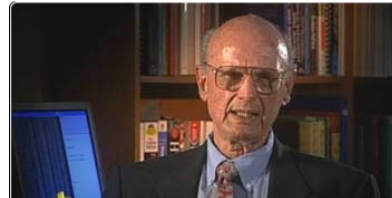


Cours de Finance

Choix de portefeuille, Capital Market Line



Harry Markowitz

Some investments do have higher expected returns than others. Which ones? Well, by and large they're the ones that will do the worst in bad times?

William Sharpe



Choix de portefeuille, Capital Market Line

- **Frontière efficiente des actifs risqués**
 - *Préférences des investisseurs*
 - *Concept de frontière efficiente*
 - *Concavité de la frontière efficiente*
- Capital Market Line (CML)
 - *Portefeuille risqué + actif sans risque*
 - *Portefeuille tangente, choix optimal de portefeuille, CML*
 - *Portefeuille de marché, ratio de Sharpe*

2

Choix de portefeuille, Capital Market Line

- Préférences moyenne-variance
- Combinaison de deux titres risqués
- Frontière efficiente des actifs risqués
- Allocation de portefeuilles : gestion institutionnelle
- Allocation de portefeuilles : gestion privée
- Allocation de portefeuilles : particuliers
- Actif sans risque et actif risqué
- Portefeuille tangente, séparation en deux fonds, CML, ratio de Sharpe
- Frontière efficiente : exercices, compléments
- Les pères fondateurs (vidéos)

3

Choix de portefeuille, Capital Market Line

- **Objectifs pédagogiques**
- Comprendre comment classer des portefeuilles dans le plan (écart-type des rentabilités, rentabilité attendue)
- Comprendre le concept de frontière efficiente
- Savoir représenter les portefeuilles formés d'un actif sans risque et d'un actif risqué
- Comprendre le concept de portefeuille tangente
- Savoir ce que représente la CML, le ratio de Sharpe, le théorème de séparation en deux fonds
- Pourquoi le portefeuille tangente est le portefeuille de marché

4

Préférences des investisseurs

$$\sum_j u(y_j) P(y_j).$$

■ Approches normatives et positives

- *Espérance d'utilité de la valeur du portefeuille*
 - Von Neumann et Morgenstern (1944)
- *Distorsion des probabilités*
 - Approche duale de Yaari (1987)
- *Théorie des perspectives*
 - Kahneman et Tverski (1979)
- *Finance comportementale*
- *Préférences moyenne-variance*
 - Cadre d'analyse le plus classique et le plus simple pour analyser les choix de portefeuille
 - Utilisé dans un cadre professionnel
 - Cohérence avec le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)



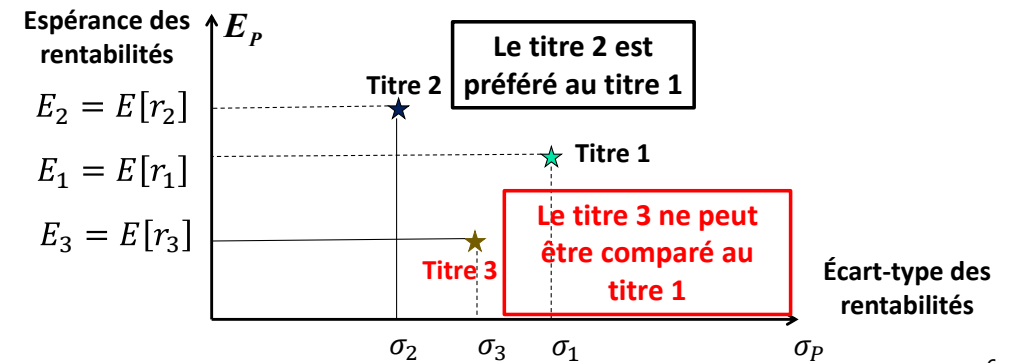
5

Préférences des investisseurs



■ Plan « moyenne écart-type »

- Un investisseur préfère un portefeuille d'espérance de rentabilité plus élevée à niveau d'écart-type donné
- Un investisseur préfère un portefeuille d'écart-type de rentabilité plus faible à niveau d'espérance donné



6

Préférences des investisseurs



- Toutes choses égales par ailleurs, **un investisseur préfère détenir une action dont l'espérance de rentabilité est élevée.**
 - D'autres motifs peuvent intervenir dans les choix
 - Développement durable, responsabilité sociale des entreprises
- L'écart-type est une mesure du risque pris.
 - Plus l'écart-type de la rentabilité est élevé, plus les rentabilités sont dispersées
 - Il existe d'autres mesures des risques pris, mais l'écart-type reste la plus populaire et la plus maniable
- On considère qu'**un investisseur préfère détenir une action dont l'écart-type de rentabilité est faible**

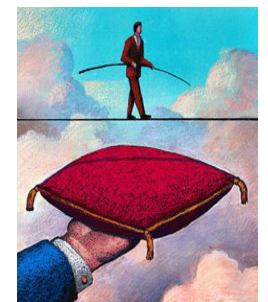
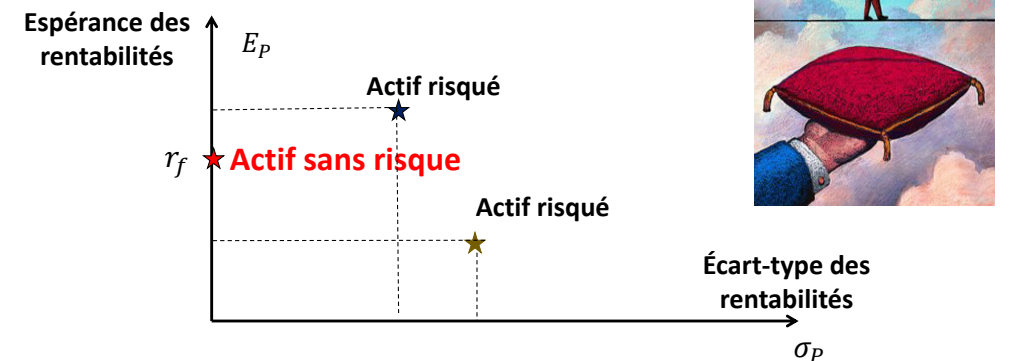
7

Préférences des investisseurs



■ Actif / placement sans risque

- *Titre dont la rentabilité est certaine* : écart-type de la rentabilité = 0
- On note sa rentabilité r_f (Risk-free)



8

Préférences des investisseurs

- On supposera que les investisseurs sont **averses vis-à-vis du risque**
 - Dans notre formalisme, à espérance de taux de rentabilité donné
 - Les investisseurs préfèrent un portefeuille dont la rentabilité a un écart-type (risque) plus faible
 - En microéconomie, l'aversion vis-à-vis du risque est associée au caractère concave de la fonction d'utilité

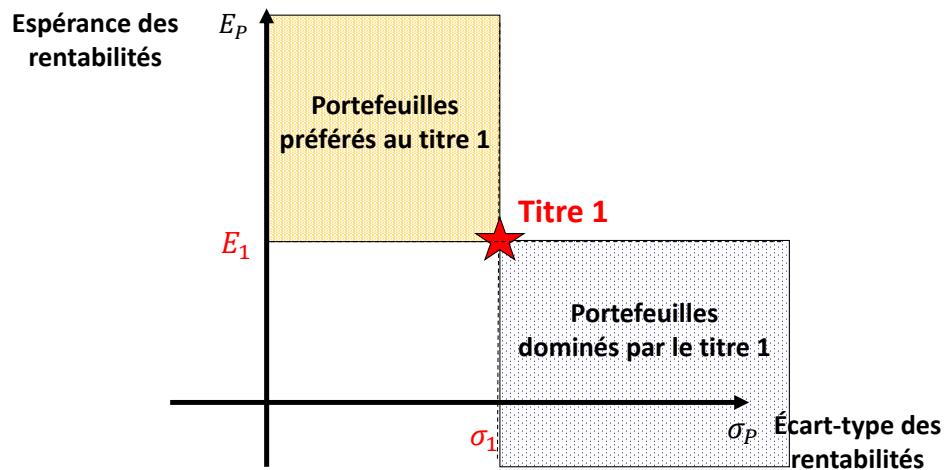


9



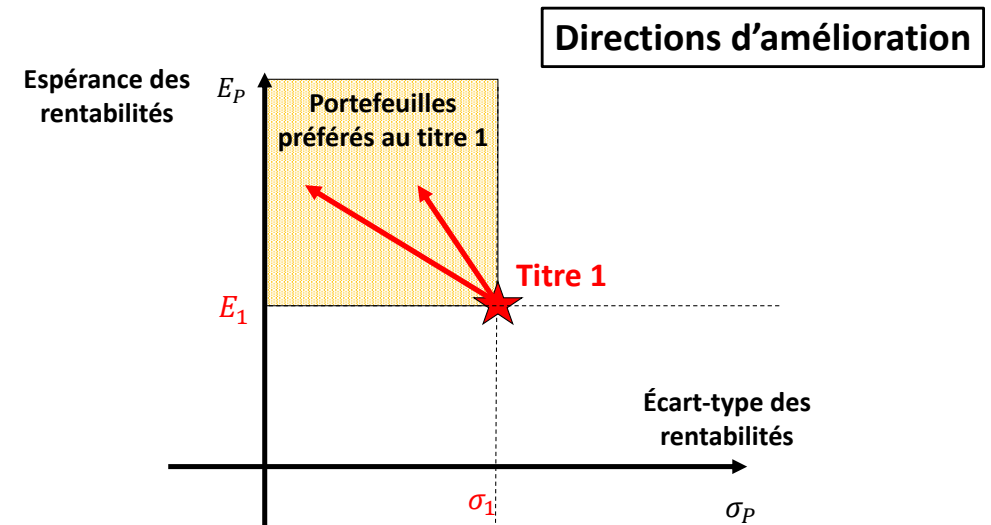
Harry Markowitz

Préférences des investisseurs



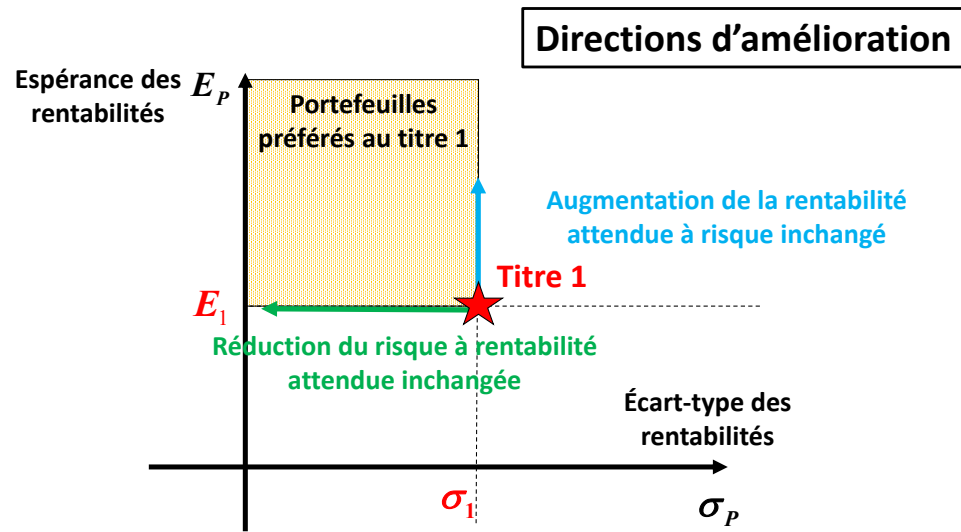
11

Préférences des investisseurs



12

Préférences des investisseurs



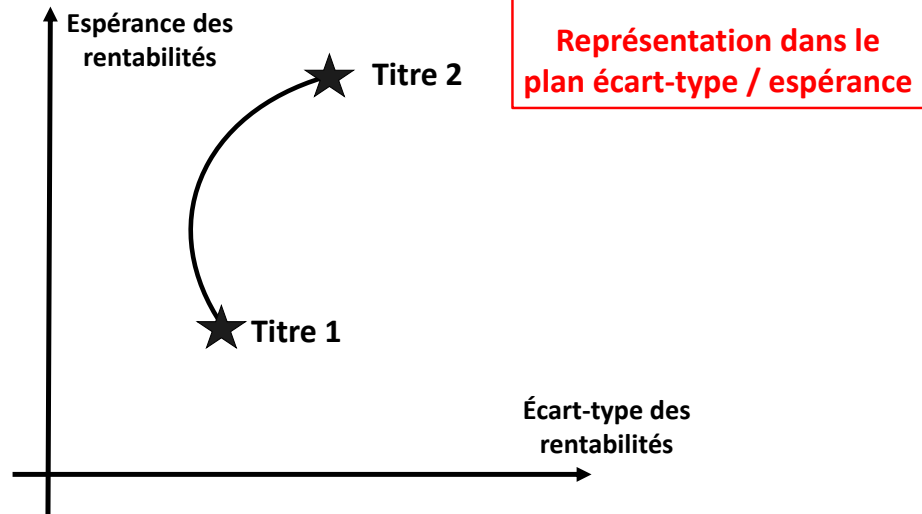
13

14

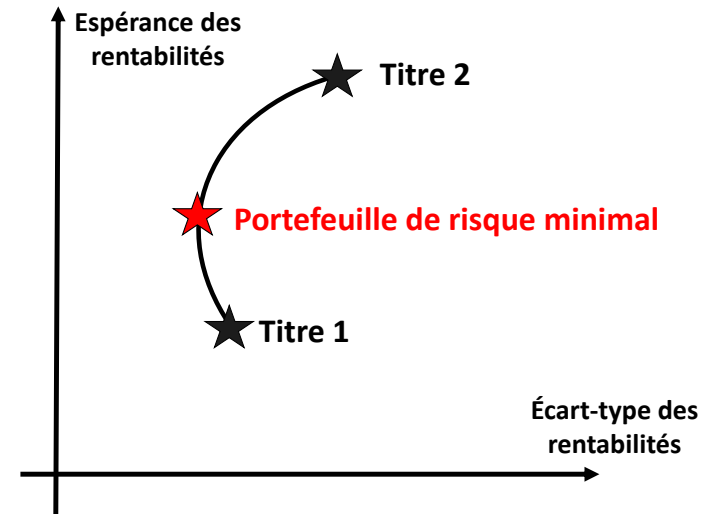
15

16

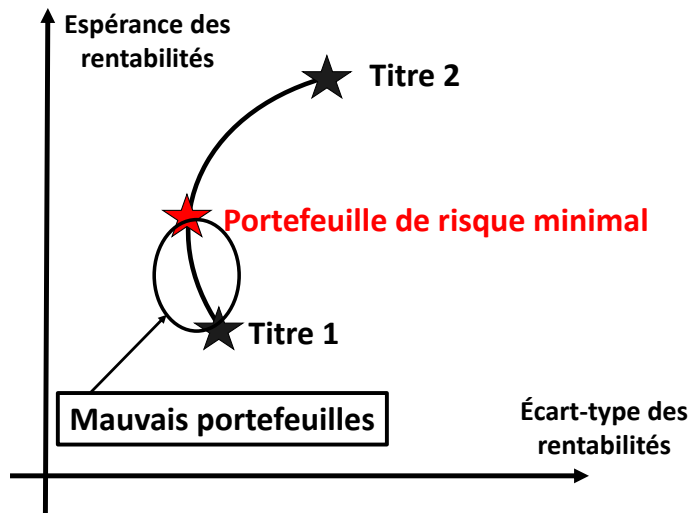
Frontière efficiente



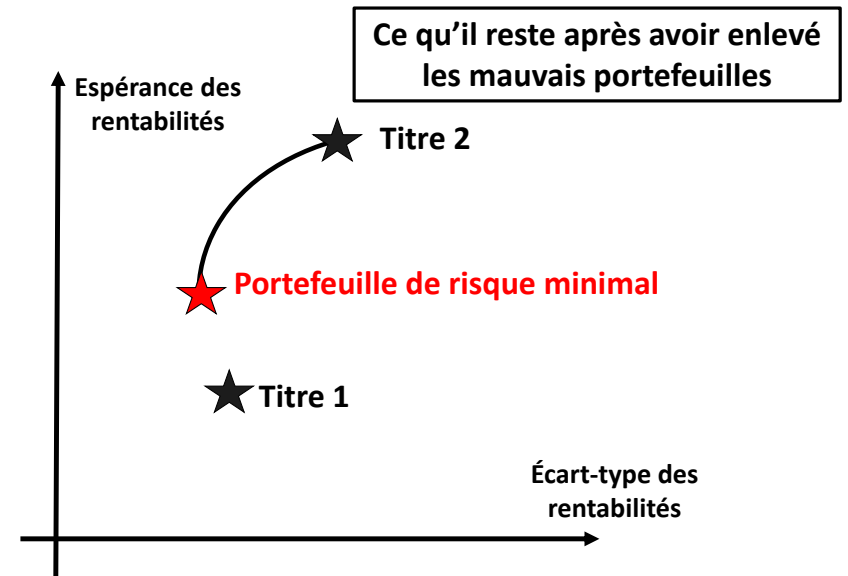
Frontière efficiente



Frontière efficiente



Frontière efficiente



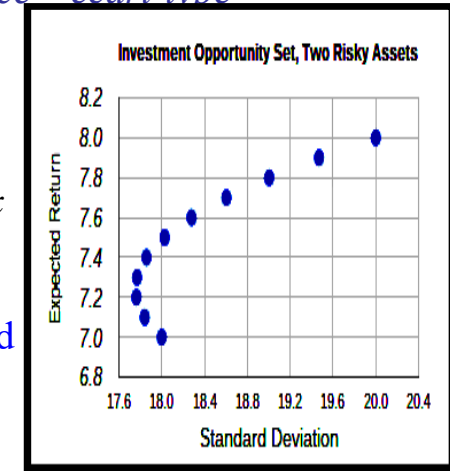
Frontière efficiente des actifs risqués

- Rappel : espérance (rentabilité attendue) et variance de la rentabilité d'un portefeuille composé de deux titres
 - Ou deux portefeuilles 1,2
 - E_1, E_2 : rentabilités attendues de 1,2
 - x_1 : part de la richesse investie dans 1
 - $E_P(x_1)$: espérance de rentabilité de P
- $E_P(x_1) = E_2 + x_1 \times (E_1 - E_2)$
 - Fonction affine de x_1
 - σ_1, σ_2 : écart-types des rentabilités de 1,2
 - ρ_{12} : coefficient de corrélation linéaire entre les rentabilités
 - $\sigma_P^2(x_1)$: variance de la rentabilité de P
- $\sigma_P^2(x_1) = x_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho_{12} x_1 (1 - x_1) \sigma_1 \sigma_2 + (1 - x_1)^2 \sigma_2^2$
 - Fonction quadratique de x_1

21

Représentation des portefeuilles constitués des titres 1 et 2 dans le plan espérance – écart-type

- En *abscisse* l'écart-type du taux de rentabilité du portefeuille $\sigma_P(x_1)$
- En *ordonnée* l'espérance du taux de rentabilité du portefeuille $E_P(x_1)$
- À chaque point bleu correspond une valeur particulière de x_1



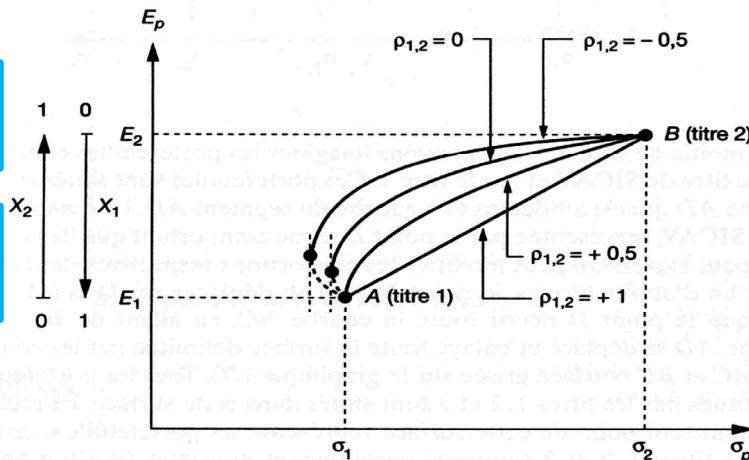
$$E_P(x_1) = E_2 + x_1 \times (E_1 - E_2)$$

$$\sigma_P^2(x_1) = x_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho_{12} x_1 (1 - x_1) \sigma_1 \sigma_2 + (1 - x_1)^2 \sigma_2^2$$

22

Ensembles des portefeuilles composés des titres 1 et 2 (différents niveaux de corrélation)

- x_1 proportion de la richesse investie dans le titre 1
- x_2 proportion de la richesse investie dans le titre 2
- $0 \leq x_1 \leq 1$
- $0 \leq x_2 \leq 1$

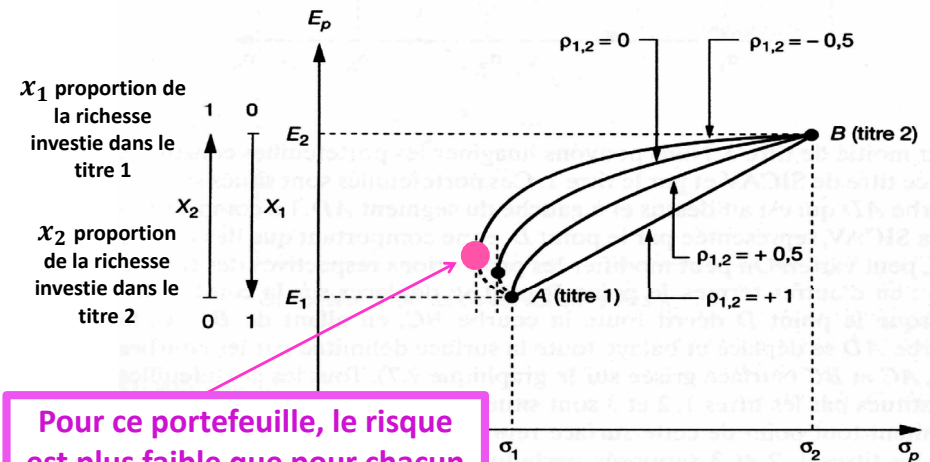


Chaque courbe représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2 pour un niveau de corrélation $\rho_{1,2}$ donné

23

La théorie du portefeuille

Graphique 2.6 – Portefeuilles de 2 titres – Rôle du coefficient de corrélation $\rho_{1,2}$ $0 \leq x_1 \leq 1$



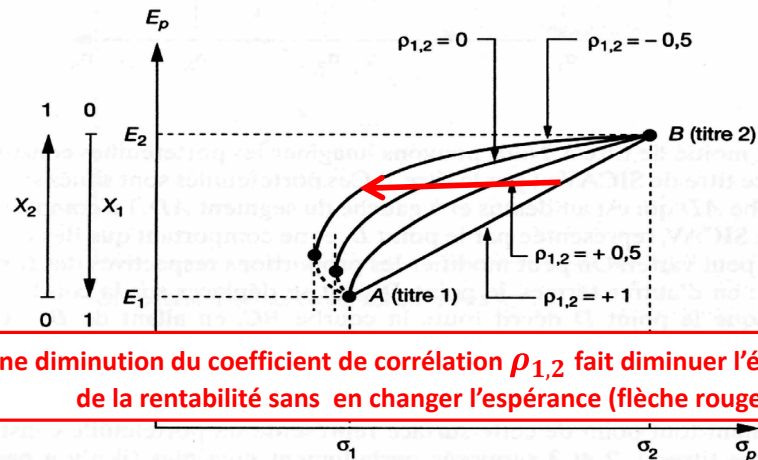
Pour ce portefeuille, le risque est plus faible que pour chacun des titres pris isolément

24

Ensembles des portefeuilles composés des titres 1 et 2 (différents niveaux de corrélation)

$$E_P = x_1 E_1 + x_2 E_2, \quad x_1 + x_2 = 1$$

$$\sigma_P^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho_{1,2} x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 + x_2^2 \sigma_2^2$$



Une diminution du coefficient de corrélation $\rho_{1,2}$ fait diminuer l'écart-type de la rentabilité sans en changer l'espérance (flèche rouge)

25

Frontière efficiente d'un ensemble de titres

- On considère un « univers » (ensemble donnée) de n titres « risqués »
 - écarts-types des rentabilités > 0
 - Rentabilités exprimées dans une même devise €, \$, ...
 - On raisonne relativement à l'univers des titres qu'un investisseur donné peut acheter
- Loi de probabilité jointe des rentabilités des titres supposée connue.
 - En pratique, on aura besoin des **espérances des rentabilités** des titres (soit n valeurs)
 - Des **variances des rentabilités** (n valeurs) et des **coefficients de corrélation linéaires** : $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients de corrélation

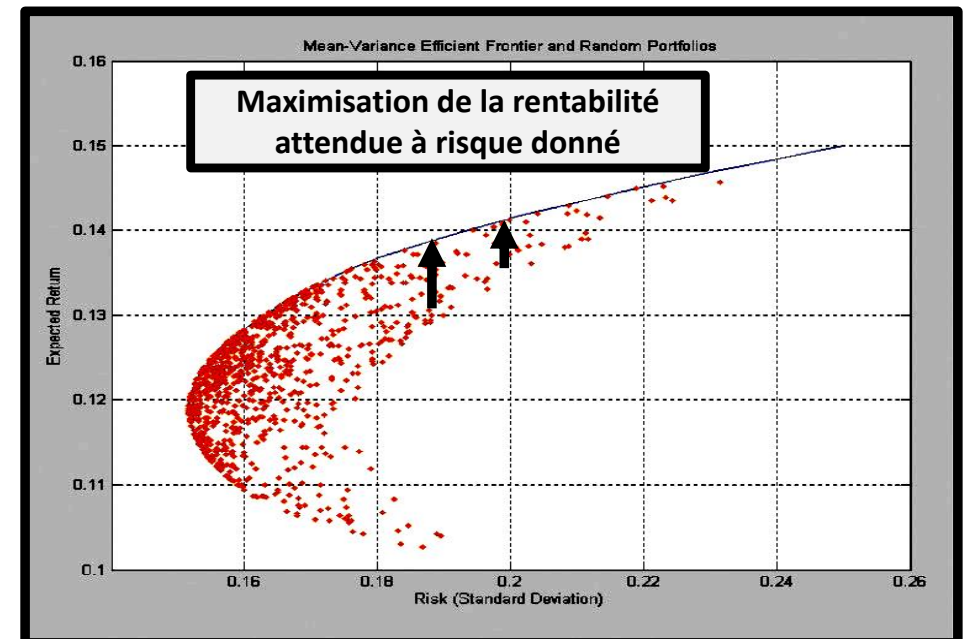
26

La théorie du portefeuille : frontière efficiente

- Frontière efficiente des actifs risqués
 - On part d'un ensemble de titres
 - On considère les portefeuilles constitués à partir de ces titres
- On recherche **les portefeuilles** qui à espérance de rentabilité donnée minimisent l'écart-type
 - *Ou qui à niveau donné d'écart-type des rentabilités donné maximisent l'espérance de rentabilité*
- On représente ces portefeuilles dans le plan écart-type de la rentabilité (abscisses) – espérance de rentabilité (ordonnées)
- L'ensemble de ces portefeuilles est la **frontière efficiente**
 - Les investisseurs ayant des préférences moyenne-variance vont préférer des portefeuilles sur la frontière efficiente

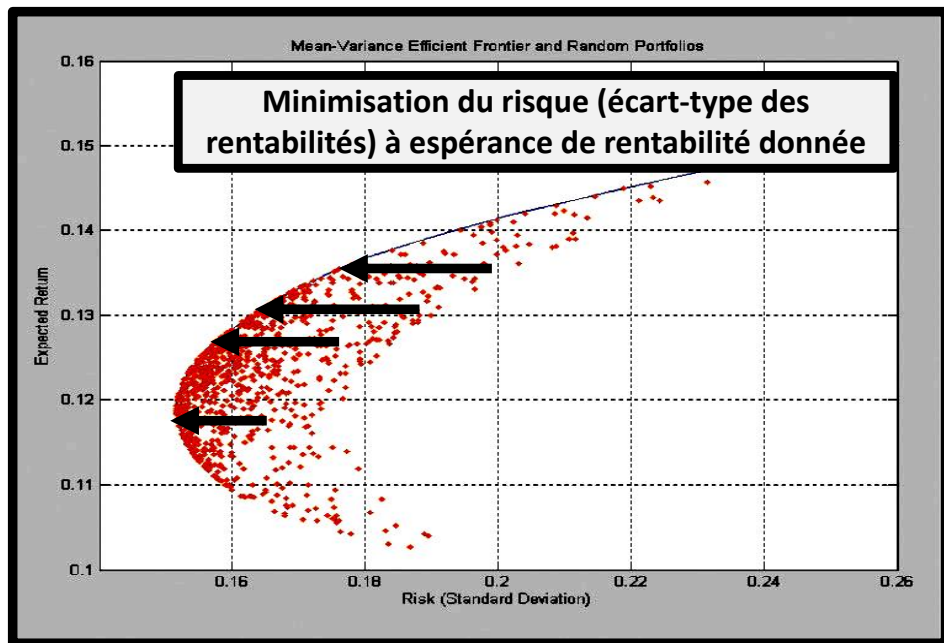
27

Frontière efficiente



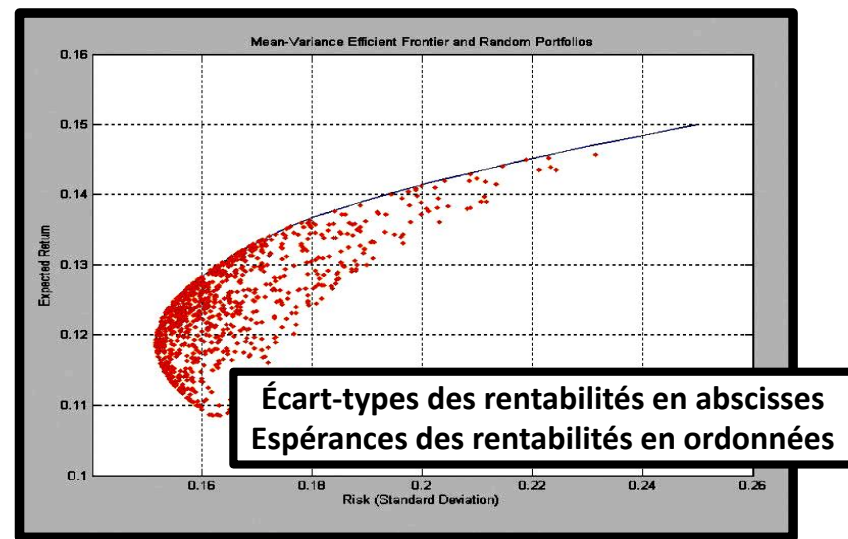
28

Frontière efficiente



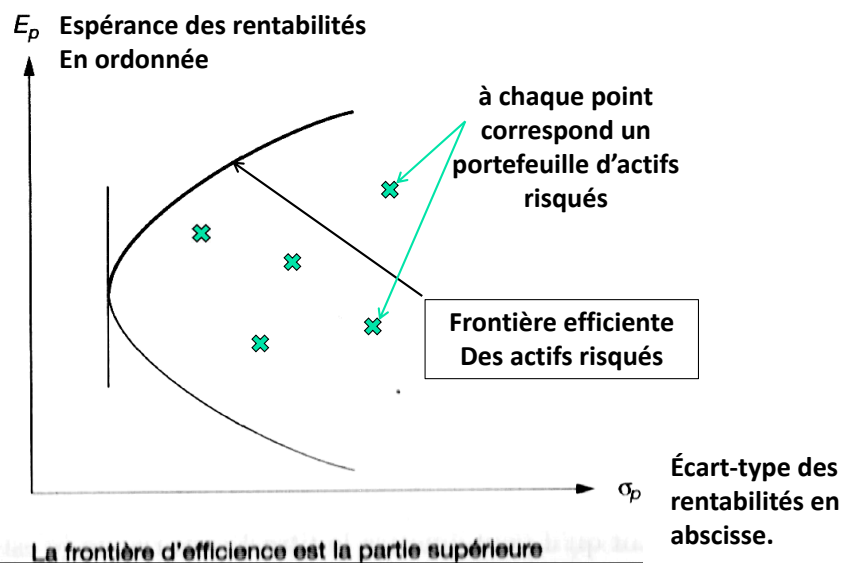
29

Chaque point représente un portefeuille
On constate qu'on ne peut pas aller au-delà
d'une frontière dite efficiente



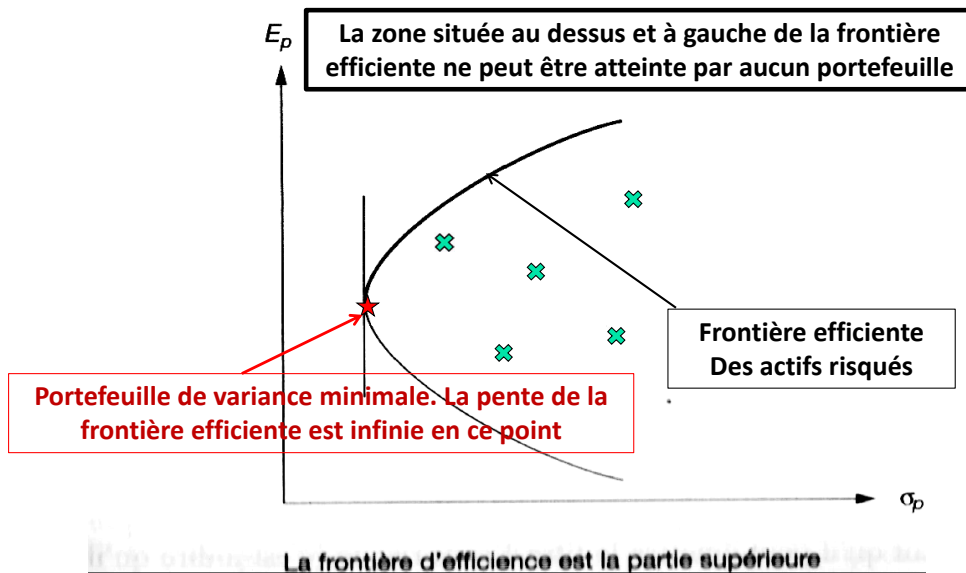
30

Frontière efficiente des actifs risqués dans le plan
(écart-type des rentabilité, espérance des rentabilités)



31

Frontière efficiente des actifs risqués dans le plan
(écart-type des rentabilité, espérance des rentabilités)



32

Frontière efficiente

Remise du prix
Nobel
d'économie à
H. Markowitz



- Contribution d'Harry Markowitz
 - Utilisation de la théorie des probabilités et des techniques d'optimisation pour la constitution de portefeuilles
- Ce recours à la modélisation a permis de définir de manière précise quels étaient les portefeuilles « efficaces »
 - Frontière efficiente des actifs risqués
 - Capital Market Line
- Ceci suppose de considérer les rentabilités aléatoires
 - Il faut connaître leur espérance, leur écart-type et les coefficients de corrélation entre les différentes rentabilités

33

Frontière efficiente

- « La » frontière efficiente est relative à un ensemble donné de titres
 - Par exemple, on peut chercher des portefeuilles constitués d'actions du CAC 40 ou du Dow Jones
 - On aura alors deux frontières efficaces
- Prenons le cas du Dow Jones : 30 sociétés cotées
 - x_1, x_2, \dots, x_{30} poids de chacune des sociétés dans le portefeuille
 - $x_1 + x_2 + \dots + x_{30} = 100\%$
 - Si interdiction de vente à découvert : $x_1, x_2, \dots, x_{30} \geq 0$
 - On va chercher à trouver une composition de portefeuille x_1, x_2, \dots, x_{30} qui minimise l'écart-type de la rentabilité $\sigma_P(x_1, x_2, \dots, x_{30})$ sous contrainte d'espérance de rentabilité $E_P(x_1, x_2, \dots, x_{30}) = E$ où E est une constante

34

Les 30 sociétés composant l'indice Dow Jones au 26 juin 2018

3M Company	JPMorgan Chase & Co.
American Express Co.	McDonald's Corp.
Apple Inc.	Merck
Boeing Co.	Microsoft
Caterpillar Inc.	Nike
Chevron	Pfizer
Cisco Systems	Procter & Gamble
Coca-Cola	Travelers
DuPont	UnitedHealth Group
Exxon Mobil	United Technologies
Goldman Sachs	Verizon
Home Depot	Visa
Intel	Wal-Mart
IBM	Walgreens Boots Alliance
Johnson & Johnson	Walt Disney Company

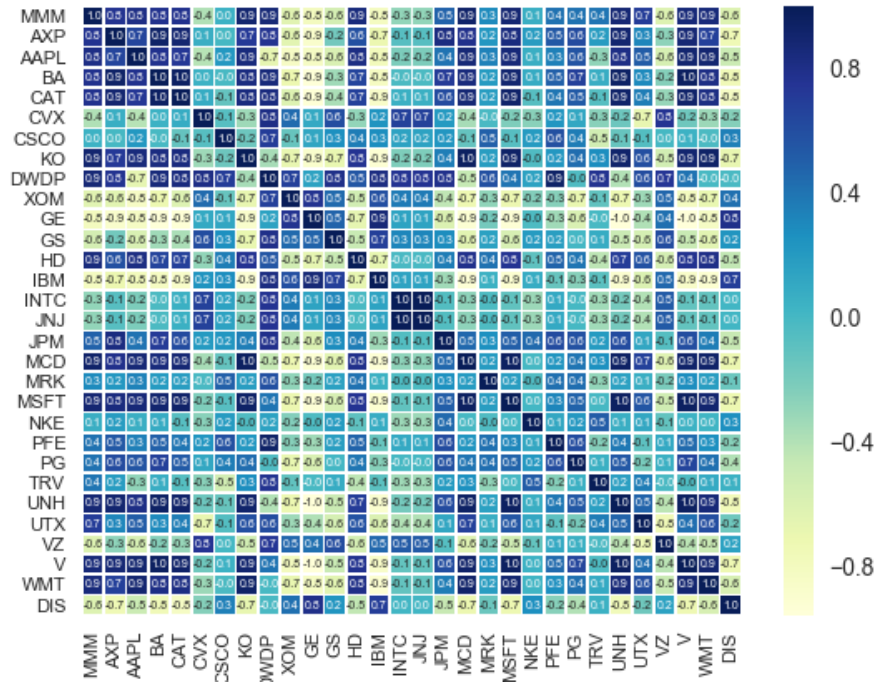
35

Frontière efficiente

- Cas de deux actifs
 - $\sigma_P^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2\rho_{1,2} x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2$
- Cas de trois actifs
 - $\sigma_P^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + x_3^2 \sigma_3^2 + 2\rho_{1,2} x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 + 2\rho_{1,3} x_1 x_3 \sigma_1 \sigma_3 + 2\rho_{2,3} x_2 x_3 \sigma_2 \sigma_3$
- Cas de 30 actifs...
 - $\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{30} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1, j \neq i}^{30} \rho_{ij} x_i x_j \sigma_i \sigma_j$
 - Le formalisme mathématique est un peu plus abstrait, mais indispensable.
 - On peut aussi utiliser des notations matricielles pour des écritures plus compactes
 - Le problème pratique est le nombre de coefficients de corrélations : 435 ici...

36

DOW Correlation: 01/03/2017 - 10/04/2017



Company Name	Ticker
The 3M Company	MMM
The American Express Company	AXP
Apple Inc.	AAPL
The Boeing Company	BA
Caterpillar Inc.	CAT
Chevron Corporation	CVX
Cisco Systems, Inc.	CSCO
The Coca-Cola Company	KO
DowDuPont Inc.	DWDP
Exxon Mobil Corporation	XOM
The Goldman Sachs Group, Inc.	GS
The Home Depot Inc.	HD
International Business Machines Corporation	IBM
Intel Corporation	INTC
Johnson & Johnson	JNJ

JPMorgan Chase & Co.	JPM
McDonald's Corporation	MCD
Merck & Company, Inc.	MRK
Microsoft Corporation	MSFT
Nike, Inc.	NKE
Pfizer Inc.	PFE
Proctor & Gamble Co.	PG
The Travelers Companies, Inc.	TRV
UnitedHealth Group, Inc.	UNH
United Technologies Corporation	UTX
Verizon Communications Inc.	VZ
Visa Inc.	V
Walmart Inc.	WMT
Walgreens Boots Alliance, Inc.	WBA
The Walt Disney Company	DIS

La théorie du portefeuille : frontière efficiente

- Minimisation du risque (variance) sur l'ensemble des titres $i = 1, \dots, n$

$$\text{Min}_{x_1, \dots, x_n} \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \rho_{ij} x_i x_j \sigma_i \sigma_j$$

- *Sous contraintes linéaires*

$$E_P = \sum_{i=1}^n x_i E_i = \text{constante} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

- *Minimisation d'une fonction quadratique sous contraintes linéaires.*
- *Écritures matricielles simples*

La théorie du portefeuille : frontière efficiente des actifs risqués

- Écritures matricielles compactes

- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x' = (x_1, \dots, x_n), E = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

- $E_p(x) = \sum_{i=1}^n x_i E_i = x' E,$

- $\sum_{i=1}^n x_i = x' e = 1$

- On supposera que E et e ne sont pas colinéaires : toutes les rentabilités attendues ne sont pas égales.

- $\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix},$ matrice de variance covariance.

- $\sigma_p^2(x) = x' \Omega x$

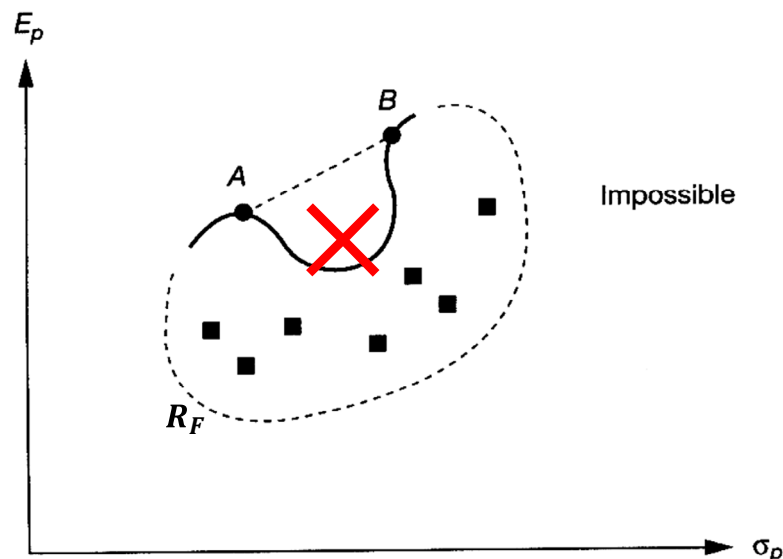
41

La théorie du portefeuille : frontière efficiente des actifs risqués

- Pour résoudre le problème d'optimisation quadratique précédent, on peut écrire le lagrangien
 - $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = x' \Omega x - \lambda x' e - \mu x' E$
- Puis écrire les conditions du premier ordre pour obtenir les allocations des portefeuilles efficients
 - Voir les TD pour des applications...
- On peut en outre montrer quelques propriétés :
 - Les portefeuilles efficients peuvent être construits à partir de deux portefeuilles arbitraires de la frontière efficiente
 - L'un des deux peut être le portefeuille de variance minimale
 - Cela rend plus pertinente l'analyse du cas simple avec deux titres
 - Il faut pour cela que les ventes à découvert soient autorisées
 - Concavité de la frontière efficiente

42

La théorie du portefeuille : concavité de la frontière efficiente



43

La théorie du portefeuille : concavité de la frontière efficiente



44

Frontière efficiente des actifs risqués : simple en théorie, plus délicat en pratique

- Grande variabilité des inputs (espérance, covariance) par rapport aux données utilisées, notamment la période d'estimation, le choix de l'ensemble des actifs risqués
- Grande sensibilité des compositions de portefeuille par rapport aux inputs
 - Petite modification des espérances de rentabilité associée à des modifications très importantes des allocations
 - Matrices de variance covariance « mal conditionnées » quand le nombre d'actifs est élevé
- Compositions de portefeuille « aberrantes » :
 - Valeurs des allocations optimales trop élevées, peu réalistes.
 - Si on introduit des contraintes de positivité (pas de vente à découvert) : diversification insuffisante

45

La théorie du portefeuille : frontière efficiente

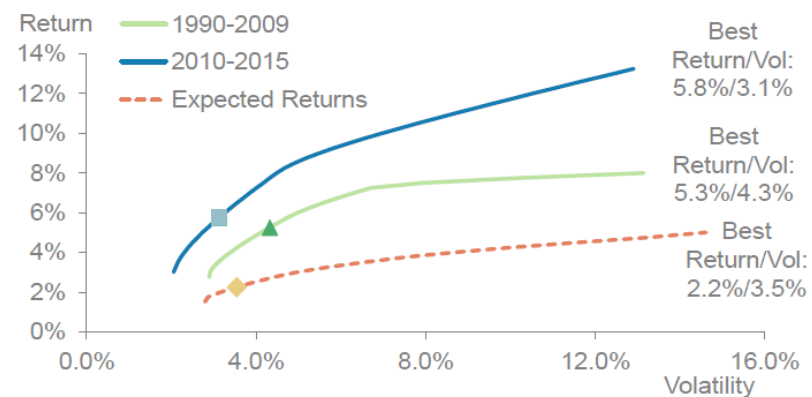
- Frontière efficiente ex-post : déterminée à partir des rentabilités passées
- Concept non pertinent pour les choix de portefeuilles, sauf à penser que les lois de probabilités sont invariantes (stationnarité)
- Frontière efficiente ex-ante.
 - Voir transparent suivant : **Morgan Stanley: Get Ready for a Period of Low Returns in the Market**
 - Qui repose la question de la baisse anticipée de la rentabilité des placements risqués
 - <https://www.bloomberg.com/news/articles/2015-11-30/morgan-stanley-get-ready-for-a-period-of-low-returns-in-the-market>
 - Novembre 2015

46

Source Bloomberg, Morgan Stanley

Exhibit 3

The Falling Efficient Frontier



Note: Based on four assets, US stocks, 10yr Treasuries, IG, HY. Marker indicates portfolio with highest Sharpe ratio. Source: Morgan Stanley Research, Bloomberg

Les frontières efficientes ex-post dépendent de la fenêtre d'estimation et peuvent différer de la frontière efficiente ex-ante qui est pertinente pour les choix de portefeuilles

<http://www.bloomberg.com/news/articles/2015-11-30/morgan-stanley-get-ready-for-a-period-of-low-returns-in-the-market>

47

La théorie du portefeuille : frontière efficiente

- Frontière efficiente des actifs risqués
 - <http://www.viddler.com/explore/RoyalVideosTV/videos/367/>
 - 3 minutes et 46 secondes
 - *Would you elaborate on the efficient frontier?*
 - Par Harry Markowitz



48

Fonds de placement, portefeuilles

Professional money managers and their influence

- <http://www.youtube.com/watch?v=txTaBKZ8qrs>
- <http://www.dnatube.com/video/23729/Lec-20--Professional-Money-Managers-and-their-Influence>



Robert Shiller,
Yale University
2011
1h12mn

49

Rentabilité d'un portefeuille

Fidelity Magellan Fund

- http://en.wikipedia.org/wiki/Magellan_Fund
- Fonds géré de manière **active**
- La composition du fonds s'écarte de celle de l'indice boursier de référence
- **AUM : Assets Under Management**
- Montant total des actifs gérés par une institution financière, fonds commun, société de gestion de fonds
- En 2005, le montant des actifs gérés par ce fond était d'environ 50 milliards de dollars



Peter Lynch
Ancien gérant
vedette du fonds

50

Rentabilité d'un portefeuille

Fidelity Magellan Fund

- Montant des actifs gérés varie :
- Valeur liquidative de la part
- Dans les fonds ouverts, le nombre de parts varie
 - Collecte nette (positive ou négative) d'épargne
- Dans un fonds fermé, on ne peut vendre ses parts
- Sauf éventuellement à trouver un acheteur

Évolution d'une part du fond Cours en USD



Période	Rentabilité du Fond	Rentabilité d'un portefeuille dupliquant l'indice S&P 500
2008	(49.66%)	(38.91%)
2007	18.84%	3.53%
2006	7.22%	15.79%
2005	6.42%	4.91%
2004	7.49%	10.88%
2003	24.82%	26.68%
2002	(23.66%)	(22.10%)
2001	(11.65%)	(11.89%)
2000	(9.29%)	(9.11%)
1999	24.05%	21.04%
1998	33.63%	28.58%

Rentabilités annuelles comparées
Du fond Fidelity Magellan et de l'indice
Standard & Poors 500

51

Rentabilité d'un portefeuille

Pourcentage de la richesse investie dans deux fonds

- Poids ω_i représentés par ordre décroissant pour deux fonds
- Actions privilégiées par les gérants



Détention d'actifs par les fonds

Top ten holdings 31/3/2002

	x (%)	Fidelity Magellan	Vanguard Index 500	x(%)
1	4.47%	Citigroup	General Electric	3.52%
2	4.37%	General Electric	Microsoft	3.09%
3	2.98%	Microsoft	ExxonMobil	2.84%
4	2.83%	Viacom	Wal-Mart Stores	2.59%
5	2.71%	AIG	Citigroup	2.41%
6	2.56%	ExxonMobil	Pfizer	2.37%
7	2.41%	Wal-Mart Stores	Intel	1.93%
8	2.38%	Pfizer	Johnson & Johnson	1.89%
9	1.83%	Home Depot	AIG	1.78%
10	1.81%	Philip Morris	IBM	1.70%

source Yahoo! Finance, Morningstar



Rentabilité d'un portefeuille

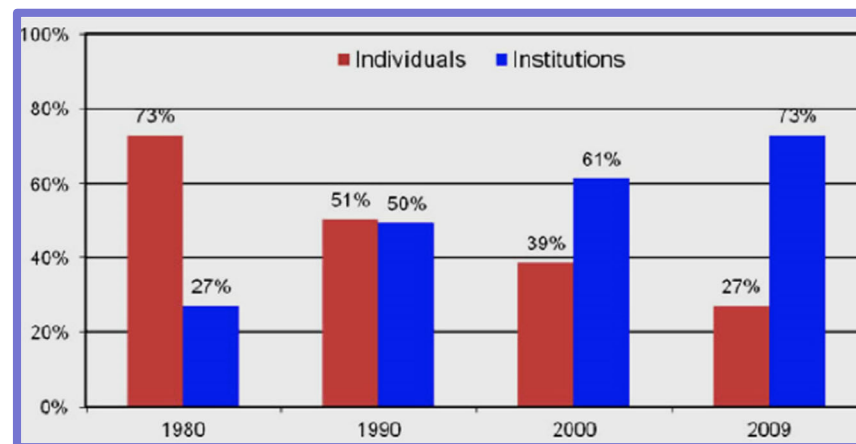
- Pourcentage de la richesse investie dans les fonds
 - Pourcentages de richesse investie par secteurs d'activité

	Fidelity Magellan	Vanguard Index 500
Energy	8.28%	3.52 %
Financials	23.15%	3.52 %
Industrial Cyclical	10.50%	3.09%
Consumer Durables	1.42%	2.84%
Consumer Staples	7.01%	2.59%
Services	13.26%	2.41%
Retail	9.08%	2.37%
Health	11.77%	1.93%
Technology	15.49%	1.89%

source Yahoo! Finance, Morningstar

- Le lecteur attentif remarquera au moins une coquille dans le tableau ci-dessous

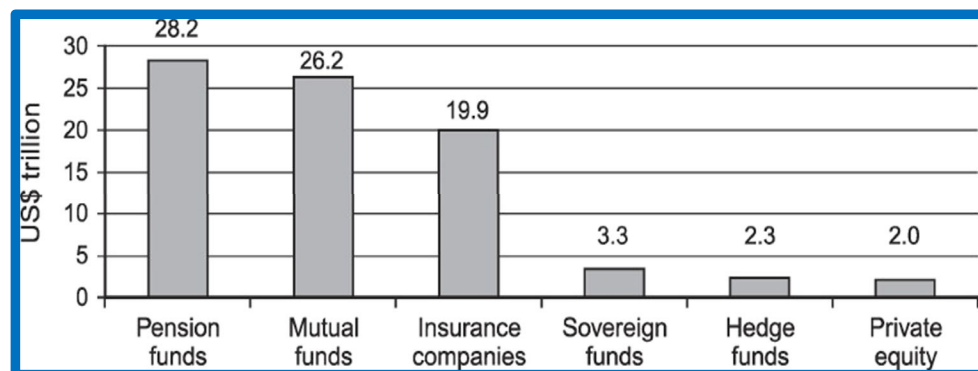
53



- Évolution de la détention d'actions américaines par les particuliers et par les « investisseurs institutionnels »
- La part des actions détenues par les particuliers est beaucoup plus faible dans d'autres grands pays (Japon, Royaume-Uni, France)

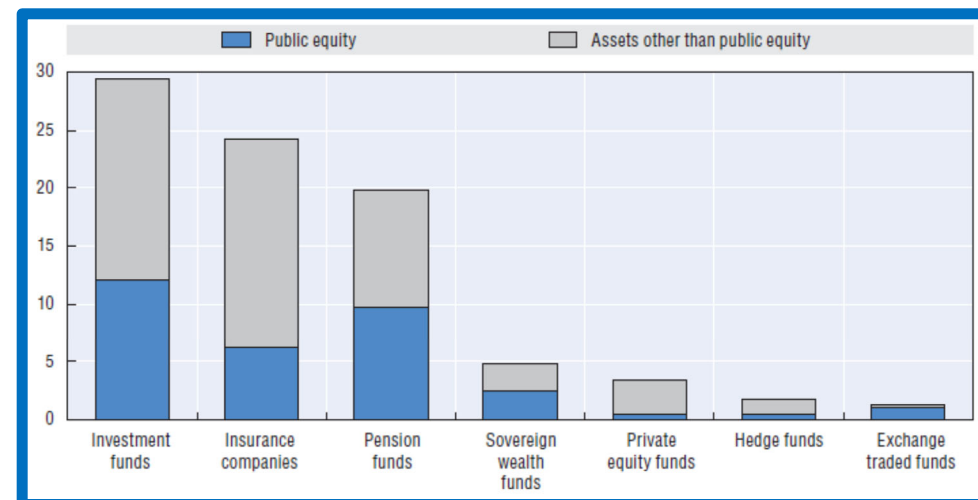
54

Différents types d'investisseurs institutionnels



- Fonds d'investissement, compagnies d'assurances, fonds de retraites (pension funds), fonds souverains, « private equity funds », hedge funds, ETF (Exchange Traded Funds)
- Gérant au total 84 000 milliards de \$ en 2011, selon l'OCDE

55



La part investie en actions cotées varie selon les investisseurs institutionnels

Il faut aussi prendre en compte actions non cotées, obligations, crédits, immobiliers, matières premières, ...

56

Les nouveaux acteurs de la finance, une ambition mondiale: « less banks, more markets » ?

BLACKROCK®

INVESTING FOR A NEW WORLD™
8500 milliards de \$ d'actifs gérés



Critères mis en avant par BlackRock pour le recrutement

PIMCO

1152 milliards de \$ d'actifs gérés



Newport Beach, siège de PIMCO

57

L'évolution de la réglementation sur le cadre de gestion un peu avant et après le départ en retraite est donc un enjeu majeur de la fin de ce quinquennat ou du prochain, afin de finaliser ce qui a été commencé avec la loi Pacte.

Une fois le cadre de dé-cumulation clarifié, des solutions innovantes de gestion pourront être proposées aux épargnants par les différents acteurs privés

Extrait du document « Le bon planRetraite » de BlackRock, juin 2019



Larry Fink, patron de BlackRock à l'Elysée, le 11 juillet 2019

<https://www.blackrock.com/corporate/literature/whitepaper/viewpoint-loi-pacte-le-bon-plan-retraite-juin-2019.pdf>

58

Les dix plus grandes sociétés de gestion de fonds Données de 2015

Company	Country	2015 total 31.12.14 (€m)
1 BlackRock	US/UK	3,844,383
2 Vanguard Asset Management	US/UK	2,577,380
3 State Street Global Advisors	US/UK	2,023,149
4 Fidelity Investments	US	1,595,380 ⁽¹⁾
5 BNY Mellon Invest. Management EMEA	US/UK	1,407,163
6 J.P. Morgan Asset Management	US/UK	1,266,805
7 Capital Group	US	1,167,231
8 PIMCO	US/Germany/UK	1,162,583 ⁽¹⁾
9 Pramerica Investment Management	US	968,628
10 Amundi	France	865,985

59

60

The Titans of Wealth

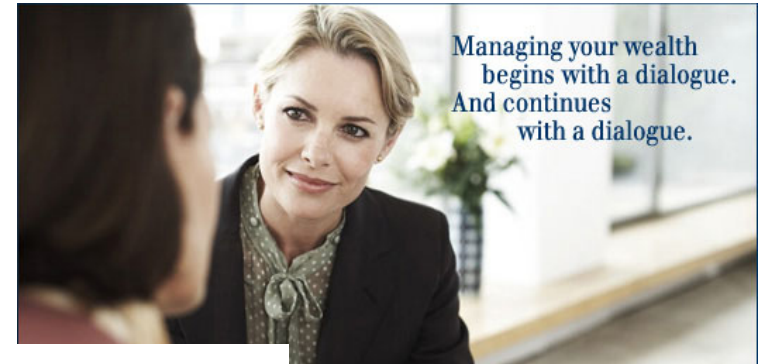
The globe's 10 largest private banks and wealth managers collectively oversee almost \$9 trillion for high-net-worth clients.

Global Ranking	Institution	AUM (bil)	Growth 2013
1	UBS	\$1,966.9	15.4%
2	Bank of America Merrill Lynch	1,866.6	12.5
3	Morgan Stanley	1,454.0	17.5
4	Credit Suisse	888.2	9.5
5	Royal Bank of Canada	673.2	5.6
6	BNP Paribas	395.1	11.4
7	Deutsche Bank	384.1	13.7
8	HSBC	382.0	-4.0
9	JPMorgan Chase	361.0	13.5
10	Pictet	338.1	12.0

Source: Scorpio Partnership Global Private Banking Benchmark 2014

61

- Les investisseurs peuvent décider eux-mêmes de leur allocation de portefeuille ou la déléguer à un tiers
 - *Fonds « communs »* : prêt à porter
 - *Gestion privée (ou sous mandat)* : sur mesure



62

Singapour, nouvelle frontière de la banque privée ?



63

UBS, première banque privée en Asie



Best Global Bank for High Net Worth Individuals (US\$10 million to US\$30 million)

Euromoney (2009 - 2017)

Best Private Bank in Asia for Ultra High Net Worth Individuals

Euromoney (2011 - 2017)

64

Le théorème de séparation en deux fonds ?

- On rappelle que d'après le théorème de séparation en deux fonds de Tobin
- Les investisseurs devraient détenir une proportion variable (selon leur niveau d'aversion vis-à-vis du risque) d'actif sans risque et de portefeuille tangent
- La composition du portefeuille d'actifs risqués devrait être la même pour tous les investisseurs
- Ceci est en contradiction avec les recommandations gestionnaires de portefeuilles
- Il semble en effet que plus le niveau de risque augmente, plus la part relative de la poche obligataire par rapport à celle des actions est faible

65

Le théorème de séparation en deux fonds ?

- CANNER, N., MANKIW, N. G., & WEIL, D. N. (1997). *An Asset Allocation Puzzle*. *THE AMERICAN ECONOMIC REVIEW*.
- <http://stat.wharton.upenn.edu/~stele/Courses/956/SeparationTheorem/MankiwSeparation.pdf>

La proportion des obligations par rapport aux actions décroît avec le niveau de risque ...

TABLE 1—ASSET ALLOCATIONS RECOMMENDED BY FINANCIAL ADVISORS

Advisor and investor type	Percent of portfolio			Ratio of bonds to stocks
	Cash	Bonds	Stocks	
A. Fidelity^a				
Conservative	50	30	20	1.50
Moderate	20	40	40	1.00
Aggressive	5	30	65	0.46
B. Merrill Lynch^b				
Conservative	20	35	45	0.78
Moderate	5	40	55	0.73
Aggressive	5	20	75	0.27
C. Jane Bryant Quinn^c				
Conservative	50	30	20	1.50
Moderate	10	40	50	0.80
Aggressive	0	0	100	0.00
D. The New York Times^d				
Conservative	20	40	40	1.00
Moderate	10	30	60	0.50
Aggressive	0	20	80	0.25

66

Le théorème de séparation en deux fonds ?

- Tous les investisseurs détiennent le même portefeuille constitué de titres risqués : le **portefeuille tangent**
- Mais les investisseurs n'ont pas tous accès aux mêmes titres
- Autant de frontières efficientes et de portefeuilles tangents que d'univers de titres dans lesquels telle ou telle catégorie d'investisseurs peut effectivement investir.
- Le portefeuille tangent peut impliquer des ventes à découvert (poids négatifs) non autorisées pour certains.
- Les investisseurs peuvent être en désaccord sur les inputs (espérances, écarts-types, corrélation)
- Pluralité de portefeuilles tangents

67

Le théorème de séparation en deux fonds ?

- Dans quelle mesure la théorie relative à l'efficacité du portefeuille de marché a-t-elle un caractère réaliste ?
 - *Difficulté pratique de constituer le portefeuille de marché*
- On peut s'intéresser aux portefeuilles effectivement détenus par les investisseurs
 - *En pratique, les portefeuilles sont insuffisamment diversifiés*
 - L'intermédiation financière, contrats d'assurance-vie, fonds communs de placement facilite la diversification
 - *Avec trop de concentration dans les actifs immobiliers*
- On peut s'interroger sur le caractère pertinent des préférences moyenne-variance
 - *Au niveau individuel, les critères de choix de nombreux investisseurs sont plus complexes et difficiles à formaliser*

68

Le théorème de séparation en deux fonds ?

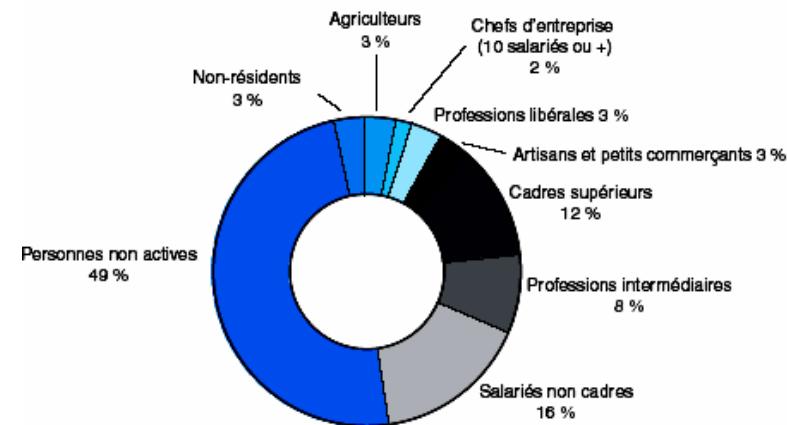
- Les détenteurs d'actifs risqués sont plutôt riches, âgés et ayant une bonne connaissance du monde économique
- Les riches âgés ont plus d'actifs risqués que les (peu nombreux) jeunes et riches
 - À l'encontre des recommandations des spécialistes
 - C'est également à l'encontre de l'intuition selon laquelle les jeunes devraient être moins averses vis-à-vis du risque
 - Et qu'ils devraient détenir plus d'actions car c'est un « placement de long terme »
 - Explications ?
 - Capital humain (background risk),
 - cycle de vie (immobilier),
 - contraintes d'endettement ?

69



Le théorème de séparation en deux fonds ?

- Patrimoine en valeurs mobilières des personnes physiques
 - professions et catégories socioprofessionnelles (PCS) supérieures concentrent l'essentiel de la détention des valeurs mobilières



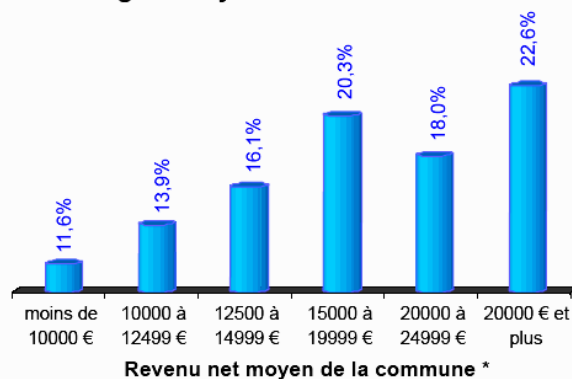
70

Le théorème de séparation en deux fonds ?



- Répartition régionale des actionnaires individuels
 - 4,4 millions de ménages actionnaires individuels
 - Soit 20% du nombre de ménages
 - 1,3 millions en Ile de France, soit 30% des ménages

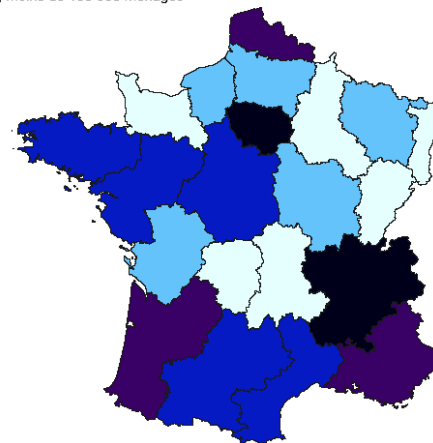
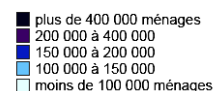
Pourcentage de foyers actionnaires dans la commune



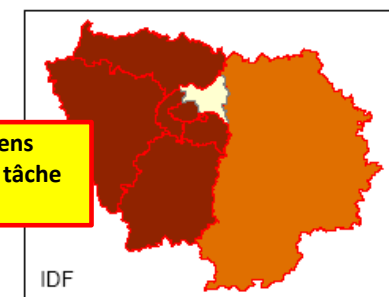
71

Qui détient des actifs financiers ?

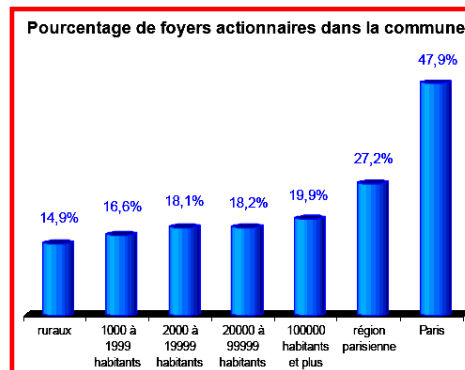
Nombre de ménages détenteurs d'actions



Ouest et Est parisiens
À quoi correspond la tâche claire ?



Île de France



72

Qui détient des actifs financiers ?

- Détention d'actions (en % de ménages de la commune)
 - *Palmarès des communes d'Ile de France*
 - Milon la Chapelle, Neuilly sur Seine, Saint-Nom-la-Bretèche, Gadancourt, Louveciennes, Marnes-la-Coquette, Paris 16, Paris 7, Paris 8, Vaucresson, Le Vésinet
 - *Palmarès des communes provinciales de plus de 2000 habitants*
 - Saint-Didier-au-Mont-d'Or, Bondues, Ecully, Mouveaux, Bois-Guillaume, Lyon 06, ...



Qui détient des actifs financiers (risqués)

- *Patrimoine des personnes physiques*
- *Les ménages les plus aisés ont des portefeuilles plus risqués et plus diversifiés*

En 2003

	Nombre de comptes	Montant des portefeuilles						Total des portefeuilles
		Actions		Obligations		Titres d'OPCVM		
		Françaises cotées	Étrangères	Françaises	Étrangères	Monétaires	Autres	
Moins de 7 800 euros	59,4	10,3	6,3	3,9	1,7	3,2	10,7	8,4
De 7 801 à 15 000 euros	14,6	8,2	4,8	9,0	2,4	4,7	11,7	9,2
De 15 001 à 38 000 euros	15,1	17,0	9,8	24,6	5,2	11,1	22,5	19,7
De 38 001 à 78 000 euros	6,3	16,1	11,1	22,2	7,7	12,4	18,7	17,7
De 78 001 à 152 000 euros	3,1	15,9	14,2	18,3	10,2	14,7	15,2	15,8
Plus de 152 000 euros	1,5	32,5	54,3	22,0	72,8	53,8	21,2	29,2
Total	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Qui détient des actifs financiers (risqués)



- Portefeuilles en valeurs mobilières par tranche d'âge
 - *Les « riches » sont en général âgés (théorie du cycle de vie)*

En 2003

	Nombre de comptes	Montant des portefeuilles						Total des portefeuilles
		Actions		Obligations		Titres d'OPCVM		
		Françaises cotées	Étrangères	Françaises	Étrangères	Monétaires	Autres	
Moins de 18 ans	1,5	0,6	1,0	0,6	0,3	1,0	0,5	0,6
De 18 à 25 ans	2,8	0,8	0,9	0,6	0,5	0,9	0,8	0,8
De 26 à 35 ans	10,5	4,0	3,5	1,7	2,9	4,4	4,1	3,6
De 36 à 45 ans	15,2	10,4	8,3	5,2	9,7	12,6	10,1	9,5
De 46 à 55 ans	19,0	18,5	15,3	11,0	15,9	19,6	16,9	16,5
De 56 à 65 ans	17,8	21,2	18,8	15,9	21,9	22,5	20,2	19,9
Plus de 65 ans	33,2	44,5	52,1	65,0	48,8	38,9	47,5	49,2
Total	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

- Frontière efficiente des actifs risqués
 - Plan « écart-type, espérance de rentabilité »
 - Préférences des investisseurs
 - Concavité de la frontière efficiente
- Capital Market Line (CML)
 - Portefeuille risqué + actif sans risque
 - Portefeuille tangente, choix optimal de portefeuille, CML
 - Portefeuille de marché, ratio de Sharpe

77

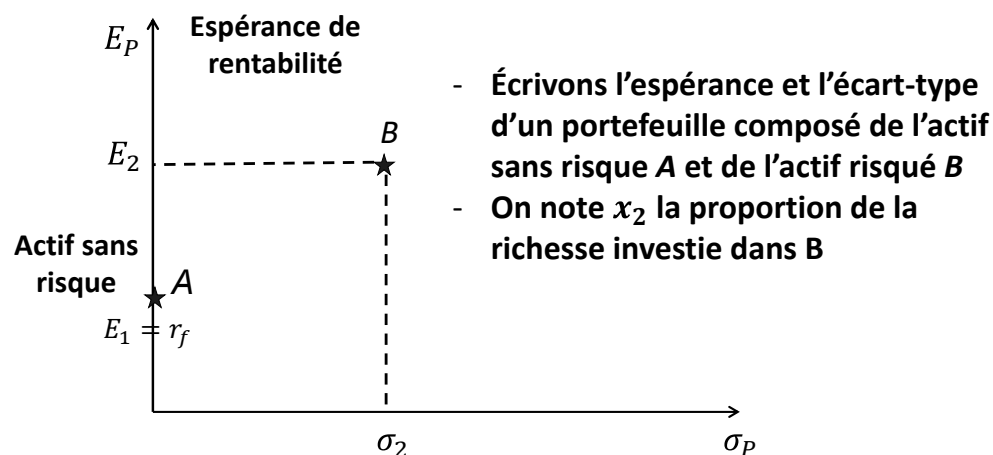
Capital Market Line

- Portefeuille risqué + actif sans risque
 - Représentation dans le plan « écart-type, espérance de rentabilité »
- Choix optimal de portefeuille
 - Portefeuille tangente
 - « Capital Market Line »
- Portefeuille de marché
 - Demande de titres
 - Ratio de Sharpe
 - Portefeuille tangente et portefeuille de marché

78

Actif sans risque + actif risqué

- Portefeuilles obtenus par combinaison d'un actif sans risque et d'un actif (ou portefeuille) risqué



79

Actif sans risque + actif risqué

- On constitue un portefeuille constitué de deux actifs
- r_1, r_2 rentabilités aléatoires des titres A et B
- Espérances des rentabilités : $E_1 = E[r_1], E_2 = E[r_2]$
- $\sigma_2 = \sigma[r_2]$ écart-type de la rentabilité du titre B
- $\sigma_1 = 0$ Le titre A est « sans risque », sa rentabilité r_1 n'est pas aléatoire
 - On aura $r_1 = E_1 = r_f$
- Rentabilité du portefeuille
- $r_P = x_1 r_1 + x_2 r_2, x_1 + x_2 = 1$
- On va s'intéresser à l'espérance et à l'écart-type de r_P

80

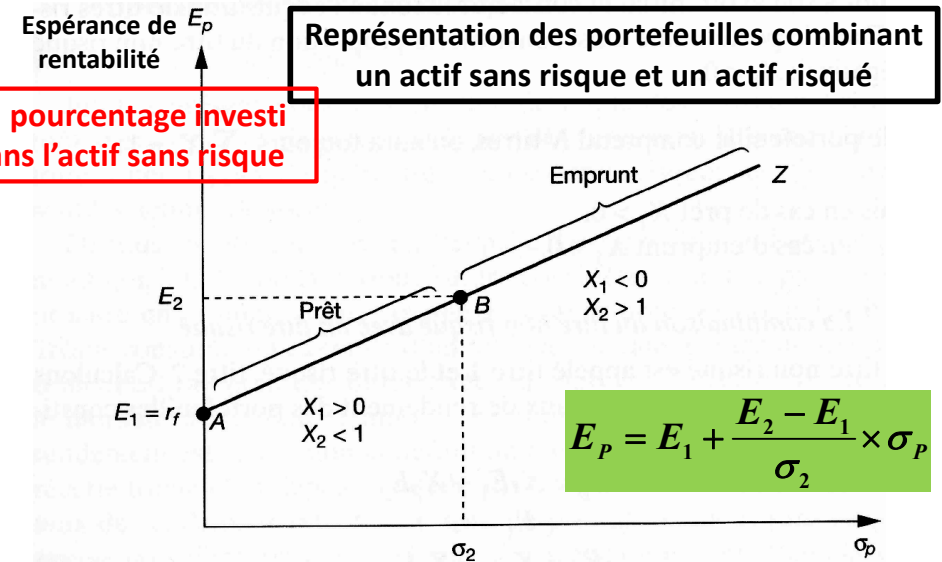
Actif sans risque + actif risqué

- On constitue un portefeuille constitué de deux actifs
- Espérance de la rentabilité du portefeuille
- $E_P = x_1 E_1 + x_2 E_2 = E_1 + x_2 \times (E_2 - E_1)$
- Variance de la rentabilité du portefeuille
 - $\sigma_P^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho_{12} x_1 \sigma_1 x_2 \sigma_2 + x_2^2 \sigma_2^2 = x_2^2 \sigma_2^2$
 - $\sigma_P = x_2 \sigma_2$ si $x_2 \geq 0$, d'où $x_2 = \frac{\sigma_P}{\sigma_2}$
 - En reportant $x_2 = \frac{\sigma_P}{\sigma_2}$ dans $E_P = E_1 + \frac{\sigma_P}{\sigma_2} \times (E_2 - E_1)$
- On obtient le lien entre espérance E_P et écart-type σ_P
- $E_P = E_1 + \frac{E_2 - E_1}{\sigma_2} \times \sigma_P$
 - Relation affine entre σ_P et E_P

81

Actif sans risque + actif risqué dans le plan risque / rentabilité

Relation affine entre σ_P et E_P

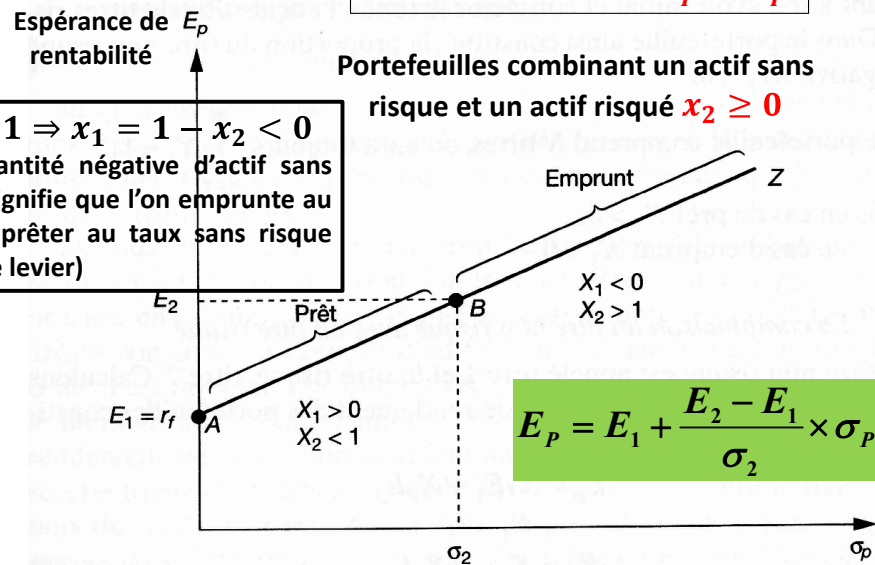


82

Actif sans risque + actif risqué

Graphique 2.10

Relation affine entre σ_P et E_P

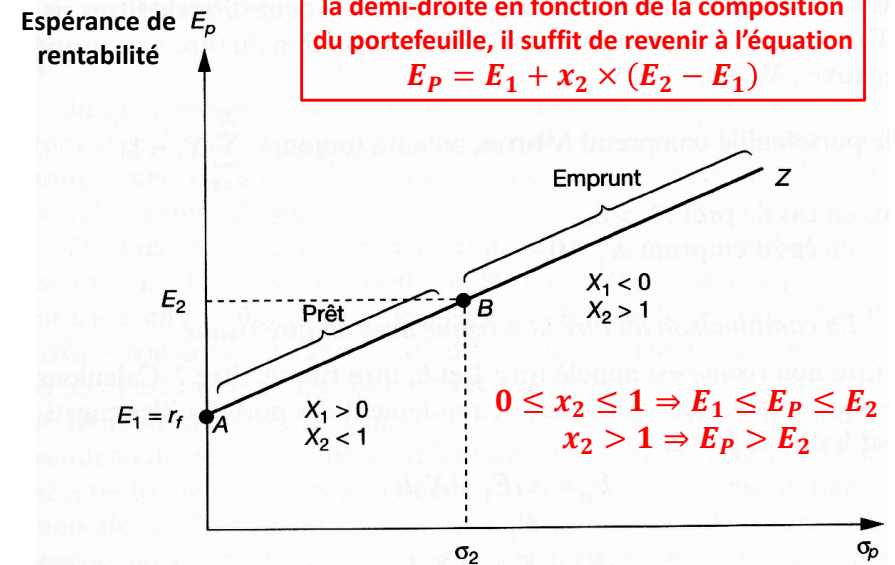


83

Actif sans risque + actif risqué

Graphique 2.10

Pour comprendre comment on se déplace sur la demi-droite en fonction de la composition du portefeuille, il suffit de revenir à l'équation $E_P = E_1 + x_2 \times (E_2 - E_1)$



84

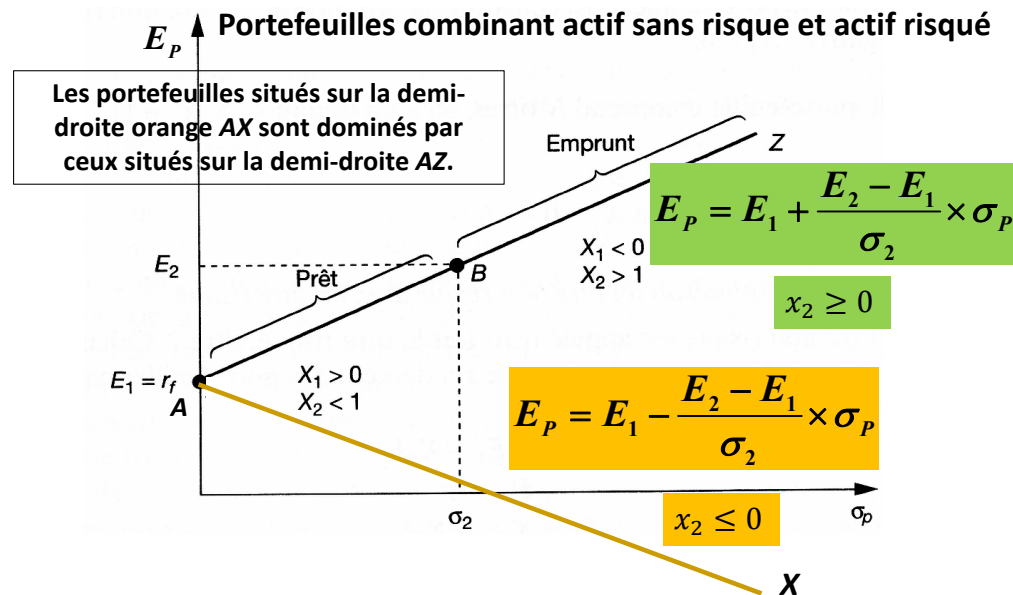
Exercice : Actif sans risque + actif risqué, impact des ventes à découvert

- Sur la demi-droite précédente, $x_2 > 0$
 - Interprétation financière du cas $x_2 < 0$
 - Le titre risqué B est vendu à découvert
 - Revenons sur les équations donnant E_P, σ_P

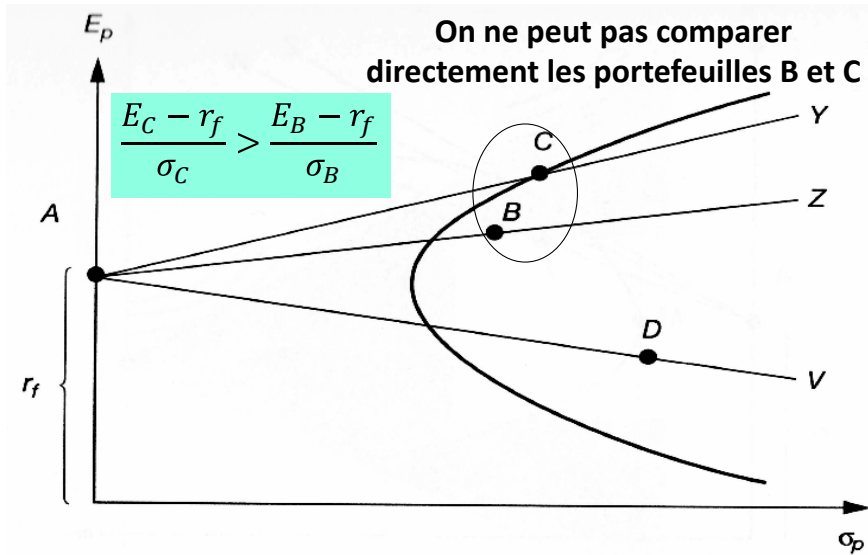
$$\begin{cases} E_P = E_1 + x_2 \times (E_2 - E_1) \\ \sigma_P^2 = x_2^2 \sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_P = |x_2| \sigma_2 \end{cases}$$

- Si $x_2 < 0, \sigma_P = -x_2 \sigma_2$
- D'où : $E_P = E_1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_2} (E_2 - E_1)$
- C'est l'équation d'une demi-droite
 - Voir la demi-droite orangée sur le transparent suivant

Exercice : Actif sans risque + actif risqué, impact des ventes à découvert

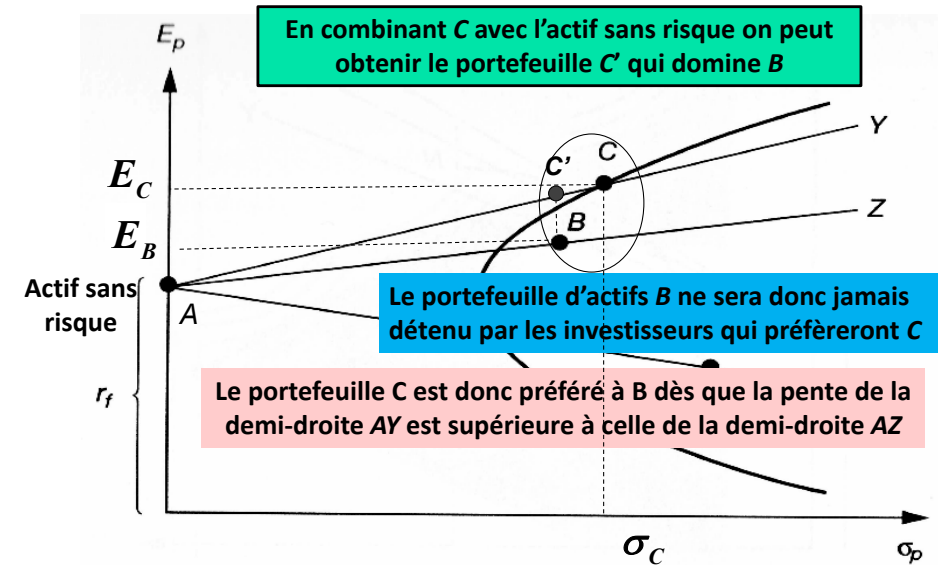


Actif sans risque + actif risqué



89

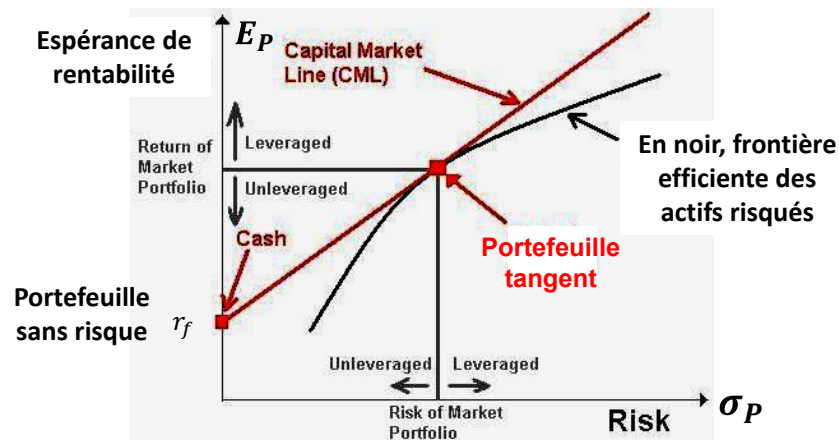
Actif sans risque + actif risqué



90

Portfeuille tangente, allocations optimales

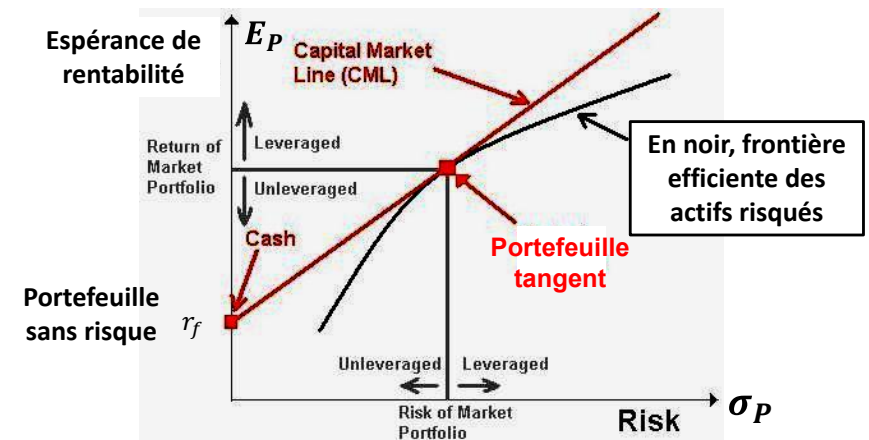
- **En noir**, frontière efficiente des actifs risqués
 - Elle est concave, on la suppose sans angles
- **En rouge**, la demi droite d'origine l'actif sans risque est **tangente** à la frontière efficiente des actifs risqués



91

Portfeuille tangente, allocations optimales

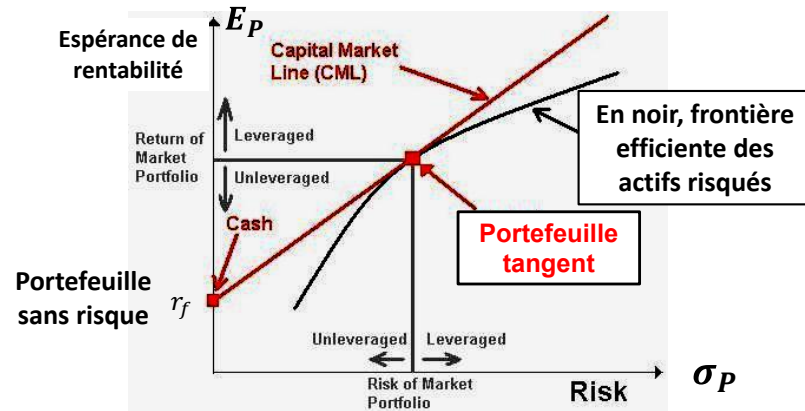
- **Demi-droite** dont l'origine est le point associé au **placement sans risque** et qui passe par le point associé au **portfeuille tangente** : « capital market line » (CML)
 - *Abscisses* : écarts-types, *ordonnées* : espérances de rentabilité



92

Portefeuille tangente, allocations optimales

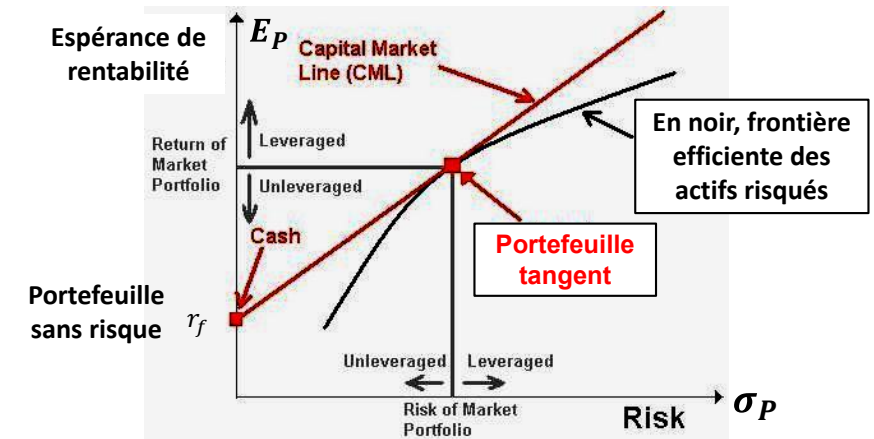
- L'extrémité **gauche** de la CML correspond à un portefeuille investi à 100% en actif sans risque
- La CML s'obtient en reliant ce point au point de tangence à la frontière efficace des actifs risqués



93

Portefeuille tangente, allocations optimales

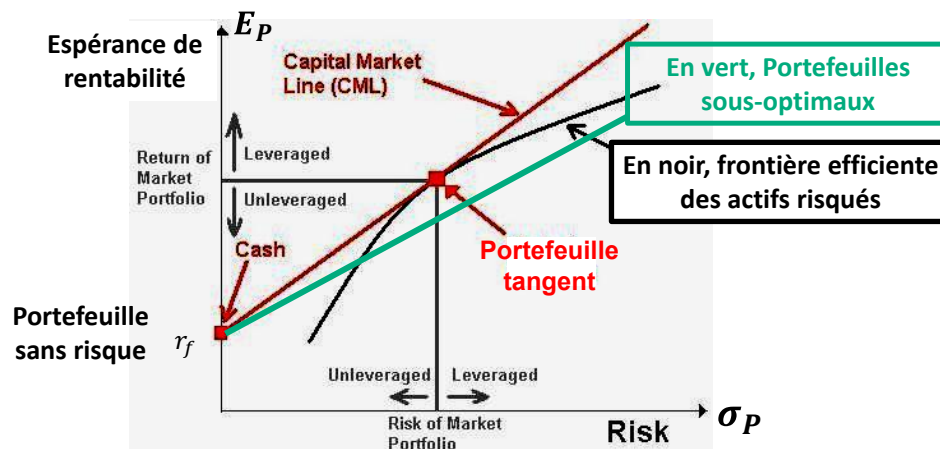
- CML associée à l'ensemble des portefeuilles constitués du placement sans risque et du portefeuille tangente
 - Avec une position longue (acheteuse) dans le portefeuille tangente



94

Portefeuille tangente, allocations optimales

- La pente de la CML est maximale.
- Portefeuille tangente maximise $\frac{E_P - r_f}{\sigma_P}$ (pente des demi-droites)



95

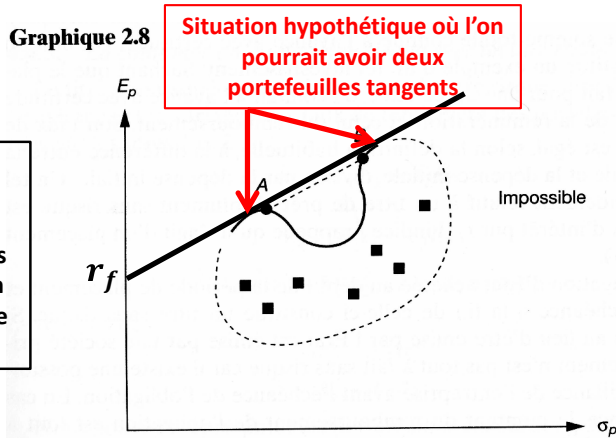
« Capital Market Line » (CML)

- Tous les portefeuilles sur la CML sont constitués de placement sans risque et de portefeuille tangente
 - En des proportions variables
 - **Théorème de séparation en deux fonds**
- Les individus détiennent plus ou moins d'actif risqué en fonction de leur aversion vis-à-vis du risque
 - Pour atteindre un niveau de rentabilité supérieur à celui du portefeuille tangente, il est nécessaire d'emprunter pour acheter des titres risqués
 - Effet de levier
 - Actionnaires d'une entreprise finançant une partie de leurs actifs par endettement

96

« Capital Market Line » (CML)

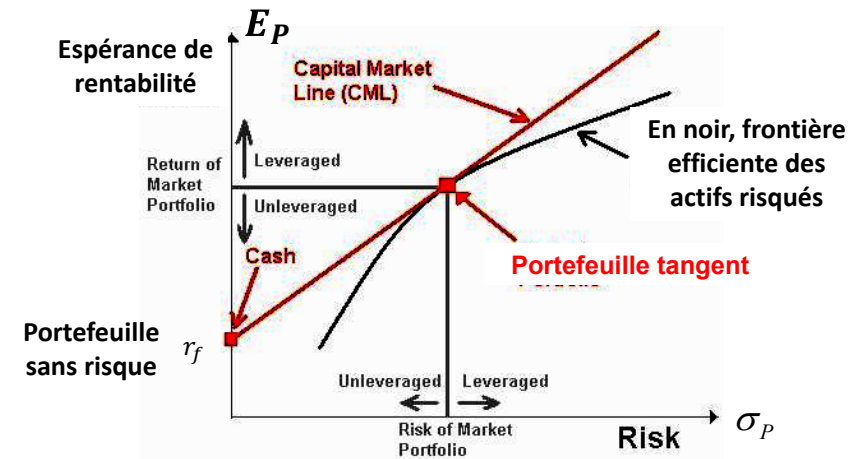
- Remarque : l'existence d'un unique portefeuille tangent est liée à la concavité de la frontière efficiente



97

« Capital Market Line » ex-ante (CML)

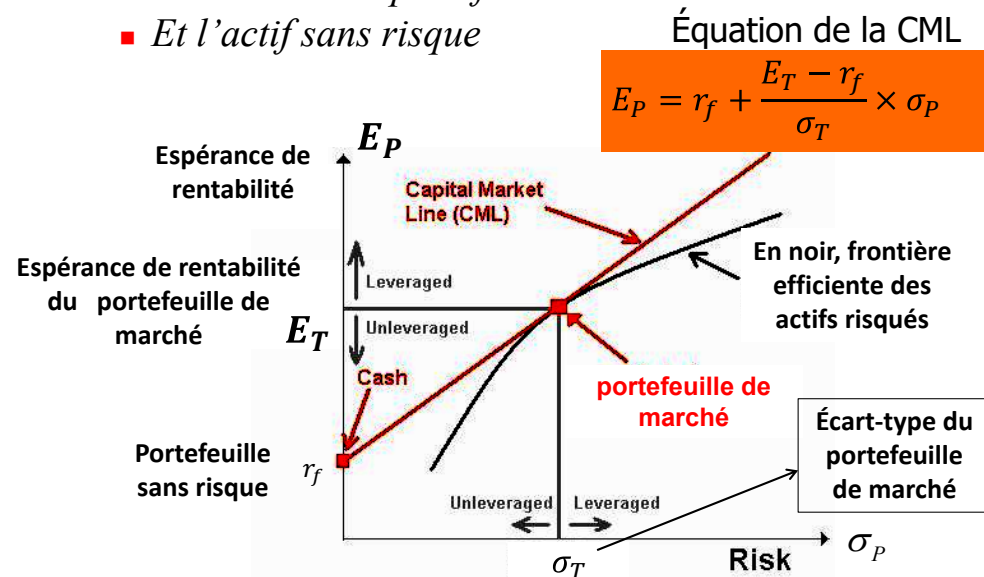
- En abscisses, le niveau de risque d'un portefeuille σ_P
- En ordonnées, l'espérance de rentabilité E_P



98

« Capital Market Line » (CML)

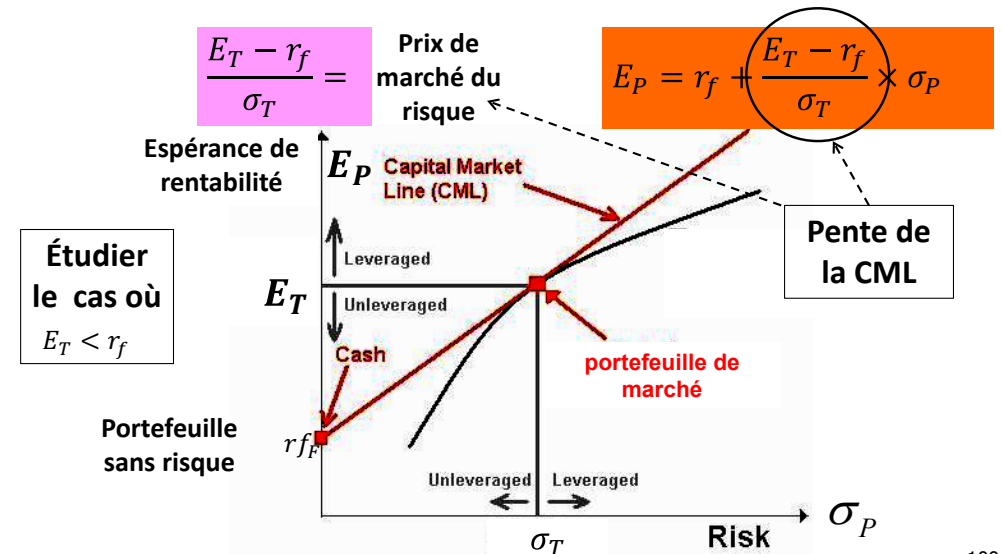
- On combine le portefeuille de marché
- Et l'actif sans risque



99

« Capital Market Line » (CML)

- La notion de prime de risque et de prix de marché du risque



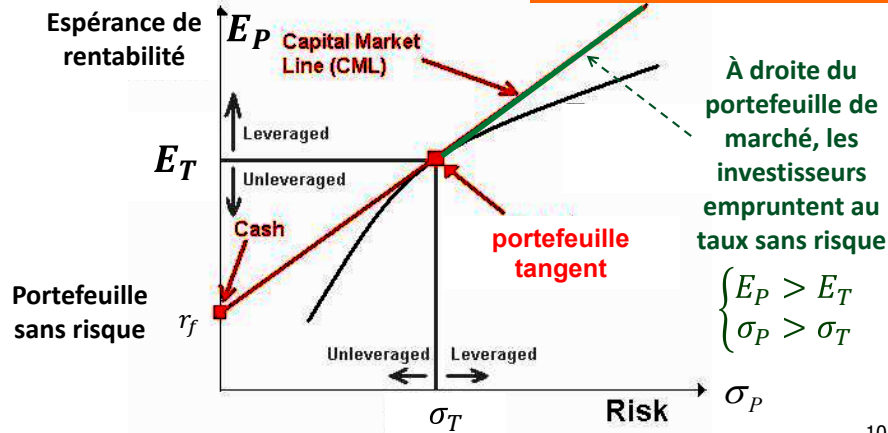
100

« Capital Market Line » (CML)

■ Effet de levier

- On obtient des rentabilités supérieures à celles du portefeuille de marché en empruntant au taux sans risque

$$E_P = r_f + \frac{E_T - R_F}{\sigma_T} \times \sigma_P$$

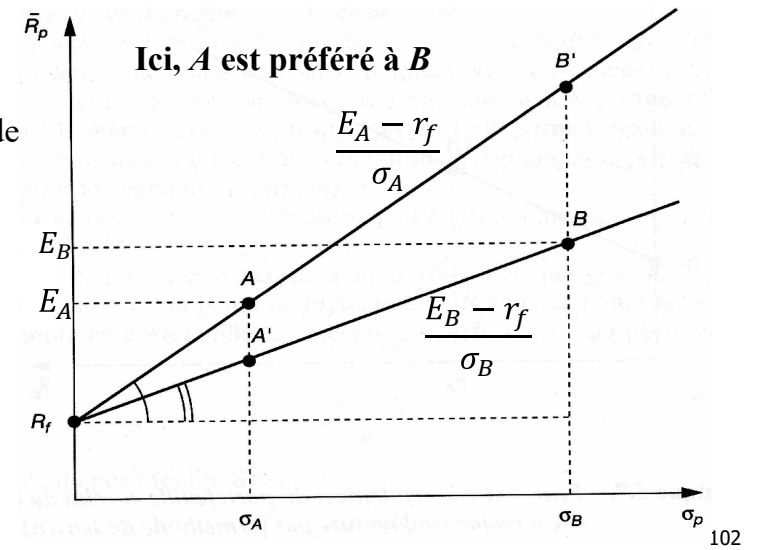


101

« Capital Market Line » (CML)

- Ratio de Sharpe : maximal pour les portefeuilles efficients

Si un portefeuille de est efficient, son ratio de Sharpe $\frac{E_P - r_f}{\sigma_P}$ est maximal



102

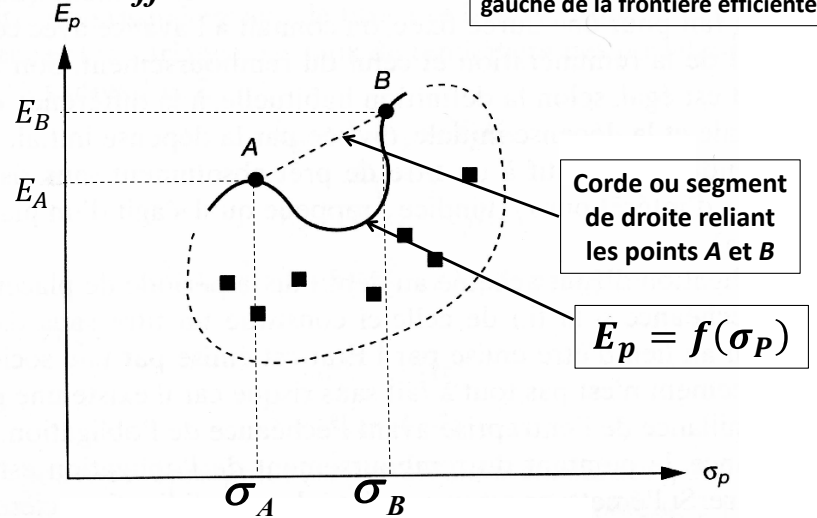
103

104

*Exercice :
concavité de la frontière efficiente*

Graphique 2.8

- La frontière efficiente est concave



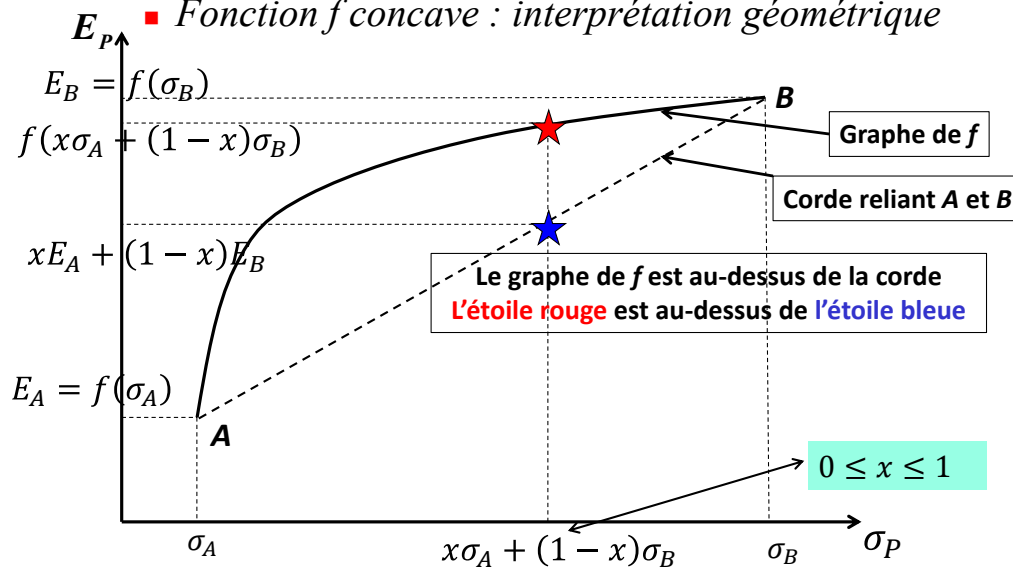
Exercice: concavité de la frontière efficiente

On remarque que dans la définition de la concavité $0 \leq x \leq 1$

- Définition d'une fonction concave f
- Une fonction réelle f est concave si et seulement si :
 - $\forall u, v \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1],$
 - $x f(u) + (1 - x)f(v) \leq f(xu + (1 - x)v)$
- *Interprétation géométrique*
- La corde reliant les points $(u, f(u))$ et $(v, f(v))$ est en dessous du graphe associé à la fonction f :
- Graphe associé à la fonction $f : \{(z, f(z)), u \leq z \leq v\}$
- Ici $u = \sigma_A, v = \sigma_B$
- $(\sigma_A, E_A = f(\sigma_A))$ correspond aux coordonnées du point A
- $(\sigma_B, E_B = f(\sigma_B))$ correspond aux coordonnées du point B

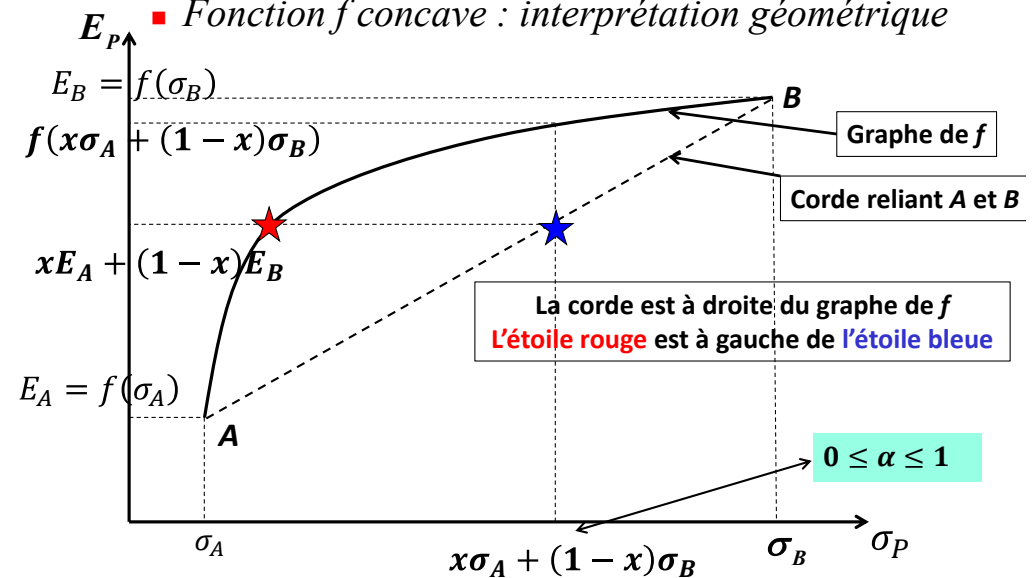
Exercice: concavité de la frontière efficiente

- Fonction f concave : interprétation géométrique



Exercice: concavité de la frontière efficiente

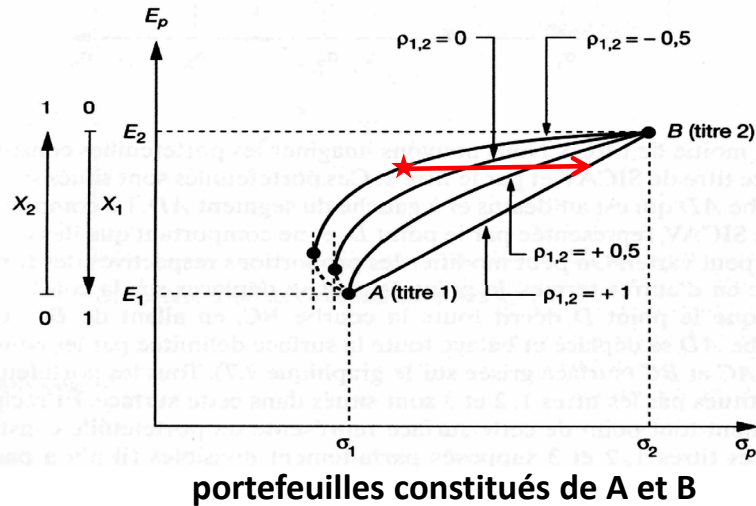
- Fonction f concave : interprétation géométrique



Remarque : pour tout niveau de corrélation, un portefeuille combinant A et B en quantités positives se situe à gauche de la corde qui relie A et B

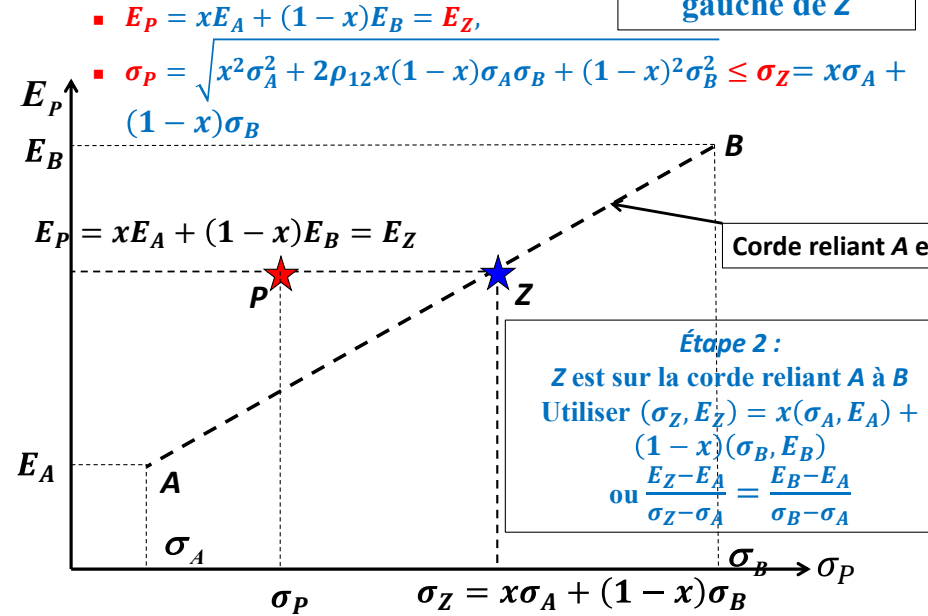
Graphique 2.6 – Portefeuilles de 2 titres –
Rôle du coefficient de corrélation $\rho_{1,2}$

Démonstration voir transparent suivant



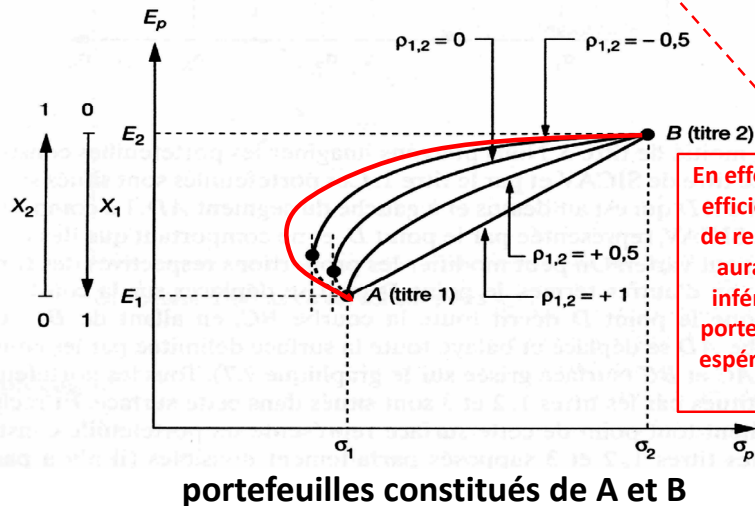
Exercice: concavité de la frontière efficiente

Étape 1 : P est à gauche de Z



La frontière efficiente étant elle-même à gauche de l'ensemble des portefeuilles combinant A et B, elle est concave

Graphique 2.6 – Portefeuilles de 2 titres –
Rôle du coefficient de corrélation $\rho_{1,2}$

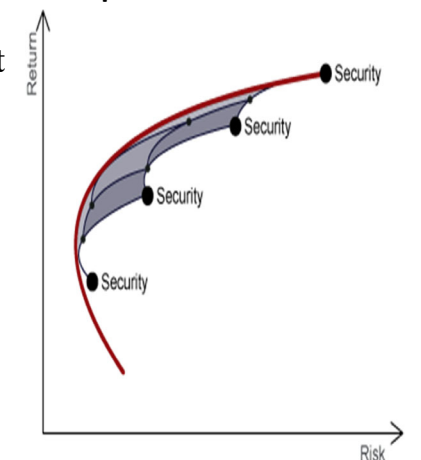


En effet un portefeuille efficient, d'espérance de rentabilité donnée aura un écart-type inférieur ou égal au portefeuille de même espérance formé de A et de B

Concavité de la frontière efficiente : résumé

- On considère deux portefeuilles situés sur la frontière efficiente A et B
- L'ensemble des portefeuilles constitués de A et B est à gauche du segment de droite reliant A et B
 - Voir graphique précédent
- La frontière efficiente est elle-même au-dessus et à gauche de cet ensemble de portefeuilles
 - Voir graphique de droite
- Par transitivité, la frontière efficiente est à gauche de la corde reliant A et B

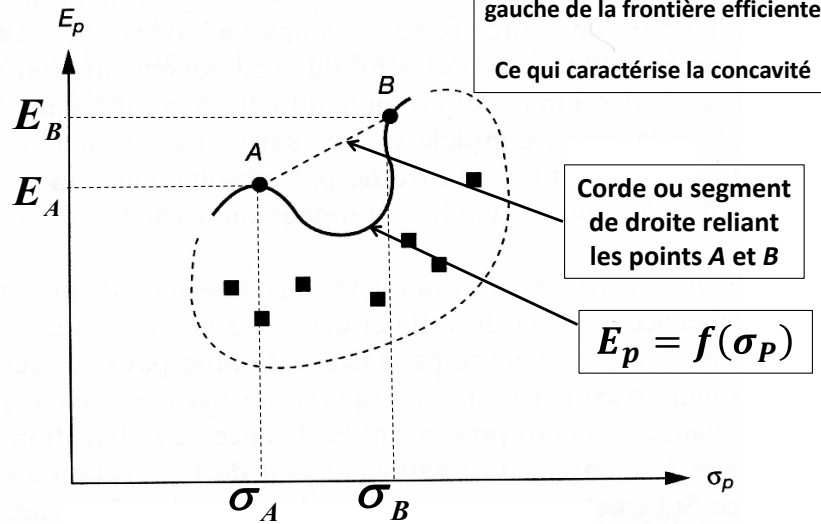
Les portefeuilles constitués de A et de B sont eux-mêmes des portefeuilles de titres



Ils sont donc situés sous la frontière efficiente

Concavité de la frontière efficiente : résumé

Graphique 2.8



On vient de démontrer que la situation présentée sur le graphique est impossible.

La corde reliant les points A et B doit être à droite et non à gauche de la frontière efficiente

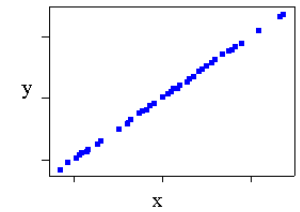
Ce qui caractérise la concavité

Corde ou segment de droite reliant les points A et B

$E_p = f(\sigma_p)$

113

Exercice $\rho_{12} = 1$



- Cas où $\rho_{12} = 1$
 - Cas particulier où le coefficient de corrélation linéaire entre les deux rentabilités r_1, r_2 est égal à 1
 - On rappelle que : $\rho_{12} = \frac{\text{Cov}(r_1, r_2)}{\sigma_1 \times \sigma_2}$, $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$
 - $\rho_{12} = 1$ correspond à la situation où la liaison statistique entre les deux rentabilités est la plus forte
 - Si $r_2 = r_1$, alors $\rho_{12} = \frac{\text{Cov}(r_1, r_2)}{\sigma_1 \times \sigma_2} = 1$
 - En effet, le numérateur est $\text{Cov}(r_1, r_2) = \text{Var}[r_1]$
 - Le dénominateur est $\sigma_1 \times \sigma_1 = \text{Var}[r_1]$

114

Exercice $\rho_{12} = 1$, $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$

- $\rho_{12} = 1$ Pourquoi s'intéresser à ce cas particulier ?
- On considérera en outre que $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$
 - x_1, x_2 Quantités investies dans les deux titres positives
- Les calculs d'écart-type des portefeuilles sont plus simples que dans le cas général
 - L'écart-type fonction affine de la composition du portefeuille
 - Représentation simple des portefeuilles dans le plan écart-type – espérance des rentabilités
 - Il s'agit d'un segment de droite
- Comparaisons utiles avec le cas général $\rho_{12} \leq 1$
 - Concavité de la frontière efficiente
- Facilite l'analyse de la Capital Market Line (CML)
 - Les portefeuilles sur la CML sont parfaitement corrélés
- Permet une introduction à la notion d'arbitrage

- $\rho_{12} = 1$ Pourquoi s'intéresser à ce cas particulier ?
 - On considérera en outre que $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$
 - x_1, x_2 Quantités investies dans les deux titres positives
 - Les calculs d'écart-type des portefeuilles sont plus simples que dans le cas général
 - Écart-type fonction affine de la composition du portefeuille
 - Représentation simple des portefeuilles dans le plan écart-type – espérance des rentabilités
 - Il s'agit d'un segment de droite
 - Comparaisons utiles avec le cas général $\rho_{12} \leq 1$
 - Concavité de la frontière efficiente
 - Facilite l'analyse de la Capital Market Line (CML)
 - Les portefeuilles sur la CML sont parfaitement corrélés
 - Permet une introduction à la notion d'arbitrage

115

Exercice $\rho_{12} = 1$



- Le cas $\rho_{12} = 1$ correspond à une situation extrême de liaison parfaite entre les rentabilités r_1 et r_2
 - On peut démontrer que $\rho_{12} = 1$
 - Si et seulement si $r_2 = \alpha \times r_1 + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0$
Relation affine entre les deux rentabilités
 - Pas de terme de bruit comme dans une régression linéaire
 - Pas de « diversification du risque »
 - Représentation simple des portefeuilles dans le plan écart-type – espérance des rentabilités
 - S'il existe un actif sans risque, on peut en outre montrer que le titre 2 est un portefeuille composé du titre 1 et de l'actif sans risque (et vice versa)
 - En l'absence d'« opportunité d'arbitrage » (voir la suite des transparents)

116

Exercice

$$\rho_{12} = 1$$

La théorie du portefeuille $\rho_{12} = 1$

- Évaluation de l'écart-type du portefeuille quand $\rho_{12} = 1$
 - On part de la formule générale
 - $\sigma_P^2(x_1) = x_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho_{12}x_1(1-x_1)\sigma_1\sigma_2 + (1-x_1)^2 \sigma_2^2$
 - Qui devient
 - $\sigma_P^2(x_1) = x_1^2 \sigma_1^2 + 2x_1\sigma_1(1-x_1)\sigma_2 + (1-x_1)^2 \sigma_2^2$
 - $= (x_1\sigma_1 + (1-x_1)\sigma_2)^2$ (« carré parfait »)
 - $\sigma_P(x_1) = |x_1\sigma_1 + (1-x_1)\sigma_2|$
 - $|a|$: valeur absolue de $a \in \mathbb{R}$
 - $|a| = a$, si $a \geq 0$, $|a| = -a$ si $a < 0$
- $\rho_{12} = 1, 0 \leq x_1 \leq 1 \Rightarrow x_1\sigma_1 + (1-x_1)\sigma_2 \geq 0$
- $\Rightarrow \sigma_P = x_1\sigma_1 + (1-x_1)\sigma_2$

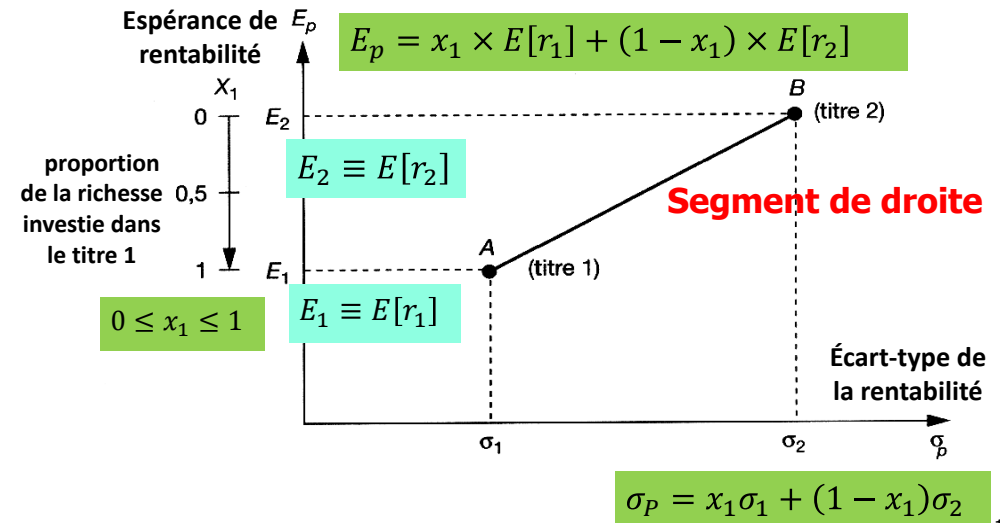
117

Exercice

$$\rho_{12} = 1$$

Le segment de droite reliant les points A et B représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2 pour un niveau de corrélation égal à 1

Graphique 2.5 – Portefeuilles constitués par des titres parfaitement corrélés ($\rho_{1,2} = +1$) et $0 \leq x_1 \leq 1$



118

Exercice

$$\rho_{12} = 1$$

Le segment de droite reliant les points A et B représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2, en quantités positives, pour un niveau de corrélation égal à 1

- Corrélation $\rho_{12} = 1$
- **Segment de droite ?**

$$E_p = x_1 \times E[r_1] + (1-x_1) \times E[r_2]$$

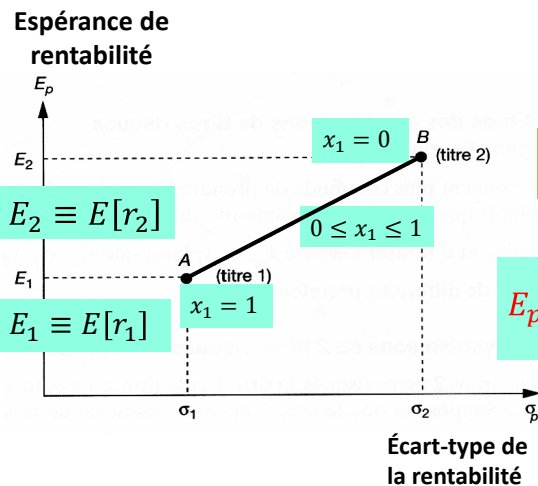
$$E_p - E_2 = x_1 \times (E_1 - E_2)$$

$$\sigma_P = x_1\sigma_1 + (1-x_1)\sigma_2$$

$$\sigma_P - \sigma_2 = x_1(\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$E_p - E_2 = (\sigma_P - \sigma_2) \times \frac{E_1 - E_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

Relation affine entre espérance de rentabilité et écart-type des rentabilités



119

Exercice

- Le cas $\rho_{12} = 1$ correspond à une situation extrême de liaison parfaite entre les rentabilités r_1 et r_2
- Cas général $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$
 - Variance et espérance de rentabilité pour x_1 donné
 - $\sigma_P^2(x_1)$ variance de la rentabilité du portefeuille
 - $\sigma_P^2(x_1) = x_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho_{12}x_1(1-x_1)\sigma_1\sigma_2 + (1-x_1)^2 \sigma_2^2$
 - Fonction affine du coefficient de corrélation ρ_{12}
 - la variance de taux de rentabilité du portefeuille est d'autant plus faible que le coefficient de corrélation est faible
 - $E_P(x_1) = x_1 E_1 + (1-x_1) E_2$
 - $E_P(x_1)$ espérance de rentabilité du portefeuille
 - L'espérance de rentabilité ne dépend pas du coefficient de corrélation ρ_{12}



120

La théorie : les pères fondateurs

http://www.youtube.com/watch?v=JmL1t--kBrM&feature=player_detailpage

Estimation de
l'espérance de la
rentabilité du
portefeuille de
marché
10mn36

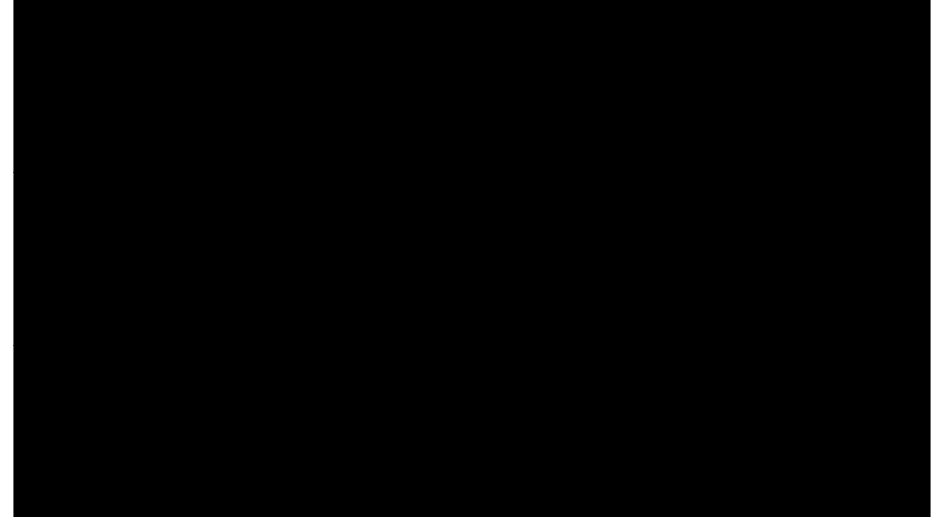
Entretien avec
Harry Markowitz



121

La théorie : les pères fondateurs

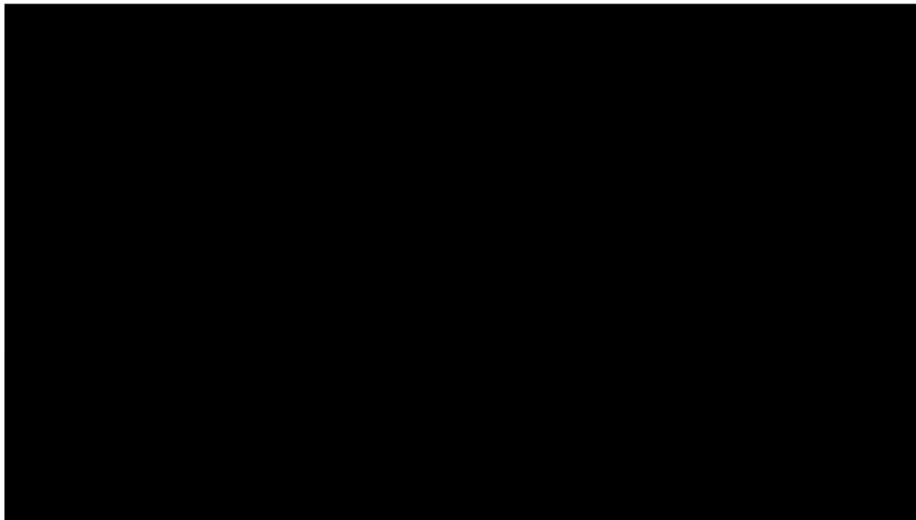
- Finance moderne et prix Nobel d'économie (5'30)



122

La théorie : les pères fondateurs

- Vidéo: entretien avec Harry Markowitz (8mn45)
- <http://www.youtube.com/watch?v=R6X6wcWQ95k>



123

124