Cours de Finance (Médaf)

$$r_e = r_f + \beta(r_m - r_f)$$

where

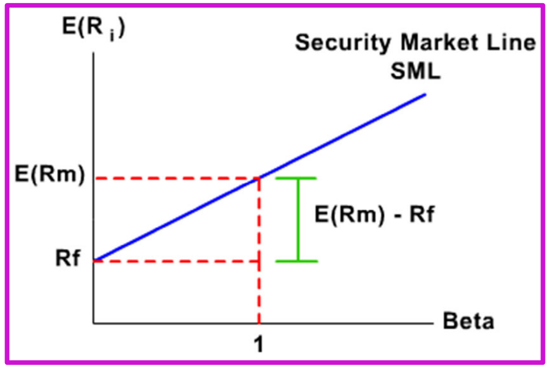
r_e = Required Return on Equity

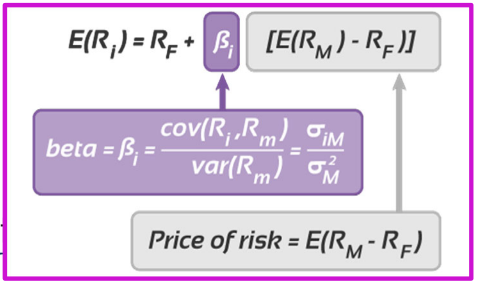
r_f = Risk-free Rate

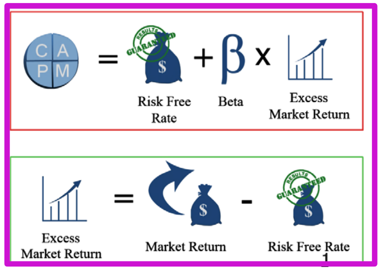
r_m = Market Return

β = Stock Beta

$(r_m - r_f)$ = Equity Risk Premium







MEDAF : relation entre rentabilité attendue et risque de titres et de portefeuilles

- L'équation fondamentale
  - Alpha de Jensen, indice de Treynor
- La « Security Market Line » (SML)
  - *Pourquoi seul le risque de marché est rémunéré ?*
    - L'offre agrégée de risques spécifiques est nulle
- Différence entre SML et CML
  - Médaf pour un portefeuille de titres
  - Médaf pour les portefeuilles sur la CML
- Compléments : démonstration, modèle de Black

Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

- Relation entre rentabilité attendue d'un titre et son risque
- Le Médaf sert pour l'évaluation des entreprises
  - *Rentabilité attendue par les actionnaires*
  - *Evaluation d'une entreprise lors d'opérations de croissance externe ou de cessions*
  - *Détermine le taux d'actualisation des cash-flows futurs*
- Le Médaf détermine les choix d'investissement
  - *TRI cible, taux d'actualisation pour la VAN*

Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

- Propriété : si T est le portefeuille tangent et i un titre ou un portefeuille de titres choisi dans le même ensemble de titres risqués, alors $E_i = r_f + \beta_i \times (E_T - r_f)$
- E_i : Rentabilité attendue du titre i (de rentabilité r_i)
- r_f taux d'intérêt sans risque
- E_T : Rentabilité attendue du portefeuille tangent (de rentabilité r_T)
- $\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_T)}{Var[r_T]} = \rho_{iT} \frac{\sigma_i}{\sigma_T}$: bêta du titre i par rapport au portefeuille T
- $E_T - r_f$: prime de risque

Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

- Univers de titres donné et un groupe d'investisseurs.
- Qui investissent exclusivement dans l'univers de titres
- Seuls ces investisseurs achètent des titres
- Les investisseurs raisonnent tous dans la même devise.
- Tous les investisseurs détiennent une combinaison d'actif sans risque et de portefeuille tangent
- Équilibre : offre = demande de titres
- Offre de titres risqués : le « portefeuille de marché »
- Demande : le portefeuille tangent
- Le portefeuille de marché est le portefeuille tangent
- Il est donc efficient au sens moyenne variance

Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

- **<u>Si</u>** le portefeuille tangent est égal au portefeuille de marché
- $\boldsymbol{E_i = r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)}$
- E_i : Rentabilité attendue du titre i
- r_f taux d'intérêt sans risque
- β_i: bêta du titre i
- E_M : espérance de rentabilité du portefeuille de marché
- $E_M - r_f$: prime de risque

Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

$$\boxed{E_i = \underbrace{r_f}_{\text{taux sans risque}} + \underbrace{\beta_i}_{\text{Bêta du titre } i} \times \underbrace{(E_M - r_f)}_{\text{prime de risque}}}$$

- Prime de risque : $E_M - r_f$
  - *écart entre la rentabilité du portefeuille de marché* $\boldsymbol{E_M} = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{r_M}]$ *et le taux sans risque* $\boldsymbol{r_f}$
- Dans l'équation $\boldsymbol{E_i = r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)}$, $\boldsymbol{\beta_i}$ est le seul terme qui dépend du titre i.

Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

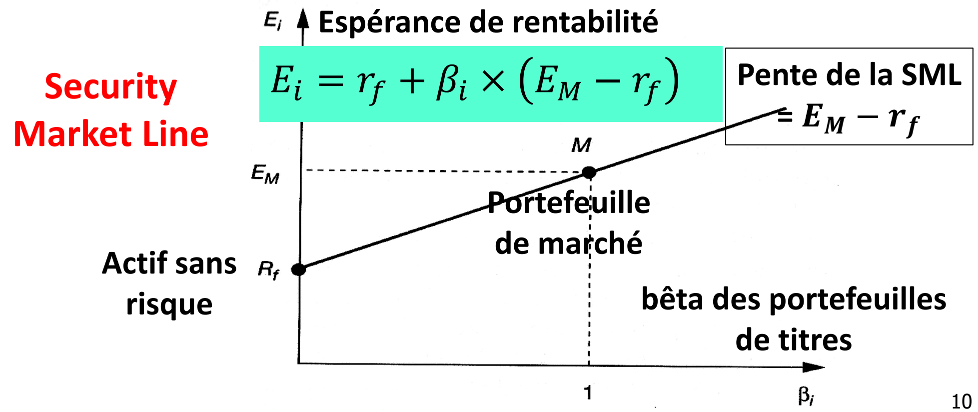
$$E_i = \underbrace{r_f}_{\text{taux sans risque}} + \underbrace{\beta_i}_{\text{Bêta du titre } i} \times \underbrace{(E_M - r_f)}_{\text{prime de risque}}$$

$$E_i = r_f + \underbrace{\beta_i \sigma_M}_{\text{risque de marché}} \times \underbrace{\frac{E_M - r_f}{\sigma_M}}_{\text{prix de marché du risque}}$$

Prix de marché du risque : $\frac{E_M - r_f}{\sigma_M}$ =pente de la CML

Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) /Security Market Line (SML)

- On se place dans un plan où le bêta des portefeuilles est porté en abscisse
  - *Pour la CML, c'est **l'écart-type des rentabilités***
- L'espérance des rentabilités en ordonnées

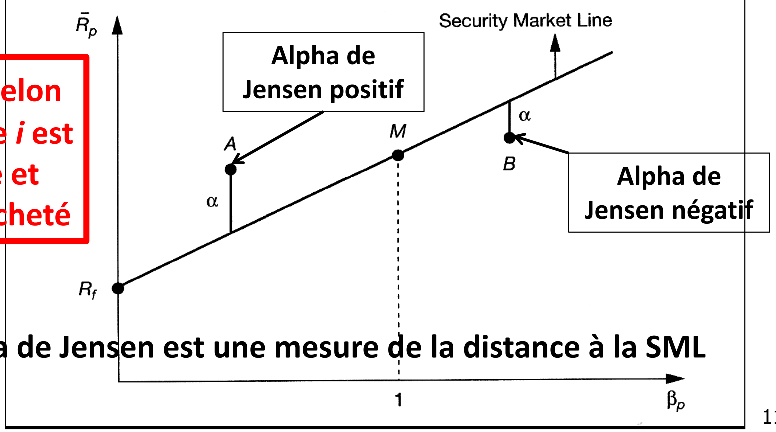


La théorie du marché du capital mesures de performance

Michael Jensen

- Alpha de Jensen $\alpha_i^J = E_i - r_f - \beta_i \times (E_M - r_f)$

Graphique 5.7. – *Écart entre le rendement du portefeuille et celui du marché à risque égal mesuré par β (méthode de Jensen)*



Si $\alpha_i^J > 0$, Selon Jensen, le titre *i* est sous-évalué et devrait être acheté

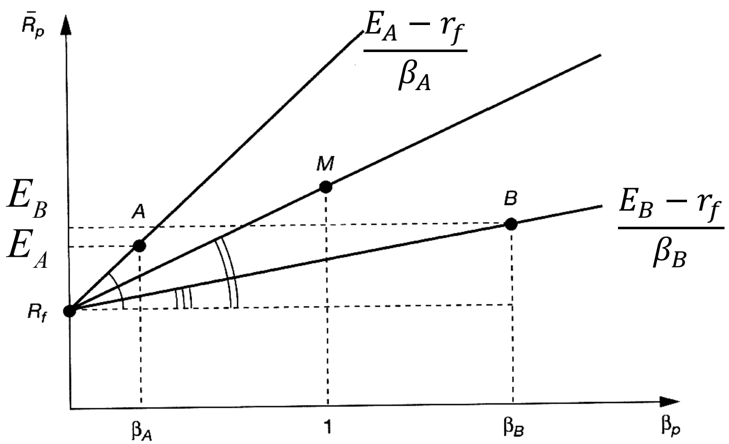
L'alpha de Jensen est une mesure de la distance à la SML

La théorie du marché du capital mesures de performance

- Indice de Treynor maximal pour les portefeuilles efficients

Graphique 5.8. – *Mesure des performances des portefeuilles A et B par la pente des rayons* R_fA *et* R_fB

Jack L. Treynor



CML et SML (Security Market Line)

- Rappel : portefeuilles sur la CML

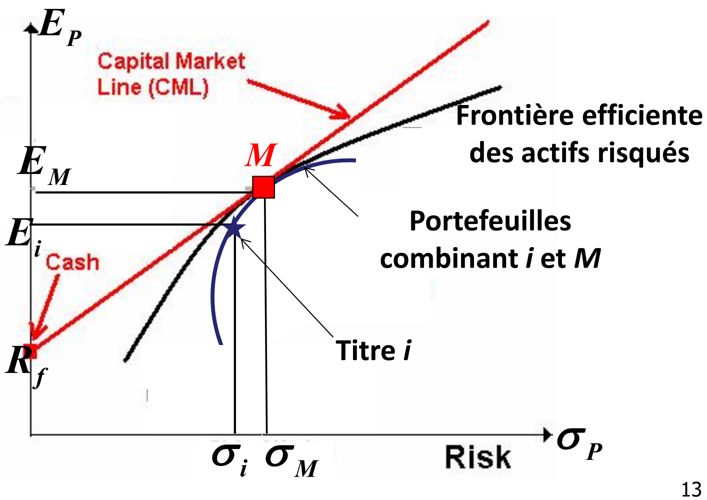
La CML représentée à droite est dans un plan (écart-type, espérance)

Idée de la démonstration rigoureuse :

La courbe bleue représente les portefeuilles combinant le titre i et le portefeuille de marché

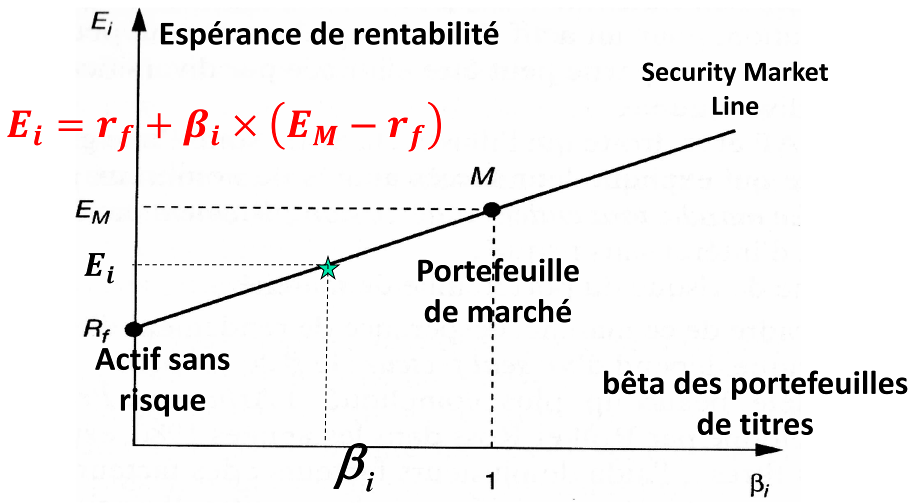
Les courbes bleues et rouges sont tangentes en M

Voir transparents complémentaires en annexe



CML et Security Market Line (SML)

- *À l'équilibre, tous les titres et tous les portefeuilles de titres devraient être situés sur la SML*
- *Les bêtas sont représentés sur l'axe des abscisses*



CML et SML : Récapitulatif

- Pour les portefeuilles situés sur la CML uniquement
  - Ceux qui combinent actif sans risque et portefeuille de marché
  - $\boldsymbol{E_P = r_f + \frac{E_M - r_f}{\sigma_M} \times \sigma_P}$
- Pour tous les titres et tous les portefeuilles
  - $\boldsymbol{E_i = r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)}$

Exercice : Médaf pour un portefeuille de titres

- Rentabilité d'un portefeuille de titres
- $\boldsymbol{r_P = x r_1 + (1-x) r_2 \Rightarrow E_P = x E_1 + (1-x) E_2}$
  - *Linéarité de l'espérance*
- MEDAF appliqué aux titres 1 et 2 :

$$E_1 = r_f + \beta_1(E_M - r_f), E_2 = r_f + \beta_2(E_M - r_f)$$

  - *D'où :*

$$E_P = x\left(r_f + \beta_1(E_M - r_f)\right) + (1-x)\left(r_f + \beta_2(E_M - r_f)\right)$$

$$E_P = r_f + (x\beta_1 + (1-x)\beta_2)(E_M - r_f)$$

- Ceci est cohérent avec $\boldsymbol{\beta_P = x\beta_1 + (1-x)\beta_1}$
  - Voir transparents sur la décomposition du risque

Exercice : Médaf pour les portefeuilles sur la CML

- *Les portefeuilles sur la CML sont constitués d'actif sans risque et de portefeuille de marché en quantité positive.*
- $r_P = xr_f + (1-x)r_M,\ 1-x \geq 0$
- $r_P = \alpha_P + \beta_P r_M + \varepsilon_P$
  - Bêta du portefeuille : $\beta_P = 1-x$
  - Risque spécifique du portefeuille r_P nul : $\varepsilon_P = 0$

σ_P^2=Var$[r_P]$ = Var$[(1-x)r_M] = (1-x)^2\sigma_M^2 \Rightarrow \sigma_P = (1-x)\sigma_M$

- *Equation de la CML :* $E_P = r_f + \left(\frac{E_M - r_f}{\sigma_M}\right) \times \sigma_P$
- $\Rightarrow E_P = r_f + (1-x) \times (E_M - r_f) = r_f + \beta_P \times (E_M - r_f)$
- ***Pour les portefeuilles sur la CML, on retrouve directement la relation entre espérance et bêta (SML)***

Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

Décomposition du risque d'un titre

$$\underbrace{\sigma_i^2}_{\text{risque total}} = \underbrace{\beta_i^2 \times \sigma_M^2}_{\text{risque de marché}} + \underbrace{\text{Var}\left[\varepsilon_i\right]}_{\text{risque spécifique}}$$

$$E_i = r_f + \underbrace{\beta_i \sigma_M}_{\text{risque de marché}} \times \underbrace{\frac{E_M - R_f}{\sigma_M}}_{\text{prix de marché du risque}}$$

Seul le risque de marché est rémunéré

Pourquoi seul le risque de marché est-il rémunéré ?

- Partons de la décomposition des rentabilités
- $\boldsymbol{R_i = E_i + \beta_i \times (r_M - E_M) + \varepsilon_i}$
  - *Où $\boldsymbol{\beta_i \times r_M}$ est associé au risque de marché et ε_i est le risque spécifique*
  - *Une première approche consiste à supposer que le risque spécifique est « diversifiable »*
  - *Si les ε_i ne sont pas corrélés entre eux, si leur variance est constante et si les différents titres sont équipondérés, la variance du risque spécifique du portefeuille tend vers 0*
    - Quand le nombre de titres tend vers l'infini
  - *Ce risque pouvant être éliminé par les investisseurs, il n'est demandé aucune prime de rentabilité pour ce risque*

Pourquoi seul le risque de marché est-il rémunéré ?

- Suite…
  - *L'espérance de rentabilité du portefeuille*

    $$\boldsymbol{r_i = E_i + \beta_i \times (r_M - E_M) + \varepsilon_i}$$
  - *Est donc identique à celle du portefeuille*

    $$\boldsymbol{r_i = E_i + \beta_i \times (r_M - E_M)}$$
  - *Ce second portefeuille est colinéaire au portefeuille de marché*
  - *Comme tous les portefeuilles situés sur la CML et combinant portefeuille de marché et actif sans risque*
  - *On sait que pour un portefeuille sur la CML :*

    $$\boldsymbol{E_i = r_f + \frac{E_M - r_F}{\sigma_M} \times \sigma_i}$$

Pourquoi seul le risque de marché est-il rémunéré ?

- Suite…
  - $\boldsymbol{E_i = r_f + \frac{E_M - r_f}{\sigma_M} \times \sigma_i}$
  - $\boldsymbol{r_i = E_i + \beta_i \times (r_M - E_M) \Rightarrow \sigma_i = \beta_i\, \sigma_M}$
  - *Ce qui donne la relation annoncée*
  - $\boldsymbol{E_i = r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)}$
- Seul le bêta du titre, $\boldsymbol{\beta_i}$ et pas la volatilité de la rentabilité $\boldsymbol{\sigma_i}$ détermine l'espérance de rentabilité $\boldsymbol{E_i}$
- Le raisonnement précédent a deux faiblesses
  - *Premièrement, on suppose que les risques spécifiques sont pas (peu) corrélés entre eux*
  - *Exemple de Peugeot et de Renault : ce n'est pas le cas*

Pourquoi seul le risque de marché est-il rémunéré ?

- Démonstration intuitive (suite)
  - *Le raisonnement précédent a deux faiblesses …*
  - *Même en l'absence de corrélation, les risques spécifiques ne disparaissent que pour des portefeuilles comportant une infinité d'actifs*
  - *Or le MEDAF vaut même pour un petit nombre d'actifs*
- On peut améliorer le raisonnement intuitif en revenant à l'équilibre des marchés financiers
  - *À l'équilibre les investisseurs ne demandent que de l'actif sans risque et du portefeuille de marché*
  - *La demande de risque spécifique est nulle*
  - *Par ailleurs, l'offre agrégée de risques spécifiques est nulle*

Exercice : l'offre agrégée de risques spécifiques est nulle

- Montrer que l'offre agrégée de risques spécifiques $\sum \boldsymbol{x_i \varepsilon_i} = 0$
  - *Les* $\boldsymbol{x_i}$ *correspondent aux poids des titres i dans le portefeuille de marché*
- Correction succincte
  - *(aux constantes près),* $\boldsymbol{r_i = \beta_i r_M + \varepsilon_i}$, $\boldsymbol{r_M} = \sum \boldsymbol{x_i r_i}$
  - *D'où* $\boldsymbol{r_M} = (\sum \boldsymbol{x_i \beta_i})\boldsymbol{r_M} + \sum \boldsymbol{x_i \varepsilon_i}$
  - *Comme* $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{r_M}, \sum \boldsymbol{x_i \varepsilon_i}) = \mathbf{0}$, $\sum \boldsymbol{x_i \beta_i} = \mathbf{1}$
  - *D'où* $\sum \boldsymbol{x_i \varepsilon_i} = \mathbf{0}$
  - *On remarque que l'équation* $\sum \boldsymbol{x_i \varepsilon_i} = \mathbf{0}$ *montre que le risque spécifique est plus que « diversifié » au niveau agrégé, il n'existe tout simplement pas !*

Médaf et gestion financière

- Gestion de portefeuilles, sélection de titres (stock picking)
  - *Si le benchmark choisi pour le portefeuille de marché est efficient (au sens des préférences moyenne-variance), alors on peut chercher des actions dont l'apha de Jensen* $\alpha_i = E_i - r_f - \beta_i \times (E_M - r_f) > 0$
  - *Ces actions sont sous-évaluées : recommandation d'achat*
  - *Rappel : relation inverse entre prix et taux d'actualisation (espérance de rentabilité)*
  - *A contrario, vente d'actions dont l'alpha de Jensen est nul*
- Gestion de portefeuilles
  - *Gestion indicielle passive (tracker, ETFs), recherche de portefeuilles efficients (smart bêtas, rule based investing)*

Médaf et gestion financière

- Rentabilité cible pour les investissements
  - *Le TRI d'un investissement doit être au moins égal au benchmark fourni par le Médaf.*
- Évaluation d'entreprises et calculs de VAN
  - *Calcul de la valeur des actions dans le cadre d'une introduction en Bourse (IPO, Initial Public Offering), d'une offre publique d'achat (OPA) ou d'échange (OPE)*
  - *Taux d'actualisation donné par le Médaf*
- Ratio fonds propres / dette (structure financière)
  - *Évolution des Bêtas en fonction du levier d'endettement*

Valeur fondamentale, évaluation d'une entreprise

- Évaluation d'une entreprise
  - *Pour simplifier l'analyse, supposons que l'entreprise ne vit qu'une période*
  - *Valeur de liquidation en* $\boldsymbol{t = 1}$: $\boldsymbol{F}$
    - Ce montant revient aux bailleurs de fonds (actionnaires et créanciers)
  - *Valeur de marché de l'entreprise en* $\boldsymbol{t = 0}$: $\boldsymbol{V}$
  - $\boldsymbol{V = E[F]/\left(1 + r_f + \beta(E_M - r_f)\right)}$
  - *En payant l'entreprise* $\boldsymbol{V}$*, les apporteurs de fonds sont rémunérés pour le risque pris :*
    - Le taux de rentabilité de l'investissement est $\boldsymbol{(F - V)/V}$
    - L'espérance est égale à $\boldsymbol{E[(F - V)/V] = r_f + \beta(E_M - r_f)}$
    - Conformément à l'équation de la SML

Valeur fondamentale

- Relation entre le prix aujourd'hui et le flux futur
  - *La rentabilité réalisée est* $\boldsymbol{r = (P_1 + d_1 - P_0)/P_0}$
  - *La rentabilité espérée est* $\boldsymbol{E[(P_1 + d_1 - P_0)/P_0]}$
  - *L'équation de la SML donne :*
  - $\boldsymbol{E[r] = r_f + \beta(E_M - r_f)}$
    - $\boldsymbol{E[r] = E[(P_1 + d_1 - P_0)/P_0] = E[(P_1 + d_1)/P_0] - 1}$
    - $\boldsymbol{E[(P_1 + d_1)/P_0] = 1 + r_f + \beta(E_M - r_f)}$
  - $\boldsymbol{P_0 = E[P_1 + d_1]/\left(1 + r_f + \beta(E_M - r_f)\right)}$
  - *Le prix aujourd'hui* $\boldsymbol{P_0}$ *est la valeur actuelle du flux futur espéré à la date* 1 $\boldsymbol{E[P_1 + d_1]}$ *(dividende plus revente)*
  - *Le taux d'actualisation est* $\boldsymbol{r_f + \beta(E_M - r_f)}$

Valeur fondamentale

- $P_0 = E[d_1]/(1+r) + E[d_2]/(1+r)^2 + E[d_3]/(1+r)^3 + \cdots + E[P_n]/(1+r)^n$
  - *Où* $r = r_f + \beta(E_M - r_f)$
- *Si le terme* $E[P_n]/(1+r)^n \to 0$ *quand* $n \to \infty$
  - $\Leftrightarrow$ *taux de croissance des cash-flows espérés* $< r$
- $P_0 = E[d_1]/(1+r) + E[d_2]/(1+r)^2 + E[d_3]/(1+r)^3 + \cdots$
- $E[d_1]/(1+r) + E[d_2]/(1+r)^2 + E[d_3]/(1+r)^3 + \cdots$ s'appelle la **valeur fondamentale**
- Elle peut coïncider avec la **valeur de marché** (efficience informationnelle)
- Le calcul de la valeur fondamentale implique de pouvoir calculer les numérateurs (analyse financière) et le taux d'actualisation, notamment $E_M - r_f$

Valeur fondamentale

- On peut s'intéresser à la valeur fondamentale des actions
- Au numérateur, on devrait avoir les flux nets (dividendes – rachats d'actions – augmentations de capital) versés aux actionnaires : modèles DDM
- On peut s'intéresser à la valeur économique d'une entreprise pour les bailleurs de fonds
- Au numérateur : flux nets versés aux actionnaires et aux créanciers.
- Et obtenir la valeur des actions en soustrayant à la valeur de l'entreprise, la valeur de la dette.
- Approche privilégiée aujourd'hui, du fait du caractère discrétionnaire de la distribution des dividendes.

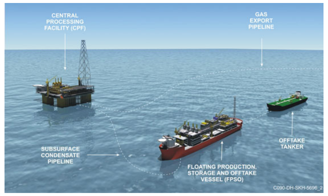
Valeur fondamentale et market timing (stratégies global macro)

- Gestion de portefeuille : market timing
  - *Valeur fondamentale : valeur actuelle des (espérances) des cash-flows futurs au taux* $r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)$
  - *Si prix de marché supérieur à valeur fondamentale, signal de vente (Shiller, bulles spéculatives) : surévaluation des niveau et de l'évolution des dividendes futurs.*
  - *Approche des bulles spéculatives par les primes de risque implicites : Si la prime de risque (ex-ante – prospective) est basse, le prix des actions est surévalué*
  - *Dans les deux cas, décision de vente.*
  - *Si au contraire le prix de marché est inférieur à la valeur fondamentale, signal d'achat*

Création de valeur

- Choix d'investissement
  - *Montant investi* $\boldsymbol{I}$ *à la date* $\boldsymbol{t = 0}$
  - *Rapporte le flux* $\boldsymbol{F}$ *en* $\boldsymbol{t = 1}$
    - Pour simplifier la présentation, on suppose que le projet d'investissement ne dure qu'une période
  - *Valeur en* $\boldsymbol{t = 0}$ *(ou valeur actuelle) du flux futur*
  - $\boldsymbol{V = E[F]/\left(1 + r_f + \beta(E_M - r_f)\right)}$
  - *L'investissement n'est réalisé que si* $\boldsymbol{V - I > 0}$
  - $\boldsymbol{V - I}$ ***Création de valeur pour l'investisseur***
  - $\boldsymbol{V - I}$ *correspond à la Valeur Actuelle Nette (VAN)*
    - nette de l'investissement ***I***

Création de valeur



- Choix d'investissement (suite)
  - *Le projet d'investissement n'est réalisé que si* $\boldsymbol{V - I > 0}$
    - En remplaçant $\boldsymbol{V}$ par $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{F}]/\left(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{r_f} + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{E_M} - \boldsymbol{r_f})\right)$
  - *On montre* $\boldsymbol{V - I > 0 \Leftrightarrow E[(F - I)/I] > r_f + \beta(E_M - r_f)}$
    - $\boldsymbol{E[(F - I)/I]}$ taux de rentabilité attendu de l'investissement
    - $\boldsymbol{r_f + \beta(E_M - r_f)}$ taux de rentabilité cible
    - Tel que donné par l'équation de la SML
  - *Le projet n'est réalisé que si le taux de rentabilité attendu est supérieur au taux de rentabilité cible*
    - Critère faisant intervenir le taux de rentabilité
  - $\boldsymbol{V/I}$ *correspond au q de Tobin*

Démonstration(s) du Médaf

- On va donner quelques démonstrations classiques du Médaf.
- Elles reposent sur l'étude de petites variations de la composition des portefeuilles au voisinage du portefeuille tangent.
- Approches 1 et 2 reposent sur l'idée que le ratio de Sharpe est maximal pour le portefeuille tangent
- Approche 1 :
  - *On considère des portefeuilles « au voisinage » du portefeuille tangent*
  - *Puis on effectue des développements limités*
- Approche 2 : idem, mais sans développements limités
- Approche 3 (modèle zéro bêta de Black) : utilise l'égalité des pentes de la frontière efficiente au voisinage d'un point de la frontière efficiente

Démonstration du Médaf : le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe

- On propose ici une d'autres démonstrations de la relation linéaire entre espérance de rentabilité et Bêtas
- Approches 1 et 2 reposent sur l'idée que le ratio de Sharpe est maximal pour le portefeuille tangent
- Approche 1 :
  - *On considère des portefeuilles « au voisinage » du portefeuille tangent*
  - *Puis on effectue des développements limités*
- Approche 2 : idem, mais sans développements limités
- Approche 3 : utilise

Démonstration du Médaf

- La rentabilité d'un portefeuille composé d'actif sans risque et d'actifs risqués peut s'écrire comme $r = r_f + \omega_1(r_1 - r_f) + \cdots + \omega_n(r_n - r_f)$, avec $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$
    - Voir exercices
- L'espérance de rentabilité du portefeuille s'écrit comme $r_f + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \bar{E}_i$ avec $\bar{E}_i = E_i - r_f$
  - *La dérivée par rapport à ω_i est $\bar{E}_i$*
- $\text{var}(r) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \text{cov}(r_i, r_i) + 2\sum_{i \neq j} \omega_i \omega_j \text{ cov}(r_i, r_j)$
  - *La dérivée de la variance par rapport à ω_i est égale à* $2\sum_{i=1}^{n} \omega_j \text{cov}(r_i, r_i) = 2\text{cov}(r_i, r)$
- Ratio entre accroissement de l'espérance et accroissement de la variance : $(E_i - r_f)/(2\text{cov}(r_i, r))$ (buck for the bang ratio).

Démonstration du Médaf

- Si on modifie la composition en actif risqué i autour du portefeuille tangent T, $\frac{dE}{d\sigma}$ doit être égal à $\frac{E_T - r_f}{\sigma_T}$
  - *Sinon, on pourrait aller au-dessus de la CML (faire une représentation géométrique)*
  - $\frac{dE}{d\sigma} = \frac{dE}{d\sigma^2} \times \frac{d\sigma^2}{d\sigma} = 2\sigma_T \times (E_i - r_f)/2\text{cov}(r_i, r_T) = \frac{E_T - r_f}{\sigma_T}$
  - *On en déduit que $(E_i - r_f)/(2\text{cov}(r_i, r_T))$ est indépendant de l'actif risqué i*
    - Constance du buck for the bang ratio
- L'équation précédente se réécrit :
- $E_i = r_f + \frac{\text{cov}(r_i, r_T)}{\sigma_T^2} \times (E_T - r_f) = r_f + \beta_{iT} \times (E_T - r_f)$

Une deuxième démonstration du Médaf

- Préliminaires : Approximations et développements limités
- $x \to f(x) = (1+x)^{\alpha}$
- $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$
  - $\alpha = 2.\ f(x) = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2.\ f'(x) = 2 + 2x$
  - $\alpha = \frac{1}{2}.\ f(x) = \sqrt{1+x}.\ f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1+x}}$
- x « petit », $f(x) = (1+x)^{\alpha} \approx 1 + f'(0)x = 1 + \alpha x$
  - $\alpha = 2. f(x) \approx 1 + 2x$
  - $\alpha = \frac{1}{2}.\ f(x) \approx 1 + \frac{x}{2}$

Une démonstration du Médaf : Approximation du risque d'un portefeuille

- $\tilde{r}_x = x\tilde{r}_i + (1-x)\tilde{r}_T$. Portefeuille combinant i et T
- Risque associé à $\tilde{r}_x$ pour x petit (au voisinage de $\tilde{r}_T$)
- $\mathrm{Var}[\tilde{r}_x] = x^2\sigma_i^2 + 2x(1-x)\rho_{iT}\sigma_i\sigma_T + (1-x)^2\sigma_T^2$
  - *Si x petit, $ax^2 + bx + c \approx bx + c$*
  - *Même raisonnement qu'auparavant : On néglige les termes en x^2*
  - $\mathrm{Var}[\tilde{r}_x] \approx \sigma_T^2 - 2x(\sigma_T^2 - \rho_{iT}\sigma_i\sigma_T)$
  - $\beta_{iT} = \rho_{iT}\frac{\sigma_i}{\sigma_T}$. *D'où* $\rho_{iT} = \beta_{iT}\frac{\sigma_T}{\sigma_i}$
  - $\mathrm{Var}[\tilde{r}_x] \approx \sigma_T^2 - 2x\left(\sigma_T^2 - \beta_{iT}\frac{\sigma_T}{\cancel{\sigma_i}}\cancel{\sigma_i}\sigma_T\right) = \sigma_T^2(1 - 2(1-\beta_{iT})x)$
  - $\sigma_x \approx \left(\sigma_T^2(1 - 2(1-\beta_{iT})x)\right)^{1/2} \approx \sigma_T(1 - (1-\beta_{iT})x)$

Une démonstration du Médaf : Relation rentabilité - risque

- $\tilde{r}_x = x\tilde{r}_i + (1-x)\tilde{r}_T$. Portefeuille combinant i et T
  - $\tilde{r}_x - r_f = x(\tilde{r}_i - r_f) + (1-x)(\tilde{r}_T - r_f)$
  - *Rappel : on note $E[\tilde{r}_i] = E_i$, $E[\tilde{r}_T] = E_T$*
  - *On note $\bar{E}_i = E[\tilde{r}_i] - r_f$, $\bar{E}_T = E[\tilde{r}_T] - r_f$*
  - $E[\tilde{r}_x] - r_f = x\bar{E}_i + (1-x)\bar{E}_T = \bar{E}_T + x(\bar{E}_i - \bar{E}_T)$
- D'où : $E[\tilde{r}_x] - r_f = \bar{E}_T\left(1 + x\left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - 1\right)\right)$

Une démonstration du Médaf: Relation rentabilité - risque

- Approximation du ratio de Sharpe
  - $s_x = \frac{E[\tilde{r}_x] - r_f}{\sigma_x} \approx \frac{\bar{E}_T}{\sigma_T} \times \frac{1 + x\left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - 1\right)}{1 - (1-\beta_{iT})x} = s_T \times \frac{1 + x\left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - 1\right)}{1 - (1-\beta_{iT})x}$
  - $(1 - (1-\beta_{iT})x)^{\alpha} \approx 1 - \alpha(1-\beta_{iT})x$
  - *Car si x petit, $-(1-\beta_{iT})x$ petit.*
  - $\frac{1}{1-(1-\beta_{iT})x} = (1 - (1-\beta_{iT})x)^{-1} \approx 1 + (1-\beta_{iT})x$
  - $s_x \approx s_T\left(1 + x\left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - 1\right)\right)(1 + (1-\beta_{iT})x)$
  - *Pour x petit, on peut négliger les termes en x^2*
  - $s_x \approx s_T\left(1 + x\left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT}\right)\right)$

Une démonstration du Médaf : Relation rentabilité - risque

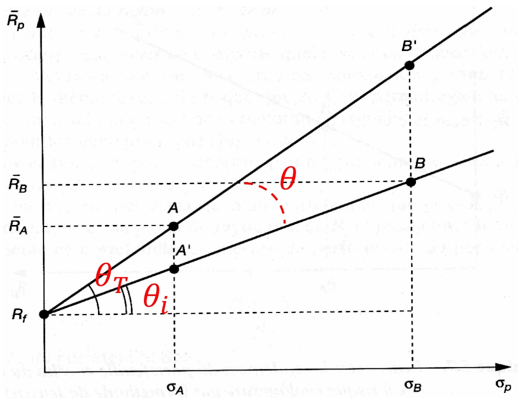
- $s_x \approx s_T\left(1 + x\left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT}\right)\right)$
- Si T est le portefeuille tangent, $s_x \leq s_T$
  - *Le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe*
  - $\frac{s_x}{s_T} \approx 1 + x\left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT}\right) \leq 1$
  - *Si* $\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT} > 0$, $1 + x\left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT}\right) > 1$, *si* $x > 0$
  - *Si* $\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT} < 0$, $1 + x\left(\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} - \beta_{iT}\right) > 1$, *si* $x < 0$
- D'où $\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} = \beta_{iT}$, ou $\bar{E}_i = \beta_{iT}\bar{E}_T$
- $E_i - r_f = \beta_{iT}(E_T - r_f)$ ou $E_i = r_f + \beta_{iT}(E_T - r_f)$

Médaf et ratios de Sharpe

- $E_i = r_f + \beta_{iT}(E_T - r_f)$
  - *Relation affine entre rentabilité attendue* E_i *et* β_{iT} *Bêta de i par rapport à T*
  - *Rappel :* $\beta_{iT} = \rho_{iT}\frac{\sigma_i}{\sigma_T}$. *D'où* $\frac{E_i - r_f}{E_T - r_f} = \beta_{iT} = \rho_{iT}\frac{\sigma_i}{\sigma_T}$
- Soit $\frac{E_i - r_f/\sigma_i}{E_T - r_f/\sigma_T} = \frac{s_i}{s_T} = \rho_{iT} \in [-1,1]$
  - *Ratio des ratios de Sharpe = coefficient de corrélation linéaire*
  - *Remarque :* $\rho_{iT} = 1 \Leftrightarrow s_i = s_T$ *et* $\beta_{iT} = \frac{\sigma_i}{\sigma_T}$
  - $\rho_{iT} = 1 \Leftrightarrow E_i = r_f + \beta_{iT}(E_T - r_f) = r_f + s_T\sigma_i$
  - $\rho_{iT} = 1$ *: relation affine entre* E_i *et* σ_i
  - $\sigma_i^2 = \beta_{iT}^2\sigma_T^2 + \mathrm{Var}[\tilde{\varepsilon}_i]$*:* $\rho_{iT} = 1 \Leftrightarrow \beta_{iT} = \frac{\sigma_i}{\sigma_T} \Leftrightarrow \mathrm{Var}[\tilde{\varepsilon}_i] = 0$

Médaf et ratios de Sharpe : Interprétation géométrique

- A représente le portefeuille tangent et B le titre i
- $s_i = \tan\theta_i$, $s_T = \tan\theta_T$. $\theta = \theta_T - \theta_i$
- $\tan\theta = \tan(\theta_T - \theta_i) = \frac{\tan\theta_T - \tan\theta_i}{1 + \tan\theta_T \times \tan\theta_i} = \frac{s_T - s_i}{1 + s_T \times s_i}$



Médaf et buck for the bang ratio

- On rappelle que $(E_i - r_f)/(2\mathrm{cov}(r_i, r_T))$ est le « buck for the bang ratio ».
- On a montré que $\frac{\bar{E}_i}{\bar{E}_T} = \beta_{iT}$.
- Comme $\beta_{iT} = \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_T)}{\mathrm{cov}(r_T, r_T)}$
- $(E_i - r_f)/(2\mathrm{cov}(r_i, r_T)) = (E_T - r_f)/(2\mathrm{cov}(r_T, r_T))$
- Il en résulte que le buck for the bang ratio ne dépend pas de l'actif i considéré (quand le portefeuille de référence est l'actif tangent)
- Réciproquement, si le buck for the bang ratio ne dépend pas de l'actif i considéré, on obtient la relation $E_i = r_f + \beta_{iT}(E_T - r_f)$

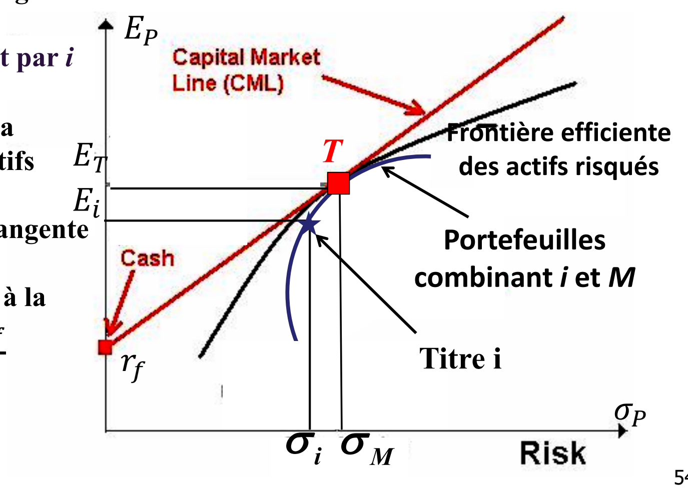
Une autre démonstration du Médaf

- On va (à nouveau) démontrer :
  - $E_i = r_f + \beta_i \times (E_T - r_f)$ *où T est le portefeuille tangent*
  - *On a déjà donné des démonstrations « intuitives »*
  - *Ici, on propose une démonstration formelle, un peu fastidieuse à écrire, mais simple dans son principe.*
- La démonstration est (presque) identique à la démonstration précédente, mais on explicite les dérivées (sans faire de développements limités)

Une autre démonstration du Médaf

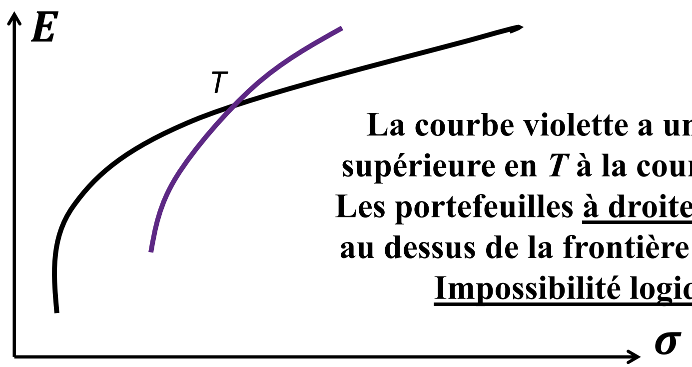
- **Idée de la démonstration** $E_i = r_f + \beta_i \times (E_T - r_f)$

Constituer des portefeuilles combinant portefeuille tangent *T* et titre *i* :
1) Courbe violette passant par *i* et *T*.
2) Courbe en dessous de la frontière efficiente des actifs risqués.
3) En *T* cette courbe est tangente à la frontière efficiente.
4) Sa pente en *T* est égale à la pente de la CML: $\frac{E_T - r_f}{\sigma_T}$



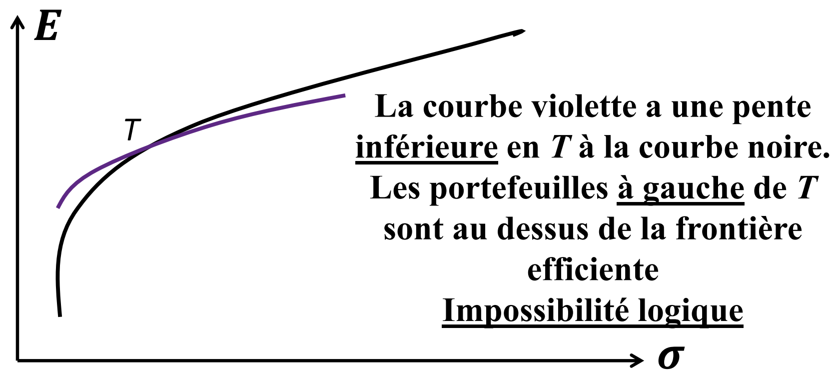
Une autre démonstration du Médaf

- En *T, t*angence entre la courbe violette
  - *Portefeuilles constitués du titre i et du portefeuille tangent T*
- Et courbe noire
  - *Frontière efficiente des actifs risqués*



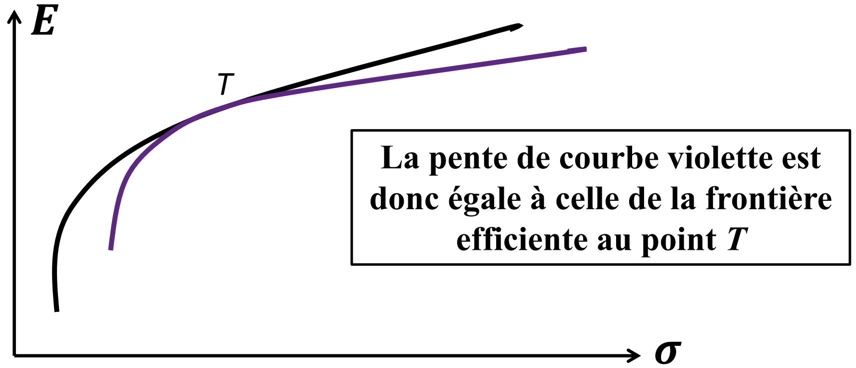
Une autre démonstration du Médaf

- En *M,* tangence entre la courbe violette
  - *Portefeuilles constitués du titre i et du portefeuille de marché M*
- Et courbe noire
  - *Frontière efficiente des actifs risqués*



Une autre démonstration du Médaf

- En *T*, tangence entre la courbe violette
  - *Portefeuilles constitués du titre i et du portefeuille tangent T*
- Et courbe noire
  - *Frontière efficiente des actifs risqués*



Une autre démonstration du Médaf

- *Proportion de la richesse investie dans le titre i : x*
- *Proportion de la richesse investie dans le portefeuille tangent :* $1-x$
- r_i, r_T *rentabilités titre i et portefeuille tangent*
- E_i, E_T *espérances des rentabilités*
- σ_i, σ_T *écart-types des rentabilités*
- $C_{iT} = \mathrm{Cov}(r_i, r_T)$ *covariance des rentabilités*
- $\beta_i = \frac{C_{iT}}{\sigma_T^2}$ *bêta du titre i*
- *Rentabilité du portefeuille* $r(x) = xr_i + (1-x)r_T$

Une autre démonstration du Médaf

- Rentabilité du portefeuille constitué de titre *i* et de *T*

$$r(x) = xr_i + (1-x)r_T$$

  - *Remarque : si tout est investi en portefeuille tangent* $r(x=0) = r_T$
- Espérance de la rentabilité

$$E[r(x)] = xE_i + (1-x)E_T$$

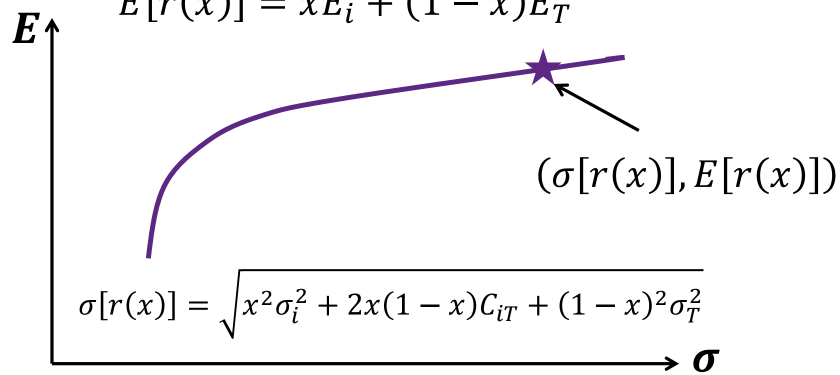
- Écart-type de la rentabilité

$$\sigma[r(x)] = \sqrt{x^2\sigma_i^2 + x(1-x)C_{iT} + (1-x)^2\sigma_T^2}$$

Une autre démonstration du Médaf

- La courbe violette est formée par l'ensemble des points $(\sigma[r(x)], E[r(x)])$
  - *Courbe paramétrée par* $\boldsymbol{x}$

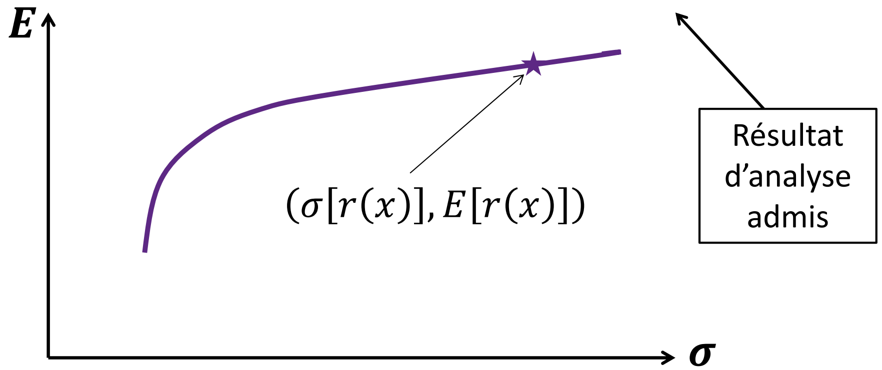
$$E[r(x)] = xE_i + (1-x)E_T$$



Une autre démonstration du Médaf

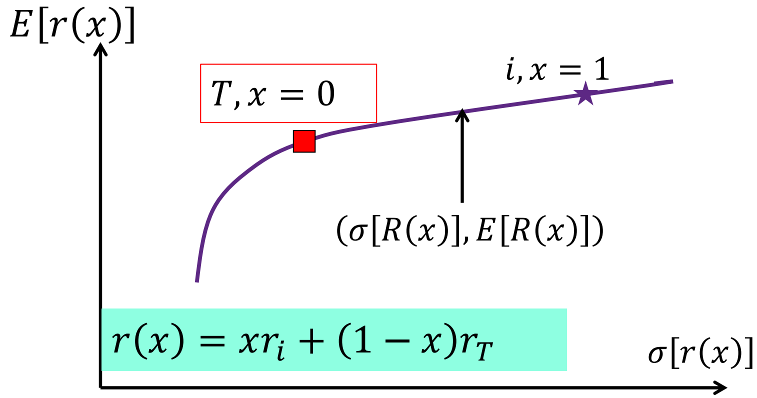
- La pente de la courbe violette en un point x est donné par

$$\frac{dE}{d\sigma} = \frac{dE[r(x)]}{d\sigma[r(x)]} = \frac{\frac{dE[r(x)]}{dx}}{\frac{d\sigma[r(x)]}{dx}}$$



Une autre démonstration du Médaf

- Pour calculer la pente de la courbe reliant les points associés au titre i et au portefeuille de marché M :
  - *Il faut calculer* $\frac{dE[r(x)]}{dx}$ *et* $\frac{d\sigma[r(x)]}{dx}$



Une autre démonstration du Médaf

- Calcul de la dérivée de l'espérance de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre i, X

$$E[r(x)] = xE_i + (1 - x)E_T$$

$$\boxed{\frac{dE[r(x)]}{dx} = E_i - E_T}$$

  - *Ne dépend pas de x*
- Calcul de la dérivée de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre i, x

$$\sigma[r(x)] = \sqrt{x^2\sigma_i^2 + 2x(1 - x)C_{iT} + (1 - x)^2\sigma_T^2}$$

Une autre démonstration du Médaf

- Calcul de la dérivée de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre i, X

$$\sigma[r(x)] = \sqrt{x^2\sigma_i^2 + 2x(1 - x)C_{iT} + (1 - x)^2\sigma_T^2}$$

  - *On a besoin de connaître la dérivation des fonctions composées*

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} \times \frac{df(y = g(x))}{dy}$$

  - *Dans notre cas* $\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} \times \frac{df(y = g(x))}{dy}$
  - *et* $\begin{cases} f(y) = \sqrt{y} \\ g(x) = \mathrm{Var}[r(x)] \end{cases}$

Une autre démonstration du Médaf

- Calcul de la dérivée de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre i, x

$$g(x) = \mathrm{Var}[r(x)] = x^2\sigma_i^2 + 2x(1-x)C_{iT} + (1-x)^2\sigma_T^2$$

  - *D'où* $\frac{dg(x)}{dx} = 2x\sigma_i^2 + 2(1-2x)C_{iT} - 2(1-x)\sigma_T^2$

  - $f(y) = \sqrt{y}$ *d'où* $\frac{df(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$\frac{df(y=g(x))}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Var}[r(x)]}} = \frac{1}{2\sigma[r(x)]}$$

Une autre démonstration du Médaf

- Calcul de la dérivée de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre i, X

$$\frac{d\sigma[r(x)]}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} \times \frac{df(y=g(x))}{dy}$$

$$\begin{cases} \frac{dg(x)}{dx} = 2x\sigma_i^2 + 2(1-2x)C_{iT} - 2(1-x)\sigma_T^2 \\ \frac{df(y=g(x))}{dy} = \frac{1}{2\sigma[r(x)]} \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma[r(x)]}{dx} = \frac{x\sigma_i^2 + (1-2x)C_{iT} - (1-x)\sigma_T^2}{\sigma[r(x)]}$$

Une autre démonstration du Médaf

- La pente de la courbe reliant le titre i au portefeuille tangent T est donc donnée par :

$$\frac{dE}{d\sigma} = \frac{dE[r(x)]}{d\sigma[r(x)]} = \frac{\frac{dE[r(x)]}{dx}}{\frac{d\sigma[r(x)]}{dx}}$$

  - *avec* $\begin{cases} \frac{d\sigma[r(x)]}{dx} = \frac{x\sigma_i^2 + (1-2x)C_{iT} - (1-x)\sigma_T^2}{\sigma[r(x)]} \\ \frac{dE[r(x)]}{dx} = E_i - E_T \end{cases}$

  - *Il faut calculer cette pente au point T, c'est-à-dire quand*

$$x = 0, r(x) = r_T$$

Une autre démonstration du Médaf

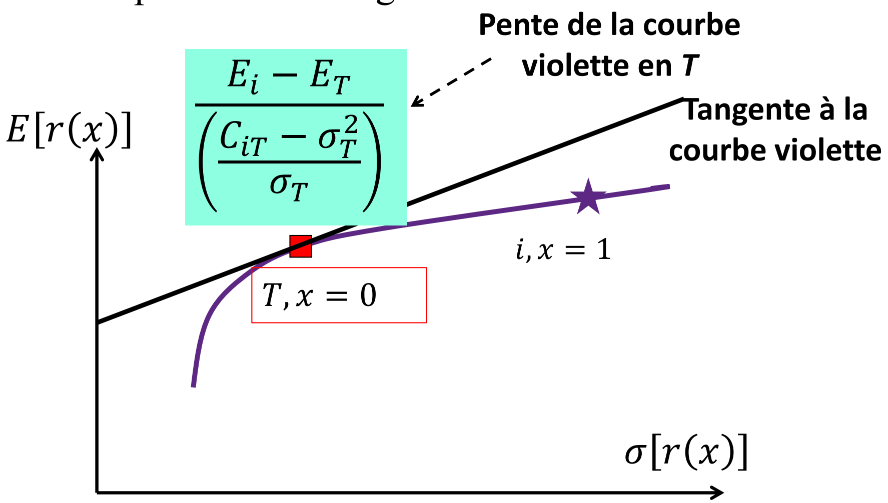
- Pente de la courbe reliant le titre i au portefeuille tangent T au point T correspondant à $x = 0$

$$\begin{cases} \frac{d\sigma[r(x)]}{dx}|x = 0 = \frac{C_{iT} - \sigma_T^2}{\sigma_T} \\ \frac{dE[r(x)]}{dx}|x = 0 = E_i - E_T \end{cases}$$

$$\frac{dE}{d\sigma}|x = 0 = \frac{\frac{dE[r(x)]}{dx}}{\frac{d\sigma[r(x)]}{dx}}|x = 0 = \frac{E_i - E_T}{\left(\frac{C_{iT} - \sigma_T^2}{\sigma_T}\right)}$$

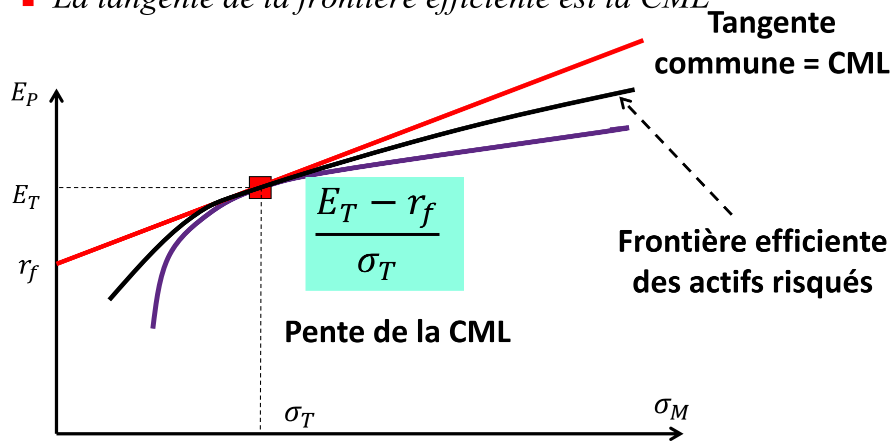
Une autre démonstration du Médaf

- Pente de la courbe reliant les points associés au titre i et au portefeuille tangent T :



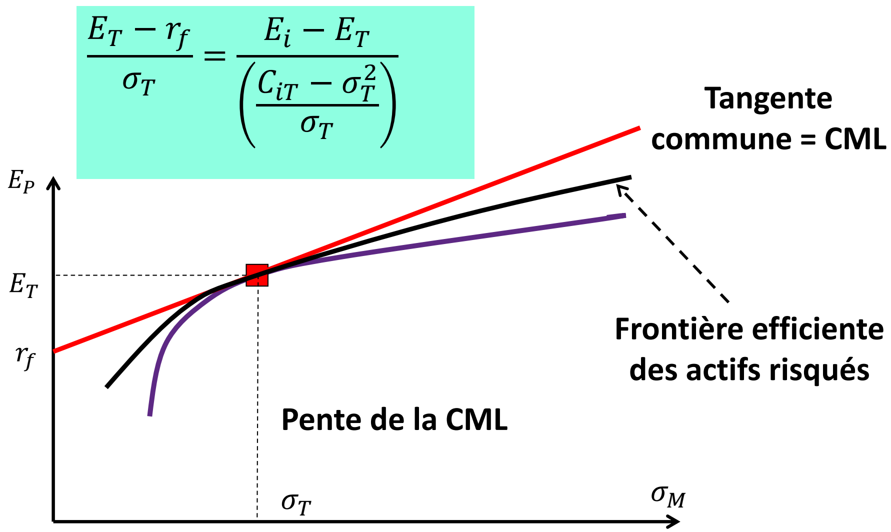
Une autre démonstration du Médaf

- La pente de la courbe violette en T est égale à la pente de la frontière efficiente en T
  - *Les tangentes des courbes violette et noire sont identiques*
  - *La tangente de la frontière efficiente est la CML*



Une autre démonstration du Médaf

- L'égalité des pentes donne l'équation suivante :



Une autre démonstration du Médaf

- En reprenant l'équation précédente :
  - $\frac{E_T - r_f}{\sigma_T} = \frac{E_i - E_T}{\left(\frac{C_{iT} - \sigma_T^2}{\sigma_T}\right)} \Rightarrow E_i - E_T = \left(\frac{C_{iT}}{\sigma_T^2} - 1\right) \times \left(E_T - r_f\right)$
  - *En développant le terme de droite et après simplification*
  - $E_i = r_f + \frac{C_{iT}}{\sigma_T^2} \times \left(E_T - r_f\right)$
  - *Comme* $\beta_i = \frac{C_{iT}}{\sigma_T^2}$
  - *On peut écrire l'espérance de rentabilité du titre i comme :*
- $E_i = r_f + \beta_i \times \left(E_T - r_f\right)$

Le modèle zéro bêta de Fisher Black

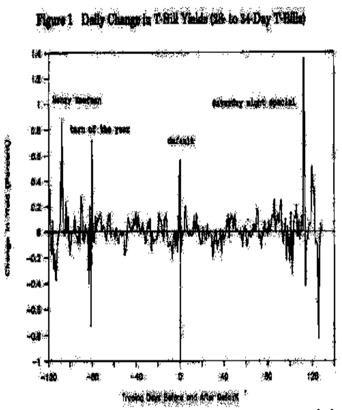
- Le modèle zéro bêta de Fisher Black
  - *Ne suppose pas l'existence d'un actif sans risque*
  - *P portefeuille d'actifs risqués situé sur la frontière efficiente*
  - *Z portefeuille d'actifs risqués de bêta nul par rapport à P*
  - $E_i = E_Z + \beta_i \times (E_T - E_Z)$
- On obtient donc une relation similaire à celle du Médaf, mais dans un cadre moins restrictif
  - *C'est le portefeuille « zéro-bêta » qui fait formellement office d'actif sans risque.*
- Une démonstration du résultat est donnée dans les transparents suivants
  - *Elle est en fait très proche de la démonstration précédente*

Le modèle « zéro-bêta » de Black

- L'existence d'un taux « sans risque » r_f ne va pas de soi
  - *Il n'existe pas d'émetteur exempt de risque de défaut*
  - *Les banques font faillite*
    - Lehman Brothers (2008), Washington Mutual (2008) aux États-Unis
    - Plus récemment, banques chypriotes : Laiki, Bank of Cyprus (2013)
    - Les garanties implicites données aux emprunteurs diminuent
    - Bails-in plutôt que Bails-outs
  - *Les états font aussi défaut*
    - Grèce (2012), dette fédérale des États-Unis (1979, 2013 ?)
    - L'introduction de clauses d'action collectives dans les dettes des Etats de la zone euro est-il le prélude à des annulations partielles de dette comme un instrument « courant » de gestion
    - Techniquement, échanges forcés de dette, plutôt qu'annulations

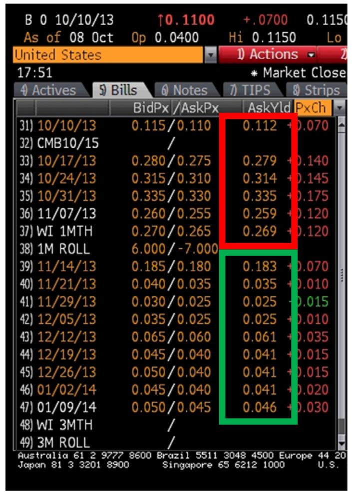
Le modèle « zéro-bêta » de Black

- Existence d'un taux sans risque r_f ?
  - *« Petit défaut » temporaire de 1979*
    - http://dmarron.com/2011/05/26/the-day-the-united-states-defaulted-on-treasury-bills/
    - Augmentation d'environ 0,6% des taux des Treasury Bills (emprunts d'État à court-terme)
    - Cette augmentation n'a pas été compensée par une diminution immédiate quand le problème a fini par être résolu
  - *Échéance du 17 octobre 2013*
    - *There's still a lot of confusion about what October 17 represents when it comes to the debt ceiling and the risk of a U.S. default.*
    - CNN, 10 octobre 2013



Le modèle « zéro-bêta » de Black

- Existence d'un taux sans risque r_f
  - *Niveau des taux des Treasury Bills*
    - Le 8 octobre 2013
    - Source Bloomberg
    - Rectangle rouge : taux en % pour des échéances inférieures à 1 mois
    - Le 10/10, le 17/10, le 24/10, …
    - Rectangle vert : taux pour des échéances un peu plus lointaines
    - Ces taux sont presque nuls
    - Les craintes se concentrent sur les échéances courtes
  - *Autres taux de référence à un mois*
    - Interbancaire, repos, strips, OIS, CP, …



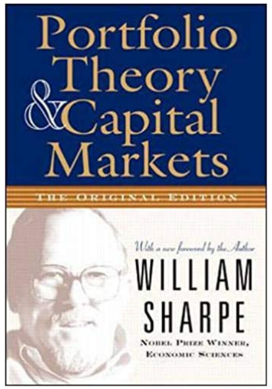
	BidPx /AskPx	AskYld	PxCh
31) 10/10/13	0.115/0.110	0.112	+0.070
32) CMB10/15	/		
33) 10/17/13	0.280/0.275	0.279	+0.140
34) 10/24/13	0.315/0.310	0.314	+0.145
35) 10/31/13	0.335/0.330	0.335	+0.175
36) 11/07/13	0.260/0.255	0.259	+0.120
37) WI 1MTH	0.270/0.265	0.269	+0.120
38) 1M ROLL	6.000/-7.000		
39) 11/14/13	0.185/0.180	0.183	+0.070
40) 11/21/13	0.040/0.035	0.035	+0.010
41) 11/29/13	0.030/0.025	0.025	-0.015
42) 12/05/13	0.035/0.025	0.025	+0.010
43) 12/12/13	0.065/0.060	0.061	+0.035
44) 12/19/13	0.045/0.040	0.041	+0.015
45) 12/26/13	0.050/0.040	0.041	+0.015
46) 01/02/14	0.045/0.040	0.041	+0.020
47) 01/09/14	0.050/0.045	0.046	+0.030
48) WI 3MTH	/		
49) 3M ROLL	/		

Tbills	**.27**
Short Coupons	**.32 (October 31 maturity)**
UST Repo	**.16**
OIS	**.11**
Libor	**.174**
US Financial CP	**.13**

Les taux interbancaires non sécurisés sont inférieurs aux taux de la dette publique …

Le modèle « zéro-bêta » de Black

- Fischer Black a montré en 1972 qu'on pouvait s'affranchir de l'existence d'un placement sans risque
  - Sharpe (1970). *Portfolio theory and capital markets*. McGraw-Hill.
  - Black (1972). Capital market equilibrium with restricted borrowing. *The Journal of business*.

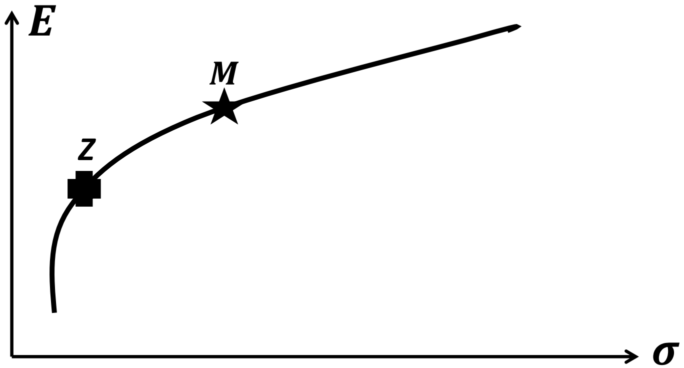


Le modèle « zéro-bêta » de Black

- La démonstration fait appel aux raisonnements déjà vus et à un résultat supplémentaire :
- Théorème de séparation en deux fonds pour la frontière efficiente des actifs risqués :
  - *En l'absence de contraintes sur les montants de titres achetés ou vendus, les portefeuilles sur la frontière efficiente sont constitués à partir de deux portefeuilles **arbitraires** pris sur cette frontière*
  - *Les investisseurs ne détiennent donc que des portefeuilles composés de ces deux titres*
  - *Le portefeuille de marché (demande agrégée) est donc lui-même composé de ces deux « fonds »*
- Le portefeuille de marché est donc sur la frontière efficiente

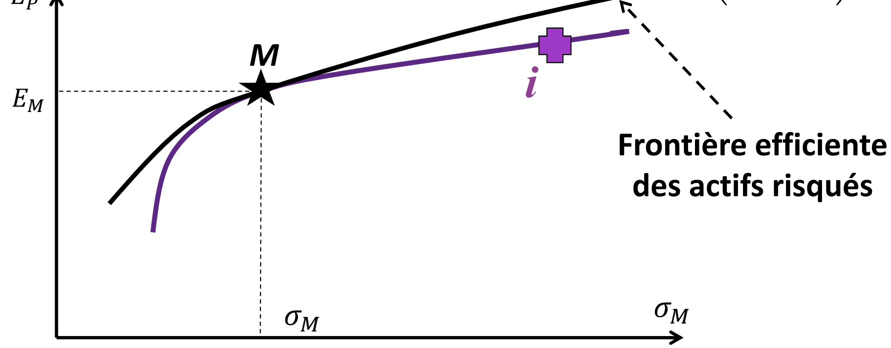
Le modèle « zéro-bêta » de Black

- *Le portefeuille de marché M est sur la frontière efficiente des actifs risqués (transparent précédent)*
- *La rentabilité des portefeuilles sur la frontière est de la forme $r = xr_M + (1-x)r_Z$ (théorème de séparation en deux fonds de Sharpe)*



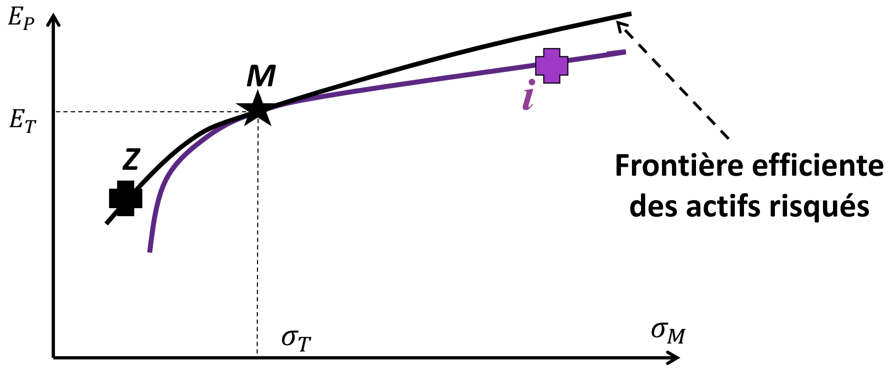
Le modèle « zéro-bêta » de Black

- On rappelle qu'il y a tangence au point M entre la frontière efficiente (en noir) et l'ensemble des portefeuilles formé de M et du titre ***i*** (courbe mauve)
  - *On a démontré que la pente de la courbe mauve est* $\dfrac{E_i - E_M}{\left(\frac{c_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$



Le modèle « zéro-bêta » de Black

- *On a vu que la pente de la courbe mauve (en M) est* $\frac{E_i - E_M}{\left(\frac{C_{iM}-\sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$
- *De même la pente de la courbe noire est* $\frac{E_Z - E_M}{\left(\frac{C_{ZM}-\sigma_M^2}{\sigma_M}\right)} = \frac{E_i - E_M}{\left(\frac{C_{iM}-\sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$



Le modèle « zéro-bêta » de Black

- Fin de la démonstration et établissement du résultat
  - *Choisissons Z sur la frontière efficiente, tel que* $C_{ZM} = 0$
  - *Rappel de notations* $C_{ZM} = \mathrm{Cov}(r_M, r_Z)$
  - $\beta_Z = \mathrm{Cov}(r_Z, r_M)/\sigma_T^2 = 0$
  - *Z : portefeuille zéro-bêta*
    - Remarque : on peut toujours se ramener au cas $C_{ZM} = 0$
    - Sinon on prend Z' tel que $r_{Z'} = x r_M + (1-x) r_Z$
    - $\beta_{Z'} = x\beta_M + (1-x)\beta_Z = x + (1-x)\beta_Z$
    - Il suffit de prendre $x = \beta_Z/(\beta_Z - 1)$ pour que $\beta_{Z'} = 0$
  - $\frac{E_Z - E_M}{\left(\frac{C_{ZM}-\sigma_M^2}{\sigma_M}\right)} = \frac{E_i - E_M}{\left(\frac{C_{iM}-\sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$ *devient* $\frac{E_Z - E_M}{-\sigma_M} = \frac{E_i - E_M}{\left(\frac{C_{iM}-\sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$
  - *Après simplification :* $E_i = E_Z + \beta_i \times (E_M - E_Z)$

Le modèle « zéro-bêta » de Black

- $E_i = E_Z + \beta_i \times (E_M - E_Z)$
- Relation affine entre espérance de rentabilité du titre i, E_i et bêta du titre, β_i.
  - *Cette relation est presque identique à celle du Médaf*
- $E_i = r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)$
- On remplace le taux risque r_f par l'espérance du taux de rentabilité du portefeuille zéro-bêta E_Z
  - *Le Médaf subsiste donc même en l'absence d'un taux sans risque*
  - *Black a également développé une extension du Médaf quand les taux des emprunts sont plus élevés que ceux des prêts*

Exercice préliminaire : écriture des rentabilités de portefeuilles

- Rappel : un portefeuille investi en actifs $i = 0,1, \dots, n$ dans des proportions $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ a pour rentabilité $r_P = \omega_0 r_0 + \omega_1 r_1 + \cdots \omega_n r_n$ avec $\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n = 1$
  - *Cela suppose qu'un montant non nul ait été investi au départ (afin que le dénominateur soit non nul)*
  - *Les actifs peuvent être risqués (rentabilités aléatoires), mais cela peut aussi inclure l'actif sans risque.*
- Cas 1 : $r_0 = r_f$ (actif sans risque) :
  - *Montrer que* $r_P = r_f + \omega_1(r_1 - r_f) + \cdots \omega_n(r_n - r_f)$
  - *Il suffit d'écrire* $\omega_0 = 1 - (\omega_1 + \cdots + \omega_n)$ *et de reporter dans l'équation donnant* r_P
  - *Est-ce que* $\omega_1, \dots, \omega_n$ *sont contraints ?*
  - *Non, car en éliminant* ω_0*, on a déjà intégré la contrainte que la somme des poids est égale à 1*

Exercice préliminaire : écriture des rentabilités de portefeuilles

- Cas 2 : $r_0 = r_M$ (portefeuille « de marché » -indice boursier). Reprendre le raisonnement précédent
  - $r_P = r_M + \omega_1(r_1 - r_M) + \cdots \omega_n(r_n - r_M)$
  - r_M *peut être remplacé par* r_T *rentabilité du portefeuille tangent et on peut choisir tous les* ω *nuls sauf* ω_i*, auquel cas* $r_P = r_T + \omega_i(r_i - r_T)$
  - *Autre cas particulier* $r_0 = r_M$*,* $r_1 = r_T$*, tous les* ω *nuls sauf* $\omega_1 = 1$*. Dans ce cas* $r_T = r_M + (r_T - r_M)$
- Interpréter la différence de rentabilité $r_M - r_f$
  - *Techniquement, c'est la rentabilité « en excès du taux sans risque »*
  - *Financièrement, considérons un investissement de* 1 *dans le portefeuille* M*, financé par un emprunt de* 1 *dans l'actif sans risque*
  - *Le montant net décaissé à la date initiale est* $1 - 1 = 0$ *(portefeuille autofinancé ou dit « d'arbitrage »*
  - *On récupère* $1 + r_M - (1 + r_f) = r_M - r_f$ *à la date future*

Exercice préliminaire : écriture des rentabilités de portefeuilles

- Interpréter la différence de rentabilité $r_M - r_T$
  - *Le raisonnement est identique à celui mené dans le cas précédent.*
  - *Au lieu d'emprunter* 1 *au taux sans risque, on vend à découvert* 1 *de portefeuille* T*, ce qui permet de financer un investissement de* 1 *dans le portefeuille* M
  - *Comme précédemment, l'investissement initial est nul*
  - *Le gain est proportionnel à* $r_M - r_T$
  - *Tout se passe comme si on recevait* r_M *et que l'on payait* r_T *ou si l'on « échangeait » les deux rentabilités*
  - *Plus précisément pour une exposition initiale sur la partie longue et sur la partie courte égale à* N*, le gain est* $N(r_M - r_T)$

Exercice 2 : Médaf et modèle multi-Bêtas

- On se place dans le cadre des hypothèses suivantes
  - *Existence d'un actif sans risque (taux* r_f*)*
  - *Possibilité d'acheter et vendre des actifs sans contraintes*
    - On note T le portefeuille tangent
    - On note M un « proxy » du portefeuille de marché (en fait n'importe quel portefeuille que l'on va dénommer « portefeuille de marché »)
    - On note r_T et r_M les rentabilités des portefeuilles précédents
  - *Interpréter (d'un point de vue financier)* $r_T - r_M$

Exercice 2 : Médaf et modèle multi-Bêtas

- Interpréter (d'un point de vue financier) $r_T - r_M = r_{T-M}$
  - *Rappel :* $r_T - r_M$ *est le gain d'un portefeuille où l'on investit* 1 *€ dans le portefeuille tangent, investissement financé par la vente à découvert de portefeuille de marché pour un montant d'* 1 *€*
  - *On parle de rentabilité d'un portefeuille d'arbitrage (arbitrage est ici à entendre par autofinancé ou mise initiale nulle)*
- Transformer le Médaf en un modèle multi-bêtas
  - *On notera* $E[r_T - r_M] = E_T - E_M = E_{T-M}$
  - *On définit* $\beta_{i,T-M} = \mathrm{Cov}(r_i, r_{T-M})/\mathrm{Var}(r_{T-M})$ *et on note* $\sigma_{T-M}^2 = \mathrm{Var}(r_{T-M})$

Exercice 2 : Médaf et modèle multi-Bêtas

- Transformer le Médaf en un modèle multi-bêtas
  - *On rappelle que* $E_i = r_f + \beta_{i,T}(E_T - r_f)$, *avec* $\beta_{i,T} = \frac{\mathrm{Cov}(r_i, r_T)}{\sigma_T^2}$
  - $r_T = r_M + r_{T-M} \Rightarrow \mathrm{Cov}(r_i, r_T) = \mathrm{Cov}(r_i, r_M) + \mathrm{Cov}(r_i, r_{T-M})$
  - *D'où* $\beta_{i,T} = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_T^2}\beta_{i,M} + \frac{\sigma_{T-M}^2}{\sigma_T^2}\beta_{i,T-M}$
  - $E_i = r_f + \beta_{i,M}\frac{\sigma_M^2}{\sigma_T^2}(E_T - r_f) + \beta_{i,T-M}\frac{\sigma_{T-M}^2}{\sigma_T^2}(E_T - r_f)$
  - *En notant* $\pi_M = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_T^2}(E_T - r_f)$ *et* $\pi_{T-M} = \frac{\sigma_{T-M}^2}{\sigma_T^2}(E_T - r_f)$
  - *On obtient* $E_i = r_f + \pi_M\beta_{i,M} + \pi_{T-M}\beta_{i,T-M}$
  - π_M, π_{T-M} *primes de risque*
- Simplifier l'écriture si r_M et r_{T-M} sont non-corrélés

Exercice 2 : Médaf et modèle multi-Bêtas

- $E_i = r_f + \pi_M\beta_{i,M} + \pi_{T-M}\beta_{i,T-M}$
- π_M, π_{T-M} si r_M et r_{T-M} sont non-corrélés ?
  - *Dans ce cas,* $\beta_{T-M,M} = \beta_{M,T-M} = 0$, *car* $\mathrm{Cov}(r_M, r_{T-M}) = 0$
  - $E_M = r_f + \pi_M\beta_{M,M} + \pi_{T-M}\beta_{M,T-M}, \Rightarrow \boldsymbol{\pi_M = E_M - r_f}$ $(\beta_{M,M} = 1)$
  - *Considérons maintenant* $E_T = r_f + \pi_M\beta_{T,M} + \pi_{T-M}\beta_{T,T-M}$
  - $\beta_{T,M} = \frac{\mathrm{Cov}(r_T, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\mathrm{Cov}(r_T - r_M, r_M) + \mathrm{Cov}(r_M, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{0 + \sigma_M^2}{\sigma_M^2} = 1$
  - $\beta_{T,T-M} = \frac{\mathrm{Cov}(r_T, r_{T-M})}{\sigma_{T-M}^2} = \frac{\mathrm{Cov}(r_{T-M}, r_{T-M}) + \mathrm{Cov}(r_M, r_{T-M})}{\sigma_{T-M}^2} = 1$
  - *Donc* $E_T = r_f + (E_M - r_f) + \pi_{T-M} = E_M + \pi_{T-M}$
  - $\boldsymbol{\pi_{T-M} = E_T - E_M = E_{T-M}}$
- Réécrire l'équation donnant les espérances des titres

Exercice 2 : Médaf et modèle multi-Bêtas

- $E_i = r_f + \pi_M\beta_{i,M} + \pi_{T-M}\beta_{i,T-M}$
- π_M, π_{T-M} si r_M et r_{T-M} sont non-corrélés ?
  - $\pi_M = E_M - r_f$, $\pi_{T-M} = E_T - E_M = E_{T-M}$
- Réécrire l'équation donnant les espérances des titres
  - $E_i = r_f + \beta_{i,M}(E_M - r_f) + \beta_{i,T-M}E_{T-M}$
  - *On obtient un modèle multi-bêtas où l'on voit apparaître un terme supplémentaire* $\beta_{i,T-M}E_{T-M}$
  - *Dans le cas particulier où* $T = M$, *on retrouve l'expression habituelle de la SML*
  - *L'expression plus générale ne suppose pas l'équilibre du marché*
  - *M peut être un portefeuille quelconque, par exemple un indice boursier, pas forcément le « portefeuille de marché »*

Exercice 3 : Médaf et modèle multi-Bêtas

- On suppose que le portefeuille tangent s'écrit à partir d'un portefeuille de marché et d'un second portefeuille
  - *Comme précédemment, « portefeuille de marché » est un portefeuille donné, par exemple un indice boursier*
- Plus précisément $r_T = (1-x)r_M + xr_A$
- Se ramener au cas de l'exercice 2

Exercice 3 : Médaf et modèle multi-Bêtas

- On suppose que le portefeuille tangent s'écrit à partir d'un portefeuille de marché et d'un second portefeuille
  - *Comme précédemment, « portefeuille de marché » est un portefeuille donné, par exemple un indice boursier*
- Plus précisément $r_T = (1-x)r_M + xr_A$
- Se ramener au cas de l'exercice 2
  - $r_T = r_M + x(r_A - r_M)$
  - $x(r_A - r_M)$ *correspond au gain obtenu en investissant x euros dans le portefeuille A, investissement financé par la vente de x euros du portefeuille M*
  - *C'est aussi portefeuille d'arbitrage*
  - *On se ramène au cas précédent en remplaçant* $x(r_A - r_M)$ *par* r_{T-M}

Exercice 3 : Médaf et modèle multi-Bêtas

- On suppose que le portefeuille de marché s'écrit à partir d'un portefeuille tangent et d'un second portefeuille
- Plus précisément $r_M = (1-x)r_T + xr_A$
- Se ramener au cas de l'exercice 2
  - $r_T = r_M + x(r_A - r_M)$
  - $x(r_A - r_M)$ *correspond au gain obtenu en investissant x euros dans le portefeuille A, investissement financé par la vente de x euros du portefeuille M*
  - *C'est aussi portefeuille d'arbitrage*
  - *On se ramène au cas précédent en remplaçant* $x(r_A - r_M)$ *par* r_{T-M}

Exercice 3 : Médaf et modèle multi-Bêtas

- On suppose que le portefeuille de marché s'écrit à partir d'un portefeuille tangent et d'un second portefeuille
  - *Comme précédemment le portefeuille de marché est arbitraire*
- Plus précisément $r_M = (1-x)r_T + xr_A$
- Se ramener au cas de l'exercice 2
  - $r_M = r_T - xr_T + xr_A = r_T + x(r_A - r_T)$
  - *Soit* $r_T = r_M + x(r_T - r_A)$
  - $x(r_T - r_A)$ *correspond au gain obtenu en investissant x euros dans le portefeuille T, investissement financé par la vente de x euros du portefeuille A*
  - *C'est aussi portefeuille d'arbitrage*
  - *On se ramène au cas précédent en remplaçant* $x(r_T - r_A)$ *par* r_{T-M}

Exercice 4 : Médaf et modèle à trois facteurs (ou plus !) de Fama et French

THE JOURNAL OF FINANCE • VOL. LI, NO. 1 • MARCH 1996

Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies

EUGENE F. FAMA and KENNETH R. FRENCH*

$$E(R_i) - R_f = b_i[E(R_M) - R_f] + s_i E(SMB) + h_i E(HML)$$

$$R_i - R_f = \alpha_i + b_i(R_M - R_f) + s_i SMB + h_i HML + \varepsilon_i.$$

Exercice 4 : Médaf et modèle à trois facteurs (ou plus !) de Fama et French

- À compléter …

Exercice 4 : existence d'une relation affine entre rentabilité espérée et Bêta quand M est sur la frontière efficiente

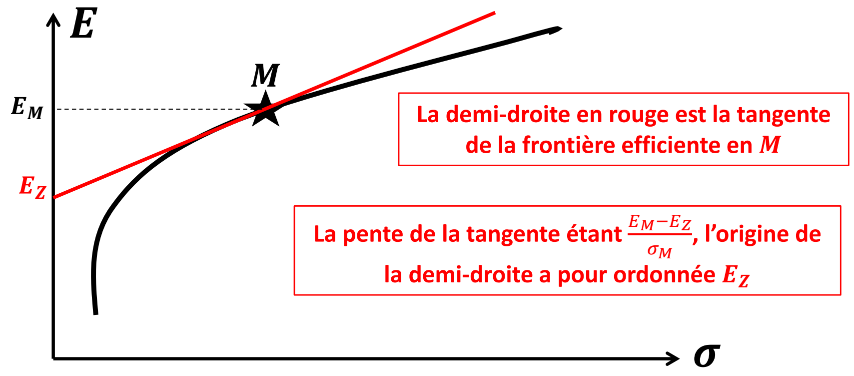
- On suppose que le portefeuille de marché M est sur la frontière efficiente
- Montrer que l'on a toujours une relation affine entre espérance de rentabilité des titres et Bêtas.
  - *On supposera que le théorème de séparation en deux fonds de Sharpe s'applique*
  - *C'est-à-dire que la frontière efficiente des actifs risqués s'obtient à partir de deux portefeuilles quelconques pris sur cette frontière.*

Exercice 4 : existence d'une relation affine entre rentabilité espérée et Bêta quand M est sur la frontière efficiente

- On suppose que le portefeuille de marché M est sur la frontière efficiente
- Montrer que l'on a toujours une relation affine entre espérance de rentabilité des titres et Bêtas.
  - *On rappelle qu'en l'absence d'actif sans risque, à l'équilibre, le portefeuille de marché est sur la frontière efficiente*
  - *C'était le point de départ du Médaf zéro-Bêta de Black*
  - *Une fois M sur la frontière efficiente, on a montré que $E_i = E_Z + \beta_{iM} \times (E_M - E_Z)$ où Z est le portefeuille zéro-Bêta.*
- Localiser le portefeuille Z sur la frontière efficiente des actifs risqués

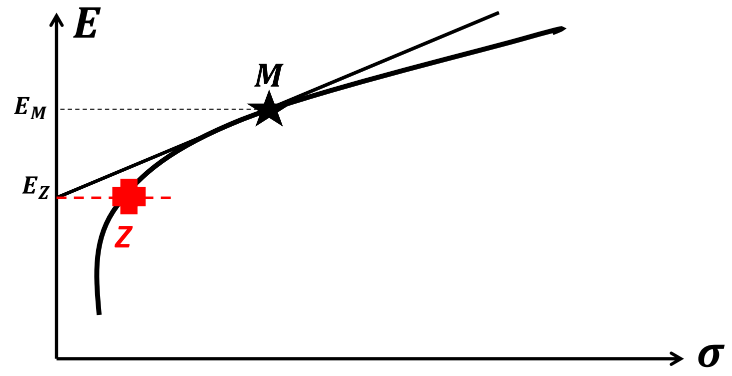
Exercice 4 : existence d'une relation affine entre rentabilité espérée et Bêta quand M est sur la frontière efficiente

- Localiser le portefeuille Z (zéro-Bêta) sur la frontière efficiente des actifs risqués
  - *On reprend à nouveau la démonstration de Black*
  - *La pente de la frontière efficiente en M est égale à* $\frac{E_M - E_Z}{\sigma_M}$



Exercice 4 : existence d'une relation affine entre rentabilité espérée et Bêta quand M est sur la frontière efficiente

- Localiser le portefeuille Z (zéro-Bêta) sur la frontière efficiente des actifs risqués
  - *Connaissant* E_Z*, on peut alors localiser Z, sur la frontière efficiente des actifs risqués*



Exercice 4 : existence d'une relation affine entre rentabilité espérée et Bêta quand M est sur la frontière efficiente

- Que se passe-t-il s'il existe un actif sans risque (de taux r_f) ?
  - *La relation* $E_i = E_Z + \beta_{iM} \times (E_M - E_Z)$ *ne repose pas sur l'existence d'un actif sans risque*
  - *Mais si un tel actif existe, son Bêta est nul*
  - *D'où* $r_f = E_Z$
  - *On retrouve la formule usuelle* $E_i = r_f + \beta_{iM} \times \left(E_M - r_f\right)$
  - *En se reportant au graphique du transparent précédent, on constate que M est le portefeuille tangent*
  - *Remarque : En l'absence d'actif sans risque, on ne peut pas parler de portefeuille tangent*