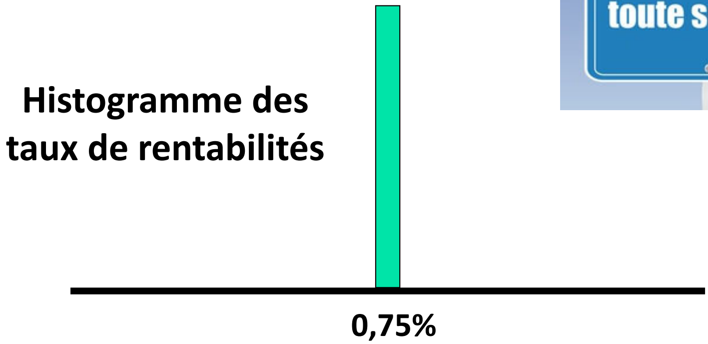
Cours de Finance

Risque

Plan de la séance

- Placement sans risque
- Classification des produits risqués ?
- Écart-type des rentabilités
- Variance réalisée et variance swaps
- Approche prospective du risque : VIX et variance swaps
- Dynamique de la volatilité : modèles GARCH
- Prédiction des crises : le « moment de Minsky »
- Volatilité endogène : le rôle procyclique des marges
- Volatilité endogène et exubérance irrationnelle
- Rappels sur les propriétés de la variance et de la covariance

Placement sans risque



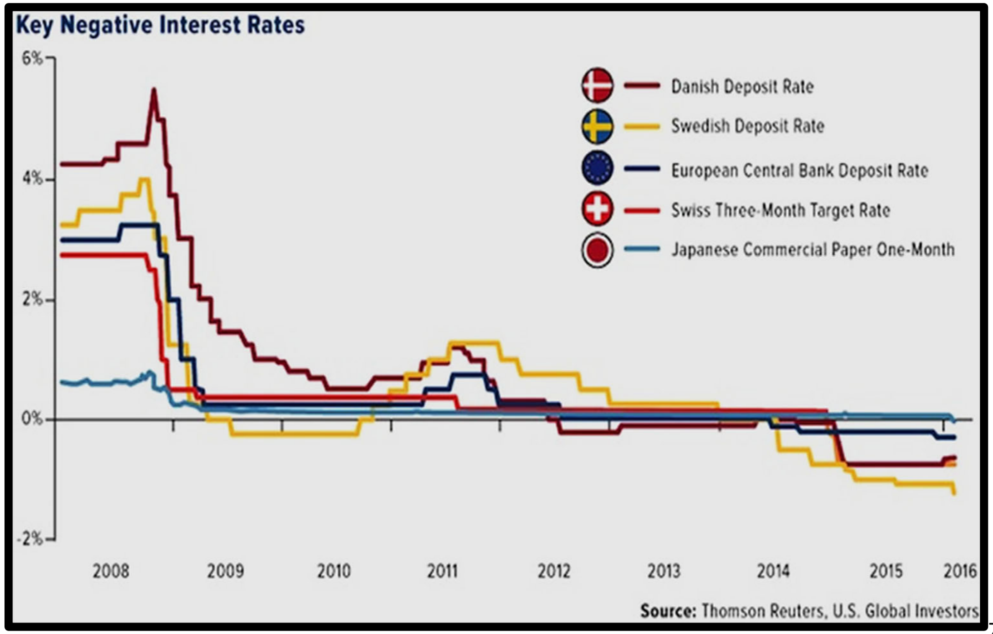
Une seule valeur, ici 0,75%. La rentabilité est certaine

$\boldsymbol{r_f = 0,75\%}$ **Risk Free**

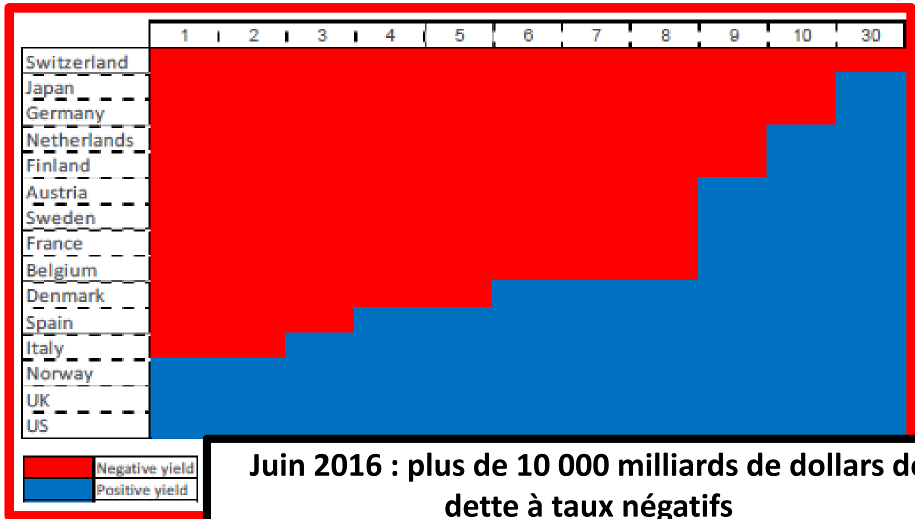
Placement sans risque

- Placement sans risque de 1 € au taux d'intérêt $\boldsymbol{r_f}$
- Rapporte $\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f}$ (valeur acquise) à la date 1
- La probabilité d'obtenir $\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f}$ est égale à 1
- Aucune dispersion des rentabilités
- Aujourd'hui, les placements peu risqués offrent des rentabilités négatives
  - *Fin des Sicav monétaires, retour du cash ?*
  - *Il n'y pas de placement sans risque !*
    - Les banques et les Etats peuvent faire faillite
    - Le cash peut ne plus être accepté ou être volé

Taux directeurs des banques centrales en Europe

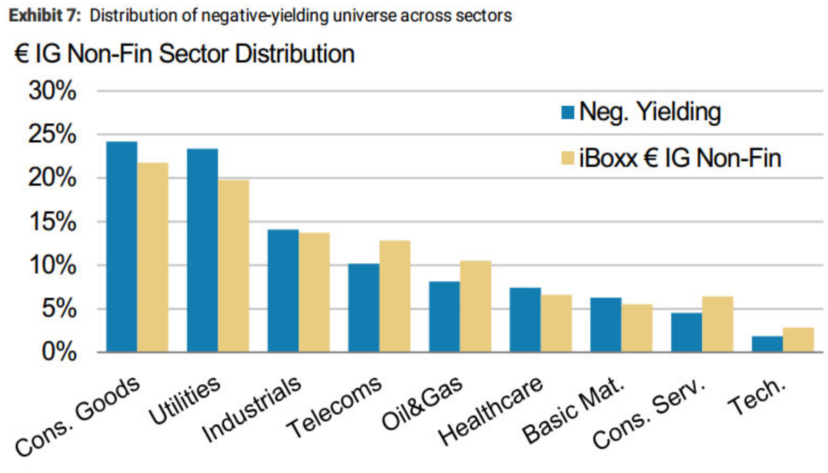


En abscisse, les maturités, en ordonnées les pays émetteurs, En rouge, les obligations à taux négatif



Juin 2016 : plus de 10 000 milliards de dollars de dette à taux négatifs

Les entreprises industrielles européennes empruntent à taux négatif : analyse sectorielle



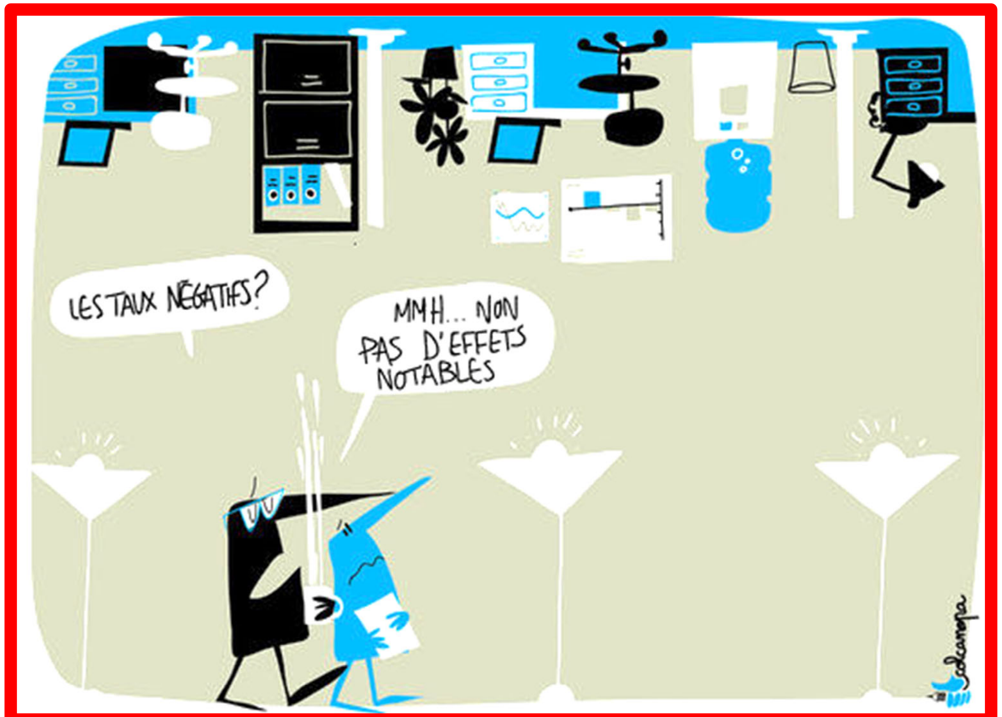
Source: Markit, Morgan Stanley Research

13 septembre 2016, Source Morgan Stanley

Allemagne : des taux d'intérêt négatifs à la Commerzbank (novembre 2014)

Les clients qui ont trop d'argent sur leurs comptes courants se voient infliger des « pénalités ».

Raiffeisenbank Gmund, une banque coopérative dans le Land allemand de Bavière, a annoncé qu'à partir du mois de septembre, elle commencerait à facturer ses clients détenteurs de dépôts supérieurs à 100 000 euros avec un taux d'intérêt négatif de 0,4 %.



Commerzbank envisage de stocker des milliards d'euros en liquide pour échapper aux taux négatifs (juin 2016)

Le cash n'est pas un placement sans risque… à Gotham City

"Burning cash": *It's not about money… it's about sending a message*. The Joker in The Dark Knight

La disparition du cash? Pratiquer des taux négatifs sur les dépôts à vue pourrait entraîner une ruée sur les billets

Produits financiers risqués et non-risqués

Actions, obligations corporate, certaines obligations souveraines, immobilier, contrats d'assurance-vie en unités de compte.

Cash, dépôts bancaires bien assurés, emprunts allemands à court-terme (pour les épargnants de la zone euro)

Il est difficile d'établir une classification des risques en fonction des produits financiers

Vente d'options, contrats à terme / futures avec prêt de la marge initiale, certains hedge funds, vente de Credit Default Swaps, certains leverage notes, vente à découvert de titres financiers, penny stocks, private equity, immobilier de luxe, diamant, or, matières premières, objets d'art.

Il faut prendre en compte, les stratégies d'investissements (vente à découvert, effet de levier), le contexte (bulles financières), la maîtrise technique de l'investisseur.

PRIIPs : Packaged Retail and Insurance-based Investment Products

Projet de règlement européen en vue d'améliorer (en principe !) l'information financière communiquée aux investissseurs

Un document d'informations clés (DIC ou KID, Key Information Document) devra être remis aux clients

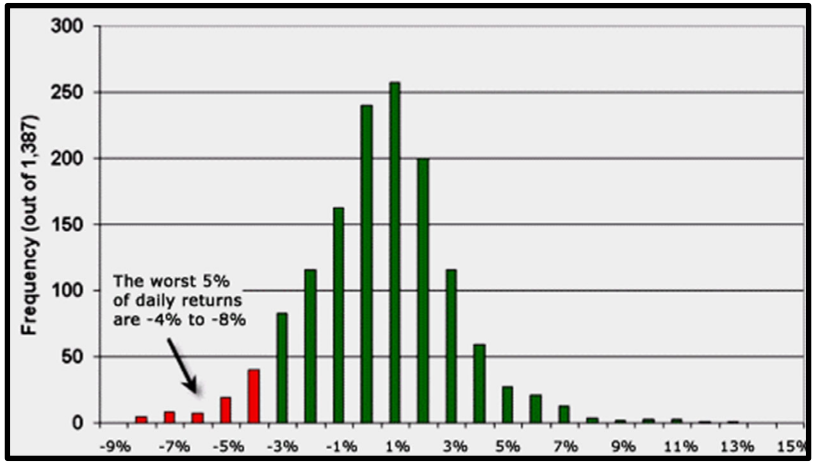
Il précise les risques, notamment liés aux fluctuations de marché : MRM (Market Risk Measure)

Les risques sont mesurés à partir de la VEV: VaR (Value at Risk equivalent volatility). Il s'agit d'une métrique de risque différente de la volatilité (écart-type des rentabilités)

L'intention est louable, mais la compréhension des indicateurs de risque sera réservée à quelques happy few

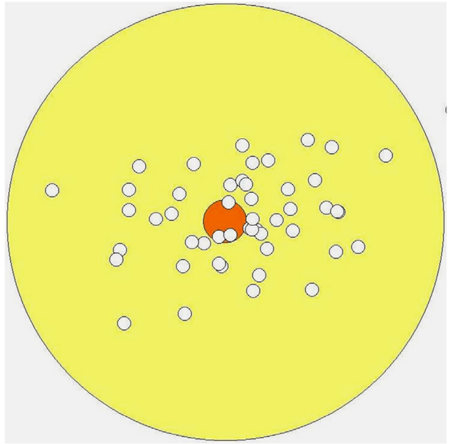
Écart-type des rentabilités

Histogramme / distribution empirique des rentabilités quotidiennes de l'indice NASDAQ 100 (ticker QQQ)



Les diverses notions de risque : écart-type

Plus la dispersion autour de la moyenne est élevée, plus l'écart-type est élevé. Le rique aussi…



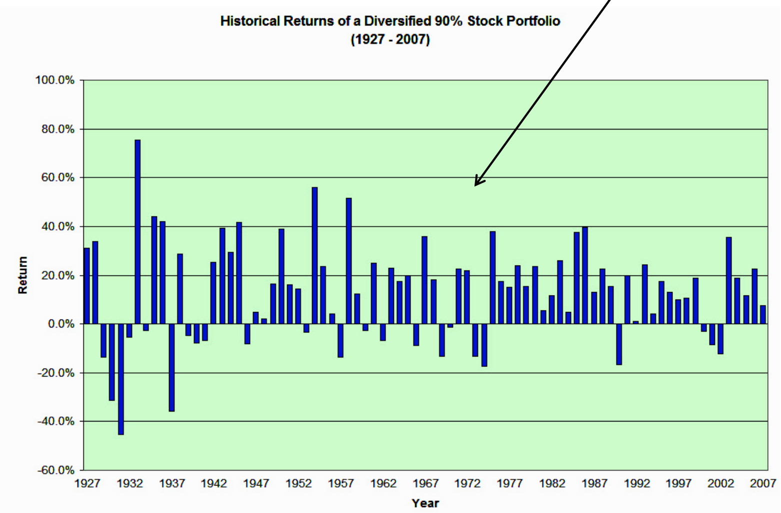
Guillaume Tell et la légendaire précision suisse…

Risque d'un portefeuille

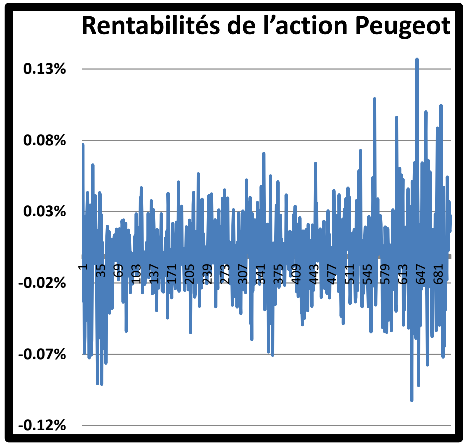
Rentabilités annuelles du portefeuille précédent

- Historique de rentabilités de portefeuille
  - *Plus grandes sont les fluctuations, plus grand est le risque*

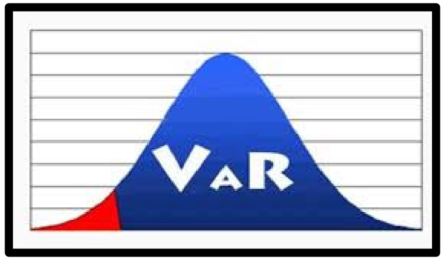
En ordonnées, les rentabilités annuelles en %



Écart-type des rentabilités



- Les taux de rentabilité fluctuent au cours du temps
- Variance ou l'**écart-type du taux de rentabilité** est une mesure de la **dispersion des rentabilités**
  - *Autour de leur moyenne*
- Mesure simple, couramment utilisée du risque lié à un titre
  - *Il existe d'autres mesures de risque (**Value at Risk** ou **VaR**), mais l'écart-type ou volatilité reste le mètre étalon (benchmark)*

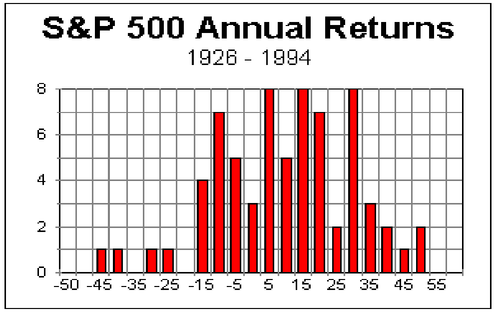


Écart-type des rentabilités

Si on connaît la distribution des rentabilités d'un portefeuille, on peut calculer l'écart-type des taux de rentabilité

$p(k)$ probabilité d'avoir une rentabilité égale à $R(k)$

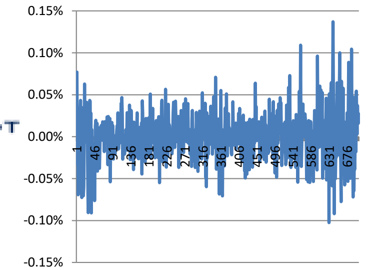
$p(k)$ peut être obtenu à partir des fréquences d'apparition de la rentabilité $R(k)$ (approche historique)



Histogramme des rentabilités annuelles de l'indice S&P500

http://en.wikipedia.org/wiki/S%26P_500

Variance du taux de rentabilité



- Variance de la rentabilité

$$\mathrm{Var}[r] = \underbrace{\sum_{k=1}^{K} p(k) \times \underbrace{\Big(\underbrace{r(k) - E[R]}_{\text{écart à la moyenne}}\Big)^2}_{\text{écart quadratique}}}_{\text{écart quadratique moyen}}$$

- Ecart-type de la rentabilité r

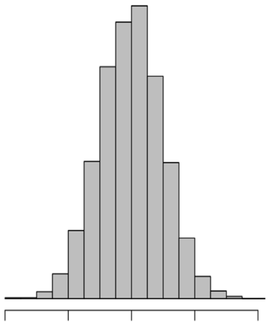
$$\sigma[r] = \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[r]}$$

$$\sigma = 2{,}89\%$$

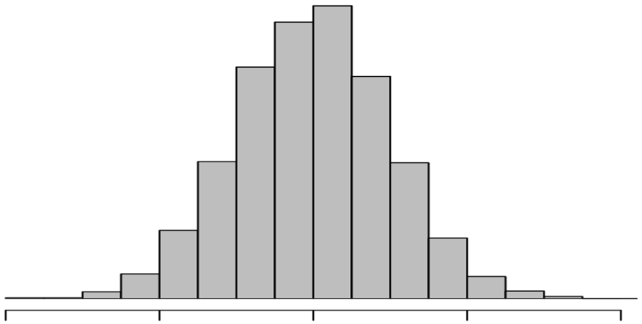
La variance est d'autant plus élevée que la dispersion des rentabilités autour de la moyenne $E[r]$ est élevée

Variance de la rentabilité quotidienne de l'action Peugeot

$$\mathrm{Var}[r] = 0{,}000837964$$



Distribution plus concentrée autour de la moyenne
Moins de risque



Plus de dispersion des rentabilités : plus de risque

L'écart-type est une mesure de la dispersion des rentabilités autour de la rentabilité moyenne.

Écart-type des rentabilités

- Écart-type : illustration numérique
  - *On suppose que les 4 dernières rentabilités quotidiennes de l'action LVMH sont de* $\mathbf{+1\%, -1\%, -1\%, +1\%}$
  - *Les probabilités assignées à chacune de ces quatre journées sont de* $1/4$
  - *L'espérance du taux de rentabilité de l'action est égale à :*
  - $\mathbf{1/4 \times 1 + 1/4 \times (-1) + 1/4 \times (-1) + 1/4 \times 1 = 0\%}$
  - *La variance du taux de rentabilité est égale à :*
  - $\mathbf{1/4 \times (1-0)^2 + 1/4 \times (-1-0)^2 + 1/4 \times (-1-0)^2 + 1/4 \times (1-0)^2 = 1}$
  - *L'écart-type du taux de rentabilité est égal à la racine carrée de la variance soit* $\mathbf{1\%}$
  - *L'écart-type est bien lié à la dispersion des rentabilités*

Écart-type des rentabilités

- Remarque sur la détermination des probabilités
  - *Dans l'exemple précédent, on a assigné <u>la même probabilité à chaque journée</u> de calcul des rentabilités*
    - Ceci correspond également à l'histogramme des rentabilités déjà présenté pour Peugeot
  - *Nombre total de jours* $= 4$
  - *Nombre de jours où la rentabilité est de* $+1\% = 2$
  - *Fréquence correspondante* $= 2/4 = 0{,}5$
  - *On obtient donc la distribution de probabilité suivante*
    - $+1\%$ avec la probabilité $0{,}5$
    - -1% avec la probabilité $0{,}5$
    - On peut retrouver que l'espérance est égale à 0% et l'écart-type à 1%
  - *On parle de* ***distribution empirique des rentabilités***

Écart-type des rentabilités

- Écart-type : illustrations numériques (suite)
  - *Les 4 dernières rentabilités quotidiennes de l'action LVMH sont maintenant de* $+\mathbf{2}\%, -\mathbf{2}\%, -\mathbf{2}\%, +\mathbf{2}\%$
    - Soit le double des valeurs retenues dans l'exemple précédent
    - Les probabilités assignées à chacune de ces 4 journées restent de $1/4$
  - *L'espérance du taux de rentabilité de l'action est égale à :*
    - $\mathbf{1/4 \times 2 + 1/4 \times (-2) + 1/4 \times (-2) + 1/4 \times 2 = 0}$
  - *La variance du taux de rentabilité est égale à :*
    - $\mathbf{1/4 \times (2-0)^2 + 1/4 \times (-2-0)^2 + 1/4 \times (-2-0)^2 + 1/4 \times (2-0)^2 = 4}$
    - L'écart-type du taux de rentabilité est égal à la racine carrée de la variance soit 2%
    - L'interprétation intuitive de l'écart-type comme dispersion des rentabilités reste valide
    - Si on multiplie toutes les rentabilités observées par 2, on multiplie également l'écart-type par 2

Écart-type des rentabilités

- Écart-type : illustrations numériques (suite)
  - *Les 4 dernières rentabilités quotidiennes de l'action LVMH sont maintenant de* $-\mathbf{2}\%, +\mathbf{2}\%, +\mathbf{2}\%, -\mathbf{2}\%$
    - Soit l'opposé des valeurs retenues dans l'exemple précédent
    - Les probabilités assignées à chacune de ces 4 journées restent de $1/4$
  - *L'espérance du taux de rentabilité de l'action est égale à :*
    - $\mathbf{1/4 \times (-2) + 1/4 \times 2 + 1/4 \times 2 + 1/4 \times (-2) = 0}$
  - *La variance du taux de rentabilité est égale à :*
    - $\mathbf{1/4 \times (-2-0)^2 + 1/4 \times (2-0)^2 + 1/4 \times (2-0)^2 + 1/4 \times (-2-0)^2 = 4}$
    - La variance du taux de rentabilité reste égale à $\mathbf{4}$
    - L'écart-type du taux de rentabilité; égal à la racine carrée de la variance, reste égal à 2% comme dans le transparent précédent
    - Si on multiplie toutes les rentabilités observées par -1, on ne change pas l'écart-type.
    - C'est logique puisque la dispersion des rentabilités autour de la moyenne n'a pas changé.

Écart-type des rentabilités

- Écart-type : illustrations numériques (suite)
  - *Les 4 dernières rentabilités quotidiennes de l'action LVMH sont maintenant de* $+\mathbf{2}\%, \mathbf{0}\%, \mathbf{0}\%, +\mathbf{2}\%$
    - On a rajouté 1% à la première suite de valeurs $+\mathbf{1}\%, -\mathbf{1}\%, -\mathbf{1}\%, +\mathbf{1}\%$
    - Les probabilités assignées à chacune de ces 4 journées restent de $1/4$
  - *L'espérance du taux de rentabilité de l'action est égale à :*
    - $\mathbf{1/4 \times 2 + 1/4 \times 0 + 1/4 \times 0 + 1/4 \times 2 = 1\%}$
  - *La variance du taux de rentabilité est égale à :*
    - $\mathbf{1/4 \times (2-1)^2 + 1/4 \times (0-1)^2 + 1/4 \times (0-1)^2 + 1/4 \times (2-1)^2 = 1}$
    - La variance du taux de rentabilité reste égale à 1.
    - L'écart-type du taux de rentabilité; égal à la racine carrée de la variance, reste égal à 1% comme dans le premier transparent.
    - Ici, on a décalé toute les rentabilités d'une quantité constante
    - Ceci change la moyenne, mais pas les écarts à la moyenne
    - La dispersion des rentabilités autour de la moyenne n'a pas changé.

Rappels de probabilités

- Définitions
  - *Si X est une variable aléatoire et $E[X]$ son espérance, la variance de X est égale à* $E[(X-E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$
  - *On note la variance de X :* $\mathrm{Var}[X]$
  - *Si X et Y sont deux variables aléatoires, la covariance entre X et Y est égale à* $E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$
  - *On notera la covariance entre X et Y :* $\mathrm{Cov}(X,Y)$
- Propriétés
  - $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}[X]$
  - $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + 2\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}[Y]$
  - *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Var}[\alpha X] = \alpha^2 \mathrm{Var}[X]$

Rentabilités : unités de temps

- Dans la suite, P_t représentera la valeur d'un portefeuille autofinancé à la date t
  - *Dividendes réinvestis, pas d'apport ou de retraits de cash, uniquement des arbitrages entre la poche risquée et la poche investie en actif sans risque*
  - *Exemple : action « buy and held to maturity »*
- $P_1, \ldots, P_{t-1}, P_t, P_{t+1}, \ldots, P_{t+h-1}, P_{t+h}, \ldots, P_T$
  - ***Unité de temps*** *: jour, année, semaine, 5 minutes, …*
  - *Si l'unité de temps est l'année, la suite quotidienne des prix s'écrira $P_{1/365}, P_{2/365} \ldots, P_1$ pour une année de 365 jours*
  - *La **fréquence d'échantillonnage** est l'inverse de l'intervalle de temps entre deux observations*
  - ***Horizon de placement*** *: écart entre date terminale et date initiale*

Rentabilités : unités de temps

- Unité de temps le jour, une fréquence d'échantillonnage quotidienne et un horizon de placement de 10 jours
  - *Problématique standard en analyse des risques de marché des trading books bancaires*
  - *Remarque pratique importante : on prend le plus souvent comme unité de temps l'année pour les calculs des variances ou des écart-types*
  - *C'est plus « parlant », mais moins simple du point de vue des notations.*
- $y_{t-1,t} = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln\left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right) \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$
  - $y_{t-1,t}$ *: rentabilité logarithmique, proche de la rentabilité simple, si celle-ci est « proche » de zéro.*

Rentabilités : unités de temps

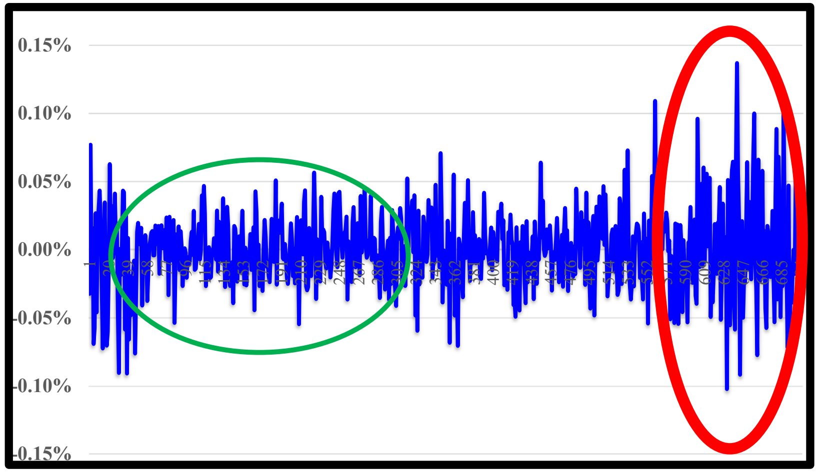
- $y_{t,t+1} = \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \approx \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}$
  - $P_{t+1} = 101, P_{t+1} = 100, \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} = \mathbf{1\%}$
  - $\ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) = \mathbf{0,995\%}$
- $y_{t,t+10} = \ln\left(\frac{P_{t+10}}{P_t}\right) \approx \frac{P_{t+10} - P_t}{P_t}$
  - $y_{t,t+10}$ *: **rentabilité logarithmique entre t et t + 10***
  - *Avec une unité de temps quotidienne*
  - $\ln\left(\frac{P_{t+10}}{P_t}\right) = \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t} \times \cdots \times \frac{P_{t+10}}{P_{t+9}}\right) = \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{P_{t+10}}{P_{t+9}}\right)$
- $y_{t,t+10} = y_{t,t+1} + \cdots + y_{t+9,t+10}$
  - *Terme de droite : somme des rentabilités quotidiennes*

Espérances de rentabilité

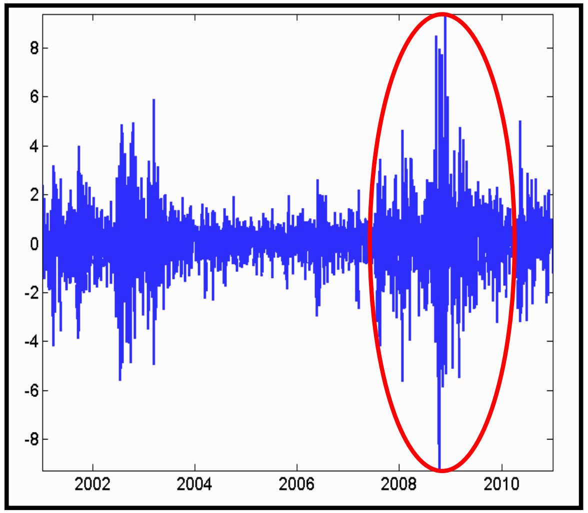
- $m_{t,t+1} = E\left[y_{t,t+1}\right]$: espérance du taux de rentabilité entre les dates t et $t+1$
- $m_{t,t+10} = E\left[y_{t,t+10}\right]$: espérance du taux de rentabilité entre les dates t et $t+10$
- Comme $y_{t,t+10} = y_{t,t+1} + \cdots + y_{t+9,t+10}$
  - $m_{t,t+10} = m_{t,t+1} + \cdots + m_{t+9,t+10}$
  - *Par linéarité de l'espérance.*
- Hypothèse 1: $m_{t,t+1}$ ne dépend pas de la date courante t
  $m_{t,t+1} = m$
- Dans ce cas, $m_{t,t+10} = \mathbf{10} \times m$
  - ***Espérance de rentabilité proportionnelle à l'horizon de placement***

Écart-type (volatilité) des rentabilités

- Périodes de forte et faible volatilité du taux de rentabilité de l'action Peugeot en ordonnées ; en abscisses les dates.



Écart-type des rentabilités



FTSE
THE INDEX COMPANY

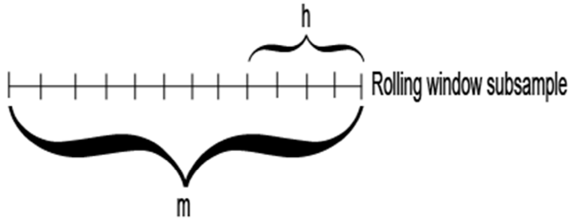
Le FTSE (Financial Times Stock Exchange) 100 (footsie) est l'indice boursier des cent entreprises britanniques les mieux capitalisées cotées à la bourse de Londres.

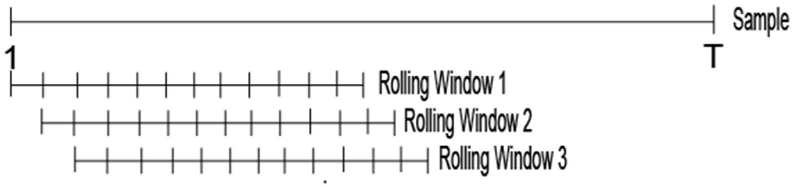
Rentabilités quotidiennes de l'indice Footsie. *Forte augmentation de la volatilité après la faillite de Lehman Brothers*

Variance réalisée

- Définition (variance réalisée ou empirique) :
- $v_{t,t+10} = \frac{1}{10} \times \left(\left(y_{t,t+1} - m\right)^2 + \cdots + \left(y_{t+9,t+10} - m\right)^2 \right)$
  - *Variance calculée pour un échantillon de dix journées entre la date courante* t *et l'horizon de placement* $t+10$
  - *Dépend de la trajectoire des valeurs du portefeuille, échantillonnées ici de manière quotidienne* $P_t, \dots, P_{t+10}$
  - *Et pas seulement des valeurs initiales* P_t *et* P_{t+10}
  - $v_{t,t+10}$ *est connue en* $t+10$.
  - *A la date courante,* $v_{t,t+10}$ *n'est pas connu (aléatoire)*
- Espérance de la variance réalisée $E\left[v_{t,t+10}\right]$?
- Variance de la rentabilité sur 10 jours : $\mathrm{Var}\left[y_{t,t+10}\right]$?

détermination des variances réalisées avec des fenêtres glissantes (« rolling window ») de longueur donnée



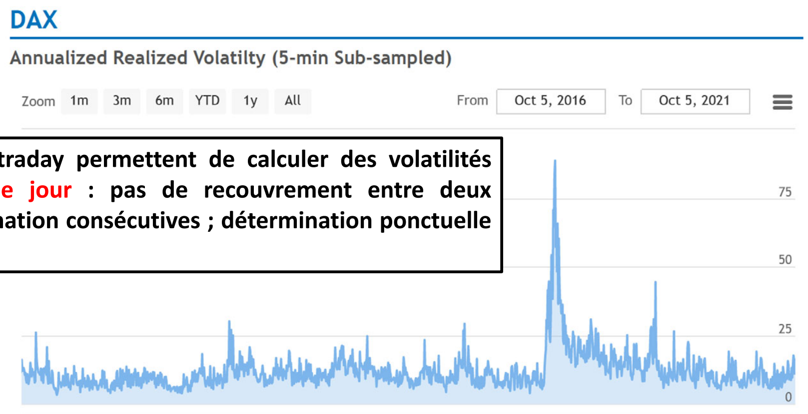


Exemple : volatilité réalisée indice S&P500

- *Horizon de placement : 1 mois (21 jours de trading)*
- *Fréquence quotidienne*
- *Unité de temps : annuelle*
- *Volatilité = racine carrée de la variance*

Exemple : volatilité réalisée indice DAX (octobre 2016 – octobre 2021)

- *Horizon de placement : 1 jour*
- *Intervalle de temps :* ***5 minutes***
- *Unité de temps : annuelle*

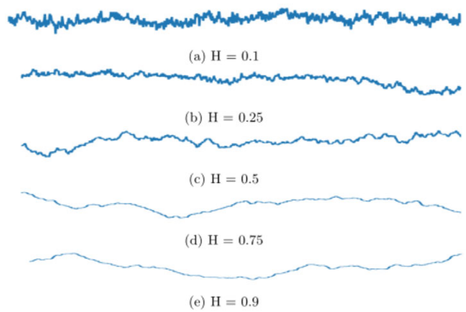


Les données intraday permettent de calculer des volatilités réalisées chaque jour : pas de recouvrement entre deux périodes d'estimation consécutives ; détermination ponctuelle de la volatilité.

https://realized.oxford-man.ox.ac.uk/

Volatilité quotidienne réalisée

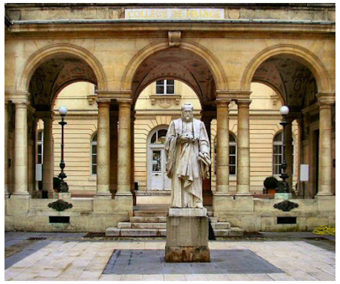
- Trajectoires plus rugueuses quand les autocorrélations des volatilités réalisées décroissent plus lentement
  - *Décroissance associée au coefficient de Hurst H*
  - *Approche standard pour les prix :* $H = 0{,}5$
  - *Pour la volatilité, on aurait plutôt* $H = 0{,}1$



Source : "If volatility be rough with you, be rough with volatility", Bocconi Students Investment Club (2020)

Dynamique de la volatilité réalisée

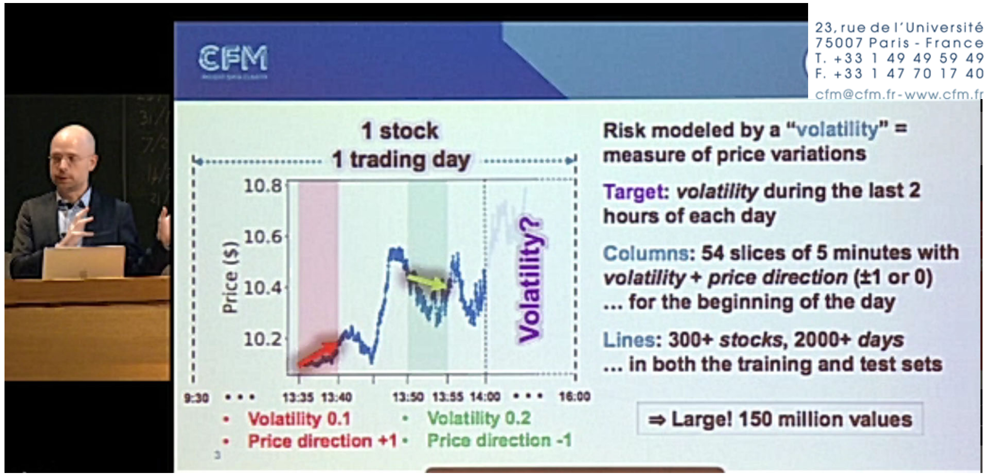
- Stéphane Mallat, Chaire Sciences des données au Collège de France
- Challenge 2017-2018 : Prédiction de volatilité de marchés financiers par CFM (Capital Fund Management)
  - https://www.college-de-france.fr/site/stephane-mallat/Prediction-de-volatilite-de-marches-financiers-par-CFM.htm
  - https://www.cfm.fr/who-we-are/
- Travaux en cours sur les dynamiques des volatilités quotidiennes réalisées
  - *Trajectoires « rugueuses »*
  - *Décroissance lente des autocorrélations (mémoire longue)*



La dynamique de la volatilité

INSIGHT.DATA.CLARITY.

23, rue de l'Université
75007 Paris - France
T. +33 1 49 49 59 49
F. +33 1 47 70 17 40
cfm@cfm.fr - www.cfm.fr



La base d'apprentissage pour la prévision de la volatilité ne comprend pas la crise financière de 2007-2008. Comment se comporterait un algorithme de prédiction de la volatilité dans un contexte différent ? (question écrite à l'automne 2019).

La dynamique de la volatilité

Risk.net

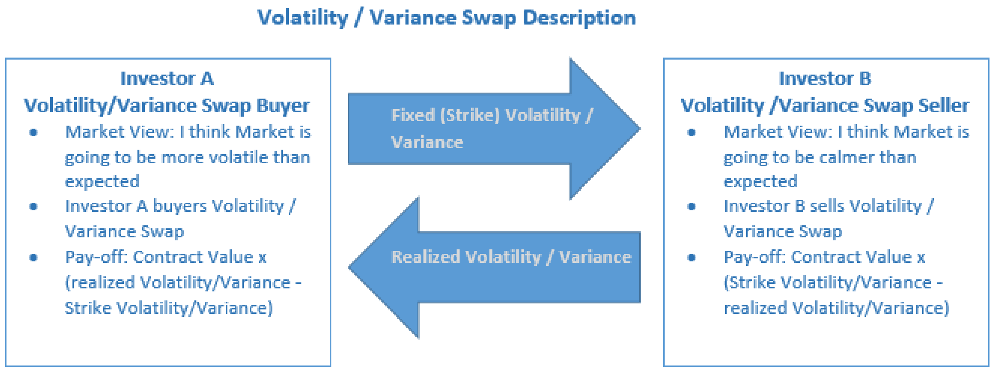
- Les changements de la dynamique de la volatilité des cours boursiers et la crise sanitaire
  - *"Vol decay and correlation flips: CFM's take on the Covid crisis" (Risk Magazine, 4 septembre 2020)*
    - https://www.risk.net/investing/quant-investing/7674846/vol-decay-and-correlation-flips-cfms-take-on-the-covid-crisis
  - *"The big surprise of the crisis was less the market collapse but rather the speed of recovery.*
  - *The S&P 500 nose-dived 30% in just 22 trading days in late February and early March before climbing to a new record high by August 18.*
  - *The Vix index closed at 82.69 on March 16 – its highest close ever – but was hovering around the low 20s by August".*

Espérance de la variance réalisée

- Calcul de $E\left[v_{t,t+10}\right]$?
- $v_{t,t+10} = \frac{1}{10} \times \left(\left(y_{t,t+1} - m\right)^2 + \cdots + \left(y_{t+9,t+10} - m\right)^2\right)$
- $\mathrm{Var}\left[y_{t,t+1}\right] = E\left[\left(y_{t,t+1} - m\right)^2\right]$
- Hypothèse 2 : Les variances des rentabilités quotidiennes ne dépendent pas de la date courante : $\mathrm{Var}\left[y_{t,t+1}\right] = \sigma^2$
  - *σ : écart-type des rentabilités quotidiennes*
- Par linéarité de l'espérance, $E\left[v_{t,t+10}\right] = \sigma^2$
- Sous l'hypothèse $\mathrm{Var}\left[y_{t,t+1}\right] = \sigma^2$, les variances réalisées fluctuent autour de la variance des rentabilités quotidiennes
- Remarque : $E\left[v_{t,t+H}\right] = \sigma^2$, pour tout $H \geq 1$.

Swap de variance (variance swap)

- Contrat où l'acheteur reçoit la variance réalisée (× un montant nominal) sur une période donnée (exemple 1 mois)
- Paiement à l'échéance du contrat (exemple 1 mois)
  - *La variance réalisée (quantité statistique) est un « objet de marché » est associée à un paiement dans un contrat financier*
- En contrepartie, il paye une prime à l'échéance du contrat
- Prime sera d'autant plus élevée que l'on anticipe que la variance réalisée sera élevée
  - *Sans rentrer dans les détails, la prime payée fait intervenir l'espérance calculée pour des probabilités prospectives (dites de marché) et non des probabilités rétrospectives (fréquentistes)*
- Pour un *volatility swap*, c'est l'écart-type (racine carrée de la variance réalisée) qui est échangé.

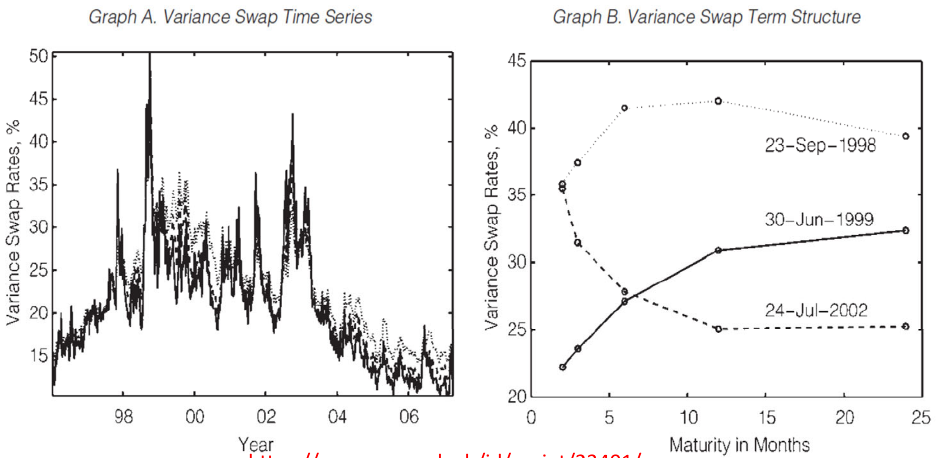


L'acheteur d'un variance swap est gagnant si la variance réalisée est supérieure à la prime.

Spéculation à la hausse sur la variance future (ou couverture contre les pertes liées à une hausse de la volatilité).

A gauche l'évolution des primes des variance swaps pour l'indice S&P entre 1996 et 2007 : les primes sont exprimées en % et annualisées.
A droite, les niveaux de volatilité prédits pour divers horizons (de 1 mois à deux ans) et trois dates données (exemple : anticipations à la hausse en juin 1999)

Graph A of Figure 1 plots the time series of the variance swap rates in volatility percentage points at 3 selected times to maturity: 2 months (solid line), 6 months (dashed line), and 24 months (dotted line). Graph B plots representative variance swap rate term structures at different dates.



https://www.zora.uzh.ch/id/eprint/23401/

Variance de la rentabilité en fonction de l'horizon

- Variance de la rentabilité : $\mathrm{Var}[y_{t,t+10}]$?
  - Où $y_{t,t+10} = y_{t,t+1} + \cdots + y_{t+9,t+10}$
- Hypothèse 3 : les rentabilités quotidiennes ne sont pas autocorrélées : $\mathrm{Cov}(y_{t,t+1}, y_{t+h,t+h+1}) = 0, \forall h > 0$
  - Hypothèse 3 : tests de ratio de variance (Lo et MacKinlay)
  - Voir exercice vu en cours (test du ratio de vraisemblance de Christoffersen)
- Sous les hypothèses 2 et 3, $\mathrm{Var}[y_{t,t+10}] = 10 \times \sigma^2$
- De manière plus générale, $\mathrm{Var}[y_{t,t+H}] = H \times \sigma^2$
- Écart-type (ou volatilité) de la rentabilité sur un horizon H :
  $\sqrt{\mathrm{Var}[y_{t,t+H}]} = \sigma \times \sqrt{H}$ (square root scaling)
- Volatilité annualisée ≈ volatilité quotidienne × $\sqrt{252}$

S&P Dow Jones Indices

A Division of S&P Global

Cboe Global Markets

S&P Dow Jones Indices, partie du groupe Standard & Poor's produisant notamment l'indice Dow Jones et l'indice S&P 500. L'indice S&P 500 est constitué à partir des cours boursiers de 500 grandes sociétés américaines (pondération par la capitalisation boursière flottante), représentant environ 80% de la capitalisation boursière américaine

CBOE : Chicago Board Options Exchange, bourse américaine traitant notamment d'options d'achat et de vente sur indice boursiers

Approches prospectives du risque

- VIX (Volatility Index): introduit en 1993 par le CBOE (Chicago Board Options Exchange)
- 2003 : nouvelle méthodologie de calcul du VIX
  - Relativement peu d'incidences quant aux données produites
  - http://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf
- *Données servant à calculer l'indice : primes d'options d'achat et de vente sur l'indice américain S&P500*
  - Détail et motivations du calcul de l'indice ne sont pas à connaître
- *Maturité (ou date d'exercice) environ 1 mois*
- *Primes des options d'achat et de vente augmentent avec **la volatilité** (écart-type des rentabilités) entre aujourd'hui et la date d'exercice, **anticipée par les opérateurs de marché**.*

- VIX : « l'indice de la peur »

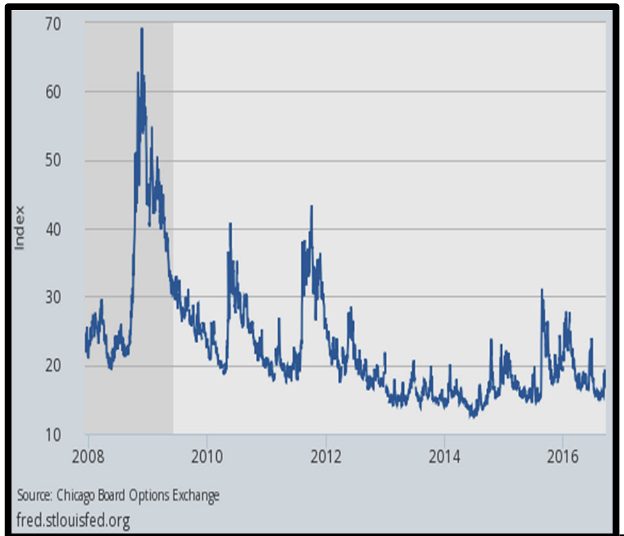
VIX

The fear index

Le VIX est un indice mesurant le niveau de la volatilité future (pour le mois à venir) des taux de rentabilité des actions américaines

Plus il est élevé, plus le risque perçu des actions est élevé.

Approche prospective

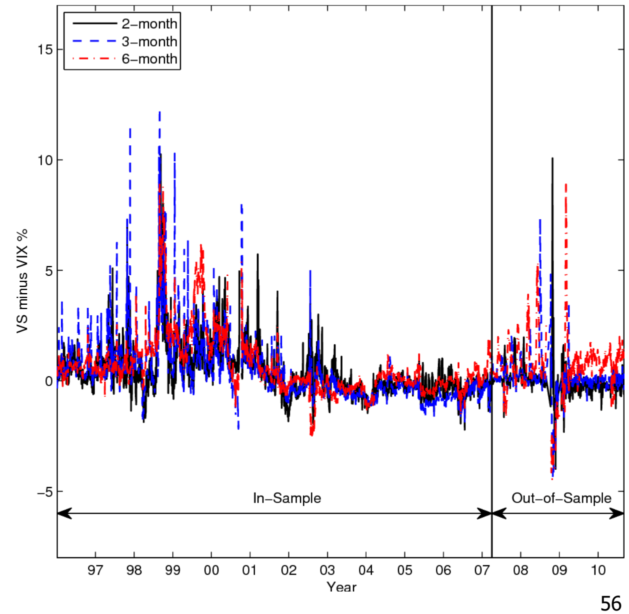


En abscisses, dates en années, en ordonnées niveau du VIX en %

L'écart entre le VIX et la volatilité obtenue à partir des variances swaps est négligeable (cela résulte également de la théorie

En ordonnées 100 fois la différence entre le VIX et l'estimation de la volatilité future, pour des horizons de 2, 3 et 6 mois.

Ainsi, si le VIX est à un niveau de 20%, les estimations issues des variances swaps de 20,05%, l'écart affiché est de 5



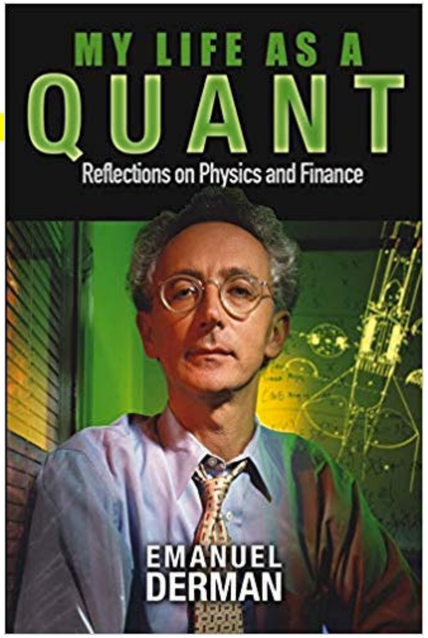
Quantitative Strategies Research Notes

March 1999

More Than You Ever Wanted To Know* About Volatility Swaps

Kresimir Demeterfi
Emanuel Derman
Michael Kamal
Joseph Zou

* But Less Than Can Be Said

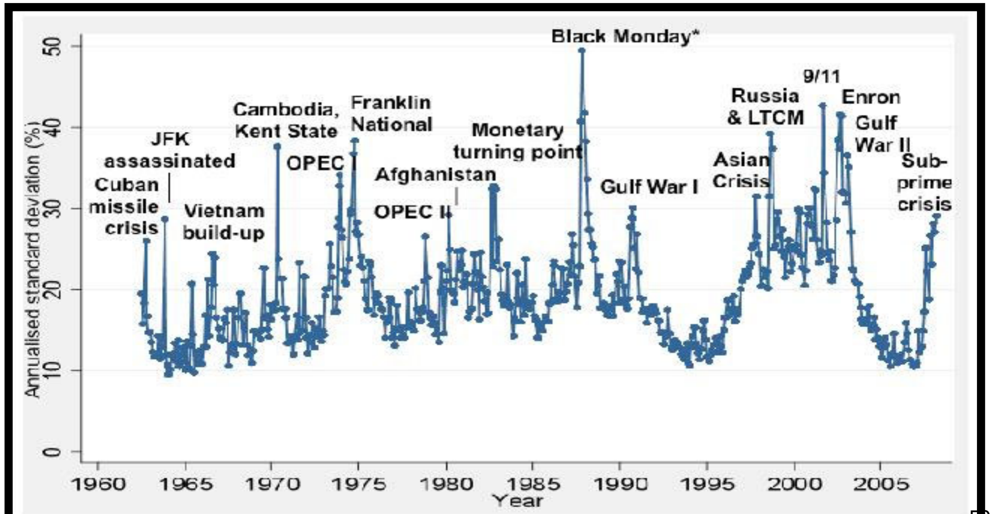


Emmanuel Derman, un des pionniers de la modélisation financière

Statistiques descriptives VIX

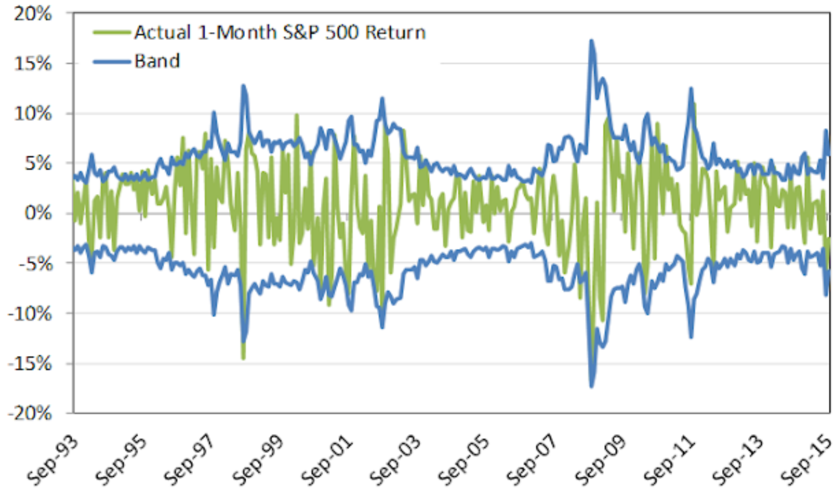
Sample Period	Jan 2, 1990 - Mar 20, 2015
Sample Size	6352
Mean	19.921
Min	9.310
Max	80.860
Std Dev.	7.982
Skewness	2.072
Kurtosis	10.466

écart-type des rentabilités annuelles de l'indice boursier américain S&P100 (portefeuille d'actions de 100 grandes sociétés américaines) : pics de volatilité associés à des crises (krachs, guerres, faillites). *Calcul fait à partir des marchés d'options sur indices (approche prospective)*



Exemple illustratif

- Date aujourd'hui : t, dans un mois, $t+21$ (trading days)
- $\log\left(\frac{S_{t+21}}{S_t}\right)$: taux de rentabilité sur le mois à venir, où S_t est le niveau des prix ou de l'indice boursier à la date t
  - *S_{t+21} n'est pas connu en t (variable aléatoire)*
- VIX à la date $t = 20\%$, correspond à une estimation de l'écart-type annualisé du taux de rentabilité.
- Estimation de l'écart-type de $\log\left(\frac{S_{t+21}}{S_t}\right)$: $\frac{20\%}{\sqrt{12}} = 5{,}8\%$
- Si espérance du taux de rentabilité mensuel = 0, intervalle de fluctuation (avec un écart-type) est $[-5{,}8\%; 5{,}8\%]$



En vert, rentabilités mensuelles du S&P500, en bleu +/- le VIX mensualisé : estimation d'un écart-type du taux de rentabilité le mois à venir.

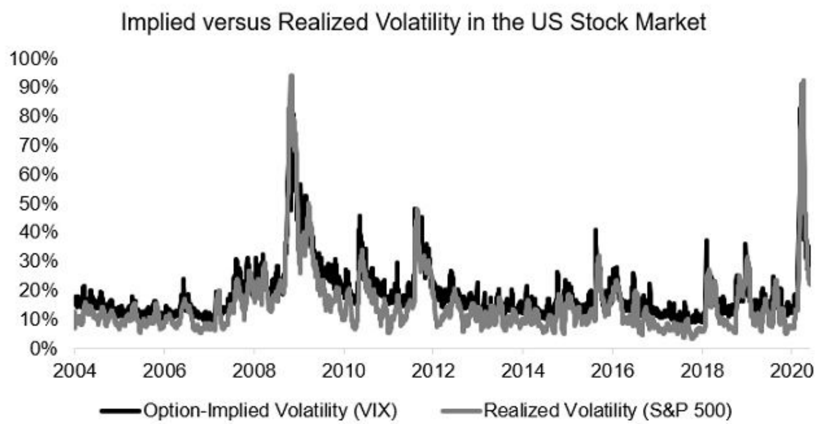
Les rentabilités restent à peu près dans l'intervalle de fluctuation formé à partir du VIX, ce qui montre sa qualité prédictive.

NB : Le VIX est exprimé en volatilité annualisée. Pour passer à une volatilité mensuelle, il faut diviser le VIX par $\sqrt{12}$.

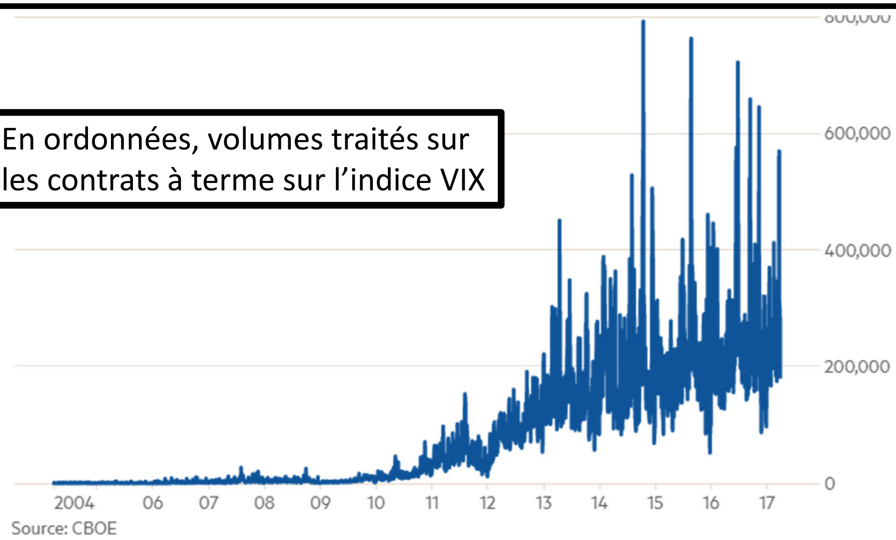
Le VIX peut être vu comme un assez bon « prédicteur » de la volatilité réalisée le mois prochain.
Mais au cours des six premiers mois de l'année 2017, le VIX a surévalué la volatilité réalisée de l'indice S&P500 (SPX)

VIX et volatilité réalisée suite

- Néanmoins, le VIX est un assez bon prédicteur de la volatilité future.



Les contrats « futures » sur VIX permettent de parier sur l'**évolution de l'indice VIX** (qui est lui-même une prévision) : Les marchés financiers donnent ainsi un prix aux **opinions sur le risque futur**. Ce marché connait une croissance rapide.



En ordonnées, volumes traités sur les contrats à terme sur l'indice VIX

Robert Engle, prix Nobel d'économie, pour ses travaux en économétrie de la finance, notamment la prévision de la volatilité

$\boldsymbol{\sigma_t}$ est la volatilité prévue du taux de rentabilité entre les dates $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{t+1}$.

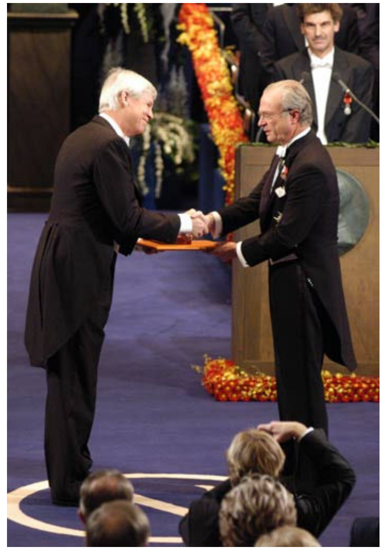
Dynamique de la volatilité des rentabilités $\boldsymbol{\sigma_t}$ dans un modèle GARCH(1,1) :

$$\boldsymbol{\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_{t-1}^2}$$

$\boldsymbol{r_t}$ rentabilité entre les dates $\boldsymbol{t-1}$ et $\boldsymbol{t}$.

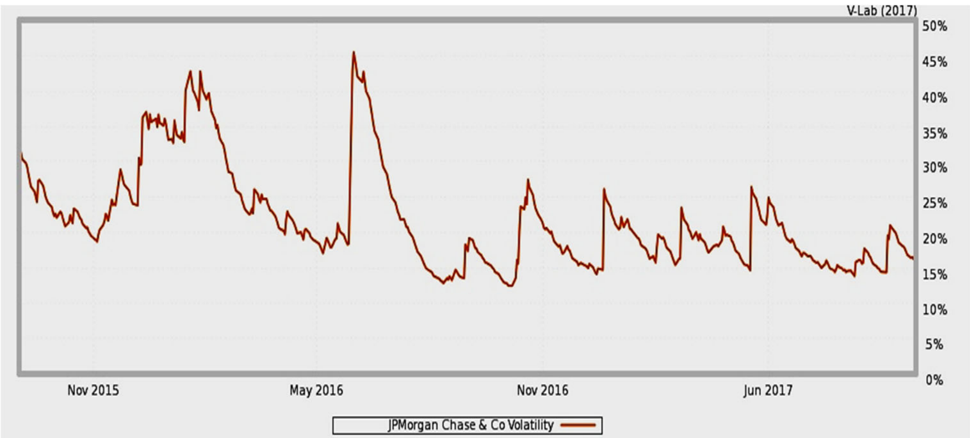
$\boldsymbol{\omega, \alpha, \beta}$: constantes

La volatilité prévue dépend des rentabilités passées



Remise du prix Nobel d'économie à Robert Engle pour ses contributions à l'étude des modèles GARCH.

Volatilité du cours de l'action JP Morgan entre octobre 2015 et octobre 2917 : spikes, suivi de retours progressifs à des niveaux plus bas.



Source : volatility institute, NYU, Stern School, Robert Engle

Volatilité du cours de l'action JP Morgan entre 2006 et octobre 2020. En 2008, grande crise financière, augmentation graduelle de la volatilité, en mars 2020, augmentation beaucoup plus brusque.

$$\boldsymbol{\omega = 0,027, \alpha = 0,0712, \beta = 0,9248, \alpha + \beta = 0,996 \approx 1}$$

$$\boldsymbol{\sigma_t^2 = 0,027 + \alpha = 0,0712 r_t^2 + 0,9248 \sigma_{t-1}^2}$$

Variance : principes de calcul

- Les transparents qui suivent servent à mener à bien les calculs proposés dans les exercices
- Ce sont aussi des rappels et compléments de cours
- D'autres compléments sont donnés dans le dossier compléments (aux séances des 16 et 23 septembre)
- Sont traités dans ces compléments
  - *Espérance de rentabilité, rappels mathématiques*
  - *Une introduction financière à la notion de non stationnarité*
  - *Un exercice sur le cas d'actifs parfaitement corrélés.*

Variance : principes de calcul

- Quelques propriétés de la variance : $\boldsymbol{Var[r] \geq 0}$
  - *Ceci résulte directement de la définition*
  - $\mathbf{Var}[\boldsymbol{r}] = \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{p(k)(r(k) - E[r])^2}$
- **Cas où la rentabilité $\boldsymbol{r}$ n'est pas aléatoire** :
  - *$\boldsymbol{r(k)}$ ne dépend pas de l'état de la nature*
  - *Notons-la $\boldsymbol{r_f}$ cette valeur unique*
  - *$\boldsymbol{r_F}$: taux de rentabilité du placement sans risque*
    - $\boldsymbol{E[r]} = \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{p(k) \times r_f} = \left(\sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{p(k)}\right) \times \boldsymbol{r_f} = \boldsymbol{r_f}$
    - $\mathbf{Var}[\boldsymbol{r}] = \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{p(k)} \times \left(\boldsymbol{r_f - r_f}\right)^2 = \mathbf{0}$
  - ***Si la rentabilité n'est pas aléatoire, sa variance est nulle***

Variance : principes de calcul

Scalaire = grandeur non aléatoire

- Propriétés de la variance et de l'écart-type
  - *Si α est un « scalaire », alors*

$$\boxed{\mathrm{Var}[\alpha \times R] = \alpha^2 \times \mathrm{Var}[R]}$$

$$\boxed{\sigma[\alpha \times R] = |\alpha| \times \sigma[R]}$$

Corrigés : voir transparents suivants

  - *Si $\mathbf{Var}[\boldsymbol{R}] = \mathbf{0}$ ou si $\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{R}] = \mathbf{0}$*
  - *Alors R n'est pas aléatoire et $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{R}]$*
  - *Un placement dont la rentabilité n'est pas aléatoire est appelé placement sans risque*
    - Ou prêt sans risque ***risk-free***
    - On note sa rentabilité $\boldsymbol{R_F}, \boldsymbol{R_f}$ ou $\boldsymbol{r_f}$
    - Rentabilité ne dépend pas de l'état de la nature

$$r_f(k) = r_f, \forall k = 1, \ldots, K$$

En particulier, pas de risque de défaut

Variance : principes de calcul

- Corrigé de l'exercice : $\boldsymbol{\sigma[\alpha \times r] = |\alpha| \times \sigma[r]}$
  - *Revenons à la définition de la variance :*
  - $\mathbf{Var}[\boldsymbol{r}] = \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{p(k) \times (r(k) - E[r])^2}$
  - $\mathbf{Var}[\boldsymbol{\alpha \times r}] = \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{p(k) \times (\alpha \times r(k) - E[\alpha \times r])^2}$
    - D'après la linéarité de l'espérance $\boldsymbol{E[\alpha \times r] = \alpha \times E[r]}$
    - D'où, en factorisant par $\boldsymbol{\alpha}$:
  - $\mathrm{Var}[\alpha \times r] = \alpha^2 \left(\sum_{k=1}^{K} p(k) \times (r(k) - E[r])^2\right) = \alpha^2 \mathrm{Var}[r]$
    - En utilisant la définition de l'écart-type
  - $\boldsymbol{\sigma[\alpha \times r]} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha^2 \times} \mathbf{Var}[\boldsymbol{r}]} = \boldsymbol{|\alpha| \times \sigma[r]}$
  - *Où $|\boldsymbol{\alpha}|$ est la valeur absolue de $\boldsymbol{\alpha}$*
    - NB : si $\boldsymbol{\alpha < 0, |\alpha| = -\alpha}$

Variance : principes de calcul

- Corrigé de l'exercice (suite) $\mathbf{Var}[\boldsymbol{r}] = \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{r}] = \mathbf{0}$
  - *En revenant à la définition de la variance*

$$\sum_{k=1}^{K} p(k) \times (r(k) - E[r])^2 = 0$$

  - $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{k}) \geq \mathbf{0},\ \forall \boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{K}$ *Il s'agit de la probabilité de l'état k*
  - *On en déduit que :* $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{k})(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2 \geq \mathbf{0},\ \forall \boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{K}$
  - *Et donc que :* $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{k})(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2 = \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{K}$
  - *Pour tout état k tel que* $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{k}) > \mathbf{0}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}]$
  - $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{k})$ *est donc constant et égal à son espérance pour tout état de la nature de probabilité non nulle*
    - Les états de probabilité nulle n'ont pas importance économique
    - Et n'interviennent pas dans les calculs d'espérance ou de variance

Variance : principes de calcul

- On rappelle que $\mathbf{Var}[\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{E}\left[(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2\right]$
- Autre écriture de la variance $\mathbf{Var}[\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{r}^2\right] - (\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2$
- Démonstration :
  - $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2 = \boldsymbol{r}^2 - 2\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}] \times \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2$
  - *Prenons l'espérance du terme de droite*
  - $\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{r}^2\right] - 2\boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}] \times \boldsymbol{r}] + (\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2$
    - $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}]$ est un scalaire
    - En utilisant la linéarité de l'espérance :
    - $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}] \times \boldsymbol{r}] = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}] \times \boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}] = (\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2$
  - *On peut donc réécrire le terme en rouge comme*
  - $\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{r}^2\right] - 2(\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2 + (\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2 = \boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{r}^2\right] - (\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2$

Variance : principes de calcul

- Un premier résumé de choses à savoir
  - *r rentabilité aléatoire,* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ *(scalaire)*
  - $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}] = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}]$
  - $\mathbf{Var}[\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{E}\left[(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2\right] = \boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{r}^2\right] - (\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}])^2$
  - $\mathbf{Var}[\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}] = \boldsymbol{\alpha}^2 \times \mathbf{Var}[\boldsymbol{r}]$
  - $\mathbf{Var}[\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{r}] = \mathbf{Var}[\boldsymbol{r}]$
  - $\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{r}] = \sqrt{\mathbf{Var}[\boldsymbol{r}]}$
  - $\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}] = |\boldsymbol{\alpha}| \times \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{r}]$
  - $\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{r}] = \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{r}]$
  - $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ *rentabilités aléatoires,* $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2] = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}_1] + \boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}_2]$
  - $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ *scalaires* $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{r}_2] = \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}_1] + \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}_2]$

Covariance : principes de calcul

- Définition de la covariance entre R_1 et R_2
  - $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) = \boldsymbol{E}[(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{R}_1]) \times (\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{R}_2])]$
  - *Dans le livre,* $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$ *est notée* $\boldsymbol{C}_{1,2}$
- Définition équivalente :
  - $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2] - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{R}_1] \times \boldsymbol{E}[\boldsymbol{R}_2]$
    - Cette équivalence peut être démontrée à titre d'exercice et résulte de la linéarité de l'espérance
- Remarques :
  - $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_1) = E[(R_1 - E[R_1])^2] = \mathbf{Var}[\boldsymbol{R}_1]$
  - $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) = \mathbf{Cov}(\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_1)$ *(symétrie)*

Covariance : principes de calcul

- Vérifiez à titre d'exercice que :
  - $\mathrm{Var}[\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_2}] = \mathrm{Var}[\boldsymbol{R_1}] + 2\mathrm{Cov}(\boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{R_2}) + \mathrm{Var}[\boldsymbol{R_2}]$
  - *En utilisant la définition de la covariance et la linéarité de l'espérance*
  - $\mathrm{Var}[R_1 + R_2] = E[(R_1 + R_2)^2] - (E[R_1 + R_2])^2$
    - $(R_1 + R_2)^2 = R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2$
    - $E[(R_1 + R_2)^2] = E[R_1^2] + 2E[R_1R_2] + E[R_2^2]$
    - $E[R_1 + R_2] = E[R_1] + E[R_2]$
    - $(E[R_1] + E[R_2])^2 = (E[R_1])^2 + 2E[R_1] \times E[R_2] + (E[R_2])^2$
    - En soustrayant les termes en vert à ceux en bleu
    - $E[R_1^2] - (E[R_1])^2 + 2(E[R_1R_2] - E[R_1]E[R_2]) + E[R_2^2] - (E[R_2])^2$
    - $=\mathrm{Var}[R_1] + 2\mathrm{Cov}(R_1, R_2) + \mathrm{Var}[R_2]$

Covariance : principes de calcul

- Covariance entre une variable aléatoire X et une (variable aléatoire) constante a
  - $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{Xa}] - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}]\boldsymbol{E}[\boldsymbol{a}]$
  - *En utilisant la linéarité de la variance* $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{Xa}] = \boldsymbol{aE}[\boldsymbol{X}]$
  - *Nous avons déjà vu que si a est une constante* $\mathbf{E[a] = a}$
  - *On obtient donc :* $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$
- Nous avons vu que, par définition, la rentabilité d'un placement sans risque $\boldsymbol{r_F}$ est constante
- Pour toute rentabilité (aléatoire) r d'une action ou d'un portefeuille, on a donc $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_F}) = \mathbf{0}$

Covariance : principes de calcul

- (Bi)linéarité de la covariance
  - *Si* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ *sont deux scalaires,* $\boldsymbol{R_3}$ *une rentabilité aléatoire :*
- $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{\alpha R_2} + \boldsymbol{\beta R_3}) = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{Cov}(\boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{R_2}) + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{Cov}(\boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{R_3})$
  - *Démonstration pénible à écrire, sans difficulté, à lire tranquillement*
    - D'après la définition de la covariance :
    - $\mathrm{Cov}(R_1, \alpha R_2 + \beta R_3) = E[R_1(\alpha R_2 + \beta R_3)] - E[R_1] \times E[\alpha R_2 + \beta R_3]$
    - En utilisant la linéarité de l'espérance :
    - $E[R_1(\alpha R_2 + \beta R_3)] = \alpha E[R_1R_2] + \beta E[R_1R_3]$
    - $E[R_1]E[\alpha R_2 + \beta R_3] = E[R_1](\alpha E[R_2] + \beta E[R_3]) = \alpha E[R_1]E[R_2] + \beta E[R_1]E[R_3]$
    - En reportant les expressions en couleur et en factorisant par α et β
    - $\mathrm{Cov}(R_1, \alpha R_2 + \beta R_3) = \alpha(E[R_1R_2] - E[R_1]E[R_2]) + \beta(E[R_1R_3] - E[R_1]E[R_3])$
    - $\mathrm{Cov}(R_1, \alpha R_2 + \beta R_3) = \alpha\mathrm{Cov}(R_1, R_2) + \beta\mathrm{Cov}(R_1, R_3)$

Covariance : principes de calcul

- *Application à la gestion de portefeuille (suite)*

$$r_P = x_1 \times r_1 + x_2 \times r_2$$

- $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ *fractions de la richesse investie dans les titres* 1 *et* 2

$$x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$$

$$\mathrm{Var}[r_P] = x_1^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}x_1(1 - x_1)\sigma_1\sigma_2 + (1 - x_1)^2\sigma_2^2$$

  - D'après les propriétés de la variance :

$$\mathrm{Var}[r_P] = \mathrm{Var}[x_1r_1 + x_2r_2]$$
$$= \mathrm{Var}[x_1r_1] + 2\mathrm{Cov}(x_1r_1, x_2r_2) + \mathrm{Var}[x_2r_2]$$
$$= x_1^2\mathrm{Var}[r_1] + 2x_1x_2\mathrm{Cov}(r_1, r_2) + x_2^2\mathrm{Var}[r_2]$$

  - D'où le résultat en utilisant : $\boldsymbol{x_2} = \mathbf{1} - \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{\rho_{12}} = \frac{\mathbf{Cov}(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2})}{\boldsymbol{\sigma_1} \times \boldsymbol{\sigma_2}}$
- *On peut calculer la variance de la rentabilité des portefeuilles constitués du titre* 1 *et du titre* 2 *en fonction de* $\boldsymbol{x_1}$