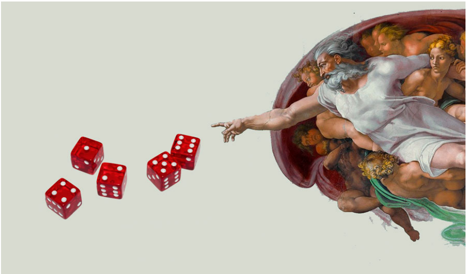
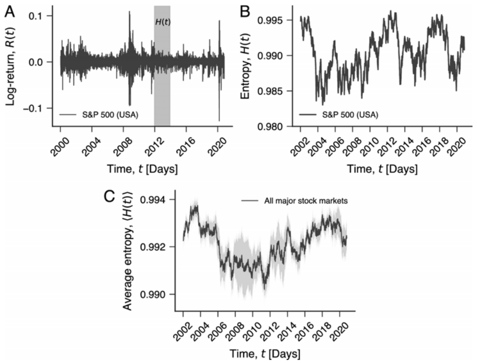
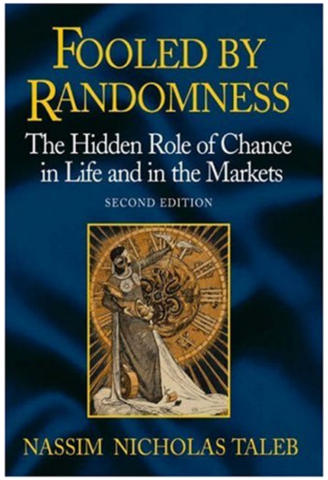
Exercices : Aléatoire et Finance







1

2

3

4

Exercice 1 : sur la prévision boursière et l'induction

- Selon Nelson Goodman, l'induction repose sur l'idée de régularité. Mais cette régularité n'est pas « naturelle »
- Elle dépend du langage et de la culture dans la laquelle on « déchiffre » le monde.
- On va donner quelques exemples de cette conception théorique, utiles pour illustrer la problématique de la prévision boursière.
- Considérons la suite numérique : 10101010101010?
  - *Qui correspond à une alternance de hausses et de baisses (marché contrarian)*
- Coder cette suite de termes par groupe de deux, en décimal. Que conclure ?

Exercice 1 : sur la prévision boursière et l'induction

- Considérons la suite numérique : 10101010101010?
  - *Qui correspond à une alternance de hausses et de baisses (marché contrarian)*
- Coder cette suite, par groupe de deux termes, en décimal. Que conclure ?
  - *On part de* 10**10**10**10**101010
  - *En codage binaire, les nombres entiers s'énumèrent comme* 0,1,10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001,1010,1011,…
  - 10 *correspond à* 2 *en décimal*
  - *La réécriture de la suite donne* 2**2**2**2**2**2**2
  - *Ce qui est alterné en binaire est constant en décimal*
- Regrouper maintenant les termes par groupes de trois. Conclure.

Exercice 1 : sur la prévision boursière et l'induction

- Considérons la suite numérique : 10101010101010?
- Coder cette suite, par groupe de deux termes, en décimal. Que conclure ?
  - *On part de* 10**10**10**10**101010
  - *En codage binaire, les nombres entiers s'énumèrent comme* 0,1,10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001,1010,1011,…
  - 10 *correspond à* 2 *en décimal*
  - *La réécriture de la suite donne* 2**2**2**2**2**2**2
  - *Ce qui est alterné en binaire est constant en décimal*
  - *Ce qui est constant, c'est l'alternance de hausses et de baisses.*
- Regrouper maintenant les termes par groupes de trois. Conclure.

Exercice 1 : sur la prévision boursière et l'induction

- Considérons la suite numérique : 10101010101010?
  - *Qui correspond à une alternance de hausses et de baisses (marché contrarian)*
- Coder cette suite, par groupe de deux termes, en décimal. Que conclure ?
- Regrouper maintenant les termes par groupes de trois. Conclure.
  - *On part de* 101**010**101**010**101
  - *Soit en décimal* 5**2**5**2**5
  - *On retrouve une suite alternée*
  - *Le caractère alterné ou constant dépend du langage utilisé (encodage) et n'est pas intrinsèque à la suite numérique.*

Exercice 2 : sur la prévision boursière et l'induction

- Considérons la suite numérique : 1234567? ?
  - *Qui correspond à une croissance régulière d'un cours boursier*
- Comment la prolonger selon la « logique inductive » ?

Exercice 2 : sur la prévision boursière et l'induction

- Considérons la suite numérique : 1234567? ?
  - *Qui correspond à une croissance régulière d'un cours boursier*
- Comment la prolonger selon la « logique inductive » ?
  - *Réponse :* 1234567**89**
  - *Ceci correspond à un marché boursier « momentum » où marché de tendance*
  - *Accessoirement, c'est la réponse enfantine, qui correspond à la constance des accroissements des cours boursiers.*
- Trouver une autre réponse conforme à la « logique inductive »

Exercice 2 : sur la prévision boursière et l'induction

- Considérons la suite numérique : 1234567? ?
  - *Qui correspond à une croissance régulière d'un cours boursier*
- Comment la prolonger selon la « logique inductive » ?
  - *Réponse :* 1234567**89**
  - *Ceci correspond à un marché boursier « momentum » où marché de tendance*
  - *Accessoirement, c'est la réponse enfantine, qui correspond à la constance des accroissements des cours boursiers.*
- Trouver une autre réponse conforme à la « logique inductive ». Interpréter le résultat.

Exercice 2 : sur la prévision boursière et l'induction

- Considérons la suite numérique : 1234567? ?
  - *Qui correspond à une croissance régulière d'un cours boursier*
- Comment la prolonger selon la « logique inductive » ?
- Trouver une autre réponse conforme à la « logique inductive ». Interpréter le résultat.
  - 123456712345671234567
  - *Ceci correspond à répéter la séquence* 1234567
    - Tout aussi « logique » que l'induction précédente
  - *Alternance régulière de période de hausses (construction d'une bulle), suivies de corrections brutales à la baisse (krachs)*
  - *« Trees don't grow to the sky » (Keynes)*
- Trouver une autre manière d'extrapoler la suite. Expliquer

Exercice 2 : sur la prévision boursière et l'induction

- Considérons la suite numérique : 1234567? ?
  - *Qui correspond à une croissance régulière d'un cours boursier*
- Comment la prolonger selon la « logique inductive » ?
- Trouver une autre réponse conforme à la « logique inductive ». Interpréter le résultat.
- Trouver une autre manière d'extrapoler la suite. Expliquer.
  - 123456789123456789
  - *C'est un mélange des deux approches précédentes. On décale le moment de la correction boursière.*
  - *On ne sait pas a priori quand une bulle financière éclate.*
- Extrapoler la suite numérique 1234567 à la manière d'un informaticien

Exercice 2 : sur la prévision boursière et l'induction

- Considérons la suite numérique : 1234567? ?
  - *Qui correspond à une croissance régulière d'un cours boursier*
- Comment la prolonger selon la « logique inductive » ?
- Trouver une autre réponse conforme à la « logique inductive ». Interpréter le résultat.
- Trouver une autre manière d'extrapoler la suite. Expliquer.
- Extrapoler la suite numérique 1234567 à la manière d'un informaticien
  - 123456789$ABCDEF$10
  - *Ce qui correspond toujours à une incrémentation constante de* 1 *mais en codage hexadécimal et non pas décimal*

Exercice 3 : sur la prévision boursière et l'induction

- On considère la suite formée de la concaténation des nombres entiers rangés par ordre croissant 01234567891011121314 ... Elle est notée C_{10}
  - *Écrire le développement binaire du début de la suite* 012345678.
  - *Puis compléter la suite pour les quatre chiffres suivants*
  - *Puis les douze chiffres suivants*

Exercice 3 : sur la prévision boursière et l'induction

  - *Écrire le développement binaire du début de la suite* 012345678.
  - 011011100101110111
  - *Puis compléter la suite pour les quatre chiffres suivants*
  - 011011100101110111**1000**
  - *Puis les douze chiffres suivants*
  - 0110111001011101111000**1001101010111100110111101111**
- On note la suite binaire formée de la concaténation des nombres entiers rangés par ordre croissant et codés en binaire C_2
- Cette suite dont on vient de voir le début ressemble à de l'aléatoire, alors que la suite est déterministe
  - *Bonne manière de tester un algorithme d'apprentissage que de vérifier s'il peut extrapoler le début de la suite* C_2

Exercice 3 : sur la prévision boursière et l'induction

- On considère une suite aléatoire binaire finie commençant par 1. Montrer qu'elle apparaît dans C_2

Exercice 3 : sur la prévision boursière et l'induction

- On considère une suite aléatoire binaire finie commençant par 1. Montrer qu'elle apparaît dans C_2
  - *A une suite binaire finie commençant par* 1 *est associée un nombre entier.*
  - *La suite* C_2 *étant la concaténation des nombres entiers rangés par ordre croissant, ce nombre va forcément apparaître dans* C_2
- On considère une suite aléatoire binaire finie. Montrer qu'elle apparaît dans C_2

Exercice 3 : sur la prévision boursière et l'induction

- On considère une suite aléatoire binaire finie commençant par 1. Montrer qu'elle apparaît dans C_2
- On considère une suite aléatoire binaire finie. Montrer qu'elle apparaît dans C_2
  - *On a déjà vu le cas d'une suite commençant par* 1
  - *On ajoute* 1 *au début d'une suite commençant par* 0
  - *D'après le résultat précédent, cette suite apparaît dans C_2 et donc de même pour la sous-suite initiale commençant par* 0
- Montrer que toute suite binaire finie (ou motif / pattern) apparaît une infinité de fois dans C_2

Exercice 3 : sur la prévision boursière et l'induction

- On considère une suite aléatoire binaire finie commençant par 1. Montrer qu'elle apparaît dans C_2
- On considère une suite aléatoire binaire finie. Montrer qu'elle apparaît dans C_2
- Montrer que toute suite binaire finie (ou motif / pattern) apparaît une infinité de fois dans C_2

Exercice 3 : sur la prévision boursière et l'induction

- On considère une suite aléatoire binaire finie commençant par 1. Montrer qu'elle apparaît dans C_2
- On considère une suite aléatoire binaire finie. Montrer qu'elle apparaît dans C_2
- Montrer que toute suite binaire finie (ou motif / pattern) apparaît une infinité de fois dans C_2
  - *On considère la première fois où la suite apparaît dans C_2*
  - *En rajoutant* 1 *à la suite, on trouve un nouveau nombre entier qui lui-même apparaît dans C_2*
  - *En itérant cette procédure et en considérant la sous-suite initiale, on voit qu'elle apparaît une infinité de fois dans C_2*
  - *On retrouve la même propriété de répétitions des patterns que pour une suite aléatoire*

Exercice 3 : sur la prévision boursière et l'induction

- On considère une suite aléatoire binaire finie. Montrer qu'elle apparaît dans C_2
- Montrer que toute suite binaire finie (ou motif / pattern) apparaît une infinité de fois dans C_2
  - *On considère la première fois où la suite apparaît dans C_2*
  - *En rajoutant* 1 *à la suite, on trouve un nouveau nombre entier qui lui-même apparaît dans C_2*
  - *En itérant cette procédure et en considérant la sous-suite initiale, on voit qu'elle apparaît une infinité de fois dans C_2*
  - *On retrouve la même propriété de répétitions des patterns que pour une suite aléatoire*

Exercice 3 : sur la prévision boursière et l'induction

- On considère une suite aléatoire binaire finie. Montrer qu'elle apparaît dans C_2
- Montrer que toute suite binaire finie (ou motif / pattern) apparaît une infinité de fois dans C_2
- En déduire une difficulté pour la prédiction par répétition de motifs
  - *Supposons qu'un motif, disons* 10110101 *soit annonciateur d'une hausse ou d'une baisse.*
  - *Comme les motifs* 10110101**0** *et* 10110101**1** *apparaissent une infinité de fois, on ne pourra jamais conclure avec certitude que* 10110101 *est annonciateur d'une hausse ou d'une baisse*

Exercice 3 : sur la prévision boursière et l'induction (partie non corrigée)

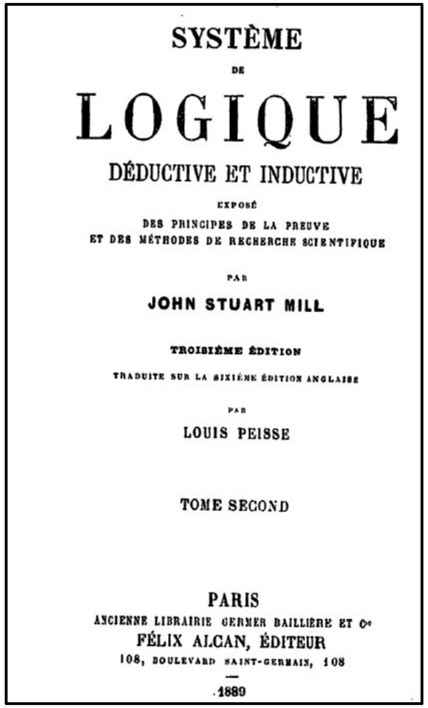
- On admet le théorème suivant : soit un motif quelconque de taille arbitraire $n \geq 1$. Les fréquences conditionnelles d'apparition des 0 et des 1 convergent vers ½
- Que conclure sur la prévision ?

Exercice 3 : sur la prévision boursière et l'induction (partie non corrigée)

- On admet le théorème suivant : soit un motif quelconque de taille arbitraire $n \geq 1$. Les fréquences conditionnelles d'apparition des 0 et des 1 convergent vers ½
- Que conclure sur la prévision ?
  - *Tout motif est suivi avec une fréquence égale par* 0 *ou* 1
  - *Il est impossible de gagner de l'argent en moyenne à partir de stratégies basées sur la reconnaissance de motifs*
  - *Comme dans le jeu de pile ou face avec tirages indépendants même si C_2 est déterministe et donc prévisible*
  - *La loi des grands nombres, même dans sa version conditionnelle ne permet pas de discriminer aléatoire et déterminisme.*
  - *L'absence d'opportunité d'arbitrage est une condition à ajouter pour définir une suite aléatoire (admis)*

Exercice 4 : quand une série de hausses devient-elle « significative » ?

- A partir de combiens d'observations successives de hausses, la statistique mathématique va-t-elle nous conduire à conclure à l'existence d'une tendance haussière ?
- Problème déjà posé par John Stuart Mill – Système de logique déductive et inductive (livre II : du raisonnement)
  - *Nous avons néanmoins fait remarquer qu'en proportion du nombre des cas ayant A pour antécédent l'incertitude caractéristique de la méthode diminue, et que l'existence d'une loi de connexion entre A et a approche de la certitude.*
  - *Reste à déterminer maintenant **combien il faut d'observations** pour que cette certitude soit considérée pratiquement comme acquise, et que la connexion entre A et a puisse être admise comme loi empirique*
  - *La question, en termes plus familiers, est celle-ci d'après **combien et de quelles sortes de cas peut-on conclure qu'une coïncidence observée entre deux phénomènes n'est pas un effet du hasard ?***


SYSTÈME
DE
LOGIQUE
DÉDUCTIVE ET INDUCTIVE
EXPOSÉ
DES PRINCIPES DE LA PREUVE
ET DES MÉTHODES DE RECHERCHE SCIENTIFIQUE
PAR
JOHN STUART MILL
TROISIÈME ÉDITION
TRADUITE SUR LA SIXIÈME ÉDITION ANGLAISE
PAR
LOUIS PEISSE
TOME SECOND
PARIS
ANCIENNE LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE ET Cie
FÉLIX ALCAN, ÉDITEUR
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108
1889

Exercice 4 : quand une série de hausses devient-elle « significative » ?

- Notons E l'événement (motif) observé
  - *Par exemple $E = \{1111\}$ correspond à l'observation de quatre hausses consécutives*
  - *H_0 (hypothèse nulle) : les marchés sont efficients*
  - *H_1 (hypothèse alternative) : les marchés ne sont pas efficients*
- $p = P(E|H_0)$ est appelée p −value.
  - *Elle mesure la probabilité que le motif observé soit compatible avec l'hypothèse nulle -*
  - *Plus la p −value est faible, plus la probabilité que les données ne soient pas compatibles avec l'hypothèse est grande.*
  - *Si $p = P(E|H_0) < \alpha$, on rejette l'hypothèse nulle H_0*
  - *Le seuil de $\alpha = 5\%$ est contesté*
  - *Attention au fait que $P(H_1|E) \neq 1 - P(E|H_0)$*
  - *On peut par exemple avoir $P(E|H_0) = 4\%$ et $P(H_1|E) = 60\%$*

Exercice 4 : quand une série de hausses devient-elle « significative » ?

- Notons E l'événement (motif) observé
  - *Par exemple $E = \{1111\}$ correspond à l'observation de quatre hausses consécutives*
  - *H_0 (hypothèse nulle) : les marchés sont efficients*
  - *H_1 (hypothèse alternative) : les marchés ne sont pas efficients*
- Comment formaliser l'hypothèse nulle ?
  - *Si l'on suit (l'une des approches de) Fama, on va retenir le formalisme de la marche aléatoire :*
  - *H_0 (hypothèse nulle) : $P(\{1\}) = P(\{0\}) = \frac{1}{2}$ et indépendance entre hausses et baisses consécutives*
  - *Ce qui correspond à l'*

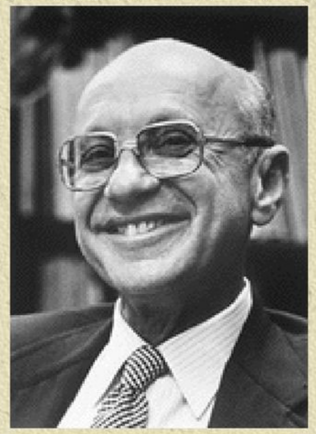
Exercice 4 : quand une série de hausses devient-elle « significative » ?

- On observe trois hausses consécutives 111
  - *Hypothèse nulle H_0 : $p = 1/2$ et indépendance (marche aléatoire)*
  - *Alors la probabilité de* 111 *est* $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 12{,}5\% = P(111|H_0) > 5\%$. *Selon l'approche usuelle, on ne rejette pas l'hypothèse nulle*
  - *Si on observe une quatrième hausse* 1111, *sous H_0 cette probabilité devient* $6{,}25\% = \frac{1}{2^4} > 5\%$
  - *Si on observe une 5^e^ hausse* 11111, *sous H_0 cette probabilité devient* $3{,}125\% = \frac{1}{2^5} < 5\%$
  - *Selon la méthodologie statistique habituelle, on considère alors cette série de cinq hausses comme « statistiquement significative », cad « peu compatible » avec l'hypothèse nulle*
  - *Ce seuil de* 5% *est conventionnel et contesté par la plupart des scientifiques et statisticiens.*

Sur les limites de la méthode inductive : Milton Friedman dans « The methodology of positive economics »

Viewed as a body of substantive hypotheses, theory is to be judged by its predictive power for the class of phenomena which it is intended to "explain." Only factual evidence can show whether it is "right" or "wrong" or, better, tentatively "accepted" as valid or "rejected." As I shall argue at greater length below, the only relevant test of the *validity* of a hypothesis is comparison of its predictions with experience. The hypothesis is rejected if its predictions are contradicted ("frequently" or more often than predictions from an alternative hypothesis); it is accepted if its predictions are not contradicted; great confidence is attached to it if it has survived many opportunities for contradiction. Factual evidence can never "prove" a hypothesis; it can only fail to disprove it, which is what we generally mean when we say, somewhat inexactly, that the hypothesis has been "confirmed" by experience.

Milton Friedman (1912-)



Essays in Positive Economics (1953) et surtout le chapitre introductif : « The Methodology of Positive Economics »

Cet article a marqué l'introduction des idées popperiennes en méthodologie économique

Prix Nobel en 1976

1 Friedman: "The Methodology of Positive Economics" (1953)

Milton Friedman: 1912-2006, one of the most influential economists of the 20th century, Nobel Memorial Prize 1976 (245,000+ Google citations in Feb 2022)

Most important publications:

Capitalism and Freedom, 1962 (26,500+ Google citations in Feb 2022)

"The social responsibility of business is to increase its profits", 1970 (24,800+ Google citations in Feb 2022)

"The Methodology of Positive Economics" (1953), often called F53, generally seen as the most important methodological article in postwar economics (7,900+ Google citations in Feb 2022)

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire, non répétition de motifs

- On code les hausses (hits), 1 et les baisses des cours 0
- On considère une suite aléatoire (tirages indépendants dans une loi de Bernoulli de paramètre 0,5)
- Montrer que le motif 100 doit nécessairement apparaître

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire, non répétition de motifs

- On code les hausses (hits), 1 et les baisses des cours 0
- On considère une suite aléatoire (tirages indépendants dans une loi de Bernoulli de paramètre 0,5)
- Montrer que le motif 100 doit nécessairement apparaître
  - *Si le motif* 100 *n'apparaissait pas, alors dès que le motif* 10 *apparaîtrait (hausse suivie d'une baisse), on saurait qu'il y aurait une hausse (on aurait nécessairement* 101*) et donc une opportunité d'arbitrage*
  - *Ceci-dit, encore faut-il que le motif* 10 *apparaisse. On peut reprendre le même raisonnement, s'il n'apparaissait jamais, une hausse serait nécessairement suivie d'une hausse.*
  - *Enfin, il faut qu'une hausse apparaisse … C'est aussi nécessaire, car on serait sinon dans un marché toujours baissier et évidemment arbitrable par short-selling*

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire, non répétition de motifs

- On code les hausses (hits), 1 et les baisses des cours 0
- On considère une suite aléatoire (tirages indépendants dans une loi de Bernoulli de paramètre 0,5)
- Montrer que le motif 100 doit nécessairement apparaître
  - *Si le motif* 100 *n'apparaissait pas, alors dès que le motif* 10 *apparaîtrait (hausse suivie d'une baisse), on saurait qu'il y aurait une hausse (on aurait nécessairement* 101*) et donc une opportunité d'arbitrage*
  - *Ceci-dit, encore faut-il que le motif* 10 *apparaisse. On peut reprendre le même raisonnement, s'il n'apparaissait jamais, une hausse serait nécessairement suivie d'une hausse.*
  - *Enfin, il faut qu'une hausse apparaisse … C'est aussi nécessaire, car on serait sinon dans un marché toujours baissier et évidemment arbitrable par short-selling*

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire, non répétition de motifs

- On code les hausses (hits), 1 et les baisses des cours 0
- On considère une suite aléatoire (tirages indépendants dans une loi de Bernoulli de paramètre 0,5)
- Montrer que le motif 100 doit nécessairement apparaître
- Montrer qu'en outre le motif 100 doit nécessairement apparaître une infinité de fois

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire, non répétition de motifs

- On code les hausses (hits), 1 et les baisses des cours 0
- On considère une suite aléatoire (tirages indépendants dans une loi de Bernoulli de paramètre 0,5)
- Montrer que le motif 100 doit nécessairement apparaître
- Montrer qu'en outre le motif 100 doit nécessairement apparaître une infinité de fois
  - *Supposons que le motif 100 n'apparaisse qu'un nombre limité de fois, disons vingt fois*
  - *Cela veut dire qu'ensuite, il n'apparaîtra plus jamais.*
  - *On peut alors reprendre le raisonnement précédent et montrer que cela implique une opportunité d'arbitrage*

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire, non répétition de motifs

- On code les hausses (hits), 1 et les baisses des cours 0
- On considère une suite aléatoire (tirages indépendants dans une loi de Bernoulli de paramètre 0,5)
- Montrer que le motif 100 doit nécessairement apparaître
- Montrer qu'en outre le motif 100 doit nécessairement apparaître une infinité de fois
- Le raisonnement précédent est-il vrai si l'on avait choisi le motif 101 au lieu du motif 100 ?

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire, non répétition de motifs

- Montrer que le motif 100 doit nécessairement apparaître
- Montrer qu'en outre le motif 100 doit nécessairement apparaître une infinité de fois
- Le raisonnement précédent est-il vrai si l'on avait choisi le motif 101 au lieu du motif 100 ?
  - *Oui, on peut suivre la même ligne de raisonnement que précédemment.*
- Le raisonnement précédent est-il vrai si l'on choisit un motif de taille 3 quelconque ?

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire, non répétition de motifs

- Montrer que le motif 100 doit nécessairement apparaître
- Montrer qu'en outre le motif 100 doit nécessairement apparaître une infinité de fois
- Le raisonnement précédent est-il vrai si l'on avait choisi le motif 101 au lieu du motif 100 ?
- Le raisonnement précédent est-il vrai si l'on choisit un motif de taille 3 quelconque ?
  - *Oui, on peut suivre la même ligne de raisonnement que précédemment.*

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire, non répétition de motifs

- Montrer que le motif 100 doit nécessairement apparaître
- Montrer qu'en outre le motif 100 doit nécessairement apparaître une infinité de fois
- Le raisonnement précédent est-il vrai si l'on avait choisi le motif 101 au lieu du motif 100 ?
- Le raisonnement précédent est-il vrai si l'on choisit un motif de taille 3 quelconque ?
- Le raisonnement précédent est-il vrai si l'on choisit un motif de taille $n \in \mathbb{N}$ quelconque ?

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire, non répétition de motifs

- Montrer qu'en outre le motif 100 doit nécessairement apparaître une infinité de fois
- Le raisonnement précédent est-il vrai si l'on choisit un motif de taille $n \in \mathbb{N}$ quelconque ?
  - *Oui, on peut suivre la même ligne de raisonnement que précédemment.*
  - *Donc tout motif arbitraire de longueur arbitraire se retrouve un nombre infini de fois dans toute suite aléatoire*
  - *Puisque l'on peut et que l'on code tout en binaire, on y retrouvera notamment le sujet du prochain partiel, votre biographie, y compris pour les années à venir puisque ce sera un motif fini*
  - *Le problème est de construire une suite aléatoire (il y a une infinité de termes) et de savoir où trouver les renseignements intéressants …*

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire

- On considère une suite binaire finie arbitraire de taille $n \in \mathbb{N}$, par exemple $n = 2$
- Quelle est la probabilité qu'elle soit le début d'une suite aléatoire ?

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire

- On considère une suite binaire finie arbitraire de taille $n = 2$
- Quelle est la probabilité qu'elle soit le début d'une suite aléatoire ?
  - *Considérons une suite aléatoire quelconque. On la complète en lui adjoignant au début deux tirages indépendants dans* $\{0,1\}$
  - *Le résultat reste une suite aléatoire.*
  - *En ce qui concerne les deux premières valeurs, on aura* 00, 01, 10, 11 *avec équiprobabilité (probabilité* $= \frac{1}{4}$*)*
  - *A chaque suite aléatoire, on peut donc associer quatre suites aléatoires équiprobables commençant par les quatre motifs de taille* 2

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire

- On considère une suite binaire finie arbitraire de taille n
- Quelle est la probabilité qu'elle soit le début d'une suite aléatoire ?
- Que conclure sur l'analyse d'une suite binaire de taille finie et sur la possibilité de prévision par motifs

Exercice 5 : propriétés d'une suite aléatoire

- On considère une suite binaire finie arbitraire de taille n
- Quelle est la probabilité qu'elle soit le début d'une suite aléatoire ?
  - *On peut reprendre le raisonnement précédent. La probabilité qu'elle soit le début d'une suite aléatoire est* $\frac{1}{2^n}$
- Que conclure sur l'analyse d'une suite binaire de taille finie et sur la possibilité de prévision par motifs
  - *Toute suite binaire finie (même de très grande taille) est le début équiprobable d'une suite aléatoire*
  - *Il n'y a aucun pattern fini annonciateur d'une suite aléatoire*
  - *C'est bien normal, toutes les réalisations sont équiprobables*
  - *Une suite aléatoire ne peut s'appréhender que comme un objet mathématique de taille non finie.*

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
  - $I_t = 1$, *si hausse des cours boursiers entre* $t-1$ *et* t
  - $I_t = 0$, *sinon*
- On suppose que I_{t-1} et I_t sont de même loi et on note $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
  - *Remarque : on ne suppose pas que* $p = \frac{1}{2}$
  - *Si* $p > \frac{1}{2}$, *on aura donc plus souvent, en moyenne, des hausses*
- On note $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1)$ la probabilité conditionnelle d'une hausse en t sachant que l'on a observé une hausse en $t-1$
- Rappeler la définition de la probabilité conditionnelle

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- On suppose que I_{t-1} et I_t sont de même loi et on note $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
- On note $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1)$ la probabilité conditionnelle d'une hausse en t sachant que l'on a observé une hausse en $t-1$
- Rappeler la définition de la probabilité conditionnelle
- $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = \frac{P(I_t=1, I_{t-1}=1)}{P(I_{t-1}=1)} = \frac{P(I_t=1, I_{t-1}=1)}{p}$
- $P(I_t = 1, I_{t-1} = 1)$ est la probabilité jointe de hausse aux dates $t-1$ et t
- Écrire la covariance entre I_{t-1} et I_t

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- On suppose que I_{t-1} et I_t sont de même loi et on note $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
- Écrire la covariance entre I_{t-1} et I_t
- $\text{Cov}(I_{t-1}, I_t) = E[I_{t-1}I_t] - E[I_t]E[I_{t-1}]$
- Écrire la covariance en fonction des probabilités

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- On suppose que I_{t-1} et I_t sont de même loi et on note $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
- Écrire la covariance entre I_{t-1} et I_t
- $\text{Cov}(I_{t-1}, I_t) = E[I_{t-1}I_t] - E[I_t]E[I_{t-1}]$
- Écrire la covariance en fonction des probabilités
- $\text{Cov}(I_{t-1}, I_t) = P(I_t = 1, I_{t-1} = 1) - p^2$

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
- On note $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1)$ la probabilité conditionnelle d'une hausse en t sachant que l'on a observé une hausse en $t-1$
- Donner une condition sur $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1)$ pour le coefficient de corrélation linéaire entre I_{t-1} et I_t soit positif

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
- On note $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1)$ la probabilité conditionnelle d'une hausse en t sachant une hausse en $t-1$
- Donner une condition pour le coefficient de corrélation linéaire entre I_{t-1} et I_t soit positif (marché Momentum)
  - $\text{Cov}(I_{t-1}, I_t) = P(I_t = 1, I_{t-1} = 1) - p^2 > 0$
    - On ne considère que le numérateur du coefficient de corrélation si on s'intéresse à son signe
  - $P(I_t = 1, I_{t-1} = 1) = P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) \times p$
  - $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) > p$
  - *Probabilité conditionnelle de hausse en t sachant une hausse en $t-1 >$ probabilité marginale de hausse*

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
- On note $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1)$ la probabilité conditionnelle d'une hausse en t sachant une hausse en $t-1$
- Donner une condition pour le coefficient de corrélation linéaire entre I_{t-1} et I_t soit positif (marché Momentum)
  - $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) > p$
- Montrer qu'alors $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) > 1 - p$

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
- Donner une condition pour le coefficient de corrélation linéaire entre I_{t-1} et I_t soit positif (marché Momentum)
- Montrer qu'alors $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) > 1 - p$
  - $\text{Cov}(I_{t-1}, I_t) = \text{Cov}(1 - I_{t-1}, 1 - I_t) > 0$ *de par les propriétés de la covariance (bilinéarité, covariance avec une constante = 0)*
  - $\text{Cov}(1 - I_{t-1}, 1 - I_t) = E[(1 - I_{t-1})(1 - I_t)] - E[1 - I_{t-1}]E[1 - I_t] = P(I_{t-1} = 0, I_t = 0) - (1-p)^2 > 0$
  - $P(I_{t-1} = 0, I_t = 0) = P(I_t = 0|I_{t-1} = 0)P(I_{t-1} = 0)$
  - $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0)(1 - p) > (1 - p)^2$, *d'où l'inégalité annoncée*
- Interpréter le résultat

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
- Donner une condition pour le coefficient de corrélation linéaire entre I_{t-1} et I_t soit positif (marché Momentum)
- Montrer qu'alors $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) > 1 - p$
- Interpréter le résultat
  - *On a montré l'équivalence entre corrélation positive des indicatrices et les conditions $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) > p$ ou $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) > 1 - p$*
  - *Comme $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) > p$ et $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) > 1 - p$ sont vraies simultanément, on peut effectivement parler de marché Momentum.*

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
- Supposons que $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = p$. Montrer qu'alors $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) = 1 - p$

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
- Supposons que $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = p$. Montrer qu'alors $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) = 1 - p$
  - *Si $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = p$, alors $\mathrm{Cov}(I_{t-1}, I_t) = \mathrm{Cov}(1 - I_{t-1}, 1 - I_t) = 0$ et donc $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) = 1 - p$*

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
- Supposons que $P(I_t = 1|I_{t-1} = 1) = p$.
- Montrer qu'alors $P(I_t = 0|I_{t-1} = 0) = 1 - p$
- En déduire l'indépendance des indicatrices de hausse

Exercice 6 : marchés Momentum et corrélation

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- $P(I_t = 1) = P(I_{t-1} = 1) = p$, avec $0 < p < 1$
- Supposons que $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1) = p$.
- Montrer qu'alors $P(I_t = 0 | I_{t-1} = 0) = 1 - p$
- En déduire l'indépendance des indicatrices de hausse
  - $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1) = P(I_t = 1)$
  - $P(I_t = 0 | I_{t-1} = 1) = 1 - P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1) = 1 - P(I_t = 1) = P(I_t = 0)$
  - $P(I_t = 0 | I_{t-1} = 0) = P(I_t = 0)$
  - $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 0) = 1 - P(I_t = 0 | I_{t-1} = 0) = 1 - P(I_t = 0) = P(I_t = 1)$
  - *Les probabilités conditionnelles étant égales aux marginales, l'indépendance des indicatrices est établie.*

Exercice 7 : efficience des marchés et corrélations entre hausses et baisses des cours

- On note I_t la variable indicatrice de hausse à la date t
- On s'intéresser à trois dates consécutives $t-2, t-1, t$
- Probabilités associées à (I_{t-2}, I_{t-1}, I_t) :
    - $(111) : 1/4$
    - $(011) : 0$
    - $(101) : 0$
    - $(110) : 0$
    - $(000) : 0$
    - $(100) : 1/4$
    - $(010) : 1/4$
    - $(001) : 1/4$
  - *Calculer les probabilités marginales de I_{t-2}, I_{t-1}, I_t*

Exercice 7 : efficience des marchés et corrélations entre hausses et baisses des cours

- Probabilités associées à (I_{t-2}, I_{t-1}, I_t) :
    - $(111) : 1/4$, $(011) : 0$, $(101) : 0$, $(110) : 0$
    - $(000) : 0$, $(100) : 1/4$, $(010) : 1/4$, $(001) : 1/4$
  - *Probabilités marginales de I_{t-2}, I_{t-1}, I_t ?*
  - $\{I_t = 1\} = \{(111), (011), (101), (001)\}$
  - $P(I_t = 1) = 1/4 + 0 + 0 + 1/4 = 1/2$, *d'où* $P(I_t = 0) = 1/2$
  - $\{I_{t-1} = 1\} = \{(111), (011), (110), (010)\}$
  - $P(I_{t-1} = 1) = 1/4 + 0 + 0 + 1/4 = 1/2$, $P(I_{t-1} = 0) = 1/2$
  - $\{I_{t-2} = 1\} = \{(111), (101), (110), (100)\}$
  - $P(I_{t-2} = 1) = 1/4 + 0 + 0 + 1/4 = 1/2$, $P(I_{t-2} = 0) = 1/2$
  - I_{t-2}, I_{t-1}, I_t *sont des variables de Bernoulli de paramètre* $1/2$
- Calculer les probabilités jointes $P(I_t = 1, I_{t-1} = 1)$, $P(I_{t-1} = 1, I_{t-2} = 1)$, $P(I_t = 1, I_{t-2} = 1)$

Exercice 7 : efficience des marchés et corrélations entre hausses et baisses des cours

- Probabilités associées à (I_{t-2}, I_{t-1}, I_t) :
    - $(111) : 1/4$, $(011) : 0$, $(101) : 0$, $(110) : 0$
    - $(000) : 0$, $(100) : 1/4$, $(010) : 1/4$, $(001) : 1/4$
  - *Calculer les probabilités jointes* $P(I_t = 1, I_{t-1} = 1)$, $P(I_{t-1} = 1, I_{t-2} = 1)$, $P(I_t = 1, I_{t-2} = 1)$
  - $\{I_t = 1, I_{t-1} = 1\} = \{(111), (011)\}$
  - $P(I_t = 1, I_{t-1} = 1) = 1/4 + 0 = 1/4$
  - $\{I_{t-1} = 1, I_{t-2} = 1\} = \{(111), (110)\}$
  - $P(I_t = 1, I_{t-1} = 1) = 1/4 + 0 = 1/4$
  - $\{I_t = 1, I_{t-2} = 1\} = \{(111), (101)\}$
  - $P(I_t = 1, I_{t-1} = 1) = 1/4 + 0 = 1/4$
- Utiliser les résultats de l'exercice 6 pour caractériser la dépendance entre les variables aléatoires I_{t-2}, I_{t-1}, I_t

Exercice 7 : efficience des marchés et corrélations entre hausses et baisses des cours

- Utiliser les résultats de l'exercice 6 pour caractériser la dépendance entre les variables aléatoires I_{t-2}, I_{t-1}, I_t
  - *On reprend les résultats de l'exercice 6 avec* $p = 1/2$
  - $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1) = \frac{P(I_t=1, I_{t-1}=1)}{P(I_{t-1}=1)} = 1/2 = P(I_t = 1)$
  - *On en déduit que I_{t-1} et I_t sont des variables aléatoires indépendantes (et le coefficient de corrélation linéaire nul)*
  - *Par le même raisonnement I_{t-1} et I_{t-2} sont indépendantes, ainsi que I_t et I_{t-2}.*
- $P(I_t = 1 | I_{t-2} = 1, I_{t-1} = 0)$ est noté $P(I_t = 1|10)$
- Calculer $P(I_t = 1|00)$, $P(I_t = 1|01)$, $P(I_t = 1|10)$, $P(I_t = 1|11)$

Exercice 7 : efficience des marchés et corrélations entre hausses et baisses des cours

- Calculer $P(I_t = 1|00)$, $P(I_t = 1|01)$, $P(I_t = 1|10)$, $P(I_t = 1|11)$
  - $P(I_t = 1|00) = \frac{P(001)}{P(00)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$, *car par indépendance entre* I_{t-2} *et* I_{t-1}, $P(00) = 1/4$
  - $P(I_t = 1|01) = \frac{P(011)}{P(01)} = 0$
  - $P(I_t = 1|10) = \frac{P(101)}{P(10)} = 0$
  - $P(I_t = 1|11) = \frac{P(111)}{P(11)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$
- Interpréter les résultats et en déduire une stratégie d'investissement

Exercice 7 : efficience des marchés et corrélations entre hausses et baisses des cours

- Calculer $P(I_t = 1|00)$, $P(I_t = 1|01)$, $P(I_t = 1|10)$, $P(I_t = 1|11)$
- Interpréter les résultats précédents et en déduire une stratégie d'investissement
  - *En cas de deux hausses ou baisses consécutives, on sait de manière certaine que le cours de l'action va augmenter : on achète.*
  - *En cas de hausse suivie d'une baisse ou l'inverse, on sait de manière certaine que le cours de l'action va baisser : on vend.*
  - *On gagne donc quelle que soit la configuration du marché, même si I_t est indépendant de I_{t-1} et indépendant de I_{t-2}.*
- Que vaudraient les probabilités conditionnelles en cas d'indépendance entre I_{t-2}, I_{t-1}, I_t ?

Exercice 7 : efficience des marchés et corrélations entre hausses et baisses des cours

- Calculer $P(I_t = 1|00)$, $P(I_t = 1|01)$, $P(I_t = 1|10)$, $P(I_t = 1|11)$
- Que vaudraient ces probabilités conditionnelles en cas d'indépendance entre I_{t-2}, I_{t-1}, I_t ?
  - $P(I_t = 1|00) = P(I_t = 1|01) = P(I_t = 1|10) = P(I_t = 1|11) = P(I_t = 1) = \frac{1}{2}$
- Soit la variable $J_{t-1} = I_{t-2}I_{t-1} + (1 - I_{t-2})(1 - I_{t-1})$
  - *On remarque que cette variable est connue dès la date* $t - 1$
- Calculer les valeurs de J_{t-1} pour les différents motifs I_{t-2}, I_{t-1}

Exercice 7 : efficience des marchés et corrélations entre hausses et baisses des cours

- Soit la variable $J_{t-1} = I_{t-2}I_{t-1} + (1 - I_{t-2})(1 - I_{t-1})$
  - *On remarque que cette variable est connue dès la date* $t - 1$
- Calculer les valeurs de J_{t-1} pour les différents motifs I_{t-2}, I_{t-1}
  - J_{t-1} *prend la valeur* 1 *pour les motifs* 11 *et* 00
  - J_{t-1} *prend la valeur* 0 *pour les motifs* 10 *et* 10
- Calculer la loi conditionnelle de I_t sachant J_{t-1}

Exercice 7 : efficience des marchés et corrélations entre hausses et baisses des cours

- Soit la variable $J_{t-1} = I_{t-2}I_{t-1} + (1 - I_{t-2})(1 - I_{t-1})$
  - *On remarque que cette variable est connue dès la date* $t - 1$
- Calculer les valeurs de J_{t-1} pour les différents motifs I_{t-2}, I_{t-1}
  - J_{t-1} *prend la valeur* 1 *pour les motifs* 11 *et* 00
  - J_{t-1} *prend la valeur* 0 *pour les motifs* 10 *et* 10
- Calculer la loi conditionnelle de I_t sachant J_{t-1}
  - $J_{t-1} = 1$ *annonce de manière certaine* $I_t = 1$
  - $J_{t-1} = 0$ *annonce de manière certaine* $I_t = 0$
  - *D'où* $P(I_t = 1|J_{t-1} = 1) = 1$ *et* $P(I_t = 0|J_{t-1} = 0) = 1$
- Qu'en conclure ?

Exercice 7 : efficience des marchés et corrélations entre hausses et baisses des cours

- Soit la variable $J_{t-1} = I_{t-2}I_{t-1} + (1 - I_{t-2})(1 - I_{t-1})$
  - *On remarque que cette variable est connue dès la date* $t - 1$
- Calculer la loi conditionnelle de I_t sachant J_{t-1}
- Qu'en conclure ?
  - $P(I_t = 1|J_{t-1} = 1) = 1$ *et* $P(I_t = 0|J_{t-1} = 0) = 1$
  - $I_t = J_{t-1} = I_{t-2}I_{t-1} + (1 - I_{t-2})(1 - I_{t-1})$
  - I_t *est une fonction déterministe de* I_{t-2}, I_{t-1}
  - *Ce qui se passe sur le marché en* t *est connu dès la date* $t - 1$
  - *Ceci, bien que* I_t *soit indépendant de* I_{t-1} *et de* I_{t-2}
  - *Ne pas confondre indépendance mutuelle de* I_{t-2}, I_{t-1}, I_t *et indépendance des paires de variables aléatoires*

Exercice 8 : stratégies de trading à partir de la reconnaissance de motifs

- Stratégie dépendant de motifs : chaque motif observé est supposé être associé à un signal d'achat ou bien de vente.
- On considère des stratégies utilisant des motifs de taille 3
- On code 1, le signal d'achat, 0 le signal de vente
- On a 8 motifs ; la dernière colonne (en rouge) représente la décision (achat ou vente)
- Le tableau ci-contre s'appelle en logique une table de vérité (où 1 est associé à vrai et 0 à faux)
- Cela permet de représenter la décision financière prise en fonction du motif observé

I_{t-3}	I_{t-2}	I_{t-1}	
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Exercice 8 : stratégies de trading à partir de la reconnaissance de motifs

- Caractériser les stratégies représentées par cette table de vérité

I_{t-3}	I_{t-2}	I_{t-1}	
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Exercice 8 : stratégies de trading à partir de la reconnaissance de motifs

- Caractériser les stratégies représentées par cette table de vérité
- On vend si au moins deux baisses dans les trois jours précédents
  - *Soit* $I_{t-3} + I_{t-2} + I_{t-1} \leq 1$
- On achète si au moins deux hausses dans les trois jours précédents
  - *Soit* $I_{t-3} + I_{t-2} + I_{t-1} > 1$
  - *On a classé les motifs en deux catégories selon la valeur de* $I_{t-3} + I_{t-2} + I_{t-1}$ *(classification linéaire)*
- Il s'agit d'une stratégie Momentum
- Caractériser les stratégies en termes de distance de Hamming

I_{t-3}	I_{t-2}	I_{t-1}	
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Exercice 8 : stratégies de trading à partir de la reconnaissance de motifs

- Caractériser les stratégies en termes de distance de Hamming
- On va acheter si le marché est haussier en moyenne, plus précisément s'il n'est pas trop éloigné d'un marché haussier à toute date
- Achat si $d(I_{t-3}I_{t-2}I_{t-1}, 111) \leq 1$
  - *Où d est la distance de Hamming entre deux motifs*
- De même, on vendra si $d(I_{t-3}I_{t-2}I_{t-1}, 000) \leq 1$
- On s'intéresse à la fonction qui à chaque motif associe 0 ou 1 (l'output, colonne rouge)
- Écrire l'output comme une fonction des indicatrices $I_{t-3}, I_{t-2}, I_{t-1}$
  - *On pourra s'inspirer de l'exercice précédent*

I_{t-3}	I_{t-2}	I_{t-1}	
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Exercice 8 : stratégies de trading à partir de la reconnaissance de motifs

I_{t-3}	I_{t-2}	I_{t-1}	
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- On s'intéresse à la fonction qui à chaque motif associe 0 ou 1 (l'output, colonne rouge)
- Écrire l'output comme une fonction des indicatrices $I_{t-3}, I_{t-2}, I_{t-1}$
  - *On pourra s'inspirer de l'exercice précédent*
  - *On note θ la fonction qui à un motif $I_{t-3}I_{t-2}I_{t-1}$ associe soit 0, soit 1, conformément à la table de vérité*
  - *Pour produire l'output 1 après le motif 110, il faut $I_{t-3} = 1, I_{t-2} = 1, I_{t-1} = 0$, soit $I_{t-3}I_{t-2}(1 - I_{t-1}) = 1$*
    - Selon les cas $I_{t-3}I_{t-2}I_{t-1}$ représente une concaténation ou un produit
  - *En reproduisant ce raisonnement, $\theta(I_{t-3}, I_{t-2}, I_{t-1}) = I_{t-3}I_{t-2}(1 - I_{t-1}) + (1 - I_{t-3})I_{t-2}I_{t-1} + I_{t-3}(1 - I_{t-2})I_{t-1} + I_{t-3}I_{t-2}I_{t-1}$*
  - *Remarque : Au plus un terme de la somme précédente est non nul*
  - *Cette représentation de θ est connue comme SOP (sum of products)*

Exercice 8 : stratégies de trading à partir de la reconnaissance de motifs

- On suppose qu'en cas d'achat, on gagne 1 si le marché est haussier le jour suivant et qu'on perd s'il est baissier
- En cas de vente, on perd 1 si le marché est haussier le jour suivant et on gagne s'il est baissier
- On commence à traiter (acheter ou vendre) à partir de la date $t = 3$, jusqu'à la date T, selon la stratégie précédente
- On s'intéresse au gain moyen (gain cumulé divisé par le nombre de jours de trading).
- Supposons que les indicatrices de hausses sont une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre 0,5
- Vers quelle grandeur tend le gain moyen quand $T \to \infty$?

Exercice 8 : stratégies de trading à partir de la reconnaissance de motifs

- Supposons que les indicatrices de hausses sont une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre 0,5
- Vers quelle grandeur tend le gain moyen quand $T \to \infty$?
  - *Les indicatrices de hausse et de baisse étant indépendantes, $P(I_t = 1 | I_{t-3}, I_{t-2}, I_{t-1}) = \frac{1}{2}$*
  - *Il s'ensuit que l'espérance de gain incrémental à chaque est égale à $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0$*
  - *La loi des grands nombres implique le gain moyen tend vers l'espérance quand $T \to \infty$, c'est-à-dire vers 0*
- On suppose maintenant que les indicatrices de hausses sont extraites de la suite déterministe C_2.
- Vers quelle grandeur tend le gain moyen quand $T \to \infty$?

Exercice 8 : stratégies de trading à partir de la reconnaissance de motifs

- On suppose maintenant que les indicatrices de hausses sont extraites de la suite déterministe C_2.
- Vers quelle grandeur tend le gain moyen quand $T \to \infty$?
  - *Le gain moyen tend vers aussi vers 0.*
  - *En effet le gain moyen va faire intervenir les fréquences conditionnelles aux valeurs prises par les trois dernières indicatrices de défaut*
  - *C_2 étant un nombre normal (en base 2), ces fréquences conditionnelles tendent toutes vers $\frac{1}{2}$*
  - *Le gain moyen va alors tendre vers $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0$*
- Est-ce que ce résultat resterait inchangé pour une autre stratégie de trading ?

Exercice 8 : stratégies de trading à partir de la reconnaissance de motifs

- On suppose maintenant que les indicatrices de hausses sont extraites de la suite déterministe C_2.
- Est-ce que le résultat précédent resterait inchangé pour une autre stratégie de trading, construite à partir des trois dernières observations (de hausse ou de baisse) ?
  - *Non, car les fréquences conditionnelles de hausse et de baisse tendent toujours vers $\frac{1}{2}$, quel que soit le motif conditionnant*
  - *On est (quand $T \to \infty$) dans le cas de paris équitables, comme pour le jeu idéalisé de pile ou face.*
- Est-ce que le résultat précédent resterait inchangé si l'on prenait en compte les quatre derniers motifs ?

Exercice 8 : stratégies de trading à partir de la reconnaissance de motifs

- On suppose maintenant que les indicatrices de hausses sont extraites de la suite déterministe C_2.
- Est-ce que le résultat précédent resterait inchangé si l'on prenait en compte les quatre derniers motifs ?
  - *Non, car les fréquences de hausse et de baisse tendent toujours vers $\frac{1}{2}$, même pour des motifs conditionnants de taille 4*
- Comment expliquer ce résultat alors que les occurrences de hausses et de baisses codées dans C_2 sont déterministes ?

Exercice 8 : stratégies de trading à partir de la reconnaissance de motifs

- On suppose maintenant que les indicatrices de hausses sont extraites de la suite déterministe C_2.
- Est-ce que le résultat précédent resterait inchangé si l'on prenait en compte les quatre derniers motifs ?
- Comment expliquer ce résultat alors que les occurrences de hausses et de baisses codées dans C_2 sont déterministes ?
  - *Si l'on note I_n le $n-$ième « digit » de C_2, il ne s'obtient pas par une relation de récurrence à partir de $I_{n-1}, I_{n-2}, I_{n-3}, I_{n-4}$*
  - *L'impossibilité d'obtenir un gain moyen > 0 à partir d'une stratégie basée sur l'observation des motifs ne permet pas d'exclure une parfaite prévisibilité et donc des gains positifs à chaque date*

Exercice 9 : prévision, hasard et valeur de l'information privée

- On se place dans le cadre d'un double tirage d'une pièce non biaisée. Les deux tirages sont indépendants.
- I_1 est la variable aléatoire indicatrice de tirer pile au premier tirage, I_2 est relative au second tirage
- On premier tirage, on gagne 1 si pile et -1 sinon ; de même au second tirage.
- Calculer la distribution de probabilité des gains après deux tirages

Exercice 9 : prévision, hasard et valeur de l'information privée

- On se place dans le cadre d'un double tirage d'une pièce non biaisée. Les deux tirages sont indépendants.
- I_1 est la variable aléatoire indicatrice de tirer pile au premier tirage, I_2 est relative au second tirage
- On premier tirage, on gagne 1 si pile et -1 sinon ; de même au second tirage.
- Calculer la distribution de probabilité des gains après deux tirages
  - *On gagne 2 avec probabilité $\frac{1}{4}$, 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$, -2 avec probabilité $\frac{1}{4}$*

Exercice 9 : prévision, hasard et valeur de l'information privée

- I_1 est la variable aléatoire indicatrice de tirer pile au premier tirage, I_2 est relative au second tirage
- On premier tirage, on gagne 1 si pile et -1 sinon ; de même au second tirage.
- Un tiers a observé avant le parieur les résultats des deux tirages. Il propose de vendre l'information relative à la valeur de $I_1 + I_2$.
- Quelle est la valeur de cette information pour le parieur ?

Exercice 9 : prévision, hasard et valeur de l'information privée

- Au premier tirage, on gagne 1 si pile et -1 sinon ; de même au second tirage.
- Quelle est la valeur de $I_1 + I_2$ pour le parieur ?
  - *Si $I_1 + I_2 = 1$, on informe le parieur que son gain cumulé est nul. Dans, ce cas la valeur de l'information est nulle, si le parieur s'est engagé à jouer deux fois (ou s'il ne peut jouer que le premier coup). Mais si le parieur renonce à jouer le premier tour, il gagne 1 avec certitude au second tour.*
  - *Si $I_1 + I_2 = 2$. Le parieur peut gagner 2 en jouant deux fois pile*
  - *Si $I_1 + I_2 = 0$. Le parieur peut gagner 2 en jouant deux fois face*
- Quel est le gain maximal du parieur s'il connaît $I_1 + I_2$?
  - *Une compensation de 3 est due au parieur s'il s'avérait que l'initié a vendu une fausse information*

Exercice 9 : prévision, hasard et valeur de l'information privée

- Au premier tirage, on gagne 1 si pile et -1 sinon ; de même au second tirage.
- Un tiers observe avant le parieur les résultats des tirages.
- Quel est le gain maximal du parieur s'il connaît $I_1 + I_2$?
  - *2 si $I_1 + I_2 = 0$ ou $I_1 + I_2 = 2$*
  - *Une compensation de 3 est due au parieur s'il s'avérait que l'initié a vendu une fausse information*
  - *Si le vendeur lui vendait pour 2 une fausse information, la pénalité de 3 serait supérieure au gain du vendeur. Donc, le vendeur n'a pas intérêt à vendre une fausse information.*
- Quel est le prix minimal acceptable par l'initié ?

Exercice 9 : prévision, hasard et valeur de l'information privée

- Au premier tirage, on gagne 1 si pile et -1 sinon ; de même au second tirage.
- Un tiers observe avant le parieur les résultats des tirages.
- Quel est le prix minimal acceptable par l'initié ?
  - *Si l'information a été obtenue sans coût pour l'initié, tout prix positif est acceptable pour le vendeur.*
- Que se passe-t-il pour le parieur s'il acquière l'information au prix de 1 ?

Exercice 9 : prévision, hasard et valeur de l'information privée

- Au premier tirage, on gagne 1 si pile et -1 sinon ; de même au second tirage.
- Un tiers observe avant le parieur les résultats des tirages.
- Que se passe-t-il pour le parieur s'il acquière l'information au prix de 1 ?
  - *Si $I_1 + I_2 = 0$ ou $I_1 + I_2 = 2$, le gain net pour le parieur est $2 - 1 = 1$*
  - *Si $I_1 + I_2 = 1$, le gain net pour le parieur est $1 - 1 = 1$*
  - *Le parieur n'est jamais perdant (free lunch)*
  - *Un prix de 1 est donc toujours accepté par un parieur, même si celui-ci était averse vis-à-vis du risque*

Exercice 9 : prévision, hasard et valeur de l'information privée

- Au premier tirage, on gagne 1 si pile et -1 sinon ; de même au second tirage.
- Le parieur est supposé raisonner uniquement en fonction de l'espérance de gain (pas d'aversion vis-à-vis du risque).
- Quel est le prix maximal acceptable par le parieur ?

Exercice 9 : prévision, hasard et valeur de l'information privée

- Au premier tirage, on gagne 1 si pile et -1 sinon ; de même au second tirage.
- Le parieur est supposé raisonner uniquement en fonction de l'espérance de gain (pas d'aversion vis-à-vis du risque).
- Quel est le prix maximal acceptable par le parieur ?
  - *Le parieur gagne* 2 *si* $I_1 + I_2 = 0$ *ou* $I_1 + I_2 = 2$*, avec probabilité* $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
  - *Il gagne* 1 *si* $I_1 + I_2 = 1$ *avec probabilité* $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
  - *Le gain du parieur est* $2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 1{,}5$
  - *Dès que le coût de l'information est inférieur à* $1{,}5$*, le jeu est gagnant en moyenne pour le parieur.*

Exercice 9 : prévision, hasard et valeur de l'information privée

- Au premier tirage, on gagne 1 si pile et -1 sinon ; de même au second tirage.
- Le parieur est supposé raisonner uniquement en fonction de l'espérance de gain (pas d'aversion vis-à-vis du risque).
- Pour un prix de l'information égal à 1,5, le parieur est-il toujours gagnant ?

Exercice 9 : prévision, hasard et valeur de l'information privée

- Au premier tirage, on gagne 1 si pile et -1 sinon ; de même au second tirage.
- Le parieur est supposé raisonner uniquement en fonction de l'espérance de gain (pas d'aversion vis-à-vis du risque).
- Pour un prix de l'information égal à 1,5, le parieur est-il toujours gagnant ?
  - *Non, il gagne* $0{,}5$ *avec probabilité* $\frac{1}{2}$ *et perd* $0{,}5$ *avec la même probabilité*
- Supposons que le parieur ait une aversion aux pertes. Quel mécanisme le vendeur d'information peut-il envisager pour le même gain espéré ?

Exercice 9 : prévision, hasard et valeur de l'information privée

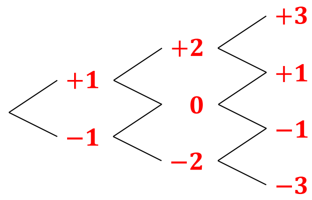
- Au premier tirage, on gagne 1 si pile et -1 sinon ; de même au second tirage.
- Supposons que le parieur ait une aversion aux pertes. Quel mécanisme le vendeur d'information peut-il envisager pour le même gain espéré ?
  - *Il suffit au vendeur de conditionner le montant de la prime à l'information révélée*
  - *Si* $I_1 + I_2 = 0$ *ou* $I_1 + I_2 = 2$*, le parieur payant* 2*, gain net nul*
  - *Si* $I_1 + I_2 = 1$*, le parieur payant* 1*, gain net nul*
  - *En faisant payer* $1{,}99$ *au parieur si* $I_1 + I_2 = 0$ *ou* $I_1 + I_2 = 2$ *et* $0{,}99$ *si* $0{,}99$ *au parieur si* $I_1 + I_2 = 1$*, le vendeur d'information garantit un gain certain de* $0{,}01$ *au parieur.*
  - *Le vendeur d'information aurait alors très bien pu jouer lui-même*

Exercice 10 : marchés de tendance

- En cas de hausse, le prix de l'actif augmente d'un euro, en cas de baisse, le prix baisse d'un euro
- Représenter sous la forme d'un arbre les évolutions du prix de l'actif pour les périodes 1,2,3

Exercice 10 : marchés de tendance

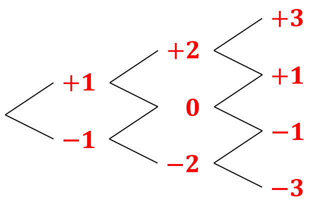
- En cas de hausse, le prix de l'actif augmente d'un euro, en cas de baisse, le prix baisse d'un euro
- Représenter sous la forme d'un arbre les évolutions du prix de l'actif pour les périodes 1,2,3



- Variation des prix pour les trajectoires HH, HB, BH, BB ?

Exercice 10 : marchés de tendance

- En cas de hausse, le prix de l'actif augmente d'un euro, en cas de baisse, le prix baisse d'un euro
- Représenter sous la forme d'un arbre les variations du prix de l'actif pour les périodes 1,2,3



- Variation des prix pour les trajectoires HH, HB, BH, BB ?
  - HH : $+2$, HB *et* BH : 0, BB : -2

Exercice 10 : marchés de tendance

- On se donne les probabilités suivantes (I_t variable indicatrice de hausse ou baisse du prix à la période t) :
  - $P(I_1 = H) = 0{,}5$
  - $P(I_t = H | I_{t-1} = H) = 0{,}6$ *pour* $t > 1$
  - $P(I_t = B | I_{t-1} = B) = 0{,}55$ *pour* $t > 1$
- Probabilités jointes de hausse et/ou de baisse aux périodes 1,2 ?

Exercice 10 : marchés de tendance

- On se donne les probabilités suivantes :
  - $P(I_1 = H) = 0{,}5$
  - $P(I_t = H|I_{t-1} = H) = 0{,}6$, *pour* $t > 1$
  - $P(I_t = B|I_{t-1} = B) = 0{,}55$ *pour* $t > 1$
- Probabilités jointes de hausse et/ou de baisse aux périodes 1,2 ?
  - $P(I_1 = H, I_2 = H\ ) = P(I_2 = H|I_1 = H)P(I_1 = H) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$
  - $P(I_1 = H, I_2 = B\ ) = P(I_2 = B|I_1 = H)P(I_1 = H) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$
  - $P(I_1 = B, I_2 = H) = P(I_2 = H|I_1 = B)P(I_1 = B) = 0{,}45 \times 0{,}5 = 0{,}225$
  - $P(I_1 = B, I_2 = B) = P(I_2 = B|I_1 = B)P(I_1 = B) = 0{,}55 \times 0{,}5 = 0{,}275$

Exercice 10 : marchés de tendance

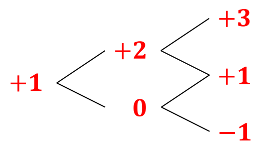
- Probabilités jointes de hausse et/ou de baisse aux dates 1,2 ?
  - $P(I_1 = H, I_2 = H\ ) = P(I_2 = H|I_1 = H)P(I_1 = H) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$
  - $P(I_1 = H, I_2 = B\ ) = P(I_2 = B|I_1 = H)P(I_1 = H) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$
  - $P(I_1 = B, I_2 = H) = P(I_2 = H|I_1 = B)P(I_1 = B) = 0{,}45 \times 0{,}5 = 0{,}225$
  - $P(I_1 = B, I_2 = B) = P(I_2 = B|I_1 = B)P(I_1 = B) = 0{,}55 \times 0{,}5 = 0{,}275$
- Écart-type des gains au bout de deux périodes ?

Exercice 10 : marchés de tendance

- Probabilités jointes de hausse et/ou de baisse aux dates 1,2 ?
  - $P(I_1 = H, I_2 = H\ ) = P(I_2 = H|I_1 = H)P(I_1 = H) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$
  - $P(I_1 = H, I_2 = B\ ) = P(I_2 = B|I_1 = H)P(I_1 = H) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$
  - $P(I_1 = B, I_2 = H) = P(I_2 = H|I_1 = B)P(I_1 = B) = 0{,}45 \times 0{,}5 = 0{,}225$
  - $P(I_1 = B, I_2 = B) = P(I_2 = B|I_1 = B)P(I_1 = B) = 0{,}55 \times 0{,}5 = 0{,}275$
- Écart-type de la variation des prix au bout de deux périodes ?
  - *On note X la variation des prix au bout de deux périodes*
  - *On rappelle que* $\sigma(X) = \sqrt{E[X^2] - (E[X])^2}$
  - $E[X] = 2 \times 0{,}3 - 2 \times 0{,}275 = 2 \times 0{,}025 = 0{,}05$
  - $E[X^2] = 4 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}275 = 4 \times 0{,}575 = 2{,}3$
  - $E[X^2] - (E[X])^2 = 2{,}2975$
  - $\sigma(X) \approx 1{,}52$
- Quelle est l'espérance de la variation de prix au bout de trois périodes sachant que l'on a observé une hausse à la première ?

Exercice 10 : marchés de tendance

- Quelle est l'espérance de la variation de prix au bout de trois périodes sachant que l'on a observé une hausse à la première ?



  - *La variation des prix peut être égale à* $-1, +3, +1$
  - *Probabilités :*
    - $P(I_3 = B|I_2 = B)P(I_2 = B|I_1 = H) = 0{,}55 \times 0{,}4 = 0{,}22$
    - $P(I_3 = H|I_2 = H)P(I_2 = H|I_1 = H) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$
    - $1 - 0{,}22 - 0{,}36 = 0{,}42$
  - *Espérance :* $1 + (2 \times 0{,}36 - 2 \times 0{,}22) = 1 + 2 \times 0{,}14 = 1{,}28$
- Quelle est l'écart-type de la variation de prix au bout de trois périodes sachant que l'on a observé une hausse à la première ?

Exercice 10 : marchés de tendance

- *La variation des prix peut être égale à* $-1, +3, +1$
- *Probabilités :*
  - $P(I_3 = B|I_2 = B)P(I_2 = B|I_1 = H) = 0{,}55 \times 0{,}4 = 0{,}22$
  - $P(I_3 = H|I_2 = H)P(I_2 = H|I_1 = H) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$
  - $1 - 0{,}22 - 0{,}36 = 0{,}42$
- *Espérance :* $1 + 2 \times 0{,}36 - 2 \times 0{,}22 = 1 + 2 \times 0{,}14 = 1{,}28$
- Quelle est l'écart-type de la variation de prix au bout de **deux** périodes sachant que l'on a observé une hausse à la première ?

$$\begin{array}{lll} & & \mathbf{+2} \\ \diagup & \mathbf{+1} & \\ & & \mathbf{0} \end{array}$$

Exercice 10 : marchés de tendance

- Quelle est l'écart-type de la variation de prix au bout de **deux** périodes sachant que l'on a observé une hausse à la première ?

$$\begin{array}{lll} & & \mathbf{+2} \\ \diagup & \mathbf{+1} & \\ & & \mathbf{0} \end{array}$$

  - *Probabilité d'une variation égale à* 2 : $P(I_2 = H|I_1 = H) = 0{,}6$
  - *Probabilité d'une variation égale à* 0 : $P(I_2 = B|I_1 = H) = 0{,}4$
  - *Espérance :* $0{,}6 \times 2 = 1{,}2$
  - *Variance :* $0{,}6 \times 2^2 - (1{,}2)^2 = 2{,}4 - 1{,}44 = 0{,}96$
  - *Écart-type* $= \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98$
- Donner la probabilité d'observer n hausses sur les n premières périodes, puis une baisse à la période suivante

Exercice 10 : marchés de tendance

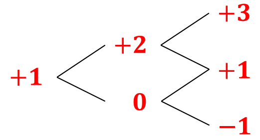
- Donner la probabilité d'observer n hausses sur les n premières périodes, puis une baisse à la période suivante
  - $0{,}5 \times (0{,}6)^{n-1} \times 0{,}4 = 0{,}2 \times (0{,}6)^{n-1}$
- Définir une stratégie tirant profit des propriétés de la dynamique des prix et calculer les gains de cette stratégie

Exercice 10 : marchés de tendance

- Définir une stratégie tirant profit des propriétés de la dynamique des prix et calculer les gains de cette stratégie
  - *Comme* $P(I_t = H|I_{t-1} = H) = 0{,}6 > 0{,}5$ *et* $P(I_t = B|I_{t-1} = B) = 0{,}55 > 0{,}5$, *on a intérêt à suivre une stratégie « trend follower » : achat si hausse et vente si baisse des cours à la période précédente.*
  - *A partir de la période* 2, *le gain espéré par période et par unité d'actif est* $0{,}6 \times 1 + 0{,}4 \times (-1) = 0{,}2$ *en cas de hausse à la période précédente et de* $0{,}55 \times 1 + 0{,}45 \times (-1) = 0{,}1$ *en cas de baisse à la période précédente.*
- À la fin de la période 1 l'actif connaît une hausse. Au début de la période 2, on met en œuvre la stratégie précédente. Calculer l'espérance de gain de la stratégie à la fin de la période 3.

Exercice 10 : marchés de tendance

- À la fin de la période 1 l'actif connaît une hausse. Au début de la période 2, on met en œuvre la stratégie précédente. Calculer l'espérance de gain de la stratégie à la fin de la période 3.



  - *A la fin de la période* 2*, gain espéré égal à* $0{,}2$ *(question précédente)*
  - *A la fin de la période* 3*, le gain espéré (pour cette période) égal à* $P(I_2 = H | I_1 = H) \times 0{,}2 + P(I_2 = B | I_1 = H) \times 0{,}1 = 0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}16$
  - *Gain à la fin de la période* 3 *:* $0{,}2 + 0{,}16 = 0{,}36$
- On suppose les variations des prix indépendantes, avec probabilité de hausse $= 0{,}6$. Probabilité qu'il y ait au maximum deux périodes haussières sur neuf périodes ?

Exercice 10 : marchés de tendance

- On suppose les variations des prix indépendantes, avec probabilité de hausse $= 0{,}6$. Probabilité qu'il y ait au maximum deux périodes haussières sur neuf périodes ?
  - *Aucune période haussière :* $(0{,}4)^9$
  - *Une période haussière :* $9(0{,}4)^8(0{,}6)^1$ *: 9 combinaisons possibles selon que la période haussière est numérotée de* 1 *à* 9
  - *Deux périodes haussières :* $\frac{9\times 8}{2}(0{,}4)^7(0{,}6)^2$ *où* $\frac{9\times 8}{2}$ *est le nombre de combinaisons où l'on observe deux périodes haussières parmi 9*
    - 9 manières de choisir la première période haussière, puis 8 la seconde, soit 8×9 arrangements
    - Le tout divisé par 2 pour éviter les doublons, par exemple « 1er tirage, hausse à la date 1, 2ième tirage, hausse à la date 2 » ou bien « 1er tirage hausse à la date 2, 2ième tirage, hausse à la date 1 », soit $\binom{n}{k} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{(9-2)!2!}$ (coefficient binomial)
  - $(0{,}4)^9 + 9(0{,}4)^8(0{,}6)^1 + \frac{9\times 8}{2}(0{,}4)^7(0{,}6)^2 \approx 0{,}025 = 2{,}5\%$

Exercice 10 : marchés de tendance

- On note A_t le prix à la fin de la période t :
- On considère 3 produits associés aux paiements suivants
  - $\max(A_3 - A_1; 0)$ *;* $\max(A_1 - A_3; 0)$ *;* $A_3 - A_1$
  - *Les prix sont respectivement* $0{,}25$ €*,* $0{,}25$ € et $0{,}05$ €
  - On peut acheter et vendre aux prix précédents
- Peut-on construire une opportunité d'arbitrage ?

Exercice 10 : marchés de tendance

- On considère 3 produits associés aux paiements suivants
  - $\max(A_3 - A_1; 0)$ *;* $\max(A_1 - A_3; 0)$ *;* $A_3 - A_1$
  - *Les prix (ou primes) sont respectivement* $0{,}25$ €*,* $0{,}25$ € et $0{,}05$ €
  - On peut acheter et vendre aux prix précédents
- Peut-on construire une opportunité d'arbitrage ?
  - $\max(A_3 - A_1; 0) - \max(A_1 - A_3; 0) = A_3 - A_1$ car :
  - Si $A_3 \geq A_1$, $\max(A_3 - A_1; 0) = A_3 - A_1$ et $\max(A_1 - A_3; 0) = 0$
  - Si $A_3 \leq A_1$, $\max(A_3 - A_1; 0) = 0$ et $\max(A_1 - A_3; 0) = A_1 - A_3$
  - Acheter le produit 1 et vendre le 2 procure un paiement de $A_3 - A_1$
  - Pour un montant de $0{,}25 - 0{,}25 = 0$ €
  - Si de plus, on vend le produit 3, on reçoit une prime de $0{,}05$ €
  - Paiement net (achat produit 1, vente 2 et 3) : $A_3 - A_1 - (A_3 - A_1) = 0$
  - Paiement net nul
  - Et on reçoit une prime de $0{,}05$ €, d'où l'opportunité d'arbitrage

Exercice 11 : du conditionnement

- Enoncé : au cours d'une conversation, vous apprenez que votre interlocuteur a deux enfants dont l'un est une fille.
  - *On supposera ici que la probabilité qu'un enfant soit un garçon est égale à la probabilité qu'il soit une fille (soit* $\frac{1}{2}$ *)*
  - *On supposera également que le sexe du premier né n'a pas d'incidence sur le sexe du second enfant*
    - Indépendance des événements
  - *On ne considèrera que deux genres ou deux sexes : garçon / fille*
- Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

Exercice 11 : du conditionnement

- Enoncé : au cours d'une conversation, vous apprenez que votre interlocuteur a deux enfants dont l'un est une fille.
  - *On supposera ici que la probabilité qu'un enfant soit un garçon est égale à la probabilité qu'il soit une fille (soit* $\frac{1}{2}$*)*
  - *On supposera également que le sexe du premier né n'a pas d'incidence sur le sexe du second enfant*
  - *On ne considèrera que deux genres ou deux sexes : garçon / fille*
- Probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
  - *La réponse qui vient naturellement à l'esprit est* $\frac{1}{2}$
  - *Une question auxiliaire que l'on pourrait poser est le degré de certitude que l'on donne à cette réponse et comment on la justifie.*

Exercice 11 : du conditionnement

- Enoncé : au cours d'une conversation, vous apprenez que votre interlocuteur a deux enfants dont l'un est une fille.
- Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
  - *Sachant qu'il y a deux enfants, il y a trois configurations, deux garçons, deux filles, un garçon et une fille.*
  - *Mais si l'on prend en compte l'ordre des naissances, on voit apparaître quatre configurations (ou événements élémentaires) :* $\{GG\},\{GF\},\{FG\},\{FF\}$*, où* $\{FG\}$ *signifie fille suivie d'un garçon*
  - *D'après les hypothèses*
    - $P(\{G.\})$, probabilité que le premier né soit un garçon $= 1/2$, avec $\{G.\} = \{GG\} \cup \{GF\}$
    - $P(\{GG\}|\{G.\})$, probabilité que le second né soit un garçon sachant que le premier est un garçon $= 1/2$
  - $P(\{GG\}) = P(\{GG\}|\{G.\}) \times P(\{G.\}) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$

Exercice 11 : du conditionnement

- Enoncé : au cours d'une conversation, vous apprenez que votre interlocuteur a deux enfants dont l'un est une fille.
- Probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
  - *Quatre configurations :* $\{GG\},\{GF\},\{FG\},\{FF\}$
  - *D'après les hypothèses,* $P(\{GG\}) = 1/4$
  - *De même,* $P(\{GF\}) = P(\{FG\}) = P(\{FF\}) = 1/4$
  - *Les hypothèses signifient les 4 configurations équiprobables*
- Que signifie l'information l'un des enfants est une fille ?

Exercice 11 : du conditionnement

- Enoncé : au cours d'une conversation, vous apprenez que votre interlocuteur a deux enfants dont l'un est une fille.
- Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
  - $P(\{GG\}) = P(\{GF\}) = P(\{FG\}) = P(\{FF\}) = 1/4$
  - *Les hypothèses signifient les* 4 *configurations équiprobables*
- Que signifie l'information l'un des enfants est une fille ?
  - *Aucun des enfants n'est un garçon : événement* $\{GG\}$ *impossible.*

Exercice 11 : du conditionnement

- Enoncé : au cours d'une conversation, vous apprenez que votre interlocuteur a deux enfants dont l'un est une fille.
- Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
  - $P(\{GG\}) = P(\{GF\}) = P(\{FG\}) = P(\{FF\}) = 1/4$
  - *Les hypothèses signifient les* 4 *configurations équiprobables*
- Que signifie l'information l'un des enfants est une fille ?
  - *Aucun des enfants n'est un garçon : événement* $\{GG\}$ *impossible.*
  - *On peut n'étudier que les trois cas équiprobables* $\{GF\},\{FG\},\{FF\}$
  - *Dans* 2 *cas sur* 3, $\{GF\},\{FG\}$, *le second enfant est un garçon*
- **La probabilité que l'autre enfant soit un garçon est $2/3$**
  - *Et non pas la réponse qui vient naturellement à l'esprit, soit* $\frac{1}{2}$

Exercice 11 : du conditionnement

- Pourquoi aurions-nous donné une mauvaise réponse ?
  - *Confusion entre l'autre enfant et le second enfant à naître.*
    - L'esprit a tendance à raisonner de manière séquentielle : il imagine que l'un des enfants est une fille ; puis il se demande quel le sexe de l'enfant qui suit chronologiquement et non pas logiquement.
    - Garçon avec une probabilité de $1/2$: approche chronologique
  - *La réponse* $1/2$ *aurait été correcte si l'information avait été « votre interlocuteur a deux enfants et **l'ainée** est une fille »*
  - *Une autre source de confusion est qu'il est deux fois moins probable d'avoir deux filles que un garçon et une fille,*
    - Deux manières d'avoir un garçon et une fille (garçon puis fille ou fille puis garçon) et les événements $\{GF\},\{FG\},\{FF\}$ sont équiprobables.
    - Avoir un garçon et une fille est la réunion de deux événements élémentaires (et non pas un événement élémentaire).

Exercice 12 : première apparition d'un motif

- On considère une série indépendante de lancers de pièces.
- On retient l'hypothèse habituelle $P(F) = P(P) = 1/2$
  - *Alors les suites de motifs de longueur donnée sont équiprobables*
  - *Par exemple, la fréquence d'apparition du motif PF est égale à celle du motif FF et tend vers* $1/4$
- On s'intéresse à l'apparition des motifs PF et FF. Quelle est la probabilité que le motif PF apparaisse avant le motif FF ?
  - *Au vu des éléments précédents une équiprobabilité dans l'apparition des motifs paraît raisonnable*
  - *La probabilité demandée serait alors égale à* 0,5

Exercice 12 : première apparition d'un motif

- On considère une série indépendante de lancers de pièces.
- On retient l'hypothèse habituelle $P(F) = P(P) = 1/2$
- Probabilité que le motif PF apparaisse avant le motif FF ?
  - *Supposons que le premier tirage est P.*
  - *Tant que les tirages suivants sont P, on continue à lancer la pièce*
  - *Au premier tirage F, on s'arrête et c'est le tirage PF qui est apparu en premier.*
  - *Si le premier tirage est F et le second tirage P, on se retrouve dans la même situation, PF apparaitra toujours en premier.*
  - *La seule possibilité que FF apparaisse en premier est d'avoir FF aux deux premiers lancers : probabilité* $= 1/4$
- Probabilité que PF arrive avant $FF = 3/4$

Exercice 12 : première apparition d'un motif

- On considère une série indépendante de lancers de pièces.
- On retient l'hypothèse habituelle $P(F) = P(P) = 1/2$
- Probabilité que le motif PF apparaisse avant le motif PP ?
  - *On a établi que la probabilité que PF arrive avant FF* $= 3/4$
  - *Par symétrie entre P et F, on aimerait conclure que la réponse reste* $3/4$

Exercice 12 : première apparition d'un motif

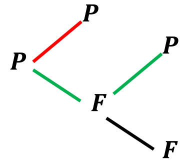
- On considère une série indépendante de lancers de pièces.
- On retient l'hypothèse habituelle $P(F) = P(P) = 1/2$
- Probabilité que le motif PF apparaisse avant le motif PP ?
  - *La probabilité que PF arrive avant $FF = 3/4$*
  - *Par symétrie entre P et F, on aimerait que la réponse reste ¾*
  - *Si le premier lancer est P.*
    - PF et PP sont équiprobables et le jeu s'arrête au deuxième lancer.
  - *Si le premier lancer est F.*
    - Si le second lancer est F, on obtient FF. On doit continuer le jeu jusqu'à ce que P apparaisse.
    - Si le second lancer est P, on obtiendra PF et PP de manière équiprobable et le jeu s'arrêt au coup suivant.
- Probabilité que PF apparaisse avant $PP = 1/2$

Exercice 12 : première apparition d'un motif

- On s'intéresse aux motifs PPF et PFF. Quel motif a le plus de chances d'arriver en premier ?

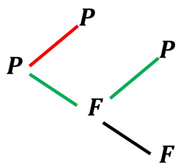
Exercice : première apparition d'un motif

- Probabilité que PPF survienne avant PFF ?
  - *On remarque que les deux motifs commencent par P.*
  - *Examinons ce qui se passe après l'apparition de P.*
    - Si P apparait à nouveau (avec probabilité $1/2$), on sait que PPF apparaîtra en premier (il suffit d'attendre un F)
    - Si F apparaît (avec probabilité $1/2$), il y a deux possibilités
    - Soit F apparaît à nouveau (avec probabilité $1/2$) et on observe le motif PFF (avec probabilité $1/2 \times 1/2 = 1/4$)
    - Soit P apparaît ; comme il est précédé de F, on en revient au point de départ.



Exercice 12 : première apparition d'un motif

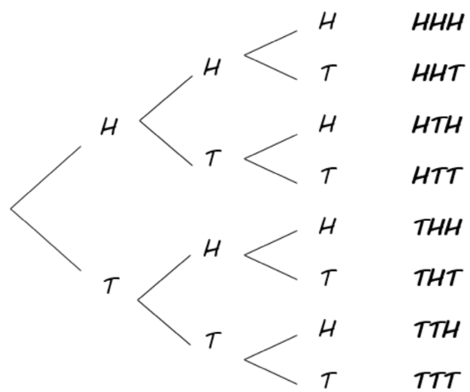
- Probabilité que PPF survienne avant PFF ?
  - *Si P apparait à nouveau (avec probabilité $1/2$), on sait que PPF apparaîtra en premier*
  - *Si F apparaît, puis P apparaît, on revient au point de départ, avec probabilité $1/2 \times 1/2 = 1/4$.*



  - *Notons p la probabilité que PPF survienne avant PFF*
  - $p = 1/2 + 1/4 \times p \Rightarrow \boldsymbol{p = \frac{2}{3} > 0,5}$

Exercice 12 : première apparition d'un motif

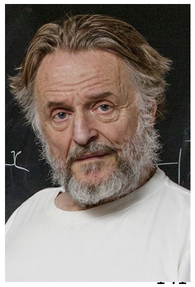
- La représentation de l'apparition des huit motifs selon un arbre : H : Heads, T : Tails



Exercice 12 : première apparition d'un motif

- Comparaisons entre deux triplets quelconques

- Exemples :
  - *PFF bat FFP avec une probabilité de* $3/4$
  - *FFP bat FPP avec une probabilité de* $2/3$
  - *FFP bat PPF avec une probabilité de* $3/4$
  - *PPF bat PFF avec une probabilité de* $2/3$ *(rappel)*
- Ces probabilités peuvent se calculer comme précédemment ou avec l'algorithme de Conway



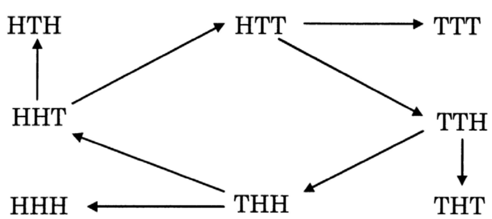
Exercice 12 : première apparition d'un motif

- Description de l'algorithme de Conway pour trois motifs
  - https://penneyante.weebly.com/conways-algorithm.html
  - Delahaye (2011). Les surprises du jeu de pile ou face. *Pour la science :* explique l'algorithme pour quatre motifs
- *Il existe plusieurs démonstrations de l'algorithme de Conway, mais Miller a récemment donné une preuve intuitive, liée à des stratégies de trading et l'absence d'opportunités d'arbitrage*
  - Miller (2019), Penney's Game Odds From No-Arbitrage
- Dans le jeu « penny ante », le joueur A choisit un motif, par exemple $FPFFP$, le joueur B choisit un autre motif de même longueur, par exemple $HHHH$.
  - *Le gagnant est celui qui voit apparaître son motif en premier.*
    - Nickerson (2007). Penney Ante: Counterintuitive probabilities in coin tossing. *The UMAP Journal*.

Exercice 12 : première apparition d'un motif

- Le jeu de Penny Ante : un problème de transitivité
  - *PFF bat FFP avec une probabilité de* $3/4$
  - *FFP bat FPP avec une probabilité de* $2/3$
  - *FPP bat PPF avec une probabilité de* $3/4$
  - *PPF bat PFF avec une probabilité de* $2/3$
- $PFF \rightarrow FFP \rightarrow FPP \rightarrow PPF \rightarrow PFF \rightarrow FFP \rightarrow \cdots$

Comparaisons entre les 8 motifs
(Heads $H \equiv F$, Tails $T \equiv P$).
On retrouve le cycle des 4 motifs précédents.
Quel que soit le motif choisi par le joueur A, le joueur B peut répliquer avec un motif gagnant



Exercice 12 : première apparition d'un motif

- Il n'y a pas de motif gagnant contre tous les autres
  - *Ce qui serait le choix optimal du joueur A*
- Quel que soit le choix de A, B peut lui opposer un motif gagnant

A's choice	B's choice	Odds in favor of B
HHH	THH	7 to 1
HHT	THH	3 to 1
HTH	HHT	2 to 1
HTT	HHT	2 to 1
THH	TTH	2 to 1
THT	TTH	2 to 1
TTH	HTT	3 to 1
TTT	HTT	7 to 1

- Nishiyama (2010). Pattern matching probabilities and paradoxes as a new variation on Penney's coin game. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*.

Exercice 12 : première apparition d'un motif

A

B	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT
HHH		1/2	2/5	2/5	1/8	5/12	3/10	1/2
HHT	1/2		2/3	2/3	1/4	5/8	1/2	7/10
HTH	3/5	1/3		1/2	1/2	1/2	3/8	7/12
HTT	3/5	1/3	1/2		1/2	1/2	3/4	7/8
THH	7/8	3/4	1/2	1/2		1/2	1/3	3/5
THT	7/12	3/8	1/2	1/2	1/2		1/3	3/5
TTH	7/10	1/2	5/8	1/4	2/3	2/3		1/2
TTT	1/2	3/10	5/12	1/8	2/5	2/5	1/2	

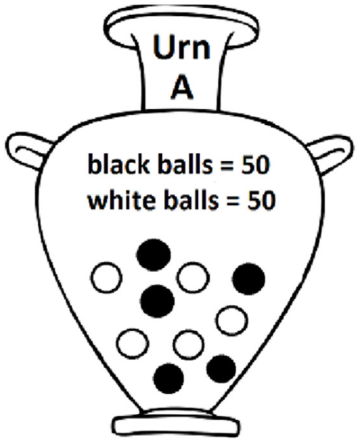
Le tableau complet des probabilités qui permet de déterminer la réponse optimale de *B*

Exercice 12 : première apparition d'un motif

- Et pour les motifs de plus grande dimension ?
  - *B peut appliquer l'algorithme de Conway, comme précédemment, pour trouver la meilleure réponse à A.*
  - *La **méthode d'Andrews** est beaucoup plus simple*
    - Andrews (2004). Anyone for a nontransitive paradox? The case of Penney-Ante
  - *Supposons que A choisisse $PPFPFPPF$*
  - *On inverse le second terme ce qui donne F*
  - *On l'accole au motif de A tronqué du dernier terme : $PPFPFPP$*
  - *Ce qui donne $FPPFPFPP$*
  - *C'est la meilleure réponse de B à A*
  - *Probabilité de gagner $\geq$ à $9/14$ quel que soit le choix de A*
    - Guibas & Odlyzko (1981) String overlaps, pattern matching, and nontransitive games. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*

Exercice 13 : « Le » problème de l'induction

- Soit une urne contenant 50 boules blanches et 50 boules noires.



Exercice 13 : « Le » problème de l'induction

- Soit une urne contenant 50 boules blanches et 50 boules noires.
- On effectue un tirage aléatoire sans remplacement.
- Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au prochain tirage, sachant qu'on a préalablement tiré n boules noires et m boules blanches ?
- On n'a tiré que des boules noires. Comment évolue la probabilité de tirer une boule noire au prochain coup ?

Exercice 13 : « Le » problème de l'induction

- Soit une urne contenant 50 boules blanches et 50 boules noires.
- On effectue un tirage aléatoire sans remplacement.
- Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au prochain tirage, sachant qu'on a préalablement tiré n boules noires et m boules blanches ?
  - *Il reste* $50 - n$ *boules noires et* $50 - m$ *boules blanches*
  - *Probabilité de tirer une boule noire* $\frac{50-n}{100-m-n}$ *avec* $0 \leq n \leq 50$, $0 \leq m \leq 50$
- On n'a tiré que des boules noires. Comment évolue la probabilité de tirer une boule noire au prochain coup ?
  - $\frac{50-n}{100-n}$, $0 \leq n \leq 50$ *la probabilité diminue contrairement au principe inductif*

Exercice 13 : « Le » problème de l'induction

- Pour les motifs identiques à 1010001011, on examine si le successeur est un 1 ou si c'est un 0
  - *Il se trouve que dans* 50% *des cas, c'est un* 1 *ou si c'est un* 0
  - *Les motifs* 10100010111 *et* 10100010110 *apparaissent avec la même fréquence.*
  - ***<u>Question</u>*** *: imaginez une situation où on aurait pourtant une possibilité de prévision parfaite (alors même que l'on n'a pas répétition de motifs) ?*
  - *Supposons que l'observe toujours le pattern* $1010001011\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{1}1$
  - *En* 11^e *position on peut avoir* 1 *ou* 0*, mais en* 12^e *position, on a toujours un* 1 *(hausse des cours).*
  - *Dans ce cas quand on observe* 1010001011*, on ne fait rien le lendemain, mais on achète le surlendemain*

Exercice 14 : loi uniforme sur $[0,1]$ et suites aléatoires (à compléter)

- On rappelle qu'une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ est telle que $P(U < u) = u$ pour tout $u \in [0,1]$
  - *De nombreux générateurs de variables aléatoires vont retourner des réalisations, en principe indépendantes de U*
  - *Par exemple, la fonction ALEA() d'Excel*
- On s'est intéressé à des suites binaires $1010001111 \ldots$
  - *De manière générale $x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots$ où $x_n = 0$ ou 1*
- On va commencer par rappeler une correspondance simple entre un réel $u \in [0,1]$ et une suite binaire $x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots$
- Puis montrer qu'il est équivalent de considérer une variable aléatoire uniforme et une suite de variables de Bernoulli indépendantes et de paramètre 0,5 (ou suite aléatoire)

Exercice 14 : loi uniforme sur $[0,1]$ et suites aléatoires (à compléter)

- Relation entre $u \in [0,1]$ et $x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots$ où $x_n = 0$ ou 1
- On rappelle que le développement en base 2 de $u \in [0,1]$
  - $u = \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{2^n} + \cdots$
  - $0{,}5 = \frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \cdots + \frac{0}{2^n} + \cdots$
  - $0{,}25 = \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \cdots + \frac{0}{2^n} + \cdots$
  - $0{,}75 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \cdots + \frac{0}{2^n} + \cdots$
  - *Les nombres précédents s'écrivent $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ et la suite $x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots$ ne comprend que des termes nuls à partir du rang 2 ou 3*
  - *Plus généralement, si $u = \frac{k}{2^j}$, avec k, j entiers et $k < 2^j$, alors la suite $x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots$ ne comprend que des termes nuls à partir du rang $j+1$*
    - Preuve : on écrit k en base 2. $k = y_1 2^{j-1} + y_2 2^{j-2} + \cdots + y_j$. La suite associée à $\frac{k}{2^j}$ est alors simplement $y_1y_2 \ldots y_j 0000 \ldots$

Exercice 14 : loi uniforme sur $[0,1]$ et suites aléatoires (à compléter)

- Le développement en base 2 peut ne pas être unique
  - *Exemple : $1 = 2^0$ et $1 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$*
  - *La seconde égalité est liée à l'expression de la somme des termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$*
    - Paradoxe d'Achille et de la tortue, dû à Zénon d'Élée
  - *Ainsi $\frac{1}{2}$ peut être associé à la suite $100000 \ldots$ ou à la suite $011111 \ldots$*
    - Pour éviter ce problème, on considère la partie entière de $u \times 2^n$
    - Partie entière de $u \times 2^n$: le plus grand nombre entier inférieur ou égal à $u \times 2^n$
    - Partie entière de 145,36 : 145.
    - On note la partie entière de 145,3666, $[145{,}36]$
  - *Si $[u \times 2^n]$ est pair, alors $x_n = 0$, Si $[u \times 2^n]$ est impair, alors $x_n = 1$*
  - *Développement binaire propre de u : unique suite $x_1x_2 \ldots x_n \ldots$*
    - $\left[\frac{1}{2} \times 2^1\right] = [1] = 1 = x_1$, pour $n > 1$, $\left[\frac{1}{2} \times 2^n\right] = [2^{n-1}]$ pair, d'où $x_n = 0$
    - $100000 \ldots$ est donc associée au développement binaire propre de $\frac{1}{2}$

Exercice 14 : loi uniforme sur $[0,1]$ et suites aléatoires (à compléter)

- Si un nombre réel $u \in [0,1]$ a un développement binaire propre avec un nombre fini de 1, alors il est de la forme $\frac{k}{2^j}$
    - Preuve : considérons l'indice associé au dernier 1 et notons-le j
    - $u = \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^j} + 0 + \cdots$.
    - On remarque que $2^j u = x_1 2^{j-1} + \cdots + 1$ est entier. Notons le k, d'où $u = \frac{k}{2^j}$
  - *Réciproquement, les nombres de la forme $\frac{k}{2^j}$ ont un développement binaire propre de la forme $x_1x_2 \ldots x_n 0000 \ldots$*
    - Il suffit de reprendre l'avant-dernier transparent et la définition du développement binaire propre.
    - Les nombres $\frac{k}{2^j}$ ont un développement binaire propre avec un nombre fini de 1
- On a établi une correspondance bijective entre les nombres réels $u \in [0,1]$, qui ne sont pas de la forme $\frac{k}{2^j}$ et les suites binaires $x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots$ avec un nombre infini de 1

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- Cet exercice a plusieurs objectifs :
  - *Améliorer la compréhension des événements (dans la suite de l'analyse de l'erreur de conjonction ou « problème de Linda » analysé par Kahneman.*
    - Ainsi que la transposition formelle des énoncés impliquant le futur
  - *Manipuler les probabilités conditionnelles*
  - *De manière subsidiaire*
    - Evaluer la valeur d'une information (préliminaire à l'analyse générale de Blackwell sur les structures d'information et leur caractérisation)
    - Donner un aperçu du « problème des futurs contingents » d'Aristote, central pour la compréhension de la contingence et de la vérité des énoncés impliquant le futur

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- Les suites de hausses (H) et de baisses (B) de cours sont associées à des marches aléatoires
- On considère les 3 prochains mouvements et les événements
  - *A : « Le prochain mouvement du marché sera une hausse »*
  - *B : « Il y aura deux hausses parmi les trois prochains mouvements ».*
  - *C : « Il y aura au moins deux hausses parmi les trois prochains mouvements du marché».*
  - *D : « Le nombre de hausses ne sera pas égal à deux »*
  - *E : « Il n'y aura pas deux hausses parmi les deux derniers mouvements du marché »*
  - *F : « Si le premier mouvement est une hausse, il ne sera pas suivi par une baisse ou une hausse au cours des deux périodes suivantes »*
  - *G : « Si le premier mouvement est une hausse, il n'est suivi ni d'une hausse, ni d'une baisse »*
- Expliciter ces événements et calculer leur probabilité

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- Explicitation des événements, probabilités marginales
    - On passe de la définition en compréhension à la définition en extension
    - Ne pas confondre l'événement B et le symbole B associé à une baisse
  - $A = \{HHH, HHB, HBH, HBB\}$, $P(A) = \frac{1}{2}$
  - $B = \{HHB, HBH, BHH\}$, $P(B) = \frac{3}{8}$
  - $C = \{HHH, HHB, HBH, BHH\}$, $P(C) = \frac{1}{2}$
  - $D = \{HBB, BHB, BBH, BBB, HHH\}$, $P(D) = \frac{5}{8}$
  - $E = \{HBB, BBB\}$, $P(E) = \frac{1}{4}$
  - $F = \{HHH, BHB, BBH, BBB, BHH\}$, $P(F) = \frac{5}{8}$
  - $G = \{BHB, BBH, BBB, BHH\}$, $P(G) = \frac{1}{2}$
    - Une lecture rapide de la définition pourrait faire croire que $G = \emptyset$. Mais BHB, par exemple, appartient bien à G de par la définition de l'implication

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- Calculer les probabilités conditionnelles $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(A|D)$, $P(A|E)$, $P(A|F)$, $P(A|G)$
  - $P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(\{HBB\})}{P(\{HBB, BBB\})} = \frac{1}{2}$
  - $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{HHB, HBH\})}{P(\{HHB, HBH, BHH\})} = \frac{2}{3}$
  - $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\{HHH, HHB, HBH\})}{P(\{HHH, HHB, HBH, BHH\})} = \frac{3}{4}$
  - $P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(\{HHH, HBB\})}{P(\{HBB, BHB, BBH, BBB, HHH\})} = \frac{2}{5}$
  - $P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(\{HHH\})}{P(\{HHH, BHB, BBH, BBB, BHH\})} = \frac{1}{5}$
  - $P(A|G) = \frac{P(A \cap G)}{P(F)} = \frac{P(\emptyset)}{P(\{HHH, BHB, BBH, BBB, BHH\})} = 0$

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- Classer la quantité d'information apportée par B, C, D, E, F, G en vue d'un pari sur le prochain mouvement du marché.
  - *Le cas le plus simple à analyser est le conditionnement par E. En effet, l'information associée à E est qu'il y aura deux baisses aux deux dernières dates. Les hausses et baisses consécutives étant supposées indépendantes, cela n'apporte aucune information sur ce qui se passe à la prochaine date.*
  - *On retrouve cela par le calcul :*
    - $P(A|E) = \frac{1}{2} = P(A)$ (probabilité conditionnelle = probabilité marginale)
    - $P(A \cap E) = P(A|E) \times P(E)$ (définition de la probabilité conditionnelle). D'où $P(A \cap E) = P(A) \times P(E)$ (définition de l'indépendance entre A et E
  - *L'autre cas simple est le conditionnement par G*

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- Classer la quantité d'information apportée par B, C, D, E, F, G en vue d'un pari sur le prochain mouvement du marché.
  - *Conditionnement par G. $G = \bar{A}$ ($\bar{A}$ est le complémentaire de A), c'est-à-dire qu'un pattern appartient à G si et seulement si il commence par une hausse.*
  - *Sachant G, A est impossible et $\bar{A}$ certain. On est certain que le prochain mouvement du marché sera une baisse.*
  - *Par ailleurs, on remarque que*
  - $P(A|E) = \frac{1}{2} < P(\bar{A}|D) = \frac{3}{5} < P(A|B) = \frac{2}{3} < P(A|C) = \frac{3}{4} < P(\bar{A}|F) = \frac{4}{5} < P(\bar{A}|G) = 1$
  - *On peut classer les événements du moins informatif E au plus informatif G : $E \prec D \prec B \prec C \prec F \prec G$*
  - *En effet, plus on s'écarte de l'équiprobabilité, plus la probabilité de gagner un pari (à la hausse ou à la baisse) est élevée*

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- On suppose qu'il existe des paris (contrats contingents) sur le prochain mouvement du marché.
- Un contrat contingent à la hausse paye 1 si hausse et 0 sinon. Un contrat contingent à la baisse paye 0 si hausse et 1 sinon.
- Montrer que l'on peut construire un placement sans risque à l'aide des deux contrats précédents.
  - *Il suffit d'acheter un contrat contingent à la hausse et un contrat contingent à la baisse pour recevoir 1, que le prix monte ou baisse.*
  - *On a ainsi reproduit un placement sans risque.*
- On note p_H la prime du contrat contingent à la hausse et p_B celle du contrat contingent à la baisse. Il existe un placement sans risque de taux d'intérêt nul. Relier p_H et p_B .

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- On note p_H la prime du contrat contingent à la hausse et p_B celle du contrat contingent à la baisse. Il existe un placement sans risque de taux d'intérêt nul. Relier p_H et p_B .
  - *En l'absence d'opportunités d'arbitrage, le taux du placement sans risque obtenu en achetant les deux contrats contingents doit être nul.*
  - *Ce taux est* $\frac{1-(p_H+p_B)}{p_H+p_B}$.
  - *D'où* $p_H + p_B = 1$
- Quel prix seriez-vous prêt à payer pour connaître l'information E ? On suppose que l'on ne peut traiter qu'à la prochaine date
  - *Si on peut spéculer à la hausse ou à la baisse sur l'évolution des cours à la prochaine période et à cette période uniquement, E n'apporte aucune information et a une valeur nulle.*

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- Discuter de la valeur de l'information G. On suppose que l'on ne peut traiter qu'à la prochaine date et qu'il existe un marché de prêts et d'emprunts sans risque au taux d'intérêt nul.
  - *Si l'on détient l'information G, on est certain qu'il y aura une baisse.*
  - *Si par ailleurs $p_B < 1$ (cas normal puisqu'en l'absence d'information, les cours suivent une marche aléatoire), on peut réaliser une opportunité d'arbitrage en empruntant 1 au taux sans risque nul et en achetant un contrat contingent à la baisse.*
  - *Dans ce cas, on récupère $1 - p_B > 0$ à la date initiale et on le solde net à payer $1 - 1$ est nul.*
  - *Le montant récupéré à la date initiale est proportionnel au nombre de contrats achetés (avec l'hypothèse que le prix par contrat contingent reste constant et que le taux d'intérêt ne dépend pas du montant emprunté.*
  - *Le gain ainsi obtenu n'est pas borné supérieurement.*

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- On étudie des contrats C_p qui payent 1 avec probabilité p (et 0 sinon).
- On suppose que deux contrats associés aux mêmes probabilités de gain ont la même valeur.
  - *Hypothèse connue comme absence d'illusion stochastique.*
- On suppose qu'il existe un marché des paris et on note P_p la prime associée au contrat C_p.
  - *Exemple : la prime $P_H = P_{1/2}$ est associée au contrat $C_{1/2}$.*
  - *P_H peut être égal à $\frac{1}{2}$, mais ce n'est pas nécessaire. Il existe fréquemment des primes de risque sur marchés. De manière plus générale, il n'est pas nécessaire de supposer que $P_p = p$.*

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- On se propose de comparer le contrat $C_{2/3}$ le contrat $C_{1/2}$.
  - *Intuitivement, on préfère $C_{2/3}$ à $C_{1/2}$ (et $P_{2/3} > P_{1/2}$).*
- Considérons le pari suivant : à la première étape, on a une probabilité $\frac{1}{3}$ d'obtenir 0, dans le cas contraire, on rejoue une seconde fois et on a une probabilité $\frac{3}{4}$ d'obtenir 1 et $\frac{1}{4}$ d'obtenir 0. On note ce contrat $C_{2/3\otimes 3/4}$.
  - *Ce type de contrat s'appelle une loterie composée et se représente sous facilement sous la forme d'un arbre.*
- Montrer que les contrats $C_{2/3\otimes 3/4}$, $C_{3/4\otimes 2/3}$ et $C_{1/2}$ sont associés aux mêmes distributions de perte.
  - *Pour le contrat $C_{2/3\otimes 3/4}$, la probabilité de gain est $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$. Il faut pouvoir rejouer avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et alors la probabilité de gagner 1 est de de $\frac{3}{4}$.*
  - *Pour $C_{3/4\otimes 2/3}$, la probabilité de gain est $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.*
  - *On a dans les trois cas de probabilités de gain égale à $\frac{1}{2}$.*

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- Montrer que $P_{1/2} = P_{2/3} \times P_{3/4}$
  - *Considérons le pari $C_{2/3\otimes 3/4}$. Il est équivalent de donner au parieur $P_{3/4}$ en cas de succès au premier tour.*
  - *En effet, s'il reçoit $P_{3/4}$, il peut acheter le contrat $C_{3/4}$ et reproduire la loterie composée.*
  - *Pour reproduire le contrat où le parieur reçoit $P_{3/4}$ avec probabilité $\frac{2}{3}$, il faut acheter $P_{3/4}$ unités de contrat $C_{2/3}$. La prime à payer est $P_{2/3} \times P_{3/4}$.*
  - *La prime à payer pour le contrat $C_{2/3\otimes 3/4}$ est donc $P_{2/3} \times P_{3/4}$*
  - *Comme le contrat $C_{2/3\otimes 3/4}$ est équivalent au contrat $C_{1/2}$, les primes associées à ces contrats sur le marché des paris doivent être égales : $P_{1/2} = P_{2/3} \times P_{3/4}$.*

Exercice 15 : indépendance, conditionnement, information

- Montrer que $p < 1 \Rightarrow P_h < 1$ (il n'y pas d'intervalle de temps entre le paiement de la prime du pari et le paiement du résultat du pari).
  - *Raisonnons par l'absurde : Si* $P_h \geq 1$*, vendre le pari est un « repas gratuit » (free-lunch).*
  - *Sous l'hypothèse usuelle, d'absence de repas gratuit,* $P_h < 1$
- Montrer que $P_{2/3} < P_{3/4}$.
  - *En suivant les raisonnements précédents,* $C_{2/3} = C_{3/4 \otimes 8/9}$ *et :* $P_{2/3} = P_{3/4} \times P_{8/9}$*. Comme* $P_{8/9} < 1$*,* $P_{2/3} < P_{3/4}$*.*
  - *La valeur (prime) d'un pari croît donc avec l'information dont dispose le parieur.*