Cours de Finance

Bêtas (définitions, décomposition du risque), droite caractéristique (estimation des bêtas)

S&P500 vs high beta stocks

$$\boldsymbol{\beta_i} = \frac{\mathrm{Cov}(\boldsymbol{r_i}, \boldsymbol{r_P})}{\mathbf{Var}[\boldsymbol{r_P}]}$$

$$\boldsymbol{\beta_i} = \rho_{iP} \frac{\sigma_i}{\sigma_P}$$

Bêta et risque de marché

- Objectifs pédagogiques de la séance
  - *Connaître les définitions et les principaux résultats*
  - *Savoir les appliquer pour les exercices à venir*
  - *Développer les intuitions économiques*
  - *Démonstrations et éléments mathématiques à voir ensuite, sous forme de travail personnel.*

Bêta et risque

- Notion de Bêta
  - *Intuition*
  - *Décomposition du risque total d'un titre en risque de marché et risque idiosyncratique*
  - *Relation avec le coefficient de corrélation linéaire*
  - *Bêtas d'un actif sans risque, du portefeuille de référence, d'un portefeuille de deux titres*
- Droite « caractéristique » d'un titre
  - *Calcul des bêtas à partir d'historiques de cours*
  - *Bêtas calculés de manière glissante (rolling regressions)*
- Dynamique des bêtas
  - *Retour à la moyenne ?*

La notion de Bêta

- r_i : rentabilité (aléatoire) d'un titre i (ou d'un portefeuille de titres)
- r_P : rentabilité d'un portefeuille de titres P (ou d'un indice boursier évoluant comme un portefeuille de titres)
- Pour simplifier l'exposé, on va supposer que l'on considère des **rentabilités r_i et r_p centrées**
- C'est-à-dire que l'on va considérer par la suite $r_i - E[r_i]$ et $r_P - E[r_P]$
  - *On remarque que* $E[r_i - E[r_i]] = E[r_i] - E[r_i] = 0$
  - *D'où le terme « centré »*
  - *Par abus de langage, on continue à noter* r_i *et* r_p *les rentabilités centrées*

La notion de Bêta

- Bêta du titre i :
  - *Noté* β_i
  - ***Nombre** qui indique de combien, **en moyenne**, la rentabilité du titre i augmente quand la rentabilité du portefeuille augmente :*
  - *Si le Bêta du titre* i *est égal à* 2 *et si la rentabilité du portefeuille P augmente de* 1%, *la rentabilité du titre i augmente **en moyenne** de* $\mathbf{2} \times 1\% = 2\%$
  - *Si le Bêta du titre i est égal à* 0,8, *rentabilité du titre i augmente **en moyenne** de* $\mathbf{0,8} \times 1\% = 0{,}8\%$
  - *En toute rigueur, on aurait dû indiquer qu'il s'agit du Bêta du titre* i *par rapport au portefeuille P*

La notion de bêta (suite)

- Le concept de bêta implique une **proportionnalité** de la relation (en moyenne) entre les rentabilités
  - *Exemple : Bêta du titre i égal à* 2
  - *Si la rentabilité du portefeuille P augmente de* 1%, *la rentabilité du titre i augmente **en moyenne** de* $\mathbf{2} \times 1\% = 2\%$
  - *Si la rentabilité du portefeuille P augmente de* 5%, *la rentabilité du titre i augmente **en moyenne** de* $\mathbf{2} \times 5\% = 10\%$
  - *Si la rentabilité du portefeuille P diminue de* 1%, *la rentabilité du titre i diminue **en moyenne** de* $\mathbf{2} \times 1\% = 2\%$

La notion de bêta (suite)

- Comment expliciter les concepts de « en moyenne » et de proportionnalité ? $\boldsymbol{r_i = \beta_i \times r_P + \varepsilon_i}$
- Proportionnalité liée au terme $\beta_i \times r_P$
  - *Si on laisse de côté le terme* ε_i *qui sera nul en moyenne,* $r_i = \beta_i \times r_P$ *(fonction linéaire de* r_P*)*
  - *Et non pas, par exemple,* $r_i = \beta_i \times \left((1 + r_P)^{12} - 1\right)$
- La rentabilité r_i augmente en moyenne de $\beta_i \times r_P$, si « en moyenne » ε_i est égal à zéro :
  - $E[\varepsilon_i] = 0$, *où* $E[\varepsilon_i]$ *est l'espérance de la variable aléatoire* ε_i *(parfois appelée « bruit »), est nulle.*
  - *Il faut que **pour un niveau quelconque de*** $\boldsymbol{r_P}$, r_i *augmente en moyenne de* $\beta_i r_P$
  - *Donc, l'espérance (moyenne) de* ε_i *doit être nulle **pour tout*** $\boldsymbol{r_P}$

La notion de bêta (suite)

- L'espérance (moyenne) de ε_i doit être nulle **pour tout** $\boldsymbol{r_P}$
  - *Cela fait appel à la notion de moyenne (ou espérance) conditionnelle de ε_i « étant donné » (« sachant » par abus de langage) r_P*
- $E[\varepsilon_i|r_P]$ **: moyenne conditionnelle**
    - voir rappels de probabilités (transparents suivants)
  - *La condition s'écrit alors* $E[\varepsilon_i|r_P] = 0$
  - *On peut **démontrer** que cela **implique** que la covariance entre ε_i et r_P est nulle :* $\text{Cov}(\varepsilon_i, r_P) = 0$
  - *Et que le coefficient de corrélation linéaire entre ε_i et r_P est nul car* $\rho_{iP} = \frac{\text{Cov}(\varepsilon_i, r_P)}{\sigma(\varepsilon_i) \times \sigma(r_P)} = 0$

La notion de bêta (suite)

- Décomposition des rentabilités $\boldsymbol{r_i = \beta_i \times r_P + \varepsilon_i}$
  - *Remarque : si les variables aléatoires r_P et ε_i sont **indépendantes**, alors la condition $E[\varepsilon_i|r_P] = 0$ est vérifiée*
  - *Mais la réciproque n'est pas vraie*
- Repartons de la condition $\text{Cov}(\varepsilon_i, r_P) = 0$
  - $\text{Cov}(\varepsilon_i, r_P) = \text{Cov}(r_i - \beta_i r_P, r_P) = \text{Cov}(r_i, r_P) - \beta_i \text{Cov}(r_P, r_P) = \text{Cov}(r_i, r_P) - \beta_i \text{Var}[r_P] = 0$
- $\boldsymbol{\beta_i} = \frac{\textbf{Cov}(\boldsymbol{r_i, r_P})}{\textbf{Var}[\boldsymbol{r_P}]}$
- $\boldsymbol{\beta_i} = \rho_{iP} \frac{\sigma_i}{\sigma_P}$
  - *Car* $\text{Cov}(r_i, r_P) = \rho_{iP}\sigma_i\sigma_P$ *et* $\text{Var}[r_P] = \sigma_P^2$

Deux expressions à connaître du Bêta d'un titre

Bêta d'un actif sans risque, du portefeuille de marché P, d'un portefeuille de deux titres

- *Actif sans risque* $\boldsymbol{\beta_f} = \frac{\textbf{Cov}(\boldsymbol{r_f, r_P})}{\boldsymbol{\sigma_P^2}} = \mathbf{0}$
- *Portefeuille de marché P:* $\boldsymbol{\beta_P} = \frac{\textbf{Cov}(\boldsymbol{r_P, r_P})}{\boldsymbol{\sigma_P^2}} = \frac{\boldsymbol{\sigma_P^2}}{\boldsymbol{\sigma_P^2}} = \mathbf{1}$
- *Bêta d'un portefeuille de titres*
- $\boldsymbol{r = x_1 r_1 + (1 - x_1) r_2}$
- $\boldsymbol{\beta} = \frac{\textbf{Cov}(\boldsymbol{x_1 r_1 + (1 - x_1) r_2, r_P})}{\boldsymbol{\sigma_P^2}}$
- $\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{x_1} \times \textbf{Cov}(\boldsymbol{r_1, r_P}) + (\mathbf{1} - \boldsymbol{x_1})\textbf{Cov}(\boldsymbol{r_2, r_P})}{\boldsymbol{\sigma_P^2}}$

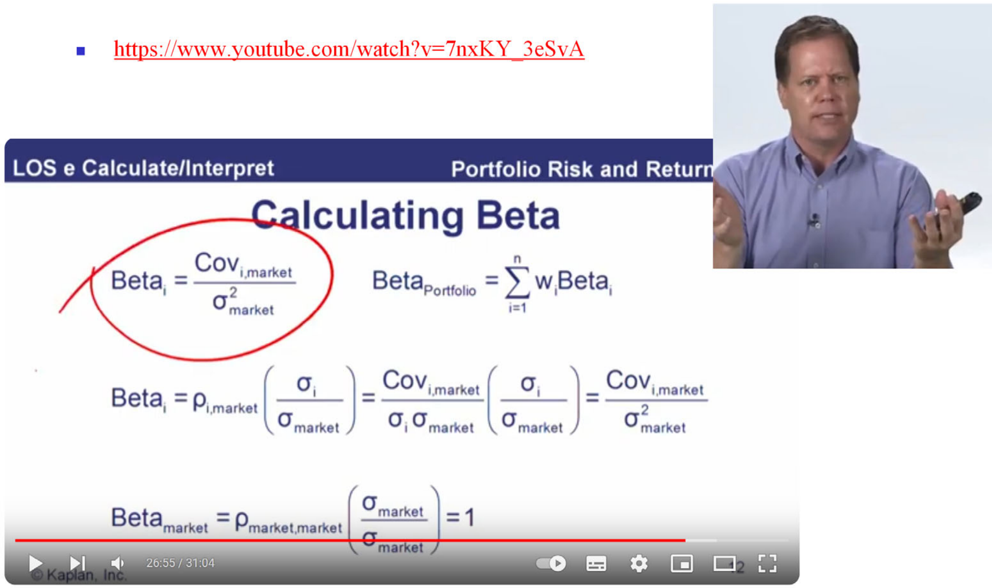
$$\beta = \boldsymbol{x_1}\beta_1 + (1 - \boldsymbol{x_1})\beta_2$$

Bêta d'un portefeuille : moyenne pondérée des bêtas des titres le constituant.

Coefficients de pondération : fraction de la richesse investie dans chaque titre

Bêta : le coin des « apprentis praticiens »

- https://www.youtube.com/watch?v=7nxKY_3eSvA



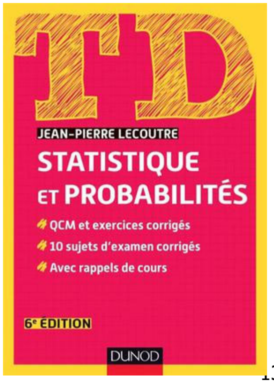
CFa Level I. Reading 40-1. Module 40 1 Systematic Risk and Beta

Rappel : cours de probabilité niveau L (Jean-Pierre Lecoutre)

Cet ouvrage présente de façon claire et pédagogique les principaux outils de la statistique et des probabilités. Chaque chapitre s'organise en quatre temps forts :une introduction présentant la problématique abordée, assortie d'objectifs de connaissances et des notions à maîtriser ;un cours proposant de nombreux théorèmes, applications et définitions ;une page L'essentiel", mentionnant les points clés à retenir dans chaque chapitre ;des exercices de difficulté progressive et leurs corrigés détaillés.Avec, en fin d'ouvrage, les principales tables statistiques et un index des notions clés."

Ce manuel de cours est destiné principalement aux étudiants de la Licence économie et gestion mais peut être utile à toute personne souhaitant connaître et surtout utiliser les principales méthodes de la statistique inférentielle. Il correspond au programme de probabilités et statistique généralement enseigné dans les deux premières années de Licence (L1 et L2). Cette 7e édition s'est enrichie d'exercices nouveaux. Le niveau mathématique requis est celui de la première année de Licence, avec quelques notions (séries, intégrales multiples...) souvent enseignées seulement en deuxième année.

- https://univ-scholarvox-com.ezpaarse.univ-paris1.fr/book/88941530#
- Disponible également sur Kindle
- Manuel de TD avec corrigés disponible
- https://univ-scholarvox-com.ezpaarse.univ-paris1.fr/catalog/book/docid/88826941?searchterm=Lecoutre,%20Jean-Pierre



Rappel : cours de probabilité niveau L (Jean-Pierre Lecoutre)

- À voir : les treize pages ci-dessous, qui traitent du cas bivarié
  - *En priorité (si besoin), les trois pages associées aux sections 1.1 à 1.4 qui traitent du cas discret (le plus simple)*
  - *Cela suppose que les notions antérieures sur le cas univarié aient été assimilées*

Rappel : cours de probabilité niveau L (Jean-Pierre Lecoutre)

- Loi d'un couple de v.a. discrètes, loi marginale

1.2 Lois marginales

À la loi d'un couple sont associées deux lois marginales qui sont les lois de chacun des éléments du couple pris séparément, définies par l'ensemble des valeurs possibles et les probabilités associées obtenues par sommation, soit :

$$P_X(X = x_i) = \sum_{j \in J} P_{(X,Y)}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j \in J} p_{ij} = p_{i.}$$

$$P_Y(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P_{(X,Y)}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij} = p_{.j}$$

Si la loi du couple est présentée dans un tableau, ces lois sont obtenues dans les marges, par sommation de ligne ou de colonne.

Y \ X	x_i	
y_j	p_{ij} → ↓	$p_{.j}$ ↓
	$p_{i.}$ →	1

Rappel : cours de probabilité niveau L (Lecoutre)

- Loi conditionnelle de X sachant Y : cas discret

1.3 Lois conditionnelles

On peut également associer deux lois conditionnelles à la loi d'un couple, c'est-à-dire la loi d'une variable, l'autre ayant une valeur fixée (loi dans une ligne ou dans une colonne donnée). Par exemple, pour $Y = y_j$ fixé, la loi conditionnelle de X est définie par l'ensemble des valeurs possibles et les probabilités associées :

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} = p_i^j$$

on vérifie que c'est bien une loi de probabilité sur $\Omega_X = \{x_i ; i \in I\}$:

$$\sum_{i \in I} p_i^j = \frac{1}{p_{.j}} \sum_{i \in I} p_{ij} = 1$$

- Dans cette présentation, il y a en fait autant de lois de probabilité conditionnelles que de valeurs y_j
- On peut de même définir les lois de Y sachant X

Rappel : cours de probabilité niveau L (Lecoutre)

- Espérance conditionnelle (cas discret)

1.4 Moments conditionnels

Aux lois conditionnelles sont associés des moments conditionnels, comme par exemple l'espérance conditionnelle de Y pour $X = x_i$ fixé, qui est l'espérance de la loi définie par les couples $\left\{ \left(y_j, p_j^i\right) ; j \in J \right\}$, soit :

$$E\left(Y|X = x_i\right) = \sum_{j \in J} y_j P\left(Y = y_j | X = x_i\right) = \sum_{j \in J} y_j p_j^i$$

- L'espérance conditionnelle (sachant X) d'une v.a. Y est l'espérance de Y pour « la » loi conditionnelle de Y sachant X
- Dans le cas qui nous intéresse (X, Y) sont deux rentabilités
- $E[Y|X = x_i] = a + \beta_{Y|X} x_i$: Relation affine

Rappel : cours de probabilité niveau L (Lecoutre)

- Si $E[Y|X = x_i] = a + \beta_{Y|X} x_i$, on peut définir $E[Y|X]$ comme $a + \beta_{Y|X} X$
- Ci-dessous, on montre que $E\big[E[Y|X]\big] = E[Y]$
  - *« L'espérance de l'espérance conditionnelle est l'espérance »*
- Dans notre cas (linéaire),$E[Y] = E\big[a + \beta_{Y|X} X\big] = a + \beta_{Y|X} E[X]$

Notons que $E(Y|X)$ est une fonction de X, donc une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est définie par l'ensemble des valeurs possibles, soit ici $\left\{E\left(Y|X = x_i\right) ; i \in I\right\}$, et les probabilités associées $p_{i.} = P(X = x_i)$. On peut donc calculer la valeur moyenne de cette v.a., soit :

$$\begin{aligned} E\left[E\left(Y|X\right)\right] &= \sum_{i \in I} p_{i.} E\left(Y|X = x_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} p_{i.} \sum_{j \in J} y_j P\left(Y = y_j | X = x_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} p_{i.} \sum_{j \in J} y_j p_j^i = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} y_j p_{i.} \frac{p_{ij}}{p_{i.}} = \sum_{j \in J} y_j \sum_{i \in I} p_{ij} \\ &= \sum_{j \in J} p_{.j} y_j \\ &= E\left(Y\right) \end{aligned}$$

Exercices de probabilité niveau L (Jean-Pierre Lecoutre)

Loi conditionnelle discrète

15. On jette deux dés à six faces numérotées de 1 à 6 et on note X la v.a. qui représente la somme des deux chiffres obtenus et Y la v.a. qui est égale au plus grand de ces deux chiffres.

a) Déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y) puis calculer $E(X)$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes?

b) Déterminer la loi conditionnelle de Y pour $X = 6$, puis son espérance $E(Y|X = 6)$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Les couples ordonnés (x_1, x_2) de résultats associés aux deux dés ont la même probabilité 1/36. Pour chacun d'eux il faut calculer la somme $x_1 + x_2$, qui donnera la valeur de X, et $\max\{x_1, x_2\}$ qui sera celle de Y, puis regrouper les couples de valeurs identiques ; leur nombre sera la probabilité, en 1/36-ème du couple obtenu. La loi conditionnelle est obtenue à partir de la colonne du tableau associée à $X = 6$, en divisant les probabilités de cette colonne par la probabilité marginale $P(X = 6)$.

Exercices de probabilité niveau L (Jean-Pierre Lecoutre)

Espérance conditionnelle

16. La loi de probabilité du couple (X, Y) est indiquée dans le tableau suivant, les valeurs étant exprimées en dixièmes :

Y \ X	1	2	3	4
1	1	1	2	1
2	0	1	1	0
3	1	0	0	2

Déterminer la loi de probabilité de la v.a. $E(Y|X)$, puis calculer son espérance et la comparer avec la valeur de $E(Y)$.

Analyse de l'énoncé et conseils. L'expression $E(Y|X)$ est bien celle d'une variable aléatoire puisqu'il s'agit d'une fonction de X, qui est elle-même une v.a. Pour une réalisation ω telle que X prend la valeur $X(\omega) = x$, cette variable prend la valeur de la régression en x, c'est-à-dire que $E(Y|X)(\omega) = E(Y|X = x)$. Il faut donc calculer les différentes valeurs de cette fonction de régression, qui seront les valeurs possibles de cette v.a. On peut ensuite calculer l'espérance de cette v.a. par rapport à la loi de X.

Lien avec le monde professionnel ?

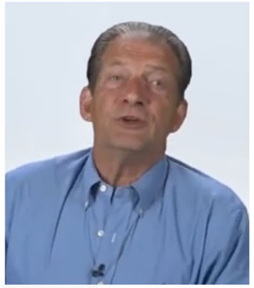
- CFA Level I. Reading 9. Module 9 2 Conditional Expectations, Correlation
  - *Remarque : ici, on conditionne par rapport à des états du monde des affaires (scénarios) et pas par le niveau de rentabilité d'un indice*
  - *https://www.youtube.com/watch?v=jrNVQYzyJps*

Using Conditional Expectations

P(tariff) = 40% P(no tariff) = 60%

E(return|tariff) = 15%
E(return|no tariff) = 5%

E(return) = 0.4(0.15) + 0.6(0.05) = 9%



Lien avec le monde professionnel ?

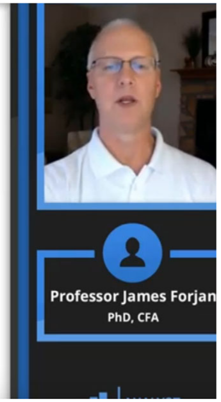
- Application de la propriété $E[Y] = E\big[E[Y|X]\big]$ pour candidats analystes financiers (CFA level 1)
  - *Remarque : Le conditionnement par rapport au niveau de rentabilité d'un indice est traité dans la partie « régression linéaire et Bêtas)*

LOS **Explain the use of conditional expectation in investment applications**

- Conditional expectation in the context of investments refers to the expected value of an investment given a certain set of real world events that are relevant to that particular investment.
- The expected value of an investment is affected by the actions of competitors, governments, and other financial institutions.
- Continuous revision of expected values is important in the face of changing investment conditions.
- The total probability rule is very useful when determining the unconditional expected value of an investment.
- The unconditional expected value, E(X), is the sum of conditional expected values. Thus,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \{E(X \mid Si)P(Si)\}$$

where $S_1, S_2, \ldots, S_n$ are mutually exclusive and exhaustive scenarios or events.



Lien avec le monde professionnel ?

- Question CFA level 1
  - *https://analystprep.com/cfa-level-1-exam/quantitative-methods/conditional-expectations-investments/*

There is a 20% chance that the government will impose a tariff on imported cars. A company that assembles cars locally expects returns of 14% if the tariff is imposed and returns of 11% if the tariff is not imposed. Determine the (unconditional) expected return.

A. 11.6%

B. 12.8%

C. 12.5%

Solution

The correct answer is A.

The unconditional expected return will be the sum of:

(1) The expected return **given** no tariff times the probability that a tariff will not be imposed, and

(2) The expected return **given** tariff times the probability that the tariff will be imposed. Thus,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum \{E(X|S_i)\,P(S_i)\} \\ &= 0.11(0.8) + 0.14(0.2) \\ &= 0.116 \text{ or } 11.6\% \end{aligned}$$

Lien avec le monde professionnel ?

- Programme CFA level 2, partie méthodes quantitatives

Quantitative Methods

Lien avec le monde professionnel ?

- Programme CFA level 2, partie méthodes quantitatives

Lien avec le monde professionnel ?

- Programme CFA level 2, partie méthodes quantitatives

Lien avec le monde professionnel ?

- Programme CFA level 2, partie méthodes quantitatives

Lien avec le monde professionnel ?

- Programme CFA level 2, partie méthodes quantitatives

- + partie « big data » (learning module 7)

Décomposition du risque total

- Décomposition de la rentabilité du titre *i*

$$r_i = E_i + \beta_i \times (r_P - E_P) + \varepsilon_i$$

- Décomposition du risque associé au titre *i*

$$\underbrace{\sigma_i^2}_{\text{risque total}} = \underbrace{\beta_i^2 \times \sigma_P^2}_{\text{risque du marché } P} + \underbrace{\text{Var}[\varepsilon_i]}_{\text{risque spécifique}}$$

Décomposition du risque total

- Décomposition de la rentabilité du titre *i*

$$r_i = E_i + \beta_i \times (r_P - E_P) + \varepsilon_i$$

- Décomposition du risque associé au titre *i*

$$\underbrace{\sigma_i^2}_{\text{risque total}} = \underbrace{\beta_i^2 \times \sigma_P^2}_{\text{risque du marché } P} + \underbrace{\text{Var}[\varepsilon_i]}_{\text{risque spécifique}}$$

$\boldsymbol{\sigma_i}$ écart-type de $\boldsymbol{r_i}$, $\boldsymbol{\sigma_P}$ écart-type de $\boldsymbol{r_P}$,
$\boldsymbol{\beta_i}$ Bêta du titre i

Décomposition du risque total

- Décomposition de la rentabilité du titre *i*

$$r_i = E_i + \beta_i \times (r_P - E_P) + \varepsilon_i$$

- Décomposition du risque associé au titre *i*

$$\underbrace{\sigma_i^2}_{\text{risque total}} = \underbrace{\beta_i^2 \times \sigma_P^2}_{\text{risque du marché } P} + \underbrace{\text{Var}[\varepsilon_i]}_{\text{risque spécifique}}$$

σ_i écart-type de R_i, σ_P écart-type de r_P,
β_i Bêta du titre i (par rapport au marché P)

Lien entre $\boldsymbol{\beta_i}$ et coefficient de corrélation linéaire :

$$\boldsymbol{\beta_i = \frac{\rho_{iP} \times \sigma_i}{\sigma_P}}$$

Décomposition du risque total

- Décomposition de la rentabilité et du risque du titre *i*

$$r_i = E_i + \beta_i \times (r_P - E_P) + \varepsilon_i$$

- Décomposition du risque associé au titre *i*

$$\underbrace{\sigma_i^2}_{\text{risque total}} = \underbrace{\beta_i^2 \times \sigma_P^2}_{\text{risque du marché } P} + \underbrace{\text{Var}[\varepsilon_i]}_{\text{risque spécifique}}$$

Risque spécifique $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ non corrélé au risque du portefeuille $\boldsymbol{P}$

Décomposition du risque total

$$r_i = E_i + \beta_i \times (r_P - E_P) + \varepsilon_i$$

- D'où :

$$\mathrm{Var}[r_i] = \mathrm{Var}[E_i + \beta_i \times (r_P - E_P) + \varepsilon_i] = \mathrm{Var}[\beta_i r_P + \varepsilon_i]$$

- On a utilisé $\mathbf{Var}[\boldsymbol{X} + \boldsymbol{a}] = \mathbf{Var}[\boldsymbol{X}]$ si $\boldsymbol{a}$ est constant.

$$\mathrm{Var}[\beta_i r_P + \varepsilon_i] = \underbrace{\mathrm{Var}[\beta_i r_P]}_{=\beta_i^2 \times \mathrm{Var}[r_P]} + 2 \underbrace{\mathrm{Cov}(\beta_i r_P, \varepsilon_i)}_{=\beta_i \times \mathrm{Cov}(r_P, \varepsilon_i) = 0} + \mathrm{Var}[\varepsilon_i]$$

$$\boxed{\underbrace{\sigma_i^2}_{\text{risque total}} = \underbrace{\beta_i^2 \times \sigma_P^2}_{\text{risque du marché } P} + \underbrace{\mathrm{Var}[\varepsilon_i]}_{\text{risque spécifique}}}$$

Spécificités des risques spécifiques

Risque spécifique non corrélé au risque du marché P :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, r_P) = 0}$$

Les risques spécifiques peuvent-ils être corrélés ?

$$\boxed{\boldsymbol{i \neq j}, \mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon_i}, \boldsymbol{\varepsilon_j}) = \mathbf{0}\ ?}$$

- *Prenons l'exemple de Peugeot et de Renault*
- *Du fait des risques spécifiques à l'industrie automobile …*
- ***Ils sont positivement corrélés***

- Ne pas confondre avec l'absence de corrélation entre risque spécifique et risque du marché P

Calculer des Bêtas à partir d'historiques de rentabilités

- $\boldsymbol{\beta_i} = \frac{\mathrm{Cov}(r_i, r_P)}{\mathrm{Var}[r_P]} = \rho_{iP} \frac{\sigma_i}{\sigma_P}$. Comment calculer $\rho_{iP}, \sigma_i, \sigma_P$?
- Supposons que nous ayons des séries chronologiques de rentabilités du titre i et du portefeuille P
- $\boldsymbol{r_{i,t}}$ représente la rentabilité du titre i à la date t
  - Il peut aussi s'agir de la rentabilité d'un portefeuille de titres
- $\boldsymbol{r_{P,t}}$ représente la rentabilité du portefeuille P à la date t
  - *P: Typiquement un indice boursier pondéré par la capitalisation boursière : CAC40, indice S&P 500, Russell 3000 Index aux États-Unis*
  - *Russell 3000 : Indice large, 98% de la capitalisation boursière US*

Calculer des Bêtas à partir d'historiques de rentabilités

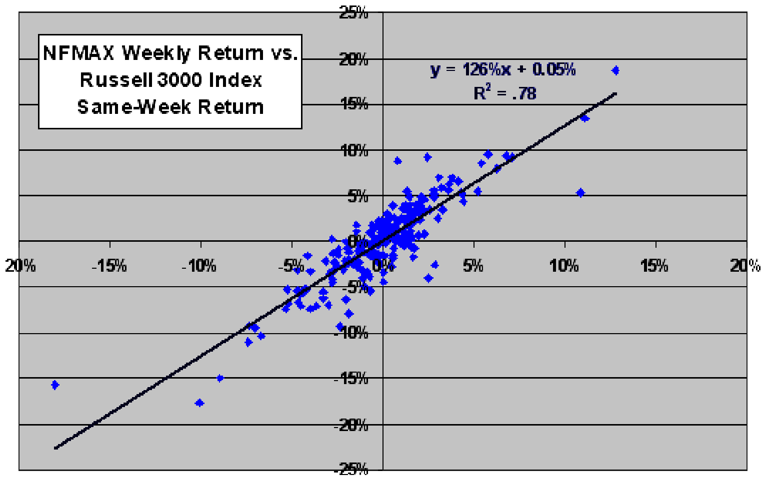
- Méthode 1 : on utilise les résultats déjà vus
  - Espérance sous la mesure de probabilité empirique = moyenne des rentabilités passées
  - $E[\tilde{r}_t] = \frac{1}{252} \times (r_{t-1} + \cdots + r_{t-252})$
  - $\mathrm{Var}[\tilde{r}_t] = E[(\tilde{r}_t - E[\tilde{r}_t])^2]$
- $E[\tilde{r}_{i,t}] = \bar{r}_i = \frac{1}{252} \times (r_{i,t-1} + \cdots + r_{i,t-252})$
- $E[\tilde{r}_{P,t}] = \bar{r}_P = \frac{1}{252} \times (r_{P,t-1} + \cdots + r_{P,t-252})$
- $\mathrm{Var}[\tilde{r}_{P,t}] = \frac{1}{252} \times \left((r_{P,t-1} - \bar{r}_P)^2 + \cdots + (r_{P,t-252} - \bar{r}_P)^2 \right)$
- $\mathrm{Cov}[\tilde{r}_{i,t}, \tilde{r}_{P,t}] = \frac{1}{252} \times \left((r_{i,t-1} - \bar{r}_i)(r_{P,t-1} - \bar{r}_P) + \cdots + (r_{i,t-252} - \bar{r}_i)(r_{P,t-252} - \bar{r}_P) \right)$
- $\beta_{iP} = \mathrm{Cov}[\tilde{r}_{i,t}, \tilde{r}_{P,t}] / \mathrm{Var}[\tilde{r}_{P,t}]$

La droite caractéristique d'un titre

- On considère un plan où les valeurs de r_P sont en abscisses et les valeurs de r_i en ordonnées.
- Un point dans le plan est associé à chaque date t
- Coordonnées des points dans le plan : $(r_{P,t}, r_{i,t})$
- Dans le graphique qui suit :
  - *$r_{i,t}$: rentabilités **hebdomadaires** du fonds Navellier Fundamental A (NFMAX, fonds géré par Navellier)*
  - *$r_{P,t}$: Russell 3000 Index*
  - *Données de 2005 à 2009, soit 60 points*

La notion de Bêta

- Rentabilités du Russell 3000 Index Navellier en abscisses et de Fundamental A (NFMAX, fonds géré par Navellier) en ordonnées

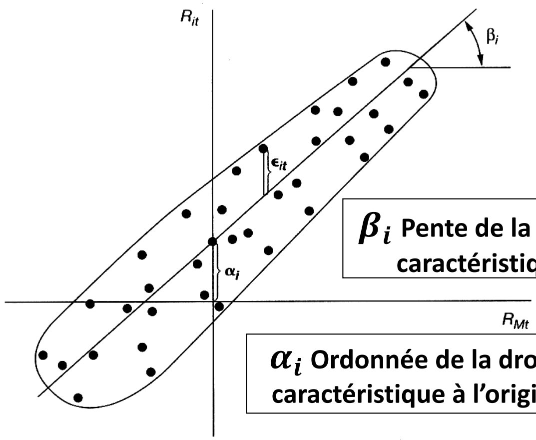


Droite caractéristique d'un titre, méthode des moindres carrés

- Droite caractéristique du titre ***i*** : $\boldsymbol{y_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{P,t}}$

Graphique 3.6 – *Droite caractéristique d'un titre* i

À chaque point est associé une date *t*
En abscisse, la rentabilité du portefeuille *P* à cette date *t* : $\boldsymbol{r_{P,t}}$
En ordonnée, la rentabilité du titre *i* à cette date *t* : $\boldsymbol{r_{i,t}}$



$\boldsymbol{\beta_i}$ Pente de la droite caractéristique

$\boldsymbol{\alpha_i}$ Ordonnée de la droite caractéristique à l'origine

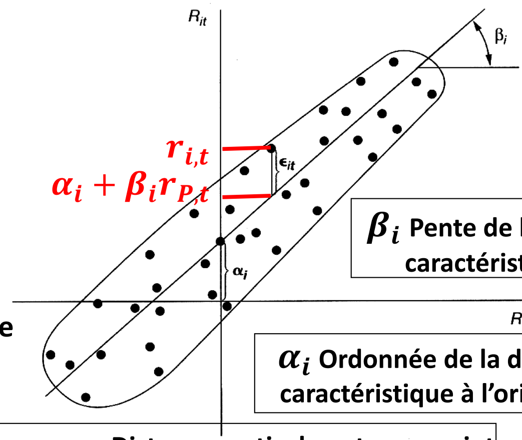
Droite caractéristique d'un titre, méthode des moindres carrés

- Droite caractéristique du titre ***i*** : $\boldsymbol{y_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{P,t}}$

Graphique 3.6 – *Droite caractéristique d'un titre* i

À chaque point est associé une date *t*
En abscisse, la rentabilité du portefeuille de marché à cette date *t* : $\boldsymbol{r_{M,t}}$
En ordonnée, la rentabilité du titre *i* à cette date *t* : $\boldsymbol{r_{i,t}}$

La droite caractéristique du titre est obtenu par un ajustement linéaire au nuage de points selon la méthode des moindres carrés



$\boldsymbol{\beta_i}$ Pente de la droite caractéristique

$\boldsymbol{\alpha_i}$ Ordonnée de la droite caractéristique à l'origine

$\varepsilon_{i,t} = r_{i,t} - (\alpha_i + \beta_i r_{P,t})$ **Distance verticale entre un point et la droite caractéristique**

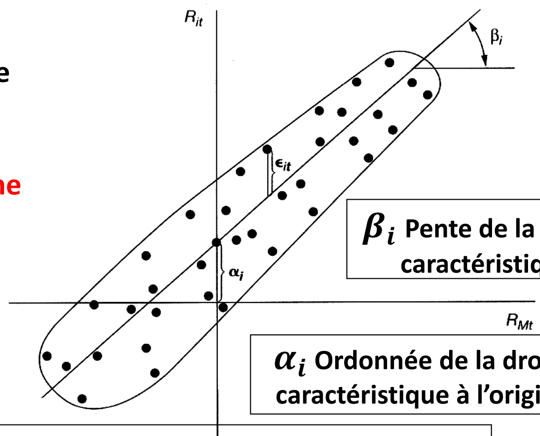
Droite caractéristique d'un titre, méthode des moindres carrés

- Droite caractéristique du titre ***i*** : $\boldsymbol{y_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{P,t}}$

Graphique 3.6 – *Droite caractéristique d'un titre* i

La droite caractéristique du titre est obtenu par un ajustement linéaire au nuage de points selon la <u>méthode des moindres carrés</u> (MCO) :
$\boldsymbol{\alpha_i}$ et $\boldsymbol{\beta_i}$ minimisent la somme des carrés des écarts $\boldsymbol{\varepsilon_{i,t}}$:

$$\sum_t \left(r_{i,t} - (\alpha_i + \beta_i r_{P,t})\right)^2$$



$\boldsymbol{\beta_i}$ Pente de la droite caractéristique

$\boldsymbol{\alpha_i}$ Ordonnée de la droite caractéristique à l'origine

$\varepsilon_{i,t} = r_{i,t} - (\alpha_i + \beta_i r_{P,t})$ **Distance verticale entre un point et la droite caractéristique**

Estimation par la méthode des moindres carrés

- $r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{P,t} + \varepsilon_{i,t}$
- α_i, β_i constantes, β_i : bêta du titre i
- Méthode des moindres carrés ordinaires (MCO)
- On cherche α_i, β_i tels que la somme des écarts quadratiques $\left(r_{i,t-h} - \alpha_i - \beta_i r_{P,t-h}\right)^2$ soit minimale
- $\alpha_i + \beta_i r_{P,t}$ est une prévision linéaire de $r_{i,t}$ sachant $r_{P,t}$
- $\varepsilon_{i,t-h} = r_{i,t} - \alpha_i - \beta_i r_{P,t}$: erreur de prévision à la date t
- $\min_{\alpha_i,\beta_i} \sum_h \left(r_{i,t-h} - \alpha_i - \beta_i r_{P,t-h}\right)^2$
  - *Périodes glissantes :* $h = 1, \dots, 252$

Estimation par la méthode des moindres carrés

- $\min_{\alpha_i,\beta_i} \sum_h \left(r_{i,t-h} - \alpha_i + \beta_i r_{P,t-h}\right)^2$
- Conditions du premier ordre : dérivées du critère par rapport à $\alpha_i, \beta_i = 0$
  - *Dérivée par rapport à* $\alpha_i = 0$
  - $\sum_h \left(r_{i,t-h} - \alpha_i - \beta_i r_{P,t-h}\right) = 0 \Rightarrow \alpha_i = \bar{r}_i - \beta_i \bar{r}_P$
  - *Il faut alors minimiser* $\sum_h \left(r_{i,t-h} - \bar{r}_i + \beta_i\left(r_{P,t-h} - \bar{r}_P\right)\right)^2$
  - *Dérivée par rapport à* $\beta_i = 0 \Rightarrow$
  - $\beta_i = \left(\frac{1}{252}\sum_{h=1}^{252}\left(r_{i,t-h} - \bar{r}_i\right)\left(r_{P,t-h} - \bar{r}_P\right)\right) / \left(\frac{1}{252}\sum_{h=1}^{252}\left(r_{P,t-h} - \bar{r}_P\right)^2\right)$

Calcul des bêtas à partir d'historiques de cours

- $\beta_i = \left(\frac{1}{252}\sum_{h=1}^{252}\left(r_{i,t-h} - \bar{r}_i\right)\left(r_{P,t-h} - \bar{r}_P\right)\right) / \left(\frac{1}{252}\sum_{h=1}^{252}\left(r_{P,t-h} - \bar{r}_P\right)^2\right)$
  - $\bar{r}_i$ *et* $\bar{r}_P$ *sont les rentabilités moyenne du titre i et du marché sur la période d'estimation, ici de longueur T*
  - $\bar{r}_i = \frac{1}{T}\sum_{h=1}^{252} r_{i,t-h}$
  - β_i, *Bêta ex-post (a posteriori) du titre i, déterminé à partir des rentabilités passées sur la période* $[t-1; t-252]$
    - $\frac{1}{252}\sum_h \varepsilon_{i,t-h} = 0$ le terme résiduel a une moyenne nulle
    - $\frac{1}{252}\sum_h \varepsilon_{i,t-h}\left(r_{M,t-h} - \bar{r}_P\right) = 0$ pas de corrélation entre résidu et rentabilité du portefeuille de marché

Calcul des bêtas à partir d'historiques de cours

- $\beta_{iP} = \frac{\mathrm{Cov}(r_i, r_P)}{Var[r_P]}$
  - *Se calcule à partir de la loi de probabilité de* (r_i, r_P)
- $\beta_{iP} = \left(\frac{1}{252}\sum_{h=1}^{252}\left(r_{i,t-h} - \bar{r}_i\right)\left(r_{P,t-h} - \bar{r}_P\right)\right) / \left(\frac{1}{252}\sum_{h=1}^{252}\left(r_{P,t-h} - \bar{r}_P\right)^2\right)$
  - *Se calcule à partir des données passées*
- Le choix de périodes glissantes et de rentabilités quotidiennes est fréquent en finance
  - *Notamment quand on s'intéresse à la dynamique des Bêtas.*
  - *On peut choisir des périodes d'estimation plus longues*
  - *Dans l'approche économétrique standard , on préfère utiliser toutes les données disponibles*
  - *Ce qui permet d'utiliser des théorèmes limites (loi des grands nombres) dans leur domaine de validité.*

Calcul des bêtas à partir d'historiques de cours

- Rappel : $\frac{1}{252}\sum_{h=1}^{252}\left(r_{i,t-h} - \bar{r}_i\right)\left(r_{P,t-h} - \bar{r}_P\right)$ correspond à la covariance « dans l'échantillon des données historiques » ou covariance empirique.
  - *covariance (dite empirique) entre les rentabilités* r_i *et* r_P *pour une loi de probabilité discrète, dont les valeurs sont les couples de rentabilité observées* $\left(r_{P,t}, r_{i,t}\right)$ *et où ces valeurs sont équipondérées (on donne une probabilité de* $\frac{1}{251}$ *à chaque valeur.*
  - *Cette loi de probabilité discrète s'appelle la mesure empirique (ou loi empirique)*

Droite caractéristique d'un titre

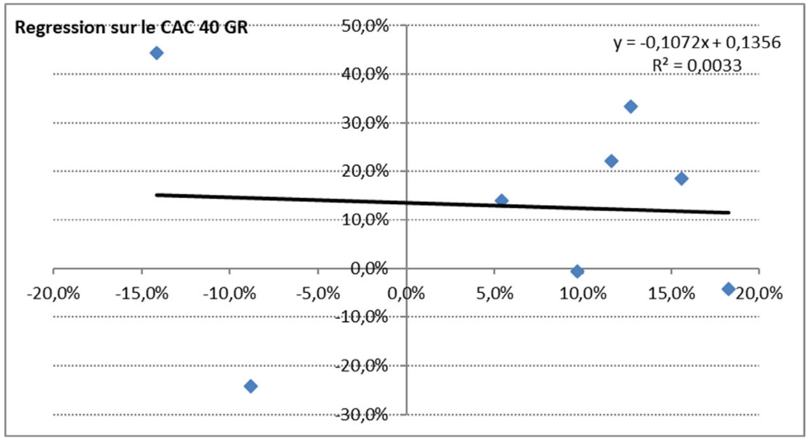
- Quelles données pour déterminer les Bêtas ?
  - *Quel marché de référence retenir?*
    - Quand l'action est cotée sur différents marchés
  - *Les rentabilités de l'action American Express ne sont pas les mêmes en $, £, €, etc. Quelle devise de référence*
  - *Quels cours boursiers: pertinence des cours de clôture?*
    - Pour les actions peu fréquemment traitées, le dernier cours peut être antérieur d'une heure ou deux à l'heure de clôture
    - Y a-t-il un fixing pour déterminer le cours de clôture ?
    - Différence entre heures de clôture pour différents marchés
  - *Disponibilité des données : suspension de cotation, actions nouvellement introduites en Bourse*
    - Il existe des algorithmes pour "compléter les données manquantes"
    - Brownian bridge, algorithme EM, Singular Spectrum Analysis

Droite caractéristique d'un titre

- Quelles données pour déterminer les Bêtas ?
  - *Période d'observation : date de début, date de fin ?*
  - *Périodicité des données: quotidienne, hebdomadaire,… Fréquence de mise à jour pour le calcul: mensuelle, trimestrielle, annuelle, jamais ?*
  - *Choix du portefeuille de référence P*
    - Indice national ou international ? Sectoriel ?
    - Large caps ?
    - Benchmark pour un investisseur, portefeuille efficient ?
- Risque de choix opportunistes pour influer sur les décisions d'investissement
  - *Augmenter le Bêta d'une branche d'un groupe industriel revient à augmenter les exigences de rentabilité*

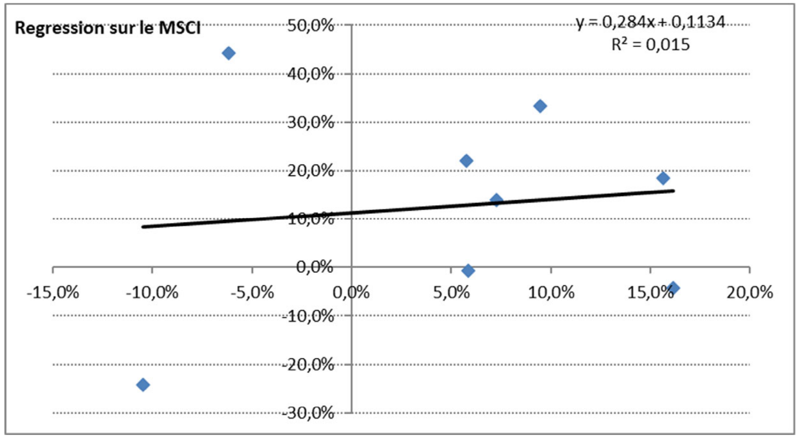
Estimation par la méthode des moindres carrés : choix de l'indice de référence

- Bêta de Michelin par rapport au CAC40 : -0,107



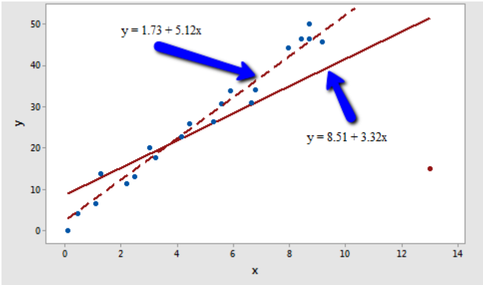
Estimation par la méthode des moindres carrés

- Bêta de Michelin par rapport au MSCI : 0,284



Calcul des Bêtas : le problème des « outliers »

- Crise covid : rentabilités hebdomadaires extrêmes (négatives) en 2020 à la fois pour les titres et l'indice.
- L'ajout d'une seule donnée (influential point), ici point rouge peut complètement modifier le Bêta



- Estimation par moindres carrés des Bêtas non robuste à la présence de certains « outliers »

Bêtas conditionnels

THE JOURNAL OF FINANCE • VOL. LI, NO. 1 • MARCH 1996

The Conditional CAPM and the Cross-Section of Expected Returns

RAVI JAGANNATHAN and ZHENYU WANG*

ABSTRACT

Most empirical studies of the static CAPM assume that betas remain constant over time and that the return on the value-weighted portfolio of all stocks is a proxy for the return on aggregate wealth. The general consensus is that the static CAPM is unable to explain satisfactorily the cross-section of average returns on stocks. We assume that the CAPM holds in a conditional sense, i.e., betas and the market risk premium vary over time. We include the return on human capital when measuring the return on aggregate wealth. Our specification performs well in explaining the cross-section of average returns.

Médaf et bêtas conditionnels

- On remplace tous les moments (espérances, variances, Bêtas) par les moments conditionnels
- La relation rentabilité risque reste de la même forme que dans le cas statique.

8 *The Journal of Finance*

THE CONDITIONAL CAPM. *For each asset i and in each period t,*

$$E[R_{it}|I_{t-1}] = \gamma_{0t-1} + \gamma_{1t-1}\beta_{it-1}, \quad (2)$$

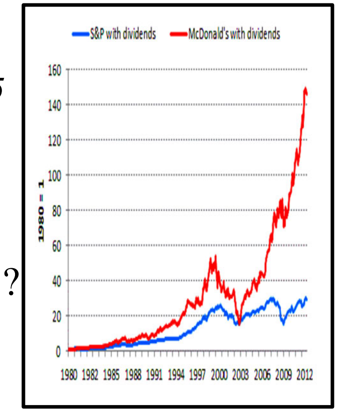
where β_{it-1} *is the conditional beta of asset i defined as*

$$\beta_{it-1} = \mathrm{Cov}(R_{it}, R_{mt}|I_{t-1})/\mathrm{Var}(R_{mt}|I_{t-1}), \quad (3)$$

γ_{0t-1} *is the conditional expected return on a "zero-beta" portfolio, and* γ_{1t-1} *is the conditional market risk premium.*

Droite caractéristique d'un titre : Estimation des betas

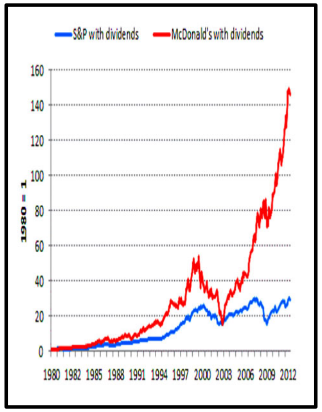
- Le cas McDonald's Corp (MCD)
  - *Yahoo Finance fournit un Beta de 0,45*
  - *Google Finance nous indique un Beta de 0,34*
  - *Site du Nasdaq : Beta de 0,56*
- Comment expliquer ces différences ?
  - *Indice utilisé pour le portefeuille de marché ?*
  - *Quelle est la période d'estimation ?*
  - *Fréquence des rentabilités observées ?*



Action McDo vs Indice S&P500 dividendes réinvestis

Droite caractéristique d'un titre : Estimation des betas

- Le cas McDonald's Corp (MCD)
  - ***Rentabilité historique de 17%***, *celle de l'indice S&P500 de 11,2%*
  - $r_f = 2{,}37\%$ *taux 10 ans US Treasuries 10/2014*
  - *Choisissons une prime de risque de 6% (cf étude JP Morgan, 2008)*
- **On a alors une rentabilité attendue de 4,4%, 5,1% ou 5,7% selon le Beta retenu**
  - *8,4% pour l'indice*



Action McDo vs Indice S&P500 dividendes réinvestis

Décorrélation des actions constituant l'indice Dow Jones et l'indice.

Comparaison entre l'été 2015 et l'été 2016 (calculs sur 50 jours glissants antérieurs au 9 septembre) On remarque aussi la distribution des Bêtas.

$$\boldsymbol{\beta_i} = \rho_{iP}\frac{\sigma_i}{\sigma_P}$$

Comme les Bêtas restent en moyenne égaux à 1, il faut que les ratios $\frac{\sigma_i}{\sigma_P}$ augmentent.

Ce qui veut dire que les risques idiosyncratiques ont augmenté

Out of step

Last year, two-thirds of the Dow 30 were close (r >= 0.8) to the market. Now, it's just one.

Stock	Correlation 2015	Correlation 2016	β	Stock	Correlation 2015	Correlation 2016	β
AXP	0.73	**0.81**	1.38	KO	0.81	**0.59**	0.88
MMM	0.85	**0.79**	0.90	CVX	0.72	**0.58**	1.08
IBM	0.80	**0.79**	1.10	DIS	0.61	**0.58**	0.61
UTX	0.74	**0.72**	1.15	VZ	0.86	**0.57**	0.91
HD	0.88	**0.71**	1.09	PFE	0.91	**0.49**	0.73
GE	0.91	**0.71**	0.98	XOM	0.82	**0.47**	0.86
GS	0.92	**0.70**	1.39	JNJ	0.90	**0.46**	0.46
BA	0.87	**0.70**	1.29	PG	0.81	**0.42**	0.45
INTC	0.78	**0.70**	1.34	NKE	0.93	**0.41**	0.83
CSCO	0.83	**0.70**	0.97	AAPL	0.79	**0.41**	0.95
JPM	0.93	**0.64**	1.00	MRK	0.83	**0.40**	1.15
DD	0.73	**0.63**	1.12	WMT	0.77	**0.39**	0.54
TRV	0.83	**0.61**	0.75	UNH	0.84	**0.38**	0.44
CAT	0.70	**0.60**	1.45	V	0.80	**0.34**	0.55
MSFT	0.86	**0.60**	1.07	MCD	0.89	**0.28**	0.49

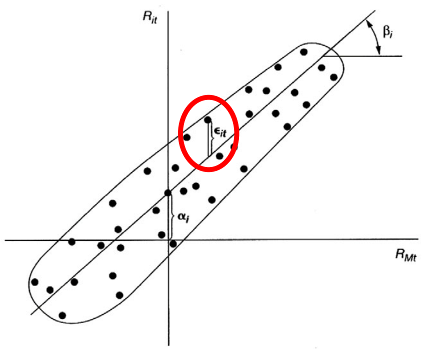
Note: Correlation is 50-day rolling correlation with S&P 500 as of Sept. 9.
Source: Yahoo Finance; CNBC calculations

CNBC

Bêtas : prévision de $r_{i,t}$ sachant $r_{P,t}$ et de $r_{P,t}$ sachant $r_{i,t}$

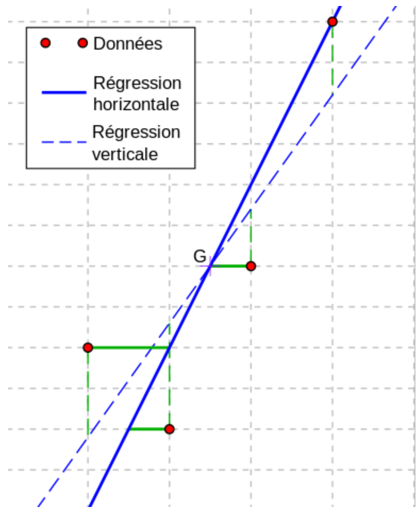
- Prévision de $r_{i,t}$ sachant $r_{P,t}$
  - $\varepsilon_{i,t} = r_{i,t} - \alpha_{iP} - \beta_{iP} r_{P,t}$: *erreur de prévision à la date t*
- Écart entre les ordonnées (résidu vertical)

Graphique 3.6 – *Droite caractéristique d'un titre i*



Bêtas : prévision de $r_{i,t}$ sachant $r_{P,t}$ et de $r_{P,t}$ sachant $r_{i,t}$

- Prévision de $r_{P,t}$ sachant $r_{i,t}$
  - $r_{P,t} - \alpha_{Pi} - \beta_{Pi} r_{i,t}$: *erreur de prévision à la date t*
- Écart entre les abscisses (résidu horizontal)
- Les deux droites de régression ne coïncident pas car les critères diffèrent
  - *Prévision de $r_{i,t}$ sachant $r_{P,t}$: Minimisation des carrés des différences des ordonnées*
  - *Prévision de $r_{P,t}$ sachant $r_{i,t}$: Minimisation des carrés des différences des abscisses*

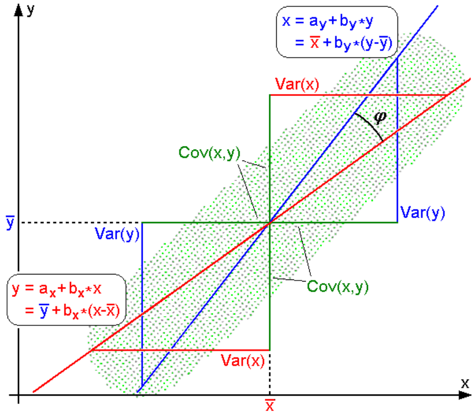


Bêtas : prévision de $r_{i,t}$ sachant $r_{P,t}$ et de $r_{P,t}$ sachant $r_{i,t}$

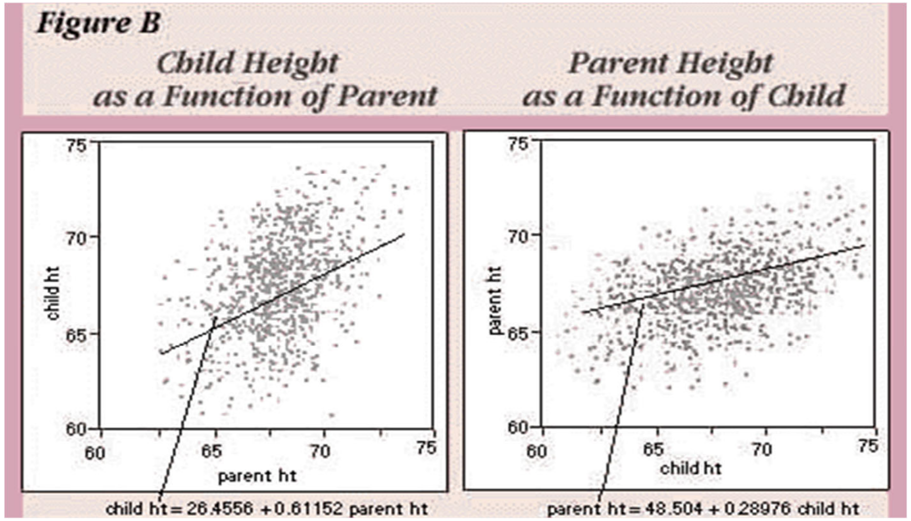
- $\beta_{iP} = \frac{\mathrm{Cov}(r_i, r_P)}{\mathrm{Var}[r_P]} = \rho_{iP}\frac{\sigma_i}{\sigma_P}$, $\beta_{Pi} = \frac{\mathrm{Cov}(r_i, r_P)}{\mathrm{Var}[r_i]} = \rho_{iP}\frac{\sigma_P}{\sigma_i}$
- D'où $\beta_{iP} \times \beta_{Pi} = \rho_{iP}^2 \leq 1$

Construction géométrique des deux droites de régression.

Les deux droites passent par $(\bar{x}, \bar{y})$
Pour obtenir la droite rouge (prévision de y sachant x, on se dirige vers le haut de $\mathrm{Cov}(x, y)$, puis vers la droite de $\mathrm{Var}[x]$, ce qui donne une pente de $\frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}[x]} = \beta_{y|x}$



Prévoir la taille des parents sachant celle des enfants est un problème différent de prévoir la taille des enfants sachant celle des parents

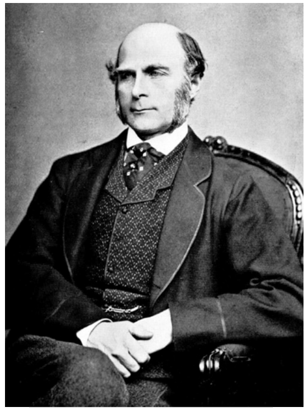


Galton : Bêta enfant/parent (0,61) très différent de l'inverse du Bêta parent/enfant (0,29), le ratio entre les deux Bêtas est le ratio entre la variance de la taille des parents et celle des enfants

Bêtas et corrélation

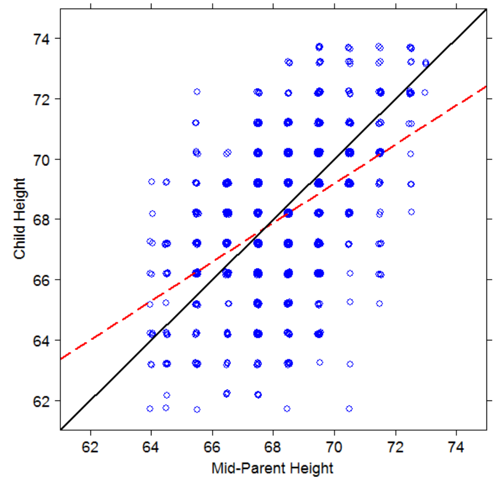
Pour aller plus loin, voir Kahneman, p. 219-225

- Regression to the mean (retour à la moyenne)
  - *Analyse du phénomène due à Francis Galton (1886)*
    - Selon les observations de Galton, si les parents mesurent 6 cm de plus que la moyenne, les enfants ne mesurent plus que **2/3** x 6 cm de plus que la moyenne
    - D'où l'origine du terme "**regression**"
      - On parle parfois de "régression vers la médiocrité"
  - *Ceci est exact, mais on a* $\bar{y}_i = \beta_{y|x}\bar{x}_i + \varepsilon_i$.
  - *Supposons* $\sigma_x \approx \sigma_y$ *(même variabilité de taille pour parents et enfants)*
    - On reviendra sur cette hypothèse ultérieurement
  - $\beta_{y|x} = \rho_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \approx \rho_{xy} \leq 1$



Francis Galton

Galton s'attendait à ce que la meilleure prévision soit associée à une pente de 1 (en noir) et pas à une pente de 0,61 (en rouge) : « les enfants héritent des caractéristiques biologiques de leurs parents »



En effet, le nuage de points forme une ellipse. On peut montrer sous certaines conditions (même variabilité des tailles chez les parents et les enfants) que le grand axe de l'ellipse a une pente de 1 (45°)

Bêtas et corrélation

- Pourquoi la meilleure prévision de la taille des enfants n'est-elle pas la taille des parents ?
  - $\bar{y}_i = y_i - m$, *taille des enfants,* $\bar{x}_i = x_i - m$ *taille des parents*
  - *Galton pensait que l'on aurait une relation du type* $\bar{y}_i = 1 \times \bar{x}_i +$ terme résiduel, $\beta_{y|x} = 1$
  - *Or, l'estimation de* $\beta_{y|x}$ *par la méthode des moindres carrés donne* $\beta_{y|x} = 0{,}61 = \rho_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, *d'où le résultat « l'écart à la moyenne de la taille des enfants est environ 2/3 de l'écart des parents à la moyenne (de leur génération)*
  - $\bar{y}_i = \beta_{y|x}\bar{x}_i +$ terme résiduel
- Si la taille des parents est grande, ce pourrait être en partie dû « à la chance » et pour le reste aux gènes qu'ils transmettront à leurs enfants : la chance ne se transmet pas

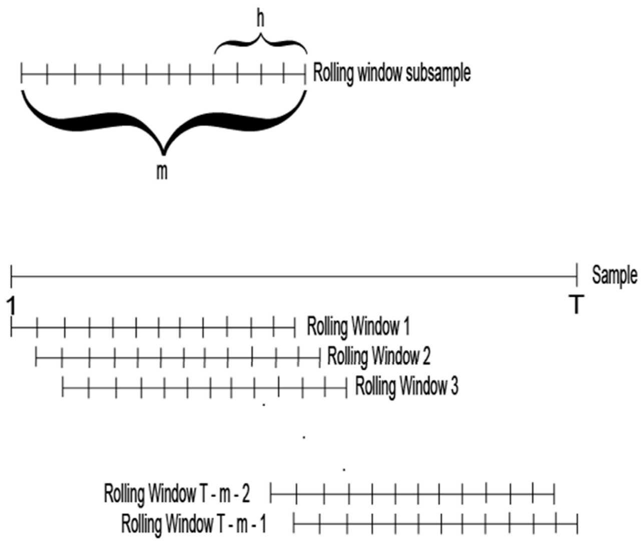
Bêtas et corrélation

- Aurait-on $\beta_{x|y} = 1/\beta_{y|x} = 1{,}64$ (analyse de sensibilité) ?
  - *Or* $\beta_{x|y} = 0{,}29 < 1$!
  - $\beta_{x|y} = \rho_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$, $\beta_{y|x} = \rho_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$
  - *D'où* $\beta_{x|y} \times \beta_{y|x} = \rho_{xy}^2 < 1$ *(sauf si* $\rho_{xy} = 1$, *cas où la liaison entre* x *et* y *devient déterministe), ce qui donne* $\rho_{xy} = 42\%$
  - *Remarque :* $\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \beta_{y|x}/\beta_{x|y} = 0{,}61/0{,}29 \approx 2$,
  - $\sigma_{\bar{x}}^2 \approx \frac{1}{2} \times \sigma_{\bar{y}}^2$ *?* x_i *est la moyenne de la taille des deux parents (pondérée par un facteur 1,08 pour la taille des mères)*
  - $\bar{x}_i \approx \frac{1}{2} \times \left(\bar{x}_i^P + \bar{x}_i^M\right) \Rightarrow \sigma_{\bar{x}}^2 \approx \frac{1}{4} \times \left(\sigma_{\bar{x}^P}^2 + \sigma_{\bar{x}^M}^2\right)$ *si non corrélation entre les tailles du père et de la mère*

Bêta (ex-ante) d'un titre, d'un portefeuille

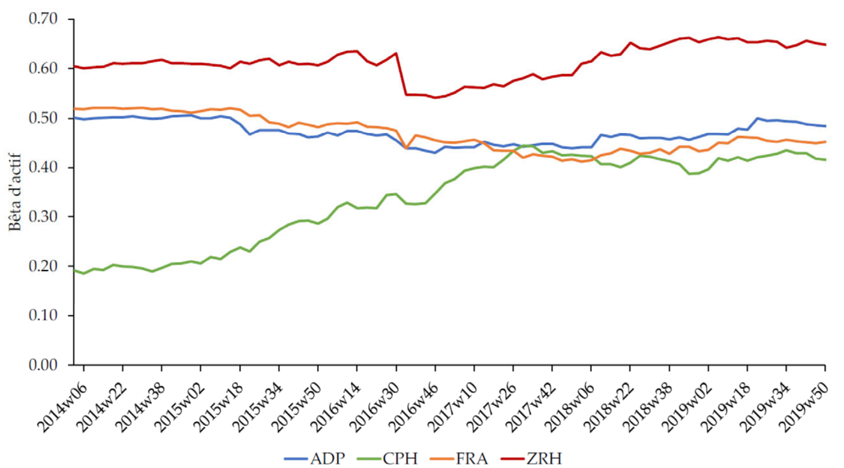
- On s'intéresse aux rentabilités **<u>à venir</u>** r_i et r_P
  - *r_i et r_P variables aléatoires*
- $r_i = E_i + \beta_i \times (r_P - E_P) + \varepsilon_i$
  - *ε_i <u>risque spécifique</u> ou <u>risque idiosyncratique</u> du titre i*
  - *De moyenne nulle, non corrélé avec le risque de marché r_P*
  - *E_i : espérance de rentabilité du titre i*
  - *E_P : espérance de rentabilité du portefeuille de marché*
- Si r_P augmente de 1%, r_i augmente <u>en moyenne</u> de $\beta_i\%$
- β_i Bêta (ex-ante ou prospectif) du titre *i*
  - *E_i, E_P, β_i paramètres (non aléatoires)*

Estimation des Bêtas avec des fenêtres glissantes de longueur donnée, « rolling window », rolling regressions : les bêtas vont être amenés à fluctuer au cours du temps



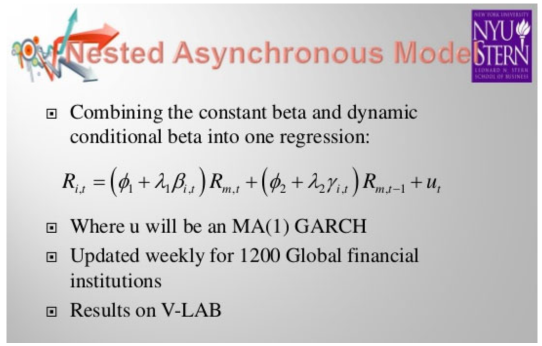
Dynamique des Bêtas

Figure 2 : Bêtas des actifs des aéroports comparables sur une période glissante de 5 ans



Trinkner, U., Binz, T., & Mattmann, M. (2020). Bêtas des aéroports français à partir de l'observation des marchés boursiers et de précédents de régulation. Note établie pour l'autorité de régulation des transports.

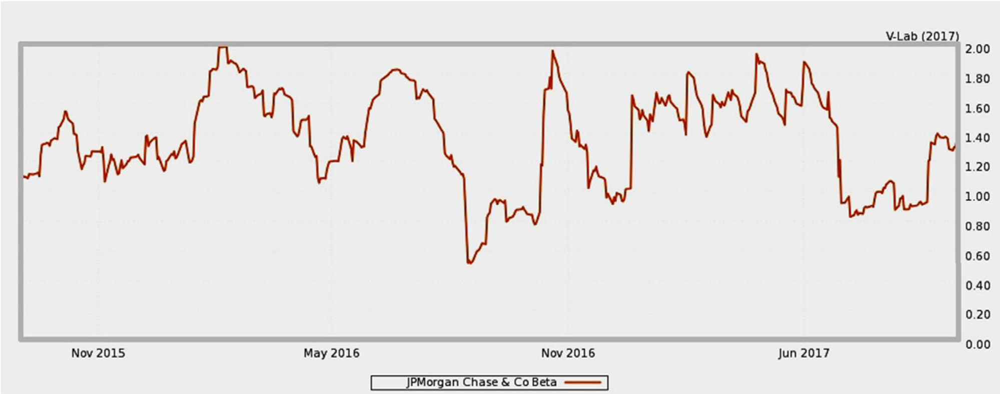
Robert Engle



Dynamic Conditional Betas in V-Lab

https://vlab.stern.nyu.edu/

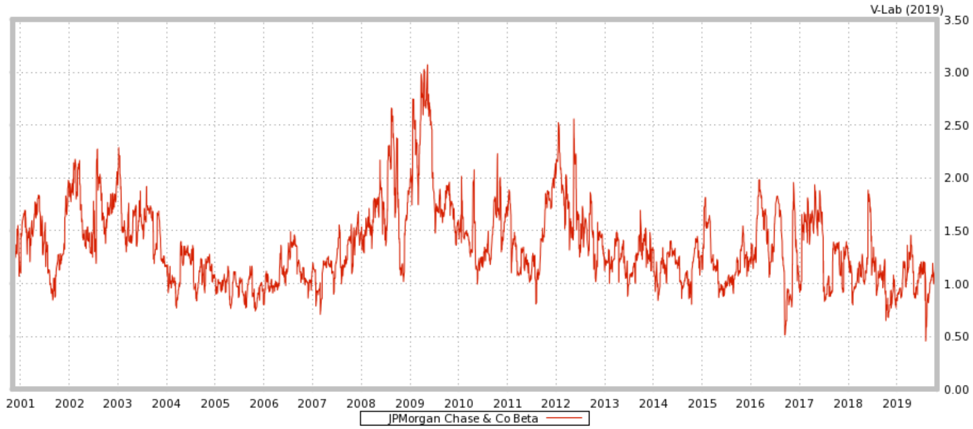
Évolution du Bêta de l'action JP Morgan au cours des deux dernières années (octobre 2015 – octobre 2017)



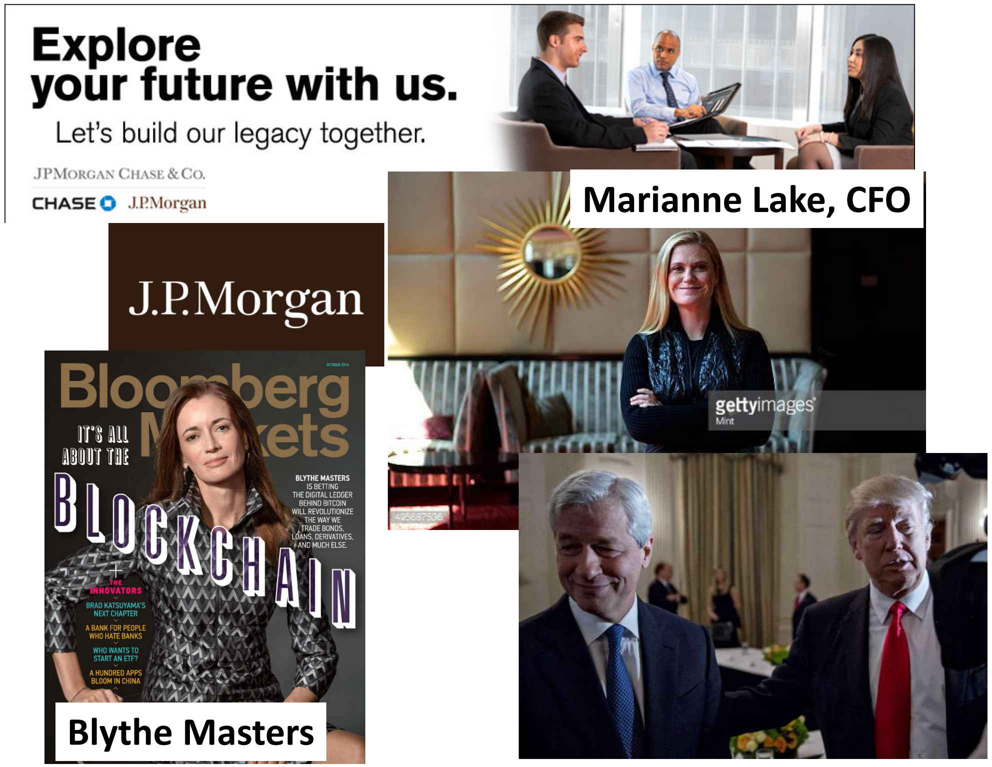
Le Bêta varie entre 0,5 et 2 avec des fluctuations extrêmement rapides. C'est tout sauf une constante caractéristique de l'action.

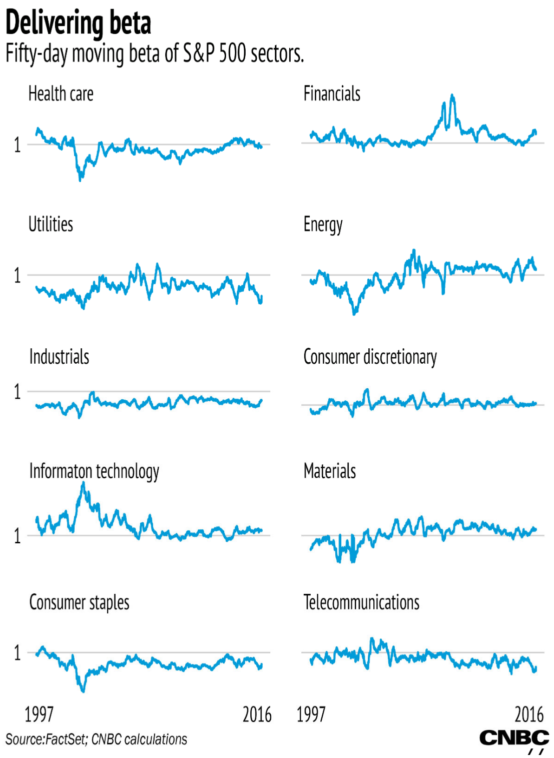
Engle (2016). Dynamic conditional bêta. Journal of Financial Econometrics.
https://vlab.stern.nyu.edu/analysis/RISK.USFIN-MR.MES

Dynamic Conditional Beta de l'action JP Morgan : retour à la moyenne ?



https://vlab.stern.nyu.edu/analysis/RISK.USFIN-MR.MES





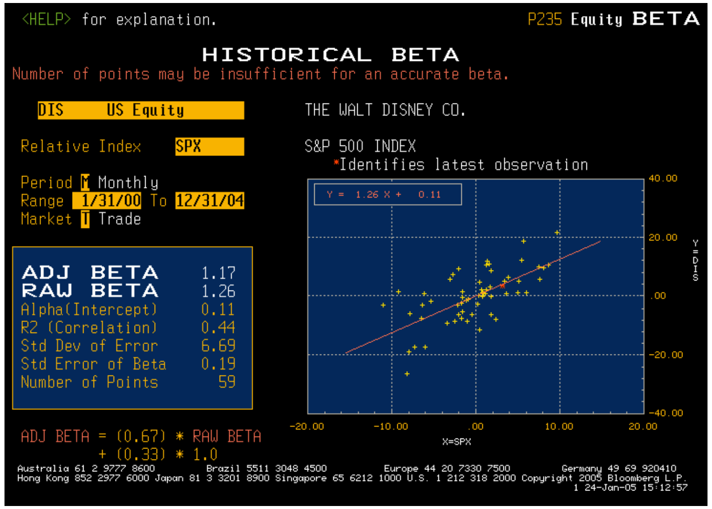
Évolution des Bêtas par secteur d'activité de 1997 à 2016. Ils sont calculés à partir de rentabilités quotidiennes avec des périodes d'estimation glissantes de 50 jours

Il n'existe pas de secteurs caractérisés de manière évidente par la permanence de bêtas supérieurs ou inférieurs à 1. L'augmentation des Bêtas liés au secteur financier ou de l'informatique est conjoncturelle (bulle internet des années 2000, crise financière de 2008)

Etude de cas : utilisation de Bloomberg

- Bêta de l'action Disney par rapport à l'indice S&P500 (source Bloomberg)

Rentabilités mensuelles sur une période de 5 ans (31/1/00 – 31/12/04 Raw Beta = 1,26» correspond au Bêta historique Adjusted Beta =1,17 2/3 raw bêta + 1/3 x 1



Grands et petits Bêtas …

- Adjusted Beta?
- Bloomberg s'appuie sur les travaux de Blume et de Vasicke
- Blume part de la constatation d'un retour à la moyenne des bêtas estimés sur des périodes consécutives

A PREVIOUS STUDY [3] showed that estimated beta coefficients, at least in the context of a portfolio of a large number of securities, were relatively stationary over time. Nonetheless, there was a consistent tendency for a portfolio with either an extremely low or high estimated beta in one period to have a less extreme beta as estimated in the next period. In other words, estimated betas exhibited in that article a tendency to regress towards the grand mean of all betas, namely one. This study will examine in further detail this regression tendency.[1]

- Blume (1975). Betas and their regression tendencies. The Journal of Finance.
- Blume (1979). Betas and their regression tendencies: some further evidence. Journal of Finance

Grands et petits Bêtas …

- Le tableau ci-dessous considère des Bêtas estimés sur une période de 7 ans (1926-1933) et regroupés en 4 groupes
  - *Le groupe 1 est constitué des actions avec le Bêta le plus faible et ainsi de suite*
  - *La dernière colonne représente les Bêtas pour ces titres sur la période de 7 ans qui suit*

Portfolio	Grouping Period	First Subsequent Period
	7/26-6/33	7/33-6/40
1	0.50	0.61
2	0.85	0.96
3	1.15	1.24
4	1.53	1.42

- *On constate un retour à la moyenne (sauf pour la catégorie 3)*

Grands et petits Bêtas …

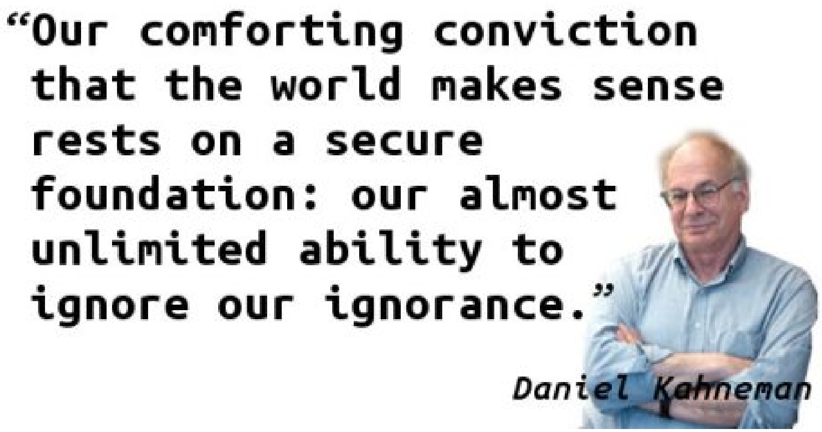
- Retour à la moyenne en partie dû à une illusion statistique
  - *Pour l'illustrer, considérons des tirages indépendants d'un dé*
  - *Indépendance des valeurs observées pour 2 tirages consécutifs*
    - Pourtant, si le premier tirage est 6, le second tirage est plus petit
    - Si le premier tirage est 1, le second tirage est plus élevé.
  - *Le résultat du premier tirage n'apporte pourtant aucune information sur la valeur du second tirage.*
  - *Considérons maintenant un questionnaires d'évaluation administré à des étudiants.*
    - 100 questions et trois réponses proposées à chaque question
    - Les étudiants répondent « au hasard »
    - Le nombre de réponses justes suit une loi binomiale $B(100, 1/3)$. L'espérance du nombre de réponses justes est $\frac{100}{3}$

Grands et petits Bêtas …

- *Les « meilleurs » étudiants à la première évaluation (notes supérieures à 100/3) auront des notes en moyenne égales à 100/3 à la seconde évaluation*
- *Les « moins bons » étudiants vont voir leurs notes augmenter et se rapprocher de la moyenne.*
- Système cognitif automatique et recherche de causalité :
  - *Les meilleurs étudiants se sont relâchés entre la première évaluation et la seconde.*
  - *Les « moins bons » étudiants se sont accrochés et ont amélioré leur performance*
- Le système **déductif** permet de comprendre qu'il n'y aucun lien entre les résultats des deux évaluations
  - *Pour Kahneman, il y a **une explication mais pas de cause***
  - *Le système 1 est inadapté pour prendre en compte la chance*

Grands et petits Bêtas

- Daniel Kahneman, prix Nobel d'économie, père fondateur de la finance comportementale, psychologue cognitif et statisticien



Estimation des Bêtas / biais de sélection

- Revenons aux Bêtas ajustés et à l'étude de Blume
  - Le Bêta moyen étant de 1, la formule du Bêta ajustée: **2/3 bêta estimé sur la période précédente + 1/3 x 1**
  - Ceci pour prendre en compte le « retour à la moyenne » (ici = 1) pour les Bêtas
- *Blume avait conscience des problématiques statistiques*
  - On parle d'une problème d'erreur sur les variables, les Bêtas estimées étant entachées d'une erreur d'estimation.
  - Dans le cas du dé, la moyenne est constante à chaque tirage (3,5), le coefficient de corrélation entre deux tirages est nul
- *Le phénomène de retour à la moyenne subsiste même après les correctifs statistiques adaptés*
- *Explications économiques ?*

Estimation des Bêtas / erreur sur les variables

- *Supposons que l'on ait une liaison du type :*
- $\beta_{i,t} = a\beta_{i,t-1} + 1 - a + \varepsilon_{i,t}$ *(avec par exemple* $a = 2/3$
- *On cherche à vérifier si* $a < 1$ *(retour à la moyenne)*
- *Mais on ne connaît qu'un estimateur de* $\beta_{i,t-1}$*, le vrai Bêta n'est pas observé.*
- $\hat{\beta}_{i,t-1} = \beta_{i,t-1} + z_{i,t-1}$
  - $z_{i,t-1}$ erreur d'estimation indépendante de $\beta_{i,t-1}$
- $\beta_{i,t} + z_{i,t} = a \times \left(\beta_{i,t-1} + z_{i,t-1} - 1\right) + \varepsilon_{i,t}$
  - $\hat{a} = \frac{\mathrm{cov}(\beta_{i,t}+z_{i,t},\beta_{i,t-1}+z_{i,t-1})}{\mathrm{var}(\beta_{i,t-1}+z_{i,t-1})} = \frac{\mathrm{cov}(\beta_{i,t},\beta_{i,t-1})}{\mathrm{var}(\beta_{i,t-1})+\mathrm{var}(z_{i,t-1})} < a = \frac{\mathrm{cov}(\beta_{i,t},\beta_{i,t-1})}{\mathrm{var}(\beta_{i,t-1})}$
- *Le problème de Galton : on peut avoir* $a = 1$
  - Relation entre caractéristiques biologiques des parents et des enfants
- *et* $\hat{a} < 1$*,*
  - L'inné ne détermine pas tout

Estimation des bêtas / approche de Vasicek

O. Vasicek

- « Adjusted Beta » (Vasicek)
  - Vasicek (1973). A note on using cross-sectional information in Bayesian estimation of security Betas. *The Journal of Finance.*

    L'idée est différente de celle de Blume
  - *Vasicek propose une approche bayésienne*
  - *L'estimateur du bêta va être une moyenne pondérée du bêta estimé à partir de données historiques et d'un bêta déterminé a priori égal à un*
- Comme pour Blume, le choix des pondération 2/3 et 1/3 est arbitraire …
  - http://www.stat.ucla.edu/~nchristo/statistics_c183_c283/vasicek_betas.pdf
  - http://guides.lib.byu.edu/content.php?pid=53518&sid=401576
- Validité des Bloomberg "adjusted betas" ?