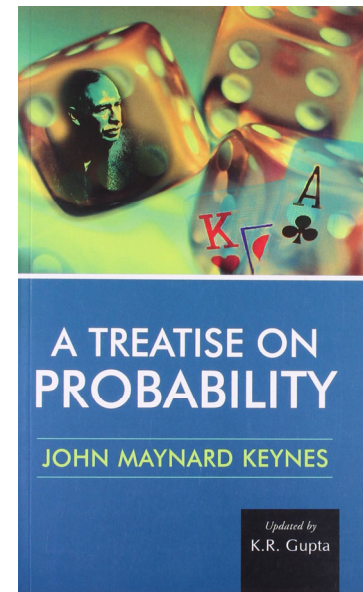
- Laplace n'exclut pas que $p \neq \frac{1}{2}$
 - « Lorsque qu'on ne voit *aucune raison* qui rende l'une plus probable que l'autre, parce que, quand bien même il y aurait une inégale possibilité entre elles, comme nous ignorons de quel côté est la plus grande, cette incertitude nous fait regarder l'une comme aussi probable que l'autre »
 - « Mémoire sur la probabilité des causes par les événements » (1774), page 61, où Laplace analyse les jeux de dés pipés.
- Laplace reprend le principe de la raison non suffisante de Bernoulli
 - “In the absence of any prior knowledge, we should assume that the *events* have equal probability”
 - Ars Conjectandi (The Art of Conjecturing), J. Bernoulli, 1713

112

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- **Principe d'indifférence** : Keynes (1921) dans son traité des probabilités renomme/reformule le principe de la raison non suffisante :
 - « S'il n'y a **aucune raison connue** pour attribuer à notre sujet une alternative plutôt qu'une autre, parmi plusieurs alternatives possibles, alors, ces alternatives ont une **probabilité égale** relativement à notre connaissance.
 - Des probabilités égales doivent donc être assignées à chacun des différents arguments, s'il n'y a pas de raison de leur assigner des probabilités inégales ».
- Il est à noter que Keynes est avant tout un critique du principe d'indifférence.

113



Ouvrage foisonnant et intéressant, mais difficile à appréhender. Une lecture critique en est faite par C.P. Robert (2011) : Reading Keynes' Treatise on Probability. International Statistical Review ; elle nécessite néanmoins de (très) bonnes connaissances en probabilités.

114

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

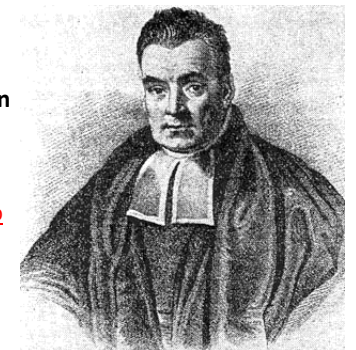
- Bayes et Laplace abordent la question de tirages à pile ou face sous un angle nouveau.
 - Par tirage à pile ou face, on entend expérience aléatoire où il n'y a que deux résultats possibles, 0 ou 1, hausse ou baisse des cours
- On ne connaît toujours pas la probabilité p ...
- On procède à n tirages et on tombe $k \leq n$ sur pile
- Que peut-on en déduire sur la valeur inconnue de p ?
- En l'absence d'information a priori sur la valeur de p , Bayes et Laplace supposent que p suit une **loi de probabilité uniforme** sur l'intervalle $]0,1[$
- Ils montrent que la distribution de p sachant k est une loi dite Beta.
- On peut alors construire des intervalles de confiance pour p

115

LII. *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S.*

Références à l'essai sur la manière de résoudre un problème dans la doctrine des risques :

<https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1763.0053>
https://www.jstor.org/stable/105741?seq=1#metadata_info_tab_contents



Référence sur la biographie de Thomas Bayes :
<https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/bayespic.htm>

116

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- Probabilités a priori et approches bayésiennes.
 - Principe d'indifférence et choix d'une distribution a priori uniforme pour la probabilité p (Bayes, Laplace) : premiers jalons
 - Dans certains contextes, le choix d'une distribution a priori est guidé par des considérations logiques (symétrie)
 - Choisir une distribution uniforme pour p dans le cas du lancer d'une pièce n'est pas très logique...
- La distribution uniforme : nécessité logique ?
 - Deux joueurs peuvent-ils s'accorder sur un jeu de pile ou face avec des mises différentes de 2 contre 1 ?
 - Non, car toute distribution de probabilité « raisonnable » sur p dans ce contexte doit avoir une espérance égale à $\frac{1}{2}$
 - Si l'un des joueurs a une information privilégiée sur l'asymétrie de la pièce, cette information est révélée par le pari (Aumann)

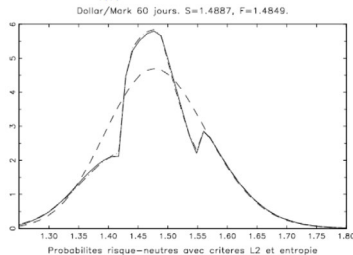
117

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- La distribution uniforme est-elle une nécessité logique ?
 - En théorie de l'information, l'équiprobabilité correspond à une entropie $\sum_i p_i \times \ln(p_i)$ maximale
 - Plus précisément, si on maximise $\sum_{i=1}^n p_i \times \ln(p_i)$ sous les contraintes, $p_1, \dots, p_n \geq 0$ et $p_1 + \dots + p_n = 1$, on obtient : $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$
 - Approche défendue notamment par **Jaynes** à partir des années 1950
 - Jaynes a aussi contribué à éclairer (sinon à résoudre) le paradoxe de Bertrand en cherchant à « bien poser » le problème du « tirage au hasard ».
 - Cette approche est parfois présentée comme une extension du principe d'indifférence : « **bayésianisme objectif** ».
 - On maximise $\sum_i p_i \times \ln(p_i)$ en intégrant des contraintes liées à des observations de prix d'actifs financiers
 - Jackwerth & Rubinstein (1996). Recovering probability distributions from option prices. The Journal of Finance.
 - Buchen & Kelly (1996). The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices. Journal of Financial and Quantitative Analysis.

118

Des probabilités classiques au principe d'indifférence



Fonction de densité des taux de change (à un horizon de 60 jours), compatibles avec les primes d'option de change :
Maximisation de l'entropie et fonction de densité a priori log-normale (modèle de Black et Scholes),

Multimodal Implied Risk-Neutral Densities, Frachot et al (1999)

Probability Theory The Logic of Science

E. T. JAYNES



Edwin Jaynes considère que deux agents rationnels ayant la même information devraient aboutir aux mêmes lois de probabilités (par ex. sur les prix des actifs financiers).

119

Les limites de l'équiprobabilité : doit-on supposer le taux de change \$/€ ou €/€ équiprobable ?

- Considérons le résultat d'une entreprise qui exporte pour 100 \$ aux US.
- On note e_t le nombre de \$ pour acheter un €.
 - Aujourd'hui, $e_0 \approx 1,17\$$
- Le résultat R en € est donné par : $R = 100/e_1$.
 - Où e_1 est le taux de change « pour l'année à venir »
 - On suppose que e_1 peut varier de $\alpha = \pm 10\%$ autour de e_0 de manière uniforme
 - Hypothèse discutable d'un point de vue statistique et économique, choisie ici par commodité de calcul
- Exercice Thème 1 :
 - Calculer l'espérance du taux de change futur
 - Calculer l'espérance du résultat futur. Discuter ce résultat.

120

Les limites de l'équiprobabilité

- On vient de voir à propos des taux de change que choisir une probabilité uniforme pour e ou $\frac{1}{e}$ est affaire de convention

REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE PROBABILITÉ;

Par M. ÉMILE BOREL.

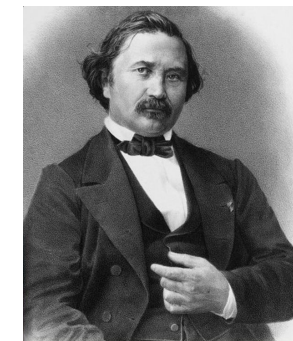
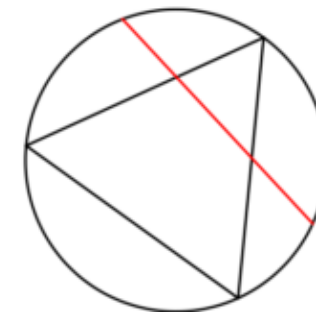
1. On sait que les questions de probabilité où interviennent des variables continues ne peuvent acquérir de sens qu'en vertu de conventions précises. Comme le fait observer Joseph Bertrand, si une variable x est assujettie à rester comprise entre 0 et 1, son carré x^2 est assujetti aux mêmes conditions et la probabilité pour que x soit compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ est égale à la probabilité pour que x^2 soit compris entre 0 et $\frac{1}{4}$. Cela serait absurde (*) si l'on supposait à chacune de ces probabilités une valeur *intrinsèque*, c'est-à-dire définie objectivement d'une manière indépendante de toute convention.

(*) Voir POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, 8^e Leçon.

121

Paradoxe de Bertrand : comment tirer une corde au hasard ?

- On considère un cercle. On se demande comment tirer une corde (en rouge) au hasard ?
 - Rappels de géométrie : étant donné un triangle, il existe un unique cercle passant par les sommets du triangle, dit cercle circonscrit.
 - Le centre de ce cercle est le point de concourance des médiatrices du triangle.
 - si r est le rayon du cercle la longueur des côtés du triangle équilatéral est égale à $r\sqrt{3}$
- Quelle est la probabilité que la corde rouge, « tirée au hasard » soit plus longue qu'un côté du triangle ?

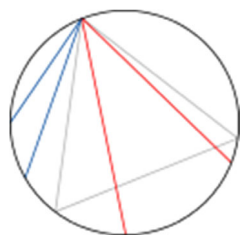


Joseph Bertrand

122

Paradoxe de Bertrand : comment tirer une corde au hasard ?

- 3 procédures possibles pour choisir une corde au hasard : extrémités aléatoires, rayon aléatoire, milieu aléatoire
 - *Extrémités aléatoires* : on choisit un premier point sur le cercle en tirant de manière uniforme (la mesure d'un angle (par rapport à un axe de référence) dans $[0^\circ, 360^\circ]$. On fait de même pour obtenir un second point.
 - On trace le triangle équilatéral de sommet le premier point (voir dessin)
 - Les cordes à l'intérieur du triangle (en rouge) sont plus longues que le côté du triangle. Leur extrémité est située sur l'arc de cercle opposé au sommet. Sa longueur est le tiers de la circonférence du cercle.

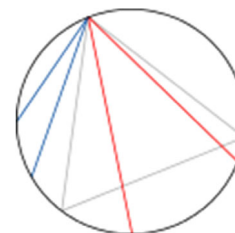


Extrémités aléatoires :
On déduit de l'analyse géométrique que la probabilité que la corde soit plus longue qu'un côté probabilité 1/3

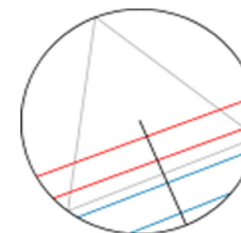
123

Paradoxe de Bertrand : comment tirer une corde au hasard ?

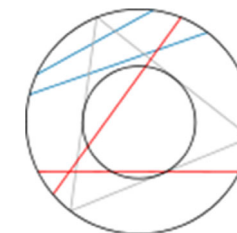
- 3 méthodes possibles pour choisir la corde : extrémités aléatoires, rayon aléatoire, milieu aléatoire
 - En rouge, cordes plus longues que la longueur du côté du triangle, en bleu cordes plus courtes
 - Dans chaque cas, la loi uniforme est utilisée, mais pas de la même manière



Extrémités aléatoires
probabilité 1/3



Rayon aléatoire
probabilité 1/2

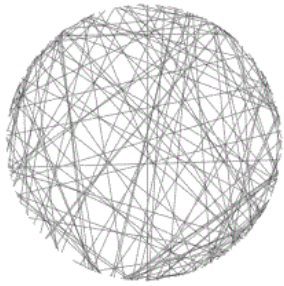


Milieu aléatoire
probabilité 1/4

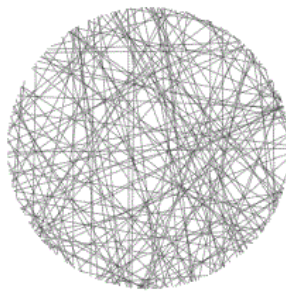
Principe et formalisation des calculs : https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Bertrand Pour un tuto fait par des étudiants du MIT : <http://web.mit.edu/tee/www/bertrand/problem.html> Pour des liens vers du code Python, R, Matlab <https://hpaulkeeler.com/the-bertrand-paradox/>

124

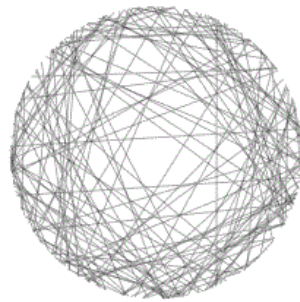
Paradoxe de Bertrand : comment tirer une corde au hasard ?



Extrémités aléatoires
150 simulations



Rayon aléatoire
150 simulations

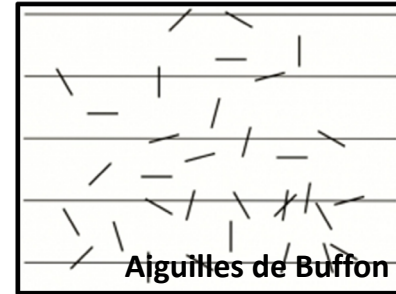


Milieu aléatoire
150 simulations

125

Paradoxe de Bertrand : comment tirer une corde au hasard ?

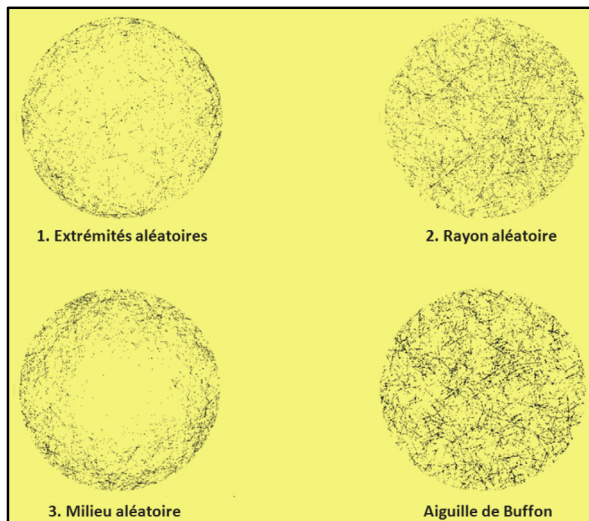
■ L'aiguille de Buffon ?



- On lance un grand nombre de fois une aiguille sur un parquet, composé de planches parallèles de même largeur.
- On comptabilise le nombre de fois où l'aiguille tombe à cheval sur une rainure du parquet par rapport au nombre total de lancers.
 - La proportion d'aiguilles à cheval sur deux lames tend vers $2/\pi$.
 - Première illustration de calculs par simulation (méthode de Monte Carlo)

126

Paradoxe de Bertrand plus aiguille de Buffon : comment tirer une corde au hasard ?

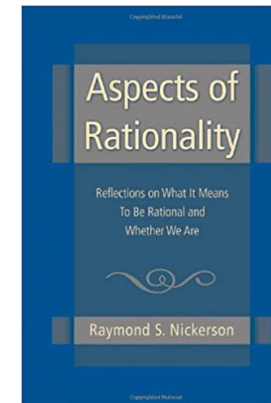
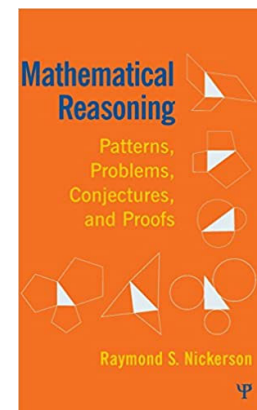


On rajoute une quatrième méthode pour tirer des cordes « au hasard », celle utilisée par Buffon. Position du centre de l'aiguille suivant une loi uniforme, angle de l'aiguille suivant une loi uniforme.

127

Paradoxe de Bertrand et psychologie cognitive

- Comment nos capacités cognitives nous permettent d'appréhender le « tirage au hasard » des cordes



Nickerson, R. (2005). Bertrand's chord, Buffon's needle, and the concept of randomness. Thinking & reasoning

128

Paradoxe de Bertrand et psychologie cognitive

- Enquête 1 auprès de 35 personnes ayant une qualification universitaire en probabilités : 30% répondent $1/3$, 30% répondent $1/2$, **personne n'a répondu qu'il pouvait y avoir plusieurs réponses possibles.**
- Enquête 2 : 75 universitaires ayant du temps pour répondre par écrit. **Très peu ont noté l'ambiguïté de la question ou la possibilité de réponses multiples.** $1/3$ domine largement $1/2$
- Enquête 3 : On demande de **dessiner** des cordes au hasard. **Les cordes longues sont beaucoup plus fréquentes ; il n'y a pas d'indépendance entre les longueurs consécutives. Les cordes sont placées pour combler les « blancs ».**
- *The prevailing opinion among researchers appears to be that people are not very good at randomisation tasks*
 - Faulty conceptions of randomness, attention, information processing

129

Paradoxe de Bertrand plus aiguille de Buffon : comment tirer une corde au hasard ?

- TD : Questions simples (visuelles)
 - *Est-ce que le problème de lancer d'aiguille de Buffon se ramène à l'un des cas étudiés par Bertrand ?*
 - *Que repère-t-on en regardant les trois simulations précédentes (à propos de la répartition des cordes) ?*
 - *Est-ce que l'on peut reformuler le problème de « simulation » de corde de manière plus naturelle ?*
 - Et à quelle solution cela correspond-il ? (Emile Borel)
- TD : Questions plus techniques (géométrie)
 - *Comment formuler « tirer des milieux » au hasard en termes de position de la corde sur un rayon (géométrie) ?*
 - *Comment formuler tirer des « extrémités au hasard » en termes de position de la corde par rapport à un rayon ?*

130

Le paradoxe de Bertrand et le principe d'indifférence

- Le paradoxe de Bertrand et principe d'indifférence
 - Choisir une corde « au hasard » peut être fait de différentes manières, toutes ayant un sens
 - On peut reformuler le problème de manière unifiée en termes de position du milieu d'une corde sur un rayon du cercle
 - Et se rendre compte que l'on fait tantôt des hypothèses de loi uniforme sur des angles, des distances ou des coordonnées cartésiennes
 - Loi uniforme : mais sur quels paramètres du modèle ?
- Utilité de cette analyse
 - Comprendre les différentes approches cognitives du hasard
 - Bien formuler les méthodes de simulation aléatoire (rentabilités, compositions de portefeuilles, ...)

131

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- *Références complémentaires sur l'origine du principe d'indifférence et les interprétations des probabilités*
 - En bleu, celles qui nécessitent des bonnes connaissances en mathématiques
 - Cozic, & Drouet (2009). Interpréter les probabilités. *Pour la science*.
 - Gerville-Réache (2017). A la recherche des lois de probabilités de D'Alembert.
 - Gerville-Réache, & Rochel (2017). D'Alembert : controverses et probabilités.
 - Henry (2009). Émergence de la probabilité et enseignement. Définition classique, approche fréquentiste et modélisation.
 - Robert (2011). *Reading Keynes' Treatise on Probability. International Statistical Review*.
 - Martin, Frazier & Robert (2020). Computing Bayes: Bayesian Computation from 1763 to the 21st Century
 - Borel, É. (1905). Remarques sur certaines questions de probabilité. *Bulletin de la Société mathématique de France*.

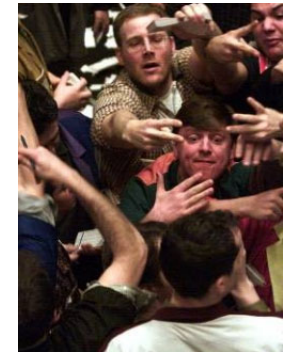
132

Hasard non calculable

133

Hasard calculable et non calculable

- Différence entre jeu de dés et évolution des cours boursiers ?
- Pour le jeu de dés, on connaît **a priori** la loi de probabilité d'apparition des numéros
 - De par la nature même du jeu
 - Probabilité uniforme
 - On parle de « probabilités classiques »
- On ne connaît pas **a priori** les lois de probabilité des rentabilités boursières



134

Hasard calculable et non calculable

- Distinction entre risque et incertain
 - *Frank Knight*
- Risque : calculable (utilisation des probabilités)
- Incertain : risque non « calculable »
 - Limites cognitives, rationalité limitée
 - *We also know there are **known unknowns**; that is to say we know there are some things we do not know. But there are also **unknown unknowns** - the ones we don't know we don't know.*



- D. Rumsfeld à propos de la politique américaine en Irak
- en.wikipedia.org/wiki/There_are_known_unknowns

135

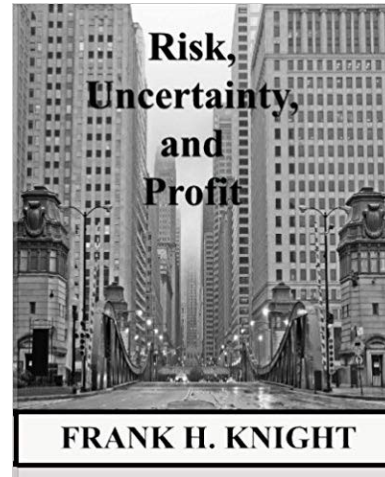
Hasard calculable et non calculable

- Connaissance ou pas des lois de probabilité
 - <http://fr.reuters.com/article/frEuroRpt/idFRL6N00415T20140729?pageNumber=2&virtualBrandChannel=0>
- Annonce des résultats trimestriels 2014 de Deutsche Bank
 - *"Il y a une incertitude de taille sur le calendrier et sur l'ampleur de l'impact potentiel. Par conséquent, le coût réel des frais de justice sur le bilan de l'exercice 2014 est **imprévisible**" a toutefois prévenu la banque.*
- Ici, la banque se refuse à communiquer une valeur moyenne ou un intervalle de confiance des coûts juridiques
 - *Peu d'éléments de comparaison, grande variabilité des sanctions, durcissement ou pas de la politique judiciaire aux États-Unis*

136

Hasard calculable et non calculable

- Risque et incertain selon Frank Knight : Risk, Uncertainty, and Profit (1921)



137

Hasard calculable et non calculable

- Pour Frank Knight, le **risque** est « calculable » :
 - Calculable : Knight parle de « known risk »
 - Répétition d'expériences indépendantes à volonté,
 - Invariance des lois de probabilité (stationnarité)
 - Connaissance des lois de probabilité
 - Implique loi des grands nombres, théorème de la limite centrale.
 - Statistique inférentielle classique
- La question n'est pas tant de savoir si les risques financiers sont calculables, mais si les « preneurs de risque » pensent qu'ils sont calculables

138

Hasard calculable et non calculable

- L'**incertain** se détermine par opposition au risque
 - Incertain : « true uncertainty »
 - N'est pas mesurable
 - difficulté à identifier les risques possibles (états de la nature)
 - difficulté par manque de données ou non stationnarité à déterminer les probabilités des événements futurs
- Knight considère que les décisions à prendre dans les affaires sont du ressort de l'incertain
 - Business decisions, for example, deal with situations which are **far too unique** (...) for any sort of statistical tabulation to have any value for guidance. The conception of an objectively measurable probability or chance is simply inapplicable

139

Hasard calculable et non calculable

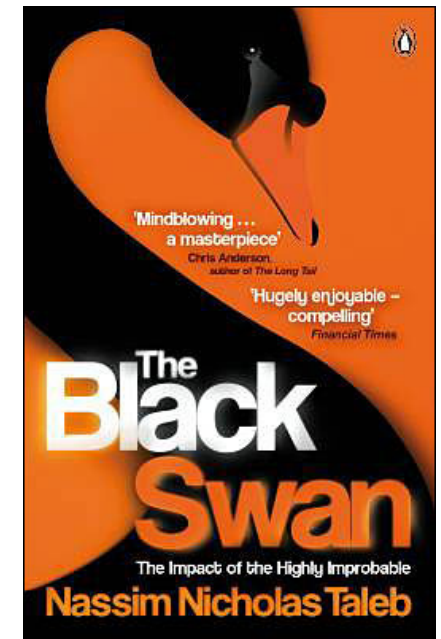
- Keynes reprend l'analyse de Knight en matière de décision financière
 - General Theory, Chapter 12. The State of Long-Term Expectation
 - The outstanding fact is **the extreme precariousness of the basis of knowledge on which our estimates of prospective yield have to be made.**
 - Our knowledge of the **factors which will govern the yield of an investment some years hence is usually very slight and often negligible.**
 - If we speak frankly, we have to admit that our basis of knowledge for estimating the yield ten years hence (...) of amounts to little and sometimes to nothing.

140

Hasard calculable et non calculable

- L'incertain selon Keynes :
 - *“By ‘uncertain’ knowledge, let me explain, I do not mean merely to distinguish what is known for certain from what is only probable. The sense in which I am using the term is that in which the prospect of (...) the price of copper and the rate of interest twenty years later (...). About these matters, there is no scientific basis on which to form any calculable probability whatever. We simply do not know.*
 - Pour une analyse des différences entre Knight et Keynes, voir
 - Sakai (2019). Daniel Ellsberg on JM Keynes and FH Knight: Risk, Ambiguity, and Uncertainty. In *JM Keynes Versus FH Knight* (pp. 61-77) Springer.

141



The Black Swan, Nassim Taleb

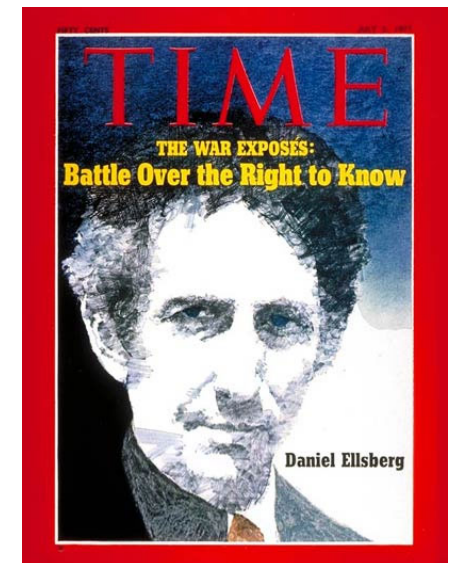
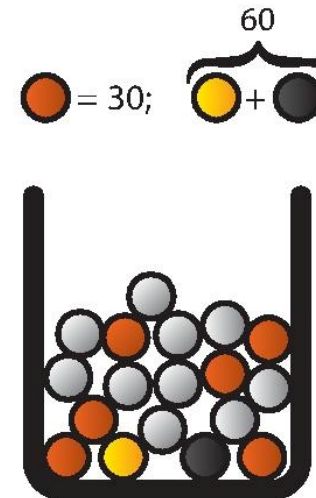
142

L'Extémistan de Taleb

- Nassim Taleb distingue deux types de fonctionnement du monde (financier)
- Le **Médiocristan** est le monde du calculable, du régulier, du normal, du prévisible.
- L'**Extrémistan** est le monde de l'incalculable, de l'accidentel, de l'invisible, de l'imprévisible.
- L'Extrémistan est le lieu de prédilection des **cygnes noirs**.
 - *Cygne noir : événement très rare dont l'influence est extrême et dont la prévisibilité n'est que rétrospective (à nos yeux) ; crise financière majeure*

143

Ambiguïté, incertitude et paradoxe d'Ellsberg



144



Daniel Ellsberg

145

Ambiguïté, incertitude et paradoxe d'Ellsberg

- Daniel Ellsberg prolonge les réflexions de Knight ou de Keynes sur ce qui est calculable ou pas en matière de risque
- Il introduit le concept d'ambiguïté, proche de celui d'incertain, utilisé par Knight
- Le paradoxe d'Ellsberg, construit à partir de tirages de boules de différentes couleurs, amène à une réflexion sur l'utilisation du cadre probabiliste dans la prise de décision et la mesure des risques.
 - Ellsberg (1961). Risk, ambiguity, and the Savage axioms. *The quarterly journal of economics*.
 - Epstein, & Zhang (2001). Subjective probabilities on subjectively unambiguous events. *Econometrica*, 69(2).

146

Probabilités, scénarios et neurosciences

- Le cerveau humain peut traiter de multiples scénarios ou états de la nature possibles de manière logique.
 - Redshaw & Suddendorf (2016). Children's and apes' preparatory responses to two mutually exclusive possibilities. *Current Biology*
 - Tomasello, M., & Herrmann, E. (2010). Ape and human cognition: What's the difference?. *Current Directions in Psychological Science*, 19(1), 3-8.



147



$A = \{\text{récompense tombe à gauche}\}$

$A^C = \{\text{récompense tombe à droite}\}$

Un enfant de 4 ans (mais pas de deux ans), sait que $A \cup A^C = \Omega$ sans aucun apprentissage (système 1), mais ce n'est pas le cas du chimpanzé

148

Neurosciences, logique, réalité

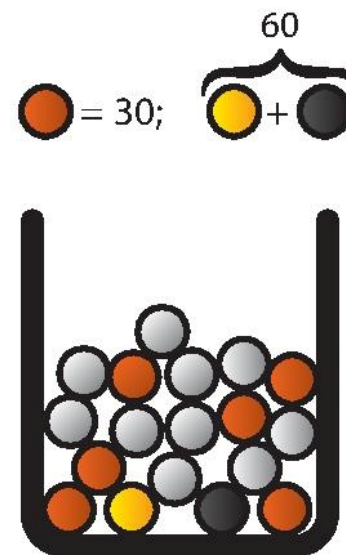
- L'enfant humain de 4 ans a déjà accès au plan symbolique (maniement des concepts), ici au principe du tiers exclu.
- Ce n'est pas le cas du chimpanzé qui n'a pas la même capacité de conceptualisation
- D'où l'interrogation du philosophe Ludwig Wittgenstein

Avec le premier Wittgenstein, celui du Tractatus, nous sommes dans la peau d'un logicien qui s'interroge sur les rapports entre le langage (et ses contraintes internes) et la réalité (les faits extérieurs). Quand je dis qu'une porte est ouverte ou fermée, se demande Wittgenstein, est-ce que j'exprime une loi du monde physique (la porte ne peut pas être dans deux états en même temps) ou bien s'agit-il d'une contrainte logique (le contraire de A est non A : si une porte n'est pas fermée, alors elle est logiquement ouverte) ? Penser ce rapport entre la logique (identifiée au langage) et la réalité du monde extérieur : tel est le projet du Tractatus.

Commentaire extrait du livre de Jean-François Dortier, « Toute la philosophie en 4 questions »

149

Ambiguïté, incertitude et paradoxe d'Ellsberg



150

Ellsberg's Paradox

Imagine an urn known to contain 90 balls. Thirty of the balls are red, the remaining 60 are black and yellow in unknown proportions. One ball is to be drawn at random from the urn. Consider the following actions and payoffs:

Situation X

On préfère le pari 1 au pari 2

	30	60	
	Red	Black	Yellow
Act 1. Bet on red	\$100	\$0	\$0
Act 2. Bet on black	\$0	\$100	\$0

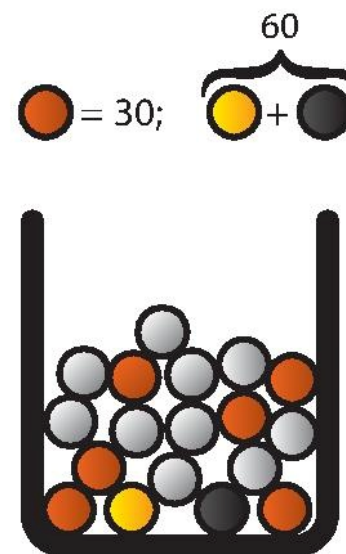
Situation Y

Act 3. Bet on red or yellow	\$100	\$0	\$100
Act 4. Bet on black or yellow	\$0	\$100	\$100

On préfère le pari 4 au pari 3

151

Ambiguïté, incertitude et paradoxe d'Ellsberg



152

Ambiguïté, incertitude et paradoxe d'Ellsberg

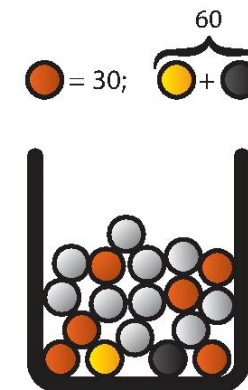
- p_b proportion de boules noires inconnue mais comprise entre 0 et $2/3$
 - les deux bornes correspondent à 0 et 100% de boules noires parmi les 60 dont on ne connaît pas la couleur.
 - $p_b = 1/3$ si le principe d'indifférence s'applique
 - On suppose que l'agent raisonne en espérance de gain
- 1 préféré à 2 (aversion à l'ambiguïté): $p_r > p_b$
- 4 préféré à 3 (aversion à l'ambiguïté) : $p_r + p_y < p_b + p_y \Rightarrow p_r < p_b$
- Pas de probabilité p_b qui permette de justifier la cohérence des deux choix précédents.

153

Ambiguïté, information, événements

Dans le langage des probabilités, un événement est un ensemble d'états de la nature pour lequel on peut définir une probabilité

Ici, on a trois états de la nature, rouge, jaune, noir. {Rouge} est un événement, {Jaune, Noir} est aussi un événement, mais pas {Jaune} ou {Noir}



Si {Jaune} et {Noir} étaient des événements, l'ambiguïté serait levée et on l'on disposerait de plus d'information sur les états de la nature : plus d'événements veut dire plus d'information

154

Ambiguïté, incertitude et paradoxe d'Ellsberg

- Exercice : construire un mécanisme financier (opportunité d'arbitrage) qui permette de tirer parti des contradictions précédentes. Qu'en conclure ?
 - Lien entre existence d'un système de probabilités et absence d'opportunité d'arbitrage : problème du Dutch Book étudié par de Finetti ou Savage. Voir <https://plato.stanford.edu/entries/dutch-book/>
- Questions :
 - Que se passe-t-il si deux agents ont des probabilités subjectives de réalisation d'un événement égales à 0 pour le premier, 1 pour le second et qu'ils n'apprennent pas au cours de l'échange ?
 - Que se passe-t-il si tous les agents ont les mêmes probabilités subjectives ?

155

Induction et événements rares (krachs boursiers)

- Analyse statistique des événements extrêmes et rares
 - Par exemple, krachs boursiers
 - On a deux approches, l'une due à Nassim Taleb
 - Ces événements sont singuliers et ne correspondent à aucune régularité statistique ; ils sont essentiellement non prévisibles
 - « Unknown unknowns » de Donald Rumsfeld : événements « non-conçus ».
 - Autre approche issue de l'assurance : probabilité d'occurrence constante, mais très faible ; indépendance des événements.
 - Notons $I_t = 1$, si occurrence d'un krach boursier et $I_t = 0$ sinon
 - Il y a environ un krach boursier tous les 20 ans, soit environ 5000 jours.
 - $p = 2 \times 10^{-4}$

156

Induction et événements rares (krachs boursiers)

- Supposons que l'on observe 252 jours (≈ 1 an) de transactions
- Probabilité d'observer au moins un 1 (un krach) sur cette période : $1 - (1 - p)^{252} = 4,9\%$
- Dans 95% des cas la suite des 252 valeurs observées est constituée uniquement de 0.
- Attention : l'approche inductive n'est pas appropriée pour les événements de faible probabilité.
 - Elle nécessite une grande quantité de données.

157

Induction et événements rares (krachs boursiers)

- Une application pratique : une vente de tickets de loto.
- On considère un vendeur de tickets de loto. Le prix du ticket est de 1 €. Le gain est de 1000000 €, avec une probabilité de $\frac{1}{1000000}$
- Ces informations sont connues des participants.
- En quoi ceci s'apparente aux dérives de la finance ?
- Un statisticien observe les gains/pertes d'un parieur. Que va-t-il observer ? Peut-il comprendre la nature du jeu ? Que peut-il prédire ? L'inférence statistique est-elle utile ? Dangereuse ?
- Exercice en rapport (voir TD)

158

Induction et événements rares (krachs boursiers)

- Comment définir une perte maximale sur une vente à découvert ?
 - Dans un modèle gaussien, celle-ci n'est pas « bornée » (il n'y a pas de plafond ou de borne supérieure ; on dira que la perte maximale est « infinie ».
 - Définition de scénarios de stress ?
- Est-il raisonnable d'affirmer qu'un événement a une probabilité nulle (impossible) ou égale à 1 (qu'il arrivera avec certitude) ?
 - Cela suppose que l'espace des possibles a été **préalablement** correctement identifié.
 - Facile pour les dés, difficile pour les risques financiers

159

Induction et événements rares (krachs boursiers)

- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$.
 - A-t-on correctement identifié l'espace fondamental Ω , ou espace des **possibles** (ou des événements élémentaires) ?
 - Dans le jeu de pile ou face, $\Omega = \{P, F\}$ semble un choix naturel.
 - Si on s'intéresse à **appliquer** les probabilités au monde réel, c'est moins évident.
 - On pourrait penser à des événements que l'on n'a jamais « vus » (car de faible probabilité) ou conçus, qui peuvent néanmoins se « réaliser »
 - Cygne noir de Taleb, incertain radical de Franck Knight, « unknown unknowns » de Donald Rumsfeld.
 - L'applicabilité de la théorie des probabilités au monde réel est à distinguer de la théorie des probabilités

160

Hasard accidentel

161

Hasard accidentel , hasard « à la Cournot »

- Que signifie « c'est arrivé par hasard » ?
 - *Si l'on pense au « vrai hasard », l'expression est malheureuse, car on transforme le hasard en cause, alors que l'effet dont on parle est sans cause*
- En pratique, cela renvoie à la notion d'accidentel
 - 1) *C'est arrivé de manière fortuite, imprévue, inattendue, mais prévisible.*
 - 2) *Ou ce n'était pas intentionnel*
 - Ainsi la chute d'une pierre n'a pas lieu en vue de frapper quelqu'un ; donc sous ce rapport la chute de la pierre vient du hasard, car si elle n'était pas un hasard la chute serait le fait de quelqu'un et provoquée en vue de frapper (Aristote)

162

Hasard accidentel

- Pour Aristote le hasard (**automaton**) est ce qui produit en dehors de tout dessein humain ou divin et de tout ordre stable.
 - *Triple négation*
- Alea désigne le dé, le jeu de dés et hasard en latin
- Le mot hasard apparaît dans la langue philosophique, puis dans le langage courant à la Renaissance
- Il dérive de **az-zahr** (jeu de dés), terme par les exégètes arabes d'Aristote, qui auraient (mal) traduit son concept d'automaton

163

Hasard accidentel

- Aristote : concept d'*automaton*
 - *Un passant marche le long d'une maison, une tuile se détache à ce moment du toit et tombe sur la tête du passant.*
- Relation de cause (efficiente) à effet entre la chute de la tuile et la blessure du passant, mais pas d'**intentionnalité**
 - C'est en ce sens qu'il faut entendre « **accidentel** », fortuit
 - Ce qui se passe n'est pas lié à la recherche d'un but, il n'y a pas de finalité ou cause finale, même si cette absence d'intention produit des effets.
 - La pierre n'est pas tombée pour frapper
 - Si quelqu'un avait lancé la tuile avec l'intention de frapper le passant ou si le passant avait cherché à mettre fin à ses jours, Aristote n'aurait pas utilisé le terme « Automaton »
- *Automaton renvoie à la **cause d'événements accidentels***

164

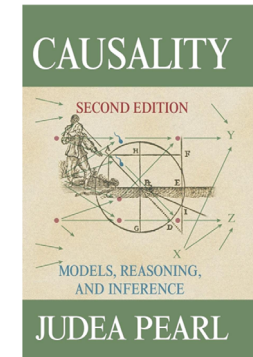
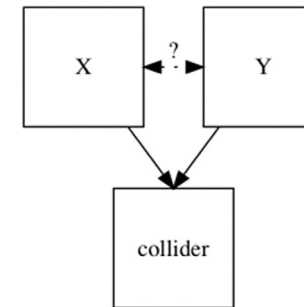
Hasard accidentel

- Un passant marche le long d'une maison, une tuile se détache à ce moment du toit et tombe sur la tête du passant.
- Pour Cournot, il s'agit de la **rencontre de deux séries causales « indépendantes »**
 - Le passant marche le long de la maison
 - La tuile tombe du toit (sous l'effet du vent, de sa fragilité)
 - « Les événements amenés par la combinaison ou la rencontre de phénomènes qui appartiennent à des séries **indépendantes**, dans l'ordre de la causalité, sont ce qu'on nomme des **événements fortuits** ou des **résultats du hasard** »
 - Cournot 1843, § 40, 55
- Il ne s'agit pas de « vrai hasard », mais de coïncidence ; on parle parfois de « hasard objectif »

165

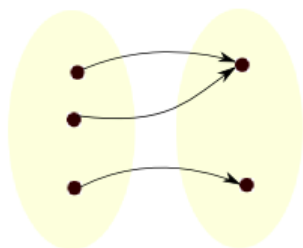
Hasard à la Cournot

- Hasard à la Cournot est compatible avec le déterminisme
- Indépendance de chaînes causales : elles ne se rencontrent pas antérieurement au phénomène
 - Plusieurs chaînes causales « indépendantes » produisant un effet
 - Les graphes orientés permettent une représentation géométrique



166

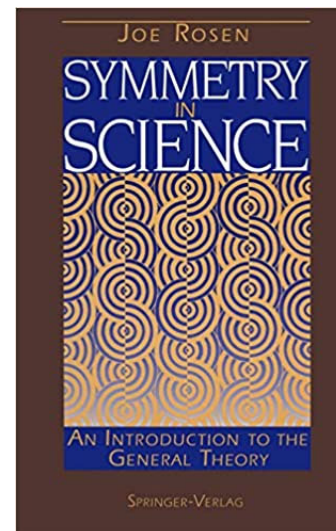
Causalité en Physique : comment distinguer causes et effets ?



à gauche, causes,
à droite effets

Curie-Rosen-symmetry principle

- The effects are more symmetric than the causes. (Curie)
- For an isolated system the degree of symmetry cannot decrease as the system evolves, but either remains constant or increases. (Rosen)



167



Thierry Martin, auteur d'une brève histoire du hasard et spécialiste du « hasard à la Cournot » et auteur d'« une brève histoire du hasard »

RAISON PRÉSENTE

LE HASARD

Avant-propos.
Michel Morange et Michèle Leduc
Une brève histoire du hasard.
Thierry Martin
Hasard, probabilités, incertitude, déterminisme, chaos...
Roger Balian
Le hasard quantique.
Michel Le Bellac
Hasard faible, hasard moyen et hasard fort en informatique.
Jean-Paul Delabaye
Crises économiques : hasard exogène ou endogène ?
Jean-Philippe Bouchaud
Le hasard dans la théorie de l'évolution.
Francesca Merlin
Le hasard dans la cellule.
Thomas Hays
Quelle est la part de hasard dans l'apparition des cancers ?
Jean-Pascal Capp
Hasard et contingence en histoire
Cristiana Oghina-Pavie
Du hasard au cinéma.
Penny Starfield

Trimestrielles
Sciences, cinéma, théâtre, atlas des arts vivants,
à travers quelques livres, notes de lecture

198

168

Imprévu et imprévisible

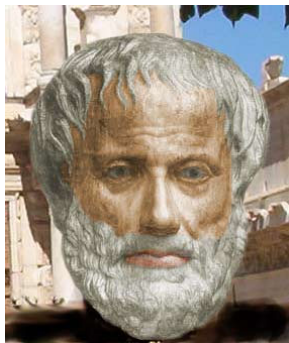
- Cournot adapte Saint Thomas d'Aquin
 - *Tout effet provenant du concours de deux volontés non ordonnées entre elles, est un effet de hasard: c'est le cas de celui qui, voulant faire un achat, rencontre inopinément au marché un créancier.*
 - Thomas, Somme contre les Gentils, II, 44 et 83 (reprenant Aristote)
- Bergson : caractère subjectif de la notion de hasard qui nous amène à nous interroger sur le caractère fortuit de certains événements qui attirent notre attention.
 - « Une énorme tuile, arrachée par le vent, tombe et assomme un passant. Nous disons que c'est un hasard ».
 - « Le dirions-nous, si la tuile s'était simplement brisée sur le sol ? il n'y a de hasard que parce qu'un intérêt humain est en jeu ». Bergson : Les deux sources de la morale et de la religion

169

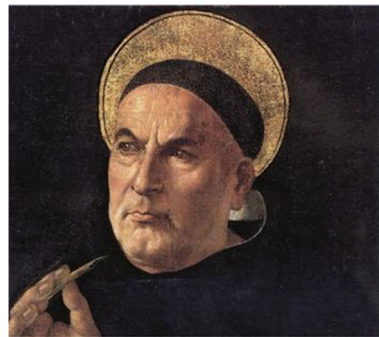
Imprévu et imprévisible

- Dans les différentes interprétations de la tuile tombant sur notre malheureux passant
- Les causes n'ont pas été (pré) vues.
- Quand ce dont la cause est extérieure n'a pas été en vue de ce qui est arrivé, que nous parlons de hasard
 - *Le hasard est donc le mécanisme se comportant comme s'il avait une intention (Bergson)*
- Le hasard : une cause fictive
- Mentalité primitive (Levy-Bruhl) cité par Bergson, pour qui il n'y a pas de hasard

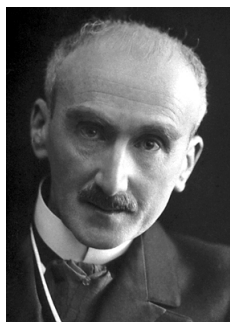
170



Aristote (image de synthèse...)



Thomas d'Aquin



Bergson



Cournot

171

- La dimension poétique du hasard, de l'inattendu
 - *Je t'ai rencontré par hasard
Ici ailleurs ou autre part, (La Vie d'Artiste – Léo Ferré)*



172

Fortuna, déesse romaine (Tadeusz Kuntze, 1754) est souvent représentée les yeux bandés, vagabonde, inconstante, incertaine, changeante



Qu'est-ce, en effet, que le sort, la chance, le hasard, l'évènement, sinon ce qui arrive et se produit de telle manière qu'il aurait pu arriver et se produire autrement ? De quelle manière donc ce qui arrive fortuitement, par l'aveugle hasard de la fortune versatile, peut-il être ressenti et prédit ? Cicéron, De divinatione

173

- « L'homme a appelé hasard la cause de toutes les surprises, la **divinité sans visage** qui préside à tous les espoirs insensés, à toutes les craintes sans mesure, qui déjoue les calculs les plus soigneux, qui change les imprudences en décisions heureuses ». *Paul Valéry*
- Ca et là quelqu'un joue avec nous – le cher hasard : il mène notre main à l'occasion, et la providence la plus sage ne saurait inventer plus belle musique que celle qui réussit à notre main insensée. *Nietzsche*

174

Cassandra, personnage de l'Iliade, avait le don de divination, mais fut condamnée par Apollon à ne jamais être crue



Calchas, célèbre devin grec, apparaissant dans diverses scènes de l'Iliade



175



Tiresias : le devin aveugle



Au IV^e siècle av. J.-C., Tyché symbolise le désordre et l'irrationnel

176