*Cours de Finance*

**Diversification du risque**

**Don’t put all your eggs in one basket**

**Variance du taux de rentabilité d’un portefeuille de deux titres :** $\boldsymbol{\sigma_P^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + 2\rho_{1,2}\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2 + \omega_2^2\sigma_2^2}$

- Coefficient de corrélation, décomposition des risques, Bêtas, relation entre rentabilité et risque
- Diversification des risques
  - *Coefficient de corrélation linéaire*
  - *Coefficient de corrélation linéaire et risque*
  - *Diversification du risque*
- Objectifs pédagogiques de la séance
  - *Comprendre la notion de diversification des risques*
  - *Savoir manipuler un coefficient de corrélation*

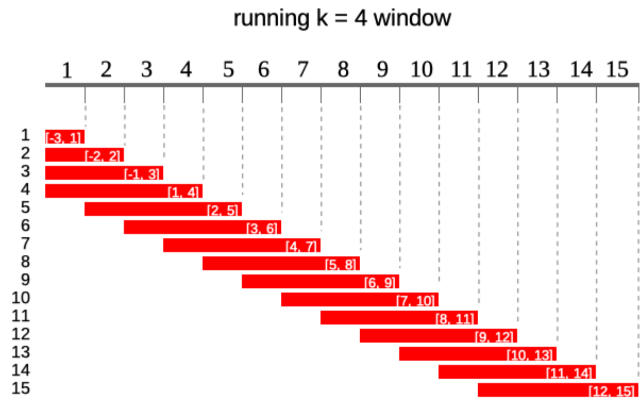
## *Probabilités et rentabilités : rappels*

- La mesure de probabilité la plus simple ?
- Probabilité uniforme
  - *Pile ou Face :* $P(\{F\}) = P(\{P\}) = \frac{1}{2}$
  - *Dé à six faces :* $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$
  - *Séquences de hausses ou baisses pour une marche aléatoire*
    - $P(\{HH\}) = P(\{FH\}) = P(\{HF\}) = P(\{FF\}) = \frac{1}{4}$
    - $P(\{HHH\}) = \cdots = P(\{FFF\}) = \frac{1}{8}$
- Mesure empirique : probabilité uniforme sur les dates passées
  - $t$ *: date courante,* $k$ *longueur de l'échantillon*
  - *Pour les banques de marché,* $k = 252$ *(jours) – réglementation Bâle 3*
  - $\{t, \dots, t-251\}$ *: fenêtre glissante (rolling/running windows)*
  - $P(\{t\}) = \cdots = P(\{t-251\}) = \frac{1}{252}$



## *Probabilités et rentabilités : rappels*

- Ci-dessous : (15) fenêtres glissantes, $k = 4$






## *Probabilités et rentabilités : rappels*

- Rentabilités observées (un seul actif)
  - *Fréquence quotidienne (cours en fin de journée – closing price)*
  - $r_t$ *: rentabilité de l'actif observée à la date* $t$
  - $r_t = \frac{P_t - P_{t-1} + d_t}{P_{t-1}}$ *: rentabilité simple*
- Rentabilité future
  - $t$ *date courante,* $t+1$ *date future*
  - $\tilde{r}_{t+1}$ *: vu en* $t$ *comme une variable aléatoire*
  - *Marchés efficients : imprévisibilité des cours futurs*
  - *Idem : sur quel côté la pièce va retomber avant d'être lancée ?*
  - *Valeurs possibles de* $r_{t+1}$ *:* $r_t, \dots, r_{t-251}$
  - $P(\{\tilde{r}_{t+1} = r_t\}) = \cdots P(\{\tilde{r}_{t+1} = r_{t-251}\}) = \frac{1}{252}$
  - *Loi uniforme sur l'ensemble des valeurs* $\{r_t, \dots, r_{t-251}\}$



## *Probabilités et rentabilités : rappels*

- Espérance de la variable aléatoire $\tilde{r}_{t+1}$
  - $\tilde{r}_{t+1}$ *peut prendre les valeurs* $r_t, \dots, r_{t-251}$
  - *Avec les probabilités* $\frac{1}{252}$
  - *L'espérance est la moyenne des valeurs possibles pondérée par les probabilités*
  - *Soit* $\frac{1}{252} \times (r_t + \cdots + r_{t-251}) = E[\tilde{r}_{t+1}]$
  - *Ce qui correspond à la moyenne (empirique ou dans l'échantillon) non pondérée des rentabilités passées*
- Autre exemple : jeu de dés (à six faces)
  - *Espérance :* $\frac{1}{6} \times (1+2+3+4+5+6) = 3{,}5$

## Probabilités et rentabilités : rappels

- Variance de la variable aléatoire $\tilde{r}_{t+1}$
  - $\mathrm{Var}[\tilde{r}_{t+1}] = E[\tilde{r}_{t+1}^2] - (E[\tilde{r}_{t+1}])^2 = E[(\tilde{r}_{t+1} - E[\tilde{r}_{t+1}])^2]$
- Écart-type de $\tilde{r}_{t+1}$: $\sqrt{\mathrm{Var}[\tilde{r}_{t+1}]}$
- Stationnarité (à l'ordre 2) : $\forall t_1, t_2 : E[\tilde{r}_{t_1}] = E[\tilde{r}_{t_2}]$ et $\mathrm{Var}[\tilde{r}_{t_1}] = \mathrm{Var}[\tilde{r}_{t_2}]$



## Probabilités et rentabilités : rappels

- Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $E[a \times \tilde{r}_t + b] = a \times E[\tilde{r}_t] + b$
  - *En effet,* $\frac{1}{252} \times \left((ar_{t-1} + b) + \cdots + (ar_{t-252} + b)\right) = \frac{a}{252} \times (r_{t-1} + \cdots + r_{t-252}) + b$
- Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Var}[a \times \tilde{r}_t + b] = a^2 \times \mathrm{Var}[\tilde{r}_t]$
  - *En effet :* $a\tilde{r}_t + b - E[a\tilde{r}_t + b] = a \times (\tilde{r}_t - E[\tilde{r}_t])$
  - $E\left[\left(a(\tilde{r}_t - E[\tilde{r}_t])\right)^2\right] = a^2 E[(\tilde{r}_t - E[\tilde{r}_t])^2]$
- D'où $\sigma(a\tilde{r}_t + b) = |a| \times \sigma(\tilde{r}_t)$



## Probabilités et rentabilités : rappels

- Cas de deux rentabilités : $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$
  - $\tilde{r}_1$ *: rentabilité du titre* 1
  - $\tilde{r}_2$ *: rentabilité du titre* 2
- Covariance entre $\tilde{r}_1$ et $\tilde{r}_2$
  - $\mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2] = E[\tilde{r}_1\tilde{r}_2] - E[\tilde{r}_1]E[\tilde{r}_2] = E[(\tilde{r}_1 - E[\tilde{r}_1]) \times (\tilde{r}_2 - E[\tilde{r}_2])]$
- Remarques et propriétés :
  - *Covariance entre* $\tilde{r}_1$ *et* $\tilde{r}_1$ *:* $\mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_1] = \mathrm{Var}[\tilde{r}_1]$
  - $\mathrm{Cov}[\tilde{r}_2, \tilde{r}_1] = \mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]$ *(symétrie)*
  - $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Cov}[a\tilde{r}_1 + b, \tilde{r}_2] = a\mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]$
  - $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Cov}[a, \tilde{r}_2] = 0$



## Probabilités et rentabilités : rappels

- Coefficient de corrélation linéaire entre $\tilde{r}_1$ et $\tilde{r}_2$
  - $\rho_{12} = \frac{\mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]}{\sqrt{\mathrm{Var}[\tilde{r}_1]} \times \sqrt{\mathrm{Var}[\tilde{r}_2]}}$
  - $-1 \leq \rho_{12} \leq +1$ *(preuve : voir infra)*
- Soit $X, Y, Z$ trois variables aléatoires $\mathrm{Cov}[X + Y, Z] = \mathrm{Cov}[X, Z] + \mathrm{Cov}[Y, Z]$ (additivité)
  - *Démonstration :* $\mathrm{Cov}[X + Y, Z] = E[(X + Y)Z] - E[X + Y]E[Z]$
  - $E[(X + Y)Z] = E[XZ] + E[YZ]$
  - $E[X + Y]E[Z] = E[X]E[Z] + E[Y]E[Z]$
  - *D'où*
  - $\mathrm{Cov}[X + Y, Z] = E[XZ] - E[X]E[Z] + E[YZ] - E[Y]E[Z] = \mathrm{Cov}[X, Z] + \mathrm{Cov}[Y, Z]$

## Probabilités et rentabilités : rappels

- Espérance de la rentabilité d'un portefeuille
  - $\tilde{r}_P = x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2$, *avec* $0 \leq x \leq 1$
  - $E[\tilde{r}_P] = xE[\tilde{r}_1] + (1-x)E[\tilde{r}_2] = E[\tilde{r}_2] + x(E[\tilde{r}_1] - E[\tilde{r}_2])$
    - On a ici omis la dépendance par rapport à la date courante
    - On a utilisé la propriété d'additivité de l'espérance : $E[x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2] = E[x\tilde{r}_1] + E[(1-x)\tilde{r}_2]$
- Variance de la rentabilité d'un portefeuille :
  - $\mathrm{Var}[x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2] = x^2\mathrm{Var}[\tilde{r}_1] + 2x(1-x)\mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2] + (1-x)^2\mathrm{Var}[\tilde{r}_2]$
  - *Démonstration : commençons par montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires,* $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + 2\mathrm{Cov}[X,Y] + \mathrm{Var}[Y]$
  - $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Cov}[X+Y, X+Y] = \mathrm{Cov}[X, X+Y] + \mathrm{Cov}[Y, X+Y]$
  - $\mathrm{Cov}[X, X+Y] = \mathrm{Cov}[X,X] + \mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Cov}[X,Y]$
  - $\mathrm{Cov}[Y, X+Y] = \mathrm{Cov}[X,Y] + \mathrm{Cov}[Y,Y] = \mathrm{Cov}[X,Y] + \mathrm{Var}[Y]$



## Probabilités et rentabilités : rappels

- $\mathrm{Var}[x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2] = ?$
  - $\mathrm{Var}[x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2] = \mathrm{Var}[x\tilde{r}_1] + 2\mathrm{Cov}[x\tilde{r}_1, (1-x)\tilde{r}_2] + \mathrm{Var}[(1-x)\tilde{r}_2]$
    - $\mathrm{Var}[x\tilde{r}_1] = x^2\mathrm{Var}[\tilde{r}_1]$
    - $\mathrm{Cov}[x\tilde{r}_1, (1-x)\tilde{r}_2] = x(1-x)\mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]$
    - $\mathrm{Var}[(1-x)\tilde{r}_2] = (1-x)^2\mathrm{Var}[\tilde{r}_2]$
  - $\mathrm{Var}[x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2] = x^2\mathrm{Var}[\tilde{r}_1] + 2x(1-x)\mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2] + (1-x)^2\mathrm{Var}[\tilde{r}_2]$
  - *Comme* $\rho_{12} = \frac{\mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]}{\sqrt{\mathrm{Var}[\tilde{r}_1]} \times \sqrt{\mathrm{Var}[\tilde{r}_2]}}$
  - $\mathrm{Var}[\tilde{r}_x] = x^2\sigma^2[\tilde{r}_1] + 2x(1-x)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + (1-x)^2\sigma^2[\tilde{r}_2]$
  - $E[\tilde{r}_x] = E[\tilde{r}_2] + x(E[\tilde{r}_1] - E[\tilde{r}_2])$



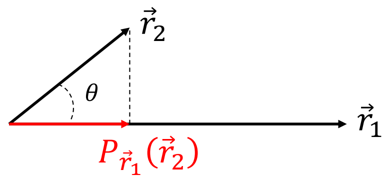
## Probabilités et rentabilités : rappels

- Variance et covariance : interprétation géométrique
  - $\vec{r}_1$ *: vecteur de coordonnées* $(r_{1,t-252} - \bar{r}_1, \ldots, r_{1,t-1} - \bar{r}_1)$ *où* $\bar{r}_1 = E[\tilde{r}_1]$
  - $\vec{r}_2$ *: vecteur de coordonnées* $(r_{2,t-252} - \bar{r}_2, \ldots, r_{2,t-1} - \bar{r}_2)$
  - *Produit scalaire* $\vec{r}_1.\vec{r}_2 = (r_{1,t-252} - \bar{r}_1)(r_{2,t-252} - \bar{r}_2) + \cdots + (r_{1,t-1} - \bar{r}_1)(r_{2,t-1} - \bar{r}_2)$
    - à $\frac{1}{252}$ près c'est $\mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]$
  - *Norme de* $\vec{r}_1$ *:* $\|\vec{r}_1\| = \sqrt{\vec{r}_1.\vec{r}_1}$
    - à $\frac{1}{\sqrt{252}}$ près c'est $\sigma[\tilde{r}_1]$
  - *Norme de* $\vec{r}_2$ *:* $\|\vec{r}_2\| = \sqrt{\vec{r}_2.\vec{r}_2}$
    - à $\frac{1}{\sqrt{252}}$ près c'est $\sigma[\tilde{r}_2]$



## Probabilités et rentabilités : rappels

- $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ engendrent un plan (sauf si colinéarité)
- $P_{\vec{r}_1}(\vec{r}_2)$ : projeté orthogonal de $\vec{r}_2$ sur $\vec{r}_1$




- $\vec{r}_1.\vec{r}_2 = \|\vec{r}_1\| \times \|P_{\vec{r}_1}(\vec{r}_2)\|$
- $\|P_{\vec{r}_1}(\vec{r}_2)\| = \|\vec{r}_2\| \times \cos\theta$
- $\cos\theta = \frac{\vec{r}_1.\vec{r}_2}{\|\vec{r}_1\| \times \|\vec{r}_2\|} = \frac{\mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2]}{\sigma[\tilde{r}_1] \times \sigma[\tilde{r}_2]} = \rho_{12} \in [-1,1]$
- $\rho_{12} = 1$ si les deux séries de rentabilité vont parfaitement dans le même sens ($\theta = 0°$)
- $\rho_{12} = -1$ si les deux séries de rentabilité vont parfaitement dans le sens opposé ($\theta = 180°$)

## *Décomposition du risque d'un titre, d'un portefeuille*

- $\tilde{r}_i$, $\tilde{r}_T$ *rentabilité de deux portefeuilles*
- $\rho_{iT} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_T]}{\sigma[\tilde{r}_i] \times \sigma[\tilde{r}_T]} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_T]}{\sigma_i \sigma_T}$

- Définissons $\beta_{iT} = \rho_{iT} \frac{\sigma_i}{\sigma_T} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_T]}{\sigma_i \sigma_T} \times \frac{\sigma_i}{\sigma_T} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_T]}{\sigma_T^2}$
  - *Soit* $\beta_{iT} = \frac{\text{Cov}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_T]}{\text{Var}[\tilde{r}_T]}$, *puisque* $\sigma_T^2 = \text{Var}[\tilde{r}_T]$
- Définissons $\tilde{\varepsilon}_i = \tilde{r}_i - \beta_{iT}\tilde{r}_T$ (ou $\tilde{r}_i = \beta_{iT}\tilde{r}_T + \tilde{\varepsilon}_i$)
  - $\text{Cov}[\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{r}_T] = \text{Cov}[\tilde{r}_i - \beta_{iT}\tilde{r}_T, \tilde{r}_T] = \text{Cov}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_T] - \beta_{iT}\text{Var}[\tilde{r}_T] = 0.$
  - $\tilde{\varepsilon}_i$ *et* $\tilde{r}_T$ *sont non corrélés*
  - $\text{Var}[\tilde{r}_i] = \text{Var}[\beta_{iT}\tilde{r}_T] + 2\cancel{\text{Cov}[\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{r}_T]} + \text{Var}[\tilde{\varepsilon}_i]$
- $\text{Var}[\tilde{r}_i] = \beta_{iT}^2\text{Var}[\tilde{r}_T] + \text{Var}[\tilde{\varepsilon}_i]$ ou $\sigma_i^2 = \beta_{iT}^2\sigma_T^2 + \text{Var}[\tilde{\varepsilon}_i]$
  - *Décomposition du risque*
  - $\tilde{\varepsilon}_i = \tilde{r}_i - \beta_{iT}\tilde{r}_T$. $\boldsymbol{\tilde{\varepsilon}_i}$ ***: risque résiduel***

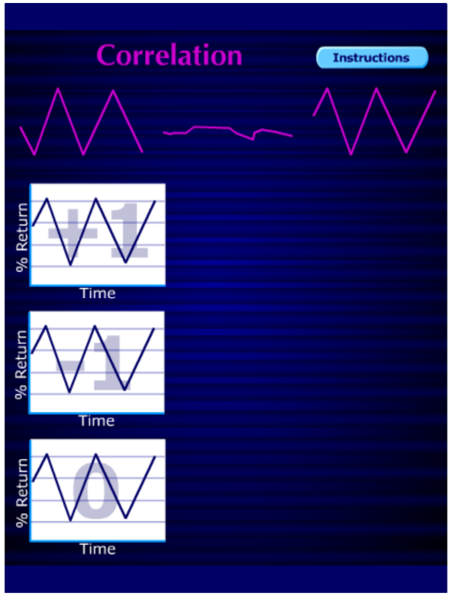
## *La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire*

**Corrélation positive**

**Corrélation négative**



## *Le concept de corrélation*




**Source, Columbia preMBA finance**

**Exercice**
- **corrélation positive parfaite**
- **Corrélation négative parfaite**
- **Pas de corrélation**



## *La théorie du portefeuille : écart-type du taux de rentabilité*

- Rentabilité d'un portefeuille
  - $\boldsymbol{R_P = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2, \omega_1 + \omega_2 = 1}$
    - $\boldsymbol{\omega_1}$ fraction de la richesse investie dans le titre 1
- Écart-type de la rentabilité d'un portefeuille
  - $\boldsymbol{\sigma[R_P] = \sigma_P, \sigma[R_1] = \sigma_1, \sigma[R_2] = \sigma_2,}$
- $\boldsymbol{\sigma_P = \sqrt{\omega_1^2\sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \omega_2^2\sigma_2^2}}$
  - $\boldsymbol{\rho_{12}}$ *est le **coefficient de corrélation linéaire** entre* $\boldsymbol{R_1}$ *et* $\boldsymbol{R_2}$
  - $\boldsymbol{-1 \leq \rho_{12} \leq 1}$
- $\boldsymbol{\sigma_P}$ dépend de $\boldsymbol{\rho_{12}}$ qui mesure le degré de liaison entre $\boldsymbol{R_1}$ et $\boldsymbol{R_2}$



## *La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire*

- Si $\boldsymbol{\rho_{12} > 0}$, les prix des actions 1 et 2 tendent à varier dans le même sens
  - *C'est le cas le plus fréquent*
- Si $\boldsymbol{\rho_{12} < 0}$, les prix des actions 1 et 2 tendent à varier dans des sens opposés
  - *Cas rare (parapluies et crèmes solaires)*
- Si les prix des actions varient de manière indépendante, alors $\boldsymbol{\rho_{12} = 0}$

## La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

- Coefficient de corrélation linéaire entre $R_1$ et $R_2$
- $\rho_{12} = E\left[\left(\frac{R_1-E_1}{\sigma_1}\right) \times \left(\frac{R_2-E_2}{\sigma_2}\right)\right]$
  - $\frac{R_1-E_1}{\sigma_1}$ : *rentabilité centrée réduite du titre* **1**
- Mesure de la tendance des rentabilités à varier dans le même sens ou en sens inverse
- Le coefficient de corrélation linéaire a une valeur comprise entre $-1$ et $+1$ : $-1 \leq \rho_{12} \leq +1$



## La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

- Illustrations numériques $\rho_{12} = E\left[\left(\frac{R_1-E_1}{\sigma_1}\right) \times \left(\frac{R_2-E_2}{\sigma_2}\right)\right]$
  - *Titre* 1
    - Rentabilités du titre **1** les 4 dernier jours : $+1\%, -1\%, -1\%, +1\%$
    - Probabilités assignées à chacune de ces quatre journées = $1/4$
    - On rappelle que $E_1 = 0\%, \sigma_1 = 1\%$
    - Ici $\frac{R_1-E_1}{\sigma_1} = R_1$
  - *Titre* **2**
    - Rentabilités du titre **2** les 4 dernier jours : $+1\%, -1\%, -1\%, +1\%$
    - Probabilités assignées à chacune de ces quatre journées = $1/4$
    - On remarque que $R_2 = R_1$
  - $\rho_{12} = 1/4 \times (1 \times 1) + 1/4 \times (-1 \times -1) + 1/4 \times (-1 \times -1) + 1/4 \times (1 \times 1) = +1$



## La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

- Illustrations numériques $\rho_{12} = E\left[\left(\frac{R_1-E_1}{\sigma_1}\right) \times \left(\frac{R_2-E_2}{\sigma_2}\right)\right]$
    - Rentabilités du titre **1** les 4 dernier jours : $+1\%, -1\%, -1\%, +1\%$
  - *Les rentabilités du titre* **2** *sont maintenant égales à :*
  - $+2\%, -2\%, -2\%, +2\%$
    - On sait que $E_2 = 0\%, \sigma_2 = 2\%$
    - Les valeurs des rentabilités du titre 2 après centrage et réduction sont : $\frac{R_2-E_2}{\sigma_2} = +1\%, -1\%, -1\%, +1\%$
    - Ces valeurs normalisées sont identiques à celle du titre 2 dans le transparent précédent
  - *Le calcul du coefficient de corrélation est identique*
  - $\rho_{12} = 1/4 \times (1 \times 1) + 1/4 \times (-1 \times -1) + 1/4 \times (-1 \times -1) + 1/4 \times (1 \times 1) = +1$



## La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

- Illustrations numériques $\rho_{12} = E\left[\left(\frac{R_1-E_1}{\sigma_1}\right) \times \left(\frac{R_2-E_2}{\sigma_2}\right)\right]$
    - Rentabilités du titre **1** les 4 dernier jours :
    - $+1\%, -1\%, -1\%, +1\%$
    - Les rentabilités du titre **2** sont maintenant égales à :
    - $-1\%, +1\%, +1\%, -1\%$
    - On sait que $E_2 = 0\%, \sigma_2 = 1\%$
    - Les valeurs des rentabilités du titre 2 après centrage et réduction sont : $\frac{R_2-E_2}{\sigma_2} = R_2 = -R_1 = -1\%, +1\%, +1\%, -1\%$
  - *Le calcul du coefficient de corrélation donne :*
  - $\rho_{12} = 1/4 \times (1 \times -1) + 1/4 \times (-1 \times 1) + 1/4 \times (-1 \times 1) + 1/4 \times (1 \times -1) = -1$

## La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

- Illustrations numériques $\boldsymbol{\rho_{12} = E\left[\left(\frac{R_1 - E_1}{\sigma_1}\right) \times \left(\frac{R_2 - E_2}{\sigma_2}\right)\right]}$
  - Rentabilités du titre **1** les 4 dernier jours :
  - $\boldsymbol{+1\%, -1\%, -1\%, +1\%}$
  - Les rentabilités du titre **2** sont maintenant égales à :
  - $\boldsymbol{+1\%, -1\%, +1\%, -1\%}$
  - On vérifie que $\boldsymbol{E_2 = 0\%, \sigma_2 = 1\%}$
  - Les valeurs des rentabilités du titre 2 après centrage et réduction sont : $\boldsymbol{\frac{R_2 - E_2}{\sigma_2} = R_2 = +1\%, -1\%, +1\%, -1\%}$
- *Le calcul du coefficient de corrélation donne*
- $\boldsymbol{\rho_{12} = 1/4 \times (1 \times 1) + 1/4 \times (-1 \times -1) + 1/4 \times (-1 \times 1) + 1/4 \times (1 \times -1) = 0}$



## La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire

**On peut obtenir différentes valeurs du coefficient de corrélation $\boldsymbol{\rho_{12}}$ alors même que $\boldsymbol{E_1, E_2, \sigma_2, \sigma_2}$ sont identiques**

- Dernier exemple
  - Rentabilités du titre **1** les 6 dernier jours :
  - $\boldsymbol{+1\%, -1\%, -1\%, +1\%, -1\%, +1\%}$
  - Les rentabilités du titre **2** sont maintenant égales à :
  - $\boldsymbol{+1\%, -1\%, -1\%, -1\%, +1\%, +1\%}$
  - On vérifie que $\boldsymbol{E_2 = E_1 = 0\%, \sigma_2 = \sigma_1 = 1\%}$
  - Les valeurs des rentabilités du titre 2 après centrage et réduction sont : $\boldsymbol{\frac{R_2 - E_2}{\sigma_2} = R_2 = +1\%, -1\%, -1\%, -1\%, +1\%, +1\%}$
- *Le calcul du coefficient de corrélation donne*
- $\boldsymbol{\rho_{12} = 1/6 \times (1 \times 1) + 1/6 \times (-1 \times -1) + 1/6 \times (-1 \times -1) + 1/6 \times (1 \times -1) + 1/6 \times (-1 \times 1) + 1/6 \times (1 \times 1) = 0,33}$
- *Ici, les rentabilités des titres 1 et 2 sont identiques 4 jours sur 6, et opposées les deux autres jours.*



## Théorie du portefeuille : diversification, illustration numérique

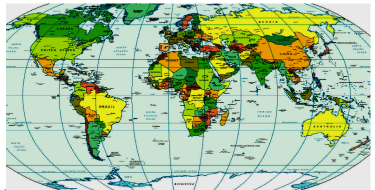
- *Reprenons un de nos exemples précédents avec deux titres*
  - Rentabilités du titre **1** les 4 dernier jours égales à :
  - $\boldsymbol{+1\%, -1\%, -1\%, +1\%, E_1 = 0\%, \sigma_1 = 1\%}$
  - Rentabilités du titre **2** les 4 dernier jours égales à :
  - $\boldsymbol{+1\%, -1\%, +1\%, -1\%, E_2 = 0\%, \sigma_2 = 1\%}$

$\boldsymbol{\rho_{12} = 0}$

- *Considérons un portefeuille équipondéré* $\boldsymbol{\omega_1 = \omega_2 = 0,5}$
  - Les rentabilités sont données par $\boldsymbol{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2}$
  - $\boldsymbol{+1\%, -1\%, 0\%, 0\%}$
  - L'espérance de rentabilité est $\boldsymbol{\omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 = 0\%}$
  - La variance du taux de rentabilité est égale à $\boldsymbol{1/4 \times (1)^2 + 1/4 \times (-1)^2 + 1/4 \times 0^2 + 1/4 \times 0^2 = 1/2}$
  - L'écart-type est égal à $\boldsymbol{1/\sqrt{2} \approx 0,71\%}$
  - Diminution du risque sans diminution de l'espérance de rentabilité
  - Cette diminution du risque n'est effective que les 2 dernières journées



## coefficient de corrélation linéaire

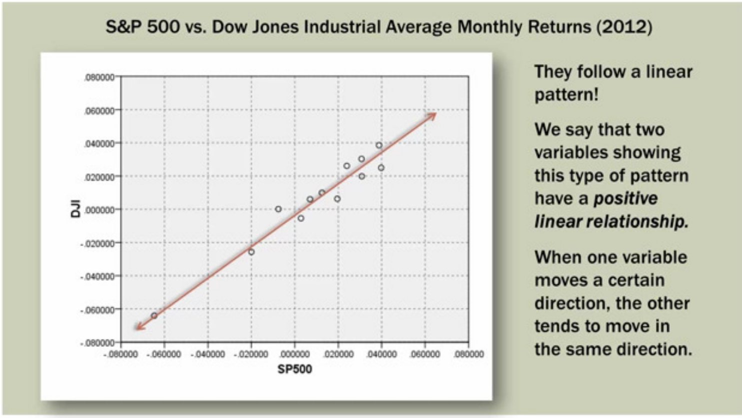


- Prix non synchrones : perturbations dans les calculs
  - *Ajustements statistiques à prévoir pour estimations non biaisées*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Spanish Stock Exchange (BME) | CET (UTC+1, DST) | 9:00 | 08:00 | 17:30 | No |
| Helsinki Stock Exchange (OMX) | EET (UTC+2, DST) | 10:00 | 08:00 | 18:30 | No |
| Hong Kong Stock Exchange (HKEX) | HKT (UTC+8) | 09:20 | 01:20 | 16:00 | 12:00 to 13:30 |
| Hong Kong Futures Exchange (HKFE) | HKT (UTC+8) | 09:15 | 01:15 | 16:00 | 12:00 to 13:30 |
| Bombay Stock Exchange (BSE) | IST (UTC+5.5) | 9:15 | 03:45 | 15:30 | No |
| National Stock Exchange of India (NSE) | IST (UTC+5.5) | 9:15 | 03:45 | 15:30 | No |

# *La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire*

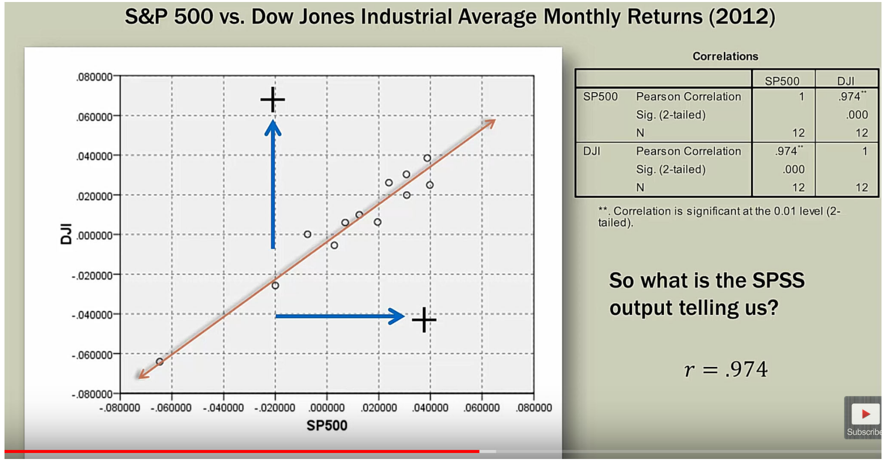
**Corrélation positive : pente positive (mais pente ≠ correlation, mais Bêta)**




Statistics 101: Understanding Correlation
Youtube : https://youtu.be/4EXNedimDMs (affichage de sous-titres)



# *La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire*




| | | SP500 | DJI |
|---|---|---|---|
| SP500 | Pearson Correlation | 1 | .974** |
| | Sig. (2-tailed) | | .000 |
| | N | 12 | 12 |
| DJI | Pearson Correlation | .974** | 1 |
| | Sig. (2-tailed) | .000 | |
| | N | 12 | 12 |

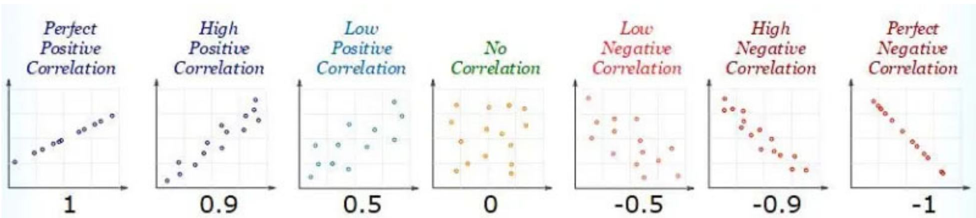
**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

**Ici, coefficient de corrélation linéaire** $= 0.974$



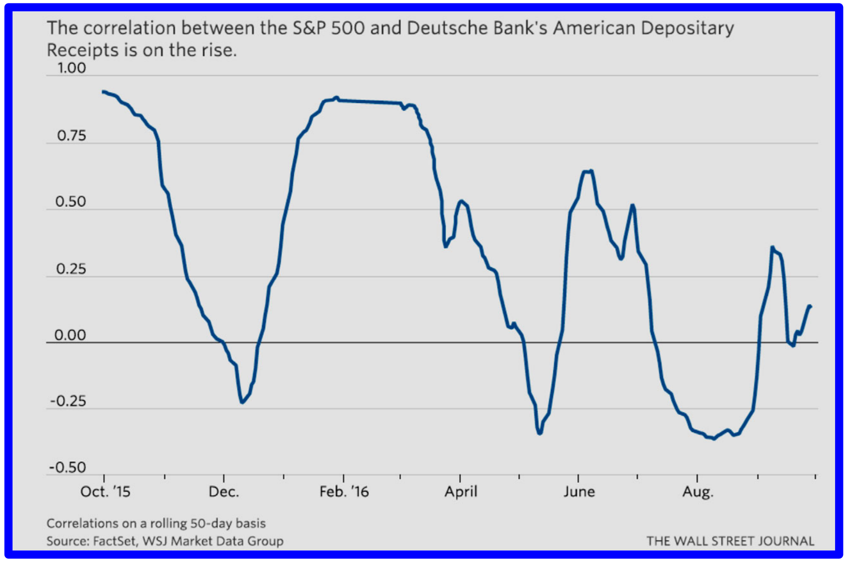
# *La théorie du portefeuille : coefficient de corrélation linéaire*

- A chaque point est associé une date
  - *En abscisse la rentabilité d'un titre à cette date*
  - *En ordonnée, la rentabilité de l'autre titre*




  - *Plus le nuage de point est allongé, plus le coefficient de corrélation linéaire (sa valeur absolue) est élevé.*
    - On a supposé dans le graphique ci-dessus qu'il y a des relations linéaires entre les deux rentabilités.

## Corrélation entre la rentabilité de l'indice S&P500 et de l'action Deutsche Bank (calculée en $) fluctue entre 90% et -30%




**Fin septembre 2015 – Fin septembre 2016, calculée sur 50 jours glissants**



## Bloomberg (août 2019), à propos du changement de signe de la corrélation entre les rentabilités des actions et des obligations

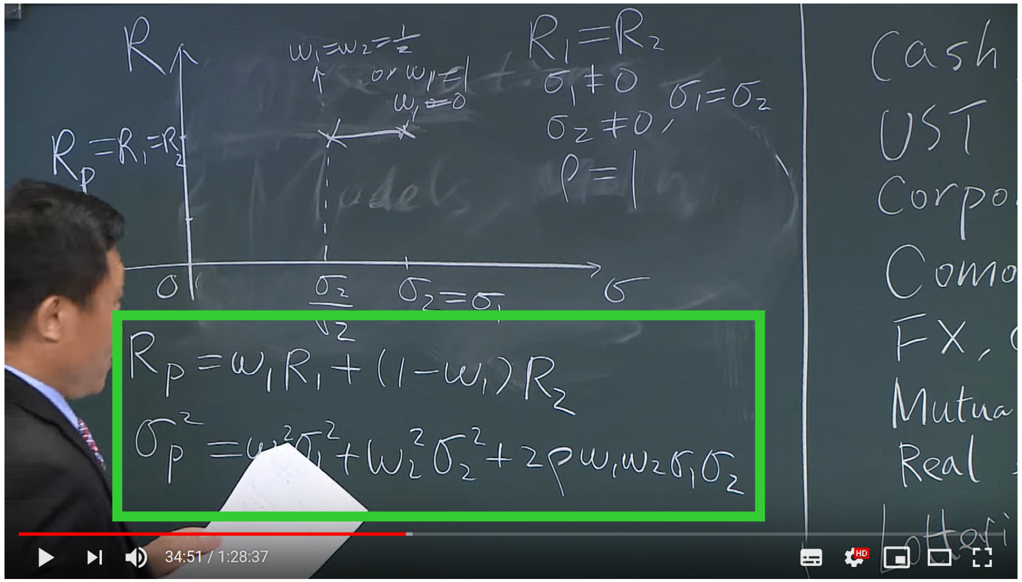

https://www.youtube.com/watch?v=73wgRVkAU5I



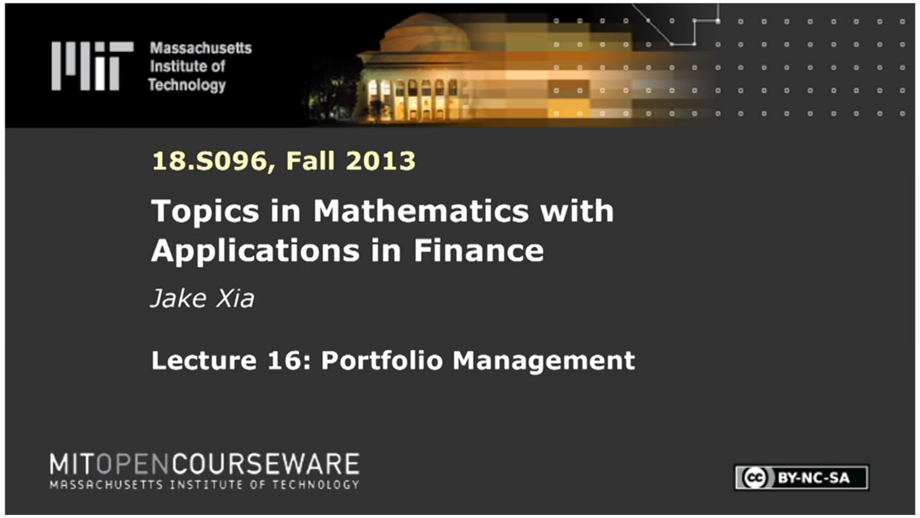
## Ecart-type de la rentabilité d'un portefeuille composé de deux actifs

$$\boxed{\sigma_P = \sqrt{\omega_1^2\sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \omega_2^2\sigma_2^2}}$$



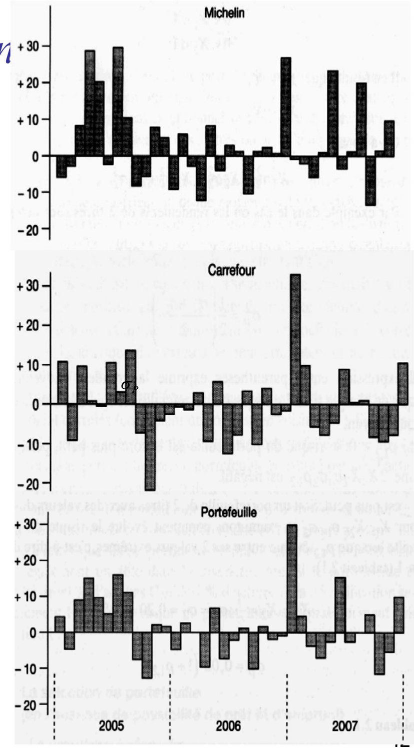
## MIT Open Course




https://www.youtube.com/watch?v=8TJQhQ2GZ0Y (lecture en streaming dans youtube permet d'afficher les sous-titres)



## *Le concept de diversification*




- *Actions Michelin (1), Carrefour (2)*

$\sigma_1 = 35\%, \sigma_2 = 42\%$

- *Coefficient de corrélation :*

$\rho_{12} = 0,32$

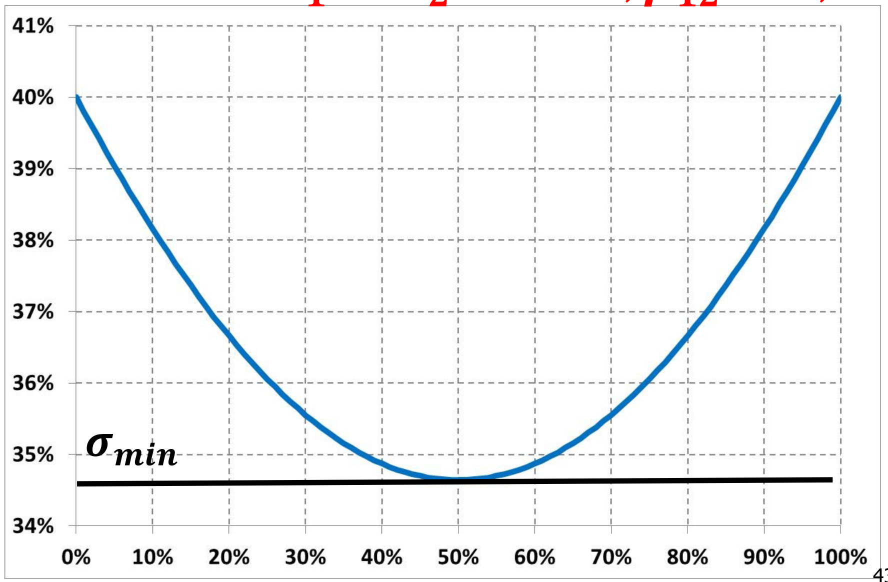
$\omega_1 = \omega_2 = 50\%$

$\sigma_P = 30\%$

- *$\sigma_P$, le risque d'un portefeuille équipondéré n'est que de* **30%**

## En bleu, $\omega_1 \to \sigma_P(\omega_1)$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 40\%, \rho_{12} = 0,5$






## *Ensembles des portefeuilles composés des titres 1 et 2 (différents niveaux de corrélation)*

- Impact du coefficient de corrélation sur le niveau de risque d'un portefeuille
- Exemple :
  - $\sigma_1 = 25\%, \sigma_2 = 15\%, E_1 = E_2 = 15\%$
  - $\omega_1 = 50\%, \omega_2 = 1 - \omega_1 = 50\%$
  - $\sigma_P^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + 2\rho_{1,2}\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2 + \omega_2^2\sigma_2^2$

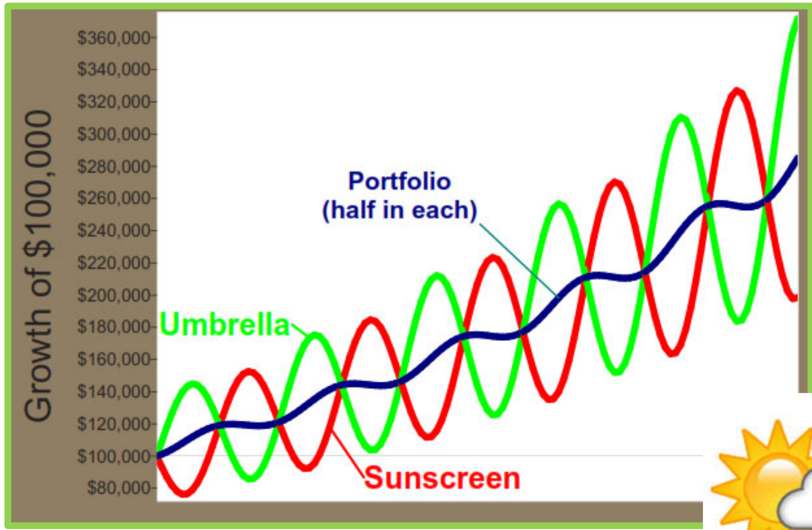
| $\rho_{1,2}$ | -100% | -50% | 0% | 50% | 100% |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_P$ | 5% | 11% | 15% | 18% | 20% |
| $E_P$ | 15% | 15% | 15% | 15% | 15% |

  - $E_P = \omega_1 E_1 + \omega_2 E_2$

## La compagnie verte vend des parapluies
## la compagnie rouge des crèmes solaires



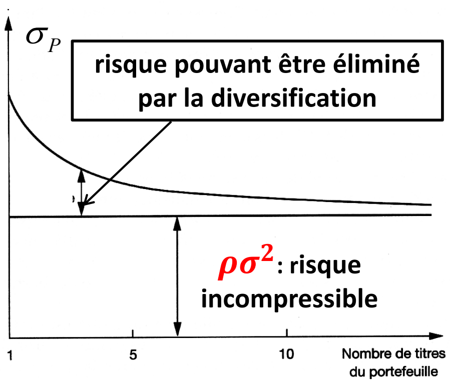
## En fusionnant ces deux entreprises, les résultats sont plus stables






## *Réduction du risque avec le nombre de titres dans le portefeuille*

- ***Variance du portefeuille*** $\sigma_P^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \rho\sigma^2 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$
- $\boldsymbol{\sigma_P^2}$ *décroit avec le nombre de titres n*
- $\boldsymbol{\sigma^2}$ *variance d'un titre,*
- $\boldsymbol{\rho}$ *: coefficient de corrélation*
- *Risque incompressible* $\boldsymbol{\rho\sigma^2}$






## *Réduction du risque avec le nombre de titres dans le portefeuille*

| Nombre de titres | Réduction du risque en % du potentiel |
|---|---|
| 1 | 0 % |
| 2 | 34,6 % |
| 3 | 51,5 % |
| 4 | 61,4 % |
| 5 | 73,9 % |
| 10 | 85,7 % |
| 12 | 91,5 % |
| 15 | 96,7 % |
| 20 | 98,2 % |
| 30 | 98,4 % |

*Source* : Pogue et Solnik (1974).

**Réduction rapide du risque en fonction du nombre de titres**

**Avec 20 titres, 98% du risque diversifiable est éliminé**

## Démonstration du résultat précédent

$I$: Nombre de titres

- *Rappel* $$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \rho_{ij}\omega_i\omega_j\sigma_i\sigma_j$$
- *Titres symétriques* $$\rho_{ij} = \rho, i, j = 1, \dots, n \qquad \sigma_i = \sigma, i = 1, \dots, n$$
- *Portefeuille équipondéré* $\boldsymbol{\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n}$
- *Comme* $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1, \omega_i = 1/n, i = 1, \dots, n}$

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma^2}{n^2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)}_{=n} + \frac{\rho\sigma^2}{n^2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1, j\neq i}^{n} 1}_{=n-1}\right)}_{=n\times(n-1)} = \frac{\sigma^2}{n} + \rho\sigma^2 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$



## Théorie du portefeuille : diversification

- Risques non « diversifiables » ?
- Le tableau ci-contre montre qu'une « mauvaise année »
  - *Comme 2008*
- Les performances des actifs risqués peuvent être fortement négatives
  - *Uniformément négative*
  - *Par taille*
  - *Par zone géographique*
  - *Par secteur d'activité*
- Ceci ne remet pas en cause le principe de diversification

**Indices Paris**

| Libellé | Dernier | Var. | Var/1janv |
|---|---|---|---|
| CAC 40 | 3 329.92(c) | +4.68 % | -40.69 % |
| CAC MID&SMALL 1 | 4732.55(c) | +0.19 % | -38.91 % |
| SBF 120 | 2 392.03(c) | +4.23 % | -41.09 % |

**Indices Internationaux**

| Libellé | Dernier | Var. | Var/1janv |
|---|---|---|---|
| Dax Xetra | 4 781.33(c) | +3.43 % | -40.73 % |
| Dow Jones | 8 852.22(c) | -1.41 % | -33.27 % |
| Euro Stoxx 50 | 2 532.17(c) | +4.47 % | -42.45 % |
| Footsie 100 | 4 063.01(c) | +5.22 % | -37.07 % |
| Nasdaq Comp. | 1 711.29(c) | -0.37 % | -35.48 % |
| Nikkei 225 | 8 693.82(c) | +2.78 % | -43.21 % |

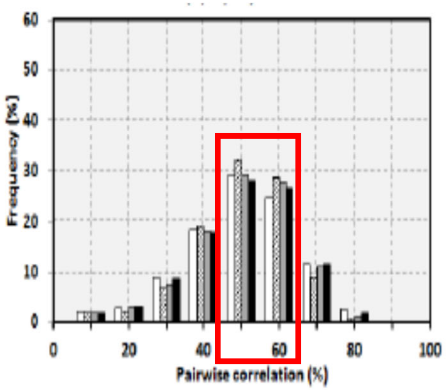
**Indices sectoriels Paris**

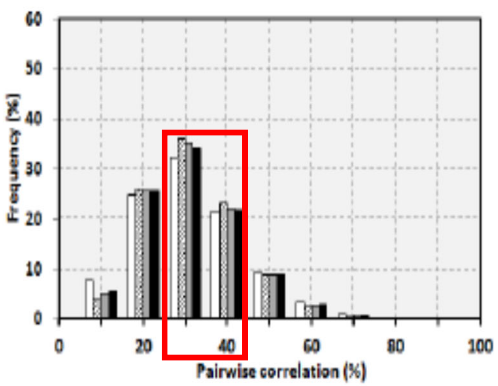
| Libellé | Dernier | Var. | Var/1janv |
|---|---|---|---|
| Biens de consommat | 799.40(c) | +3.23% | -40.68 % |
| Hygiène santé phar | 673.13(c) | +6.97% | -30.84% |
| Industries | 702.77(c) | +0.62% | -49.27 % |
| Matériaux de base | 1 232.13(c) | +4.74% | -49.23 % |
| Pétrole & Gaz | 684.52(c) | +8.82% | -38.02 % |
| Services | 696.50(c) | +4.83% | -42.48 % |
| Services aux colle | 1 114.92(c) | +6.79% | -42.73 % |
| Sociétés financièr | 639.62(c) | +1.12% | -41.56 % |
| Télécommunications | 988.30(c) | +4.75% | -15.14% |
| Technologie | 448.78(c) | +4.13% | -41.14% |



## Théorie du portefeuille : diversification

- En période de crise financière, les corrélations tendent à être plus élevées
  - *120 plus grandes entreprises européennes*
  - *Corrélations en 2008 et en 2013*






## Théorie du portefeuille : diversification

- Risques non diversifiables ?
- Facteurs économiques communs
  - *Sources de risque affectant simultanément tous les secteurs de l'économie*
- Contagion
  - *Propagation d'une difficulté locale à l'ensemble de l'économie*

## *Théorie du portefeuille : diversification*

- La diversification des portefeuilles permet de réduire le risque
- Sans diminution de l'espérance de rentabilité
- Elle a des limites : risque incompressible
- La tendance à la diversification internationale et l'interconnexion des économies rendent les krachs financiers globaux



## *Risques et diversification des risques*

- Capital Humain = VAN des revenus futurs issus de l'activité professionnelle
  - *Le principal actif, aucune diversification*
  - *Peut être très risqué (entrepreneurs, professions libérales, banquiers d'affaires, artistes, sportifs)*
- Résidence principale
  - *À nouveau beaucoup de risque, d'autant plus que le financement par endettement est élevé*
  - *Concentration du risque*
- Pourquoi ?
  - *Tolérance au risque, biais d'optimisme, normes sociales (effets de distinction).*



## *Risques et diversification des risques*

- Actifs financiers
  - *Les riches diversifient beaucoup mieux leur patrimoine financier*
  - *Ils ont aussi plus d'actifs financiers (en proportion de leur patrimoine).*
  - *Home bias : diversification internationale insuffisante*
    - Fiscalité ? Prescripteurs ? Peur de l'étranger ?
  - *Les seniors prennent plus de risques que les jeunes*
    - À richesse donnée
    - Sachant que qu'il y a beaucoup plus de seniors riches que de jeunes riches
    - Contraire à la théorie ?



## *Risques et diversification des risques*

- Pour de nombreuses entreprises à l'actionnariat diversifié, pas d'intérêt clair à diversifier les risques
  - *Les risques sont transmis aux actionnaires qui peuvent les diversifier.*
  - *Fin des conglémérats financiers (ITT)*
  - *Même s'il existe des pratiques de couverture financière ou d'assurance des risques industriels (transferts de risque)*
- Sauf le cas d'entreprises patrimoniales ou familiales
  - *Quelques actionnaires importants*
  - *On revient au cas des particuliers*