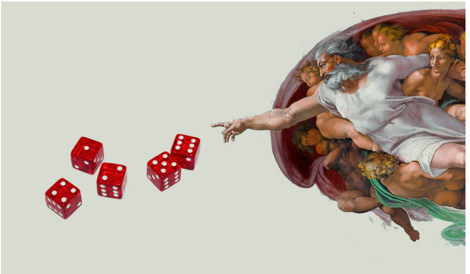
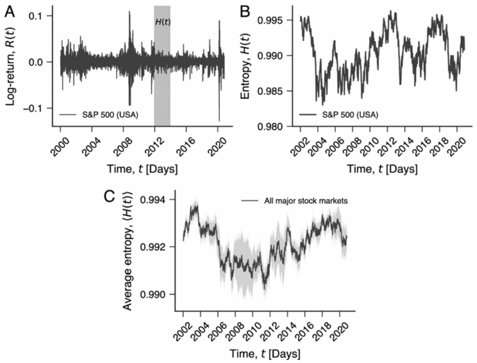
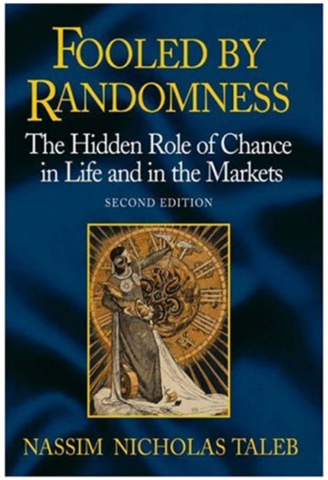
Aléatoire et Finance







Négociation et évaluation

- ….
- Prévoir le futur à partir du passé : répétition de motifs, méthode des plus proches voisins, algorithmic trading
- Qu'est-ce que l'induction ?
- Problèmes méthodologiques
- Exemples pratiques de fonds d'arbitrage statistique
- Problématique du back-testing et de l'évaluation de la performance

Aléatoire et finance

- Imprévisibilité des cours boursiers
- Piaget : psychologie du développement
  - *Naissance du hasard , limites des capacités prédictives*
  - *Brassage, irréversibilité et augmentation du risque*
- Pseudo-aléatoire
  - *sensibilité aux conditions initiales, algèbre modulaire, non-linéarité, chaos déterministe*
- Pile ou face :
  - *simulateurs physiques, incertitude sur les conditions initiales, lois de probabilité, expérience de pensée*
- Simulateurs quantiques, vrai hasard
- Contingence et nécessité
- Vrai hasard vs hasard épistémique ?

Aléatoire et finance

- Aléatoire en finance
- Approche axiomatique des probabilités (Kolmogorov)
- Patterns numériques, théorie des nombres et aléatoire
- Suite aléatoire en mathématiques
- L'émergence du concept de probabilité
- Probabilités subjectives et marchés
- Des probabilités classiques au principe d'indifférence
- Hasard non calculable
- Hasard accidentel

Imprévisibilité et aléatoire

- On s'est intéressé à la prévisibilité des cours boursiers
  - *À des fréquences quotidiennes ou infra-quotidiennes (high frequency trading)*
- Bases méthodologiques de l'arbitrage statistique ?
  - *Détection de motifs précédant des hausses ou des baisses des cours boursiers*
  - *Répétition de motifs dans la base d'apprentissage (passée) ⇒ répétition des mêmes motifs dans le futur (induction)*
  - *Problèmes pratiques : motifs passés non discriminants si de taille réduite, en nombre insuffisant sinon*
  - *Problèmes conceptuels :*
    - Pas de base méthodologique solide pour l'induction (Hume, Goodman)
    - La plupart des séries de hausses ou de baisses sont associées à des fréquences conditionnelles égale à $\frac{1}{2}$ (nombres normaux de Borel, voir infra)

Imprévisibilité et aléatoire

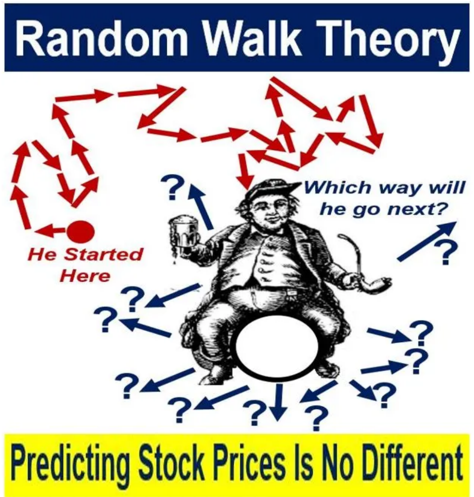
- Certains fonds d'arbitrage statistique ont bien performé
  - *Medallion*
  - *Attention aux contre-exemples : LTCM*
  - *Persistance des surperformances ? (problème de l'induction)*
- Possibilité de stratégies boursières systématiquement gagnantes (AOA) discutable
  - *Fréquences conditionnelles de hausse égales à* $\frac{1}{2}$ + *absence d'opportunités d'arbitrage ⇒ **suite aléatoire**.*
  - *Suite aléatoire : Succession de tirages aléatoires indépendants P ou F*
  - *Les prix des titres sur des marchés spéculatifs suivent alors des « **marches aléatoires** »*

Imprévisibilité et aléatoire

- Que les prix sur des marchés spéculatifs sans frictions (coûts de transaction) suivent des marches aléatoires est une hypothèse qui a une base logique
- S'il existe des opportunités d'arbitrage (OA), si par exemple à un moment donné un prix est trop bas, le spéculateur va acheter en grandes quantités, le prix va augmenter jusqu'à ce que l'OA disparaisse.
- Le concept de prix suivant des marches aléatoires (random walks) dans des marchés efficients a été popularisé par Eugene Fama.

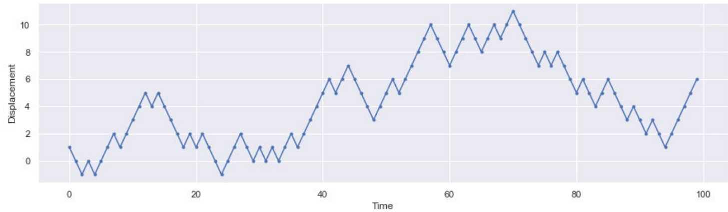
Imprévisibilité et aléatoire

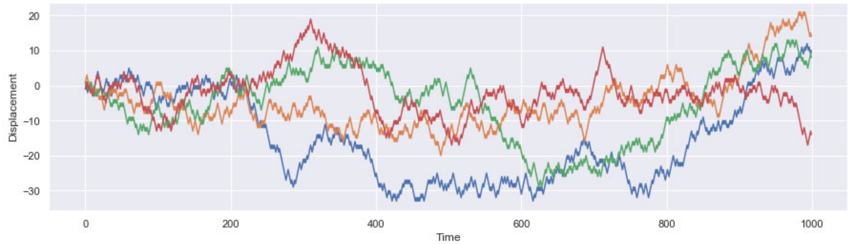
Eugene Fama



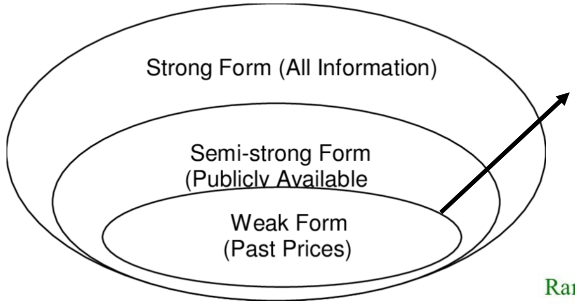
Imprévisibilité et aléatoire

- Exemples de trajectoire de marches aléatoires (avec variation des prix de ± 1 à chaque date
  - *Simulation de l'évolution de la richesse du spéculateur*



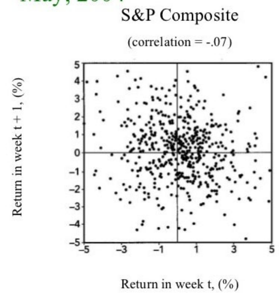


Imprévisibilité et aléatoire



Efficience faible : indépendance des rentabilités par rapport aux rentabilités passées.

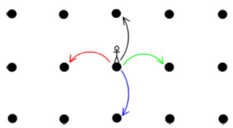
Random Walk Theory: Weekly Returns, May 1984 – May, 2004



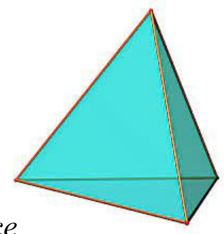
Marche aléatoire : indépendance des rentabilités $\Rightarrow$ coefficient de corrélation linéaire entre rentabilités consécutives nul (graphique de droite)

Imprévisibilité et aléatoire

- Marche aléatoire en dimension 2
  - *Probabilité de* $\frac{1}{4}$ *d'aller de se déplacer d'une unité vers les points cardinaux (directions nord, sud, ouest et est).*



  - *Si on n'a pas un tétraèdre régulier sous la main*



  - *On peut faire deux tirages indépendants d'une pièce*
  - $FF \leftrightarrow N,\ PP \leftrightarrow S,\ PF \leftrightarrow E,\ FP \leftrightarrow O$

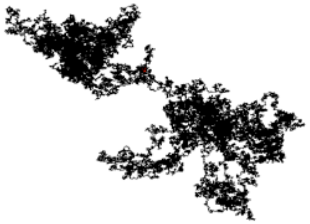
Imprévisibilité et aléatoire

- Exemple de trois trajectoires de marches pseudo-aléatoires dans le plan

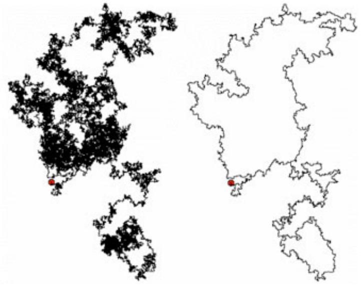
https://www.teachme.codes/python-docs/Projects/Rwalk/Rwalk/

Imprévisibilité et aléatoire

- https://www.podcastscience.fm/dossiers/2012/12/06/le-hasard/
- http://images.math.cnrs.fr/Des-marches-aleatoires-pas-comme-les-autres



Une marche pseudo-aléatoire de « l'ivrogne dans le désert »



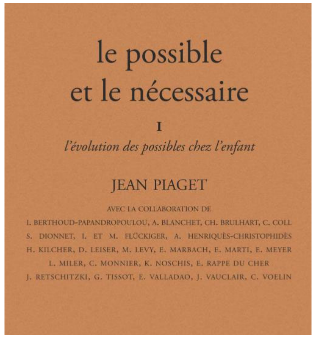
Les marches aléatoires sont des *objets fractals*. on s'est intéressé à leurs contours (du type côtes de Bretagne ou forme d'une tâche faite par de l'encre sur un buvard …

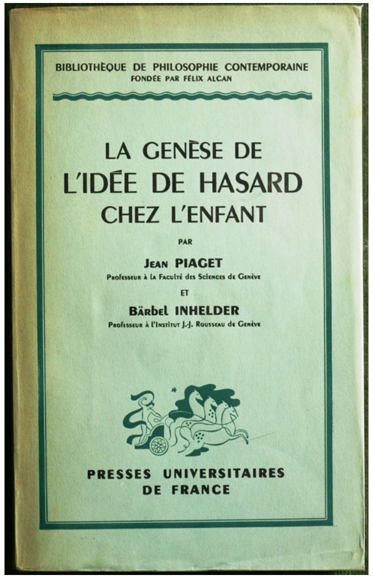
Imprévisibilité et aléatoire

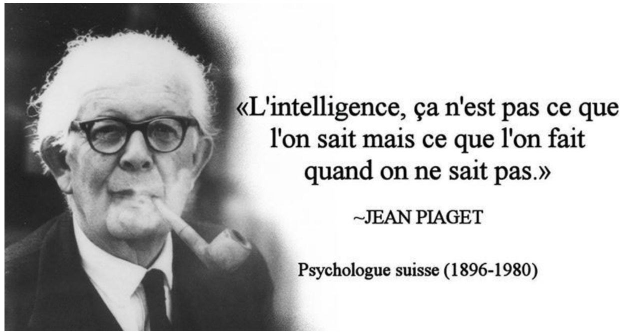
- Aparté
  - *peut être laissé de côté dans un premier temps*
- Dans les exemples présentés, fréquences conditionnelles de hausse ou de baisse $= \frac{1}{2}$.
- Situations où les espérances de gain sont nulles
  - *Ou égales au taux sans risque, supposé nul ici*
  - *Ce qui correspond au concept de « **martingale** »*
- Dans la suite du cours, on verra que les espérances des rentabilités sont positives et augmentent avec le risque.
  - *Exemple : jeu de pile ou face avec probabilité de pile de* 0,55
  - *En jouant pile, on finira presque toujours par gagner, mais il subsiste un risque de perte à tout horizon de placement donné*

Imprévisibilité et aléatoire

- Le concept d'aléatoire, de hasard, est central dans la théorie de la dynamique des cours boursiers
- Quelle est sa nature, peut-on le construire, le définir, le caractériser ?
  - *Problème de Borel : le hasard ne peut être construit*
  - *Dès que l'on veut « construire à partir d'une règle », calculer ou programmer*
- Mesure de probabilité comme quantification du hasard
  - *D'où calculs d'espérance de gain et quantification du risque (écarts-types des rentabilités)*
- Les limites à cette quantification du risque : incertain, cygnes noirs, hasard sauvage







La psychologie du développement et le hasard

- Piaget et Inhelder: La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant (1951)

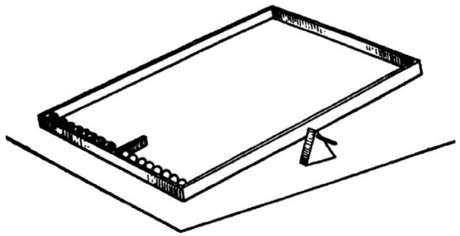
Que l'enfant ne possède pas d'emblée la notion de hasard c'est ce qui est bien naturel, car, avant de saisir la possibilité d'une interférence des séries causales ou d'un mélange des objets mobiles, il faut d'abord construire le systèmes de ces séquences ainsi que la représentation des positions et des déplacements. Or, cette élaboration de la causalité et de l'ordre en général suppose précisément une attitude contraire à celle dont dérive la reconnaissance du contingent et du fortuit. Aussi l'idée de hasard et l'intuition de la probabilité constituent-elles fort vraisemblablement des réalités dérivées et secondaires, par rapport à la recherche même de l'ordre et de ses causes. C'est ce que l'on aperçoit notamment,

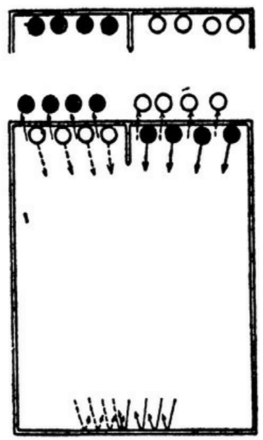
La psychologie du développement et le hasard

- Pour Piaget, l'idée de hasard implique trois stades de développement, de 4 à 12 ans, aboutissant au concept d'équiprobabilité et de loi normale
  - Le développement par stades est contesté, mais c'est l'approche constructive et logique de Piaget qui nous intéresse
  - *L'enfant doit au préalable maîtriser intelligence opératoire : représentation des positions et déplacements, causalité*
  - *La compréhension des limites de la causalité, de la déduction et de la prévision permettent l'émergence de l'idée de hasard*
    - « Le hasard va consister au passage de l'expérience de l'imprévu (ou du fortuit), au « non-déterminé » (possible ou contingent) et à l'imprévisible »
- Piaget met en avant plusieurs concepts :
  - *Mélanges (brassages) aléatoires*
  - *Interférence de séries causales indépendantes (Augustin Cournot)*
  - *Irréversibilité*

La psychologie du développement et le hasard

- Une expérience simple de brassage (extraits du livre cité)





Quand on fait basculer la planche, on procède à un brassage des boules blanches et noires qui s'entrechoquent et qui n'est pas prévisible. On ne peut établir de lien entre le caractère ordonné de la situation initiale et le résultat.
En outre, cette opération est *irréversible*. Si on rebascule la planche dans l'autre sens, on ne va pas retrouver la situation initiale.

La psychologie du développement et le hasard

- Les enfants de 3 – 4 ans ne semblent pas appréhender les probabilités quantitatives (faut-il savoir compter ?!)
  - *Peuvent-ils avoir des degrés de croyance ?*
- Vers 5 ans, quantification des probabilités de perte et premières notions d'espérance
  - Anderson 1991; Reyna & Brainerd 1994; Schlottmann 2001; Pange & Talbot 2003
- Vers 7 – 8 ans, la formalisation probabiliste est acquise, mais certains enfants ont des résistances à l'échange : ils refusent des opportunités d'arbitrage (win – win) : manque de confiance envers les règles de l'échange ?

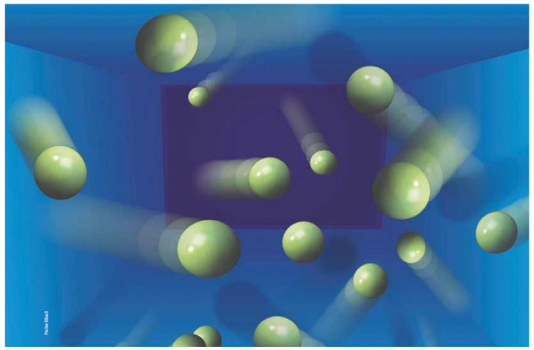
Brassages et physique statistique

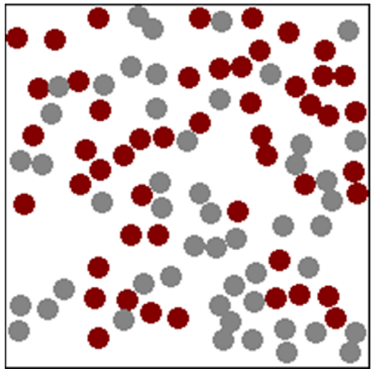
- Un problème important en physique est celui des sphères dures soumises à des chocs élastiques
  - *Choc élastique : l'énergie cinétique est conservée*

  - *Entre deux chocs les sphères suivent des droites*
  - *On peut simplifier l'analyse en suppose que les sphères se réduisent à des points*
- Ce problème est à la base de la théorie cinétique des gaz

Brassages et physique statistique

Théorie cinétique des gaz : les sphères se heurtent entre elles comme les boules de Piaget (voir infra) …



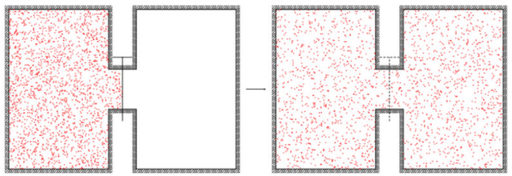


Brassages et physique statistique

- On peut s'intéresser à la dynamique d'une sphère, selon les lois de la mécanique classique (déterministe)
  - *vision microscopique et diachronique*
- On peut s'intéresser au nombre de sphères à un instant donné et à un endroit donné
  - *approche macroscopique et synchronique*
- Deux approches similaires : hypothèse ergodique
  - *Remonte à Maxwell et Boltzmann*
  - *L'équation de Boltzmann décrit l'évolution d'un gaz hors d'équilibre*
- A l'équilibre, on peut montrer que les sphères sont réparties équiprobablement ⇒ utilisation de concepts probabilistes en physique : excellentes approximations

La psychologie du développement et le hasard

- Dans une situation déterministe (mécanique classique), il doit y avoir réversibilité : Leibniz
- Le second basculement de la planche devait ramener à sa position initiale : pas de changement, pas de risque …
- Du fait des chocs entre les boules (théorie cinétique des gaz), le risque ne s’annule pas mais ↗ à chaque brassage
  - *Second principe de la thermodynamique : irréversibilité (Maxwell) et augmentation de l’entropie*



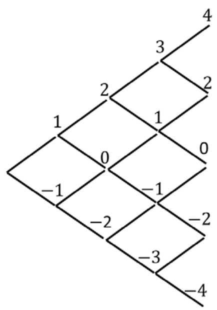
  - *Entropie maximale pour la loi de probabilité uniforme*

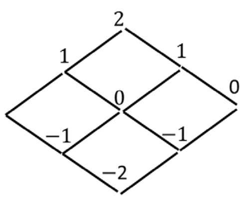
La psychologie du développement et le hasard

- La notion de « hasard » apparaît quand on comprend les limitations de nos capacités prédictives.
  - *limitations cognitives : méconnaissance des causes, complexité excessive des enchaînements de causes et d’effets*
- Hasard est d’emblée lié (à juste titre) à la notion d’erreur de prédiction : « *ce que je ne peux pas prédire* »
  - *Ce sont les limites du système hypothético-déductif qui amènent par contraste à concevoir le hasard.*
- Hasard est une double abstraction (construction mentale)
  - *Il faut d’abord le concept de prévision P, puis celui de négation ¬ (en logique formelle)*
  - $\exists \neg P$ *: l’imprévisible existe*

La psychologie du développement et le hasard

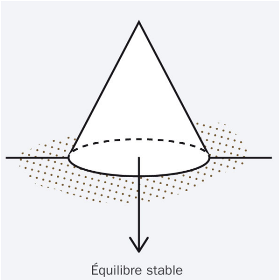
- Échec de l’algorithmic trading : approche non paramétrique de la prévision de cours boursiers
- Incapacité à trouver des règles prédictives robustes
- Nécessité de penser l’imprévisible, l’irréversibilité et l’augmentation du risque qui y est associée (Thème 1)

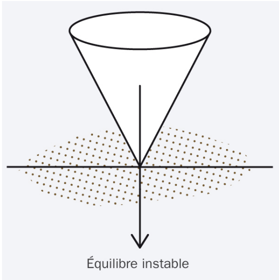




Hasard épistémique et sensibilité aux conditions initiales

- Deux positions d'équilibre pour le cône.
  - *« Si un cône repose sur sa pointe, nous savons bien qu'il va tomber, mais nous ne savons pas de quel côté; il nous semble que le hasard seul va en décider ».*





  - *« Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard » - Poincaré (Calcul des Probabilités)*

Sensibilité aux conditions initiales

- Effet papillon
  - *« Croyez-vous sincèrement que la ruade d'un cheval dans la campagne française dérange le vol d'un papillon dans les îles de la Sonde ? »*
    - Denis Diderot, Principes philosophiques sur la matière et le mouvement, 1770
  - *« Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? »*
    - Edward Lorenz (1972)
    - Et le corollaire qui nous rend les papillons sympathiques « *Si le battement d'ailes d'un papillon peut déclencher une tornade, il peut aussi l'empêcher…* »
    - Les équations de la mécanique des fluides sont hautement non-linéaires (turbulences)

Sensibilité aux conditions initiales

- Non linéarité, effet papillon : petite variation des conditions initiales peut avoir des conséquences insoupçonnées

  - *« Si le nez de Cléopâtre eût été plus court, toute la face du monde aurait changé ». Blaise Pascal - Pensées*

Sensibilité aux conditions initiales

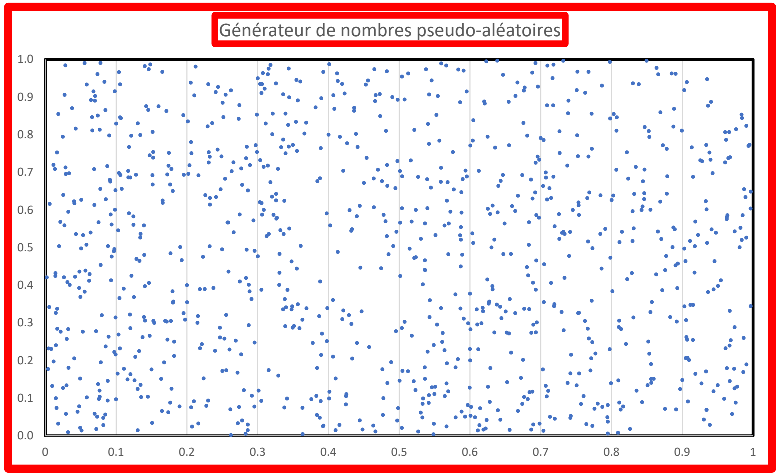
- La **théorie du chaos déterministe** étudie le comportement des systèmes dynamiques non linéaires très sensibles aux conditions initiales (effet papillon).
  - *Chaos: When the present determines the future, but the approximate present does not approximately determine the future (Lorenz)*
  - *Cela concerne en particulier les systèmes purement déterministes (chaos déterministe)*
- Ce déterminisme non-linéaire est « quasi aléatoire »
- Un attracteur (ou ensemble limite) est un ensemble vers lequel un système évolue de façon irréversible
  - *Ces ensembles limites (ou attracteurs) sont des états de la nature pseudo-aléatoires*

Sensibilité aux conditions initiales

- Les générateurs de nombres (pseudo)-aléatoires
  - *Alea (Excel) permet de* *simuler* *des valeurs entre* 0 *et* 1 *selon une loi uniforme avec des valeurs indépendantes*
  - *Microsoft a amélioré la qualité de son algorithme en 2003, mais il n'est plus à jour quand on veut faire des simulations intensives, par exemple dans le cadre de prédiction par machine learning*
- Sont des algorithmes déterministes
  - *Un générateur de nombres pseudo-aléatoires est un* ***algorithme*** *qui génère une séquence de nombres*
  - *À partir d'une* ***racine donnée****, on peut parfaitement déterminer la suite de nombres « pseudo-aléatoires »*
  - *Ces séquences déterministes sont « assez similaires » à de « véritables » suites de nombres aléatoires.*

Sensibilité aux conditions initiales

- Mille couples de nombres (x_n, x_{n+1}), tirés « aléatoirement » dans $[0,1] \times [0,1]$ avec



Sensibilité aux conditions initiales

- En fait, x_{n+1} est une fonction déterministe de x_n
- $x_{n+1} = \mathrm{MOD}(\mathrm{ARRONDI}(M \times A \times x_n; 0); M)/M$
  - $\mathrm{ARRONDI}(x; 0)$ *retourne la partie entière de* x
  - $\mathrm{MOD}(n; m)$ *renvoie le reste de la division de* n *par* m
  - $M = 2147483647$, $A = 16807$
  - *Suite précédente initialisée avec* $x_0 = 0{,}2$
- Ce qui veut dire qu'il suffit d'une seule valeur pour prédire parfaitement à l'infini, les valeurs suivantes
- Le coefficient de corrélation entre x_n et x_{n+1} est de $-1{,}4\%$
- Application avec Excel (voir TD)

Sensibilité aux conditions initiales

- Suite logistique
- $x_n = 4x_{n-1} \times (1 - x_{n-1})$, $x_0 \in [0,1]$

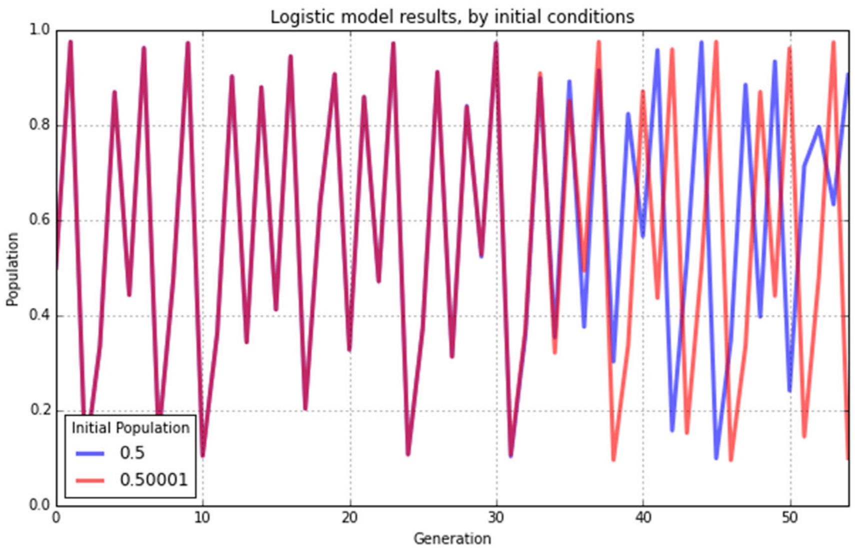
À cause du clou, le fer fut perdu.
À cause du fer, le cheval fut perdu.
À cause du cheval, le cavalier fut perdu.
À cause du cavalier, la bataille fut perdue.
À cause de la bataille, la guerre fut perdue.
À cause de la guerre, la liberté fut perdue.
Tout cela pour un simple clou

Benjamin Franklin

(Almanach du pauvre Richard, 1758)

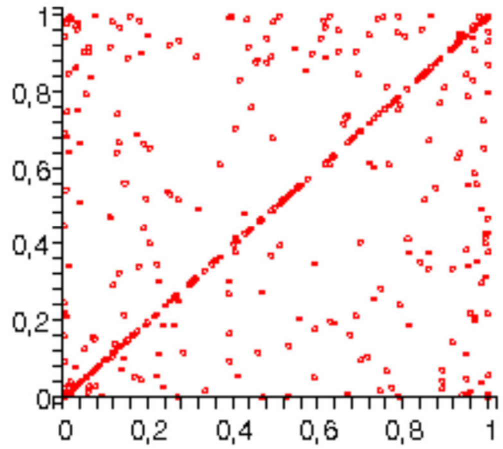
De la non-proportionnalité entre causes et effets

Chaos déterministe : sensibilité aux conditions initiales



Chaos déterministe : sensibilité aux conditions initiales

- Suite logistique avec les conditions initiales $x_0 = 0{,}4$, $y_0 = 0{,}4 + 10^{-50}$

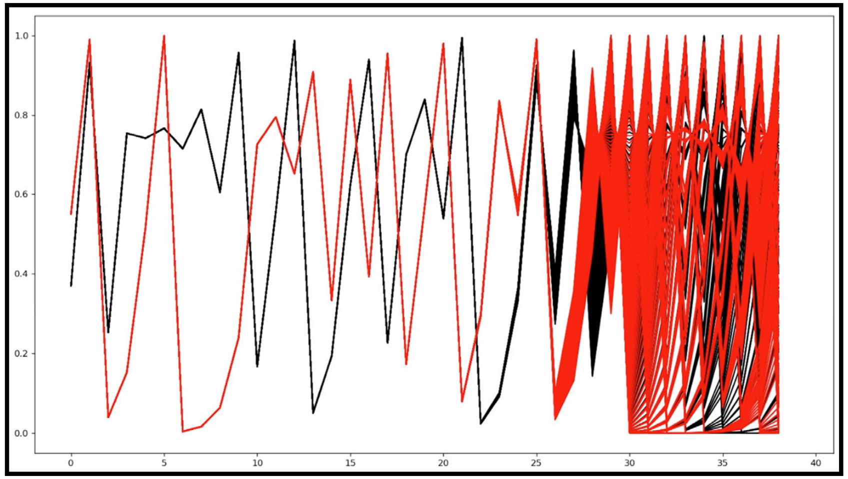


A droite les points de coordonnées $(\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n})$, $\boldsymbol{n = 1, \ldots, 400}$

Si les première itérations donnent des résultats proches, d'où les points sur la diagonale, les deux suites n'ont plus rien à voir et la corrélation est nulle ; attention à la précision algorithmique

Chaos déterministe : irréversibilité

On ne plus reconstruire le passé, cad les conditions initiales (mélange des trajectoires) : en rouge, $x_0 \in [0{,}55 - 10^{-9}, 0{,}55 + 10^{-9}]$, en noir $x_0 \in [0{,}37 - 10^{-9}, 0{,}37 + 10^{-9}]$.



« Quiconque considère des méthodes arithmétiques pour produire des nombres aléatoires est, bien sûr, en train de commettre un péché » (John Von Neumann)

John Von Neumann

« La génération de nombres aléatoires est trop importante pour être confiée au hasard »

Clifford Pickover

Génération de nombres aléatoires : l'état de l'art

- Comme indiqué dans le transparent précédent, il convient de ne pas oublier que les générateurs de nombres aléatoires ne sont que du hasard épistémique
- Si on utilise Python, il sera possible de « casser le générateur », cad de prédire le prochain tirage avec un bon outil d'apprentissage statistique
  - L'Ecuyer (1992). *Testing random number generators*. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE).
  - L'Ecuyer & Simard (2007). TestU01: AC library for empirical testing of random number generators. ACM Transactions on Mathematical Software.
  - MacLaren & Marsaglia (1965). Uniform random number generators. *Journal of the ACM*.
  - …

Hausse ou baisse des cours : un jeu de pile ou face ?

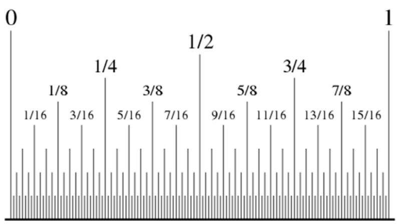
- Probabilités et simulations de trajectoires boursières à partir du jeu de pile ou face
  - *Simulateurs aléatoires physiques et probabilités*
- Le mythe du jeu de pile ou face
- Ignorance des conditions initiales
- Une expérience (aléatoire) de pensée

Les probabilités à partir du jeu de pile ou face

- Les probabilités à partir du jeu de pile ou face.
  - *Le lancé d'une pièce est un exemple de générateur aléatoire*
  - *Pile peut être codé H (hausse) ou* 1
  - *Face peut être code B (baisse) ou* 0
  - *Une suite de* $n = 3$ *lancés (tirages) indépendants est associée à* $2^3 = 8$ *codages équiprobables (pièce « non biaisée »).*
    - 000,001,010,011,100,101,110,111
    - A chaque code, on peut associer un nombre compris entre 0 et 1
    - Exemple : $011 \rightarrow \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{0+2+1}{2^3} = \frac{3}{8}$
    - Les codes précédents sont associés aux fractions $\frac{0}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$ tirées de manière équiprobable
    - Si l'on veut obtenir (directement) des entiers : 0,1,2,3,4,5,6,7
    - $011 \rightarrow 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 = 3$

Les probabilités à partir du jeu de pile ou face

- Avec des tirages indépendants d'une pièce, on peut tirer de manière équiprobable des fractions $\frac{a}{2^n}$, a, b entiers
  - *Fractions dyadiques : développement binaire fini*



  - *On peut approximer avec la précision souhaitée un réel* $\in [0,1]$
  - *Jeux de* 6 *pièces : mots de* 64 *bits (œil d'Horus des Egyptiens)*

Les probabilités à partir du jeu de pile ou face.

- Aparté sur icosaèdre et simulateurs aléatoires physiques
  - *Polyèdre régulier à 20 faces (chaque face triangle équilatéral)*

  - *Un des cinq solides de Platon : base 20.*
  - *Avec un jeu de 56 icosaèdres, on peut simuler parmi* 7×10^{72} *cas en une simulation*
    - $\approx 10^{80}$ atomes dans l'univers

Les probabilités à partir du jeu de pile ou face.

- **Loi faible des grands nombres** (Bernoulli)
- Si l'on effectue n tirages indépendants d'une pièce et le nombre de piles est n_p
- Alors, $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_p}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$
- **Loi forte des grands nombres**
  - $P\left(\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{n_p}{n} = \frac{1}{2}\right\}\right) = 1$
- Convergence de la fréquence empirique $\frac{n_p}{n}$ vers la probabilité $\frac{1}{2}$
- Le nombre de lancers nécessaires pour l'apparition du premier côté pile suit une **loi géométrique**.

Les probabilités à partir du jeu de pile ou face

- Si l'on effectue n tirages indépendants d'une pièce et le nombre de piles, n_p, suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$
- **Théorème de de Moivre-Laplace et approximation de la loi normale**

Soit $n \in \mathbb{N}, p \in]0,1[$, on note $q = 1 - p$.
Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On rappelle que $S_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.

On note $Y_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$. Alors

$$Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} Y^* \text{ avec } Y^* \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

- Loi du logarithme itéré de Khintchine

Les probabilités à partir du jeu de pile ou face

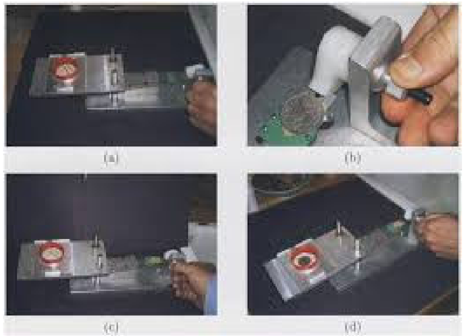
- A partir de tirages indépendants d'une pièce non biaisée, on peut effectuer simuler une variable aléatoire suivant une loi uniforme dans l'intervalle [0,1].
- Soit X une variable aléatoire. On appelle fonction de répartition, la fonction réelle qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $F_X(x) = P(X < x)$
- On note F_X^- la fonction inverse (généralisée) de F_X
- Alors $F_X^-(U)$ suit la loi de X
- On peut donc simuler toute variable aléatoire, à partir de lancés de pièces.

Hasard et jeu de pile ou face

- Pièce biaisée et non biaisée
  - *S'il est facile de biaiser un dé, ce n'est pas le cas pour une pièce*
  - *La notion de « pièce non équilibrée » est aussi une abstraction, mais une abstraction utile*
- Pièce équilibrée
  - *Fair game, pas de gain spéculatif en moyenne, marche aléatoire sans tendance (drift)*
- Pièce non équilibrée
  - *De l'aléatoire (non prédéterminé) subsiste, mais gain spéculatif en moyenne, marche aléatoire avec tendance*
  - *La tendance (positive) est une **prime de risque***
  - *Un problème central en finance est la mesure des primes de risque et la détermination d'intervalles de confiance*

Le mythe du jeu de pile ou face

- Le lancer d'une pièce « équilibrée »
  - *La face sur laquelle la pièce retombe est parfaitement définie dès l'origine par les conditions initiales du lancer*



  - *Avec une machine à lancer des pièces, la pièce retombe toujours du même côté*

Le mythe du jeu de pile ou face

Jacques Bernoulli

- Le numéro qui apparaît au moment du tirage d'un dé (non pipé) est connu dès le lancer …
  - *Tout est gouverné par les équations de la mécanique*
    - Vitesse de lancer, angle, capacité d'absorption de l'énergie cinétique de la surface
  - *« Etant donné la position du dé, sa vitesse et la distance de la table, au moment où il quitte la main du joueur, le dé ne peut tomber autrement qu'il ne tombe en réalité : cela est tout à fait certain. »*
    - Citation de Jacques Bernoulli, dans l'*Art de Conjecturer* (publié en latin en 1713)

Le mythe du jeu de pile ou face

- Remarquons au passage qu'il est très difficile de biaiser une pièce !
  - *En la rognant ou en la déséquilibrant sur un côté, on ne rompt pas la symétrie autour du plan milieu*
- Ce qui est vrai du jeu de pile ou face vaut aussi pour la lancé de dé : le résultat du lancé de dé est parfaitement prévisible
  - *Interdiction d'utiliser des caméras dans les casinos*
- **Le prototype de l'« expérience aléatoire » est donc un mythe.**
- Si l'on de l'aléatoire dans le jeu de pile ou face, il faut introduire de l'aléatoire dans les conditions initiales…

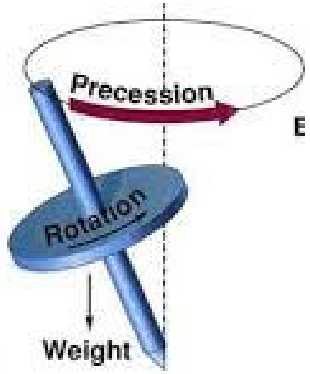
Ignorance des conditions initiales

- En choisissant une **distribution uniforme** sur les **conditions initiales** (vitesse de rotation, vitesse verticale)
  - *Il faut introduire de l'aléa dans les conditions uniformes*
  - *Avec des bornes compatibles avec les lancers de pièces usuels.*
- Keller (1986) trouve une borne sur la probabilité de tomber sur pile (ou face), qui ne ressemble pas aux résultats probabilistes (TCL, LLN) :

$$\left|P(F) - \frac{1}{2}\right| \leq 5{,}6\%$$

Ignorance des conditions initiales

- Seconde expérience (Diaconis et al (2007) : On rajoute une dimension réaliste, la précession (changement de direction de l'axe de rotation)
- Pour une distribution uniforme des conditions initiales, **la probabilité de retomber du même côté est de 0,51**
- Ceci veut dire que pour 100 tirages avec gain ou perte d'un euro, on gagne en moyenne 2 euros.
- Par comparaison, la banque à la roulette gagne 1 fois sur 37



Ignorance des conditions initiales

- Le hasard peut émerger d'un système déterministe dont les conditions initiales sont inconnues.
- Il y a néanmoins un élément de circularité car on est amené à utiliser une distribution de probabilité a priori sur les conditions initiales
  - *Approche de type Bayésien*
- « La » **distribution uniforme** est souvent utilisée.
  - *C'est ce qui se rapproche du principe d'indifférence*
  - *Mais avec quelles valeurs maximales et minimales ?*
  - *Vitesse de rotation ω de la pièce au moment du lancer :* $36 \leq \omega \leq 40$ dans l'expérience de Keller

Ignorance des conditions initiales

- Rappel sur la distribution de probabilité uniforme
  - *On se limite à la distribution uniforme sur l'intervalle* $[0,1]$
  - *On dit qu'une variable aléatoire X (à valeurs réelles et définie sur un espace probabilisé de mesure de probabilité P) suit une loi uniforme si* $\forall x \in [0,1], P(X < x) = x$.
    - Il en résulte que $P(X < x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $P(X \geq x) = 1$ pour $x \geq 1$
    - Si $0 \leq a \leq b \leq 1$, $P(a \leq X < b) = b - a$
    - La loi de X est une loi à densité. Plus précisément pour $x \in [0,1]$, $P(X < x) = \int_0^x 1 \times du$
    - La fonction de densité prend la valeur constante 1 sur l'intervalle $[0,1]$ et est nulle en dehors.
    - On peut procéder (approximativement) à des simulations indépendantes de lois uniformes par l'utilisation de la fonction ALEA() d'Excel.
    - Espérance de X : $E[X] = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

Le mythe du jeu de pile ou face

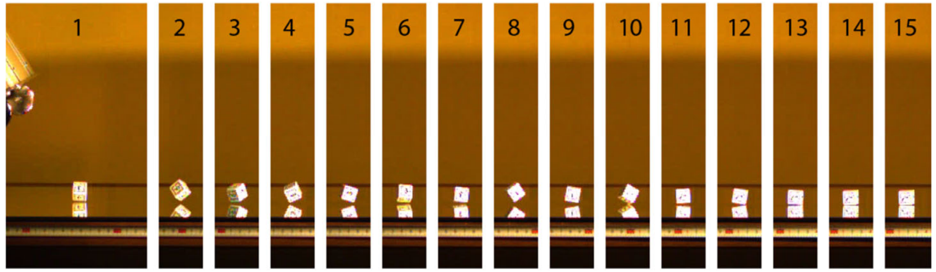
- Tiré du livre d'Ivar Ekeland, Le hasard: Une approche mathématique

Ignorance des conditions initiales

- Le numéro qui apparaît au moment du tirage d'un dé (non pipé) est connu dès le lancer …
  - *Tout est gouverné par les équations de la mécanique*
    - Vitesse de lancer, angle, capacité d'absorption de l'énergie cinétique de la surface
  - *Mais forte dépendance du tirage observé par rapport à une faible variation des conditions initiales*
  - *Dans des circonstances « normales », tout se passe comme si l'on avait un **tirage équiprobable***
  - *Mais on peut s'en écarter fortement*
    - Voir le numéro du magazine Pour la Science, novembre 2009, n°385

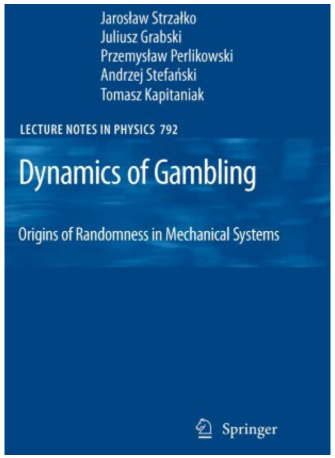
Ignorance des conditions initiales

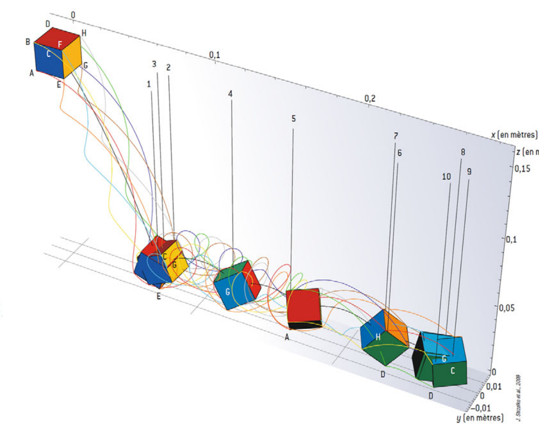
- Le jeu de dés a été également étudié
  - *Kapitaniak, Strzalko, Grabski, & Kapitaniak (2012). The three-dimensional dynamics of the die throw.*
- La probabilité que le dé retombe sur la face opposée à celle visible lors du lancer est $> \frac{1}{6}$



Ignorance des conditions initiales

- *« Nos travaux montrent que les résultats du jet sont prévisibles quand on fixe les conditions initiales avec la précision requise »*
  - les dés sont pipés – Pour la Science, n° 385, novembre 1999





Ignorance des conditions initiales

- Un autre exemple de « jeu de hasard » est la roulette.
  - *"No One Can Win at Roulette Unless He Steals Money from the Table While the Croupier Isn't Looking". Albert Einstein*
  - *Du fait de l'ignorance des conditions initiales et de la non proportionnalité entre causes et effets.*

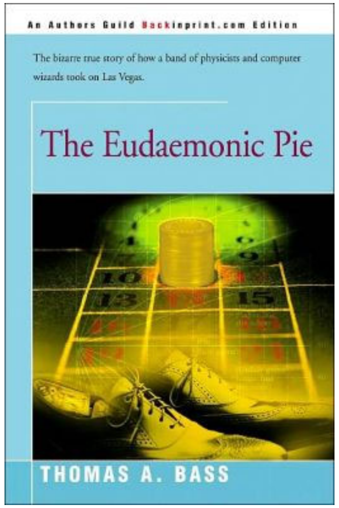
And it is the very notion of Sensitive Dependence on Initial Conditions that caused most people—even such notable geniuses as Albert Einstein, Stephen Hawking, and Richard Feynman—to declare in one way or another that beating the game of roulette is impossible. They came to this conclusion because had the rotor been spun just a tiny bit faster; or had the ball been launched with just the slightest bit more energy; these miniscule, seemingly insignificant Initial *Conditions* would result in a dramatically different outcome at the end of the spin.

Ignorance des conditions initiales

- Un autre exemple de « jeu de hasard » est la roulette.
  - *Comme pour le dé ou la pièce si l'on observe la manière dont la bille est lancée, on peut prévoir si elle s'arrêtera sur rouge ou noir.*

  - *Il suffit d'une caméra qui enregistre les conditions initiales reliés d'un ordinateur qui fait les calculs de mécanique*
    - Small & Tse (2012). Predicting the outcome of roulette. Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science.
  - *Cette idée a été appliquée en 1978 à Las Vegas par un groupe d'étudiants en physique, baptisé Eudaemons.*

Ignorance des conditions initiales



La chaussure où était cachée l'ordinateur

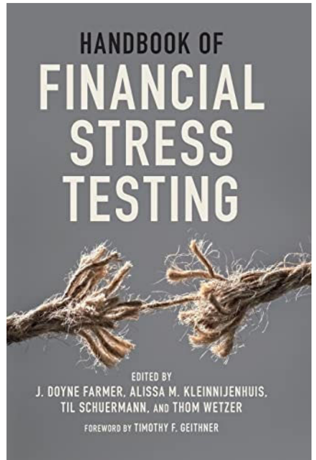
Ignorance des conditions initiales

- L'un de ces parieurs curieux, Doyne Farmer, est aujourd'hui est aujourd'hui professeur de mathématiques à Oxford, créateur d'une entreprise de trading algorithmique « Prediction », vendue 100 millions de $ en 2006 à UBS

J. Doyne Farmer is Director of Complexity Economics at the Institute for New Economic Thinking at the Oxford Martin School, and is the Baillie Gifford Professor at Mathematical Institute at the University of Oxford, as well as an External Professor at the Santa Fe Institute. His current research is in economics, including financial stability, sustainability, technological change and economic simulation. He was a founder of Prediction Company, a quantitative automated trading firm that was sold to the United Bank of Switzerland in 2006. His past research spans complex systems, dynamical systems, time series analysis and theoretical biology. He founded the Complex Systems Group at Los Alamos National Laboratory, and while a graduate student in the 70's he built the first wearable digital computer, which was successfully used to predict the game of roulette.

Bloomberg Markets

Doyne Farmer posant pour Bloomberg



Markets | Feature

Chaos Scientist Finds Hidden Financial Risks That Regulators Miss

Oxford Professor Doyne Farmer is working with central banks to improve stress testing.

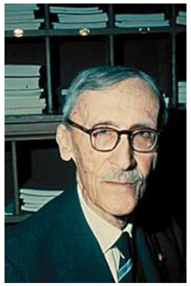
Hasard et jeu de pile ou face et expérience de pensée

- Le lancé de dés, d'une pièce (et tirage dans une urne) sont prototypiques de l'expérience aléatoire
  - *Or, on vient de voir ce qu'il en est pour les pièces ou les dés…*
- Y a-t-il de véritables *expériences aléatoires* ?
  - *Simulateurs quantiques : présence de vrai hasard dans la nature*
  - *Nous pouvons aussi faire une **expérience de pensée**, une idéalisation du lancer d'une pièce « équilibrée » et en faire l'archétype de l'expérience aléatoire.*
  - *On peut faire des mathématiques correctes avec des abstractions comme le point ou la droite, que personne n'a jamais vues.*
  - *L'expérience aléatoire est alors une idée abstraite, sans rapport avec la description du monde issue de la physique classique.*

Hasard et jeu de pile ou face et expérience de pensée

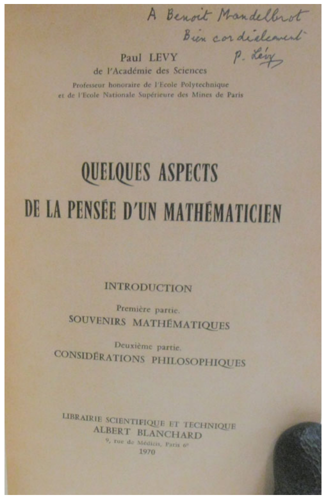
ce que les corps solides sont pour la géométrie, les jeux de hasard sont pour le calcul des probabilités, mais avec une différence : les corps solides sont donnés par la nature, tandis que les jeux de hasard ont été créés pour vérifier une théorie imaginée par l'esprit humain, de sorte que le rôle de la raison pure est plus grand encore en calcul des probabilités qu'en géométrie

Paul Lévy - Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien



Paul Lévy

Benoît Mandelbrot, père de la théorie des fractales et aussi connu pour ses travaux sur la dynamique des prix des actifs financiers



A Benoît Mandelbrot
Bien cordialement
P. Lévy

Paul LEVY
de l'Académie des Sciences
Professeur honoraire de l'Ecole Polytechnique
et de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris

QUELQUES ASPECTS
DE LA PENSÉE D'UN MATHÉMATICIEN

INTRODUCTION
Première partie.
SOUVENIRS MATHÉMATIQUES
Deuxième partie.
CONSIDÉRATIONS PHILOSOPHIQUES

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD
1970

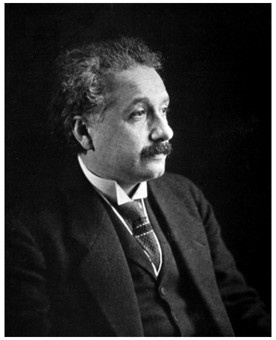
L'ouvrage autobiographique et philosophique de Levy avec une dédicace à Benoît Mandelbrot …

Hasard épistémique, vrai hasard et mécanique

- Hasard épistémique et ignorance des conditions initiales
- Qu'il s'agisse du lancé d'une pièce ou de la dynamique des molécules d'oxygène, on est microscopiquement déterministe, mais macroscopiquement aléatoire.
- Par comparaison, mécanique quantique microscopiquement aléatoire, mais macroscopiquement déterministe
  - *Prévisions pour un grand nombre de particules vont au-delà des capacités de mesure.*
  - *En théorie, peut produire du « vrai hasard »*

Ontologie du hasard

- "I, at any rate, am convinced that *He* does not throw dice."
  - *Albert Einstein, 1926*



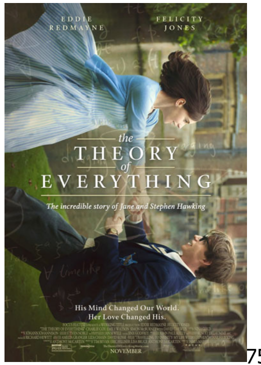
A. Einstein (1921)

Niels Bohr

- Einstein, stop telling God what to do!"
  - *Niels Bohr*

Ontologie du hasard

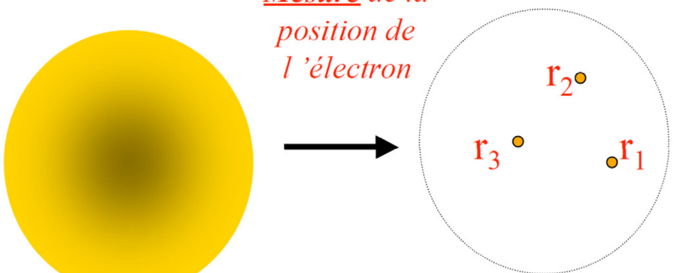
- *"All the evidence is that God is quite a gambler. The universe is like a giant casino with dice being rolled, or wheels being spun, on every occasion".*
- ***"Now suppose we try to predict the future**. (…) We can only assign a probability to particular combinations of positions and speeds. Thus there is a certain probability to a particular future of the universe".*
  - Stephen Hawking - Brief Answers to the Big Questions
- "***Prediction is difficult** - particularly when it involves the future."*
  - Mark Twain



Ontologie du hasard

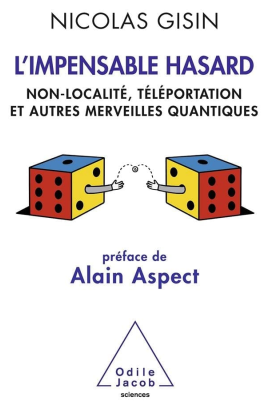
- *Pour la majorité des physiciens, la théorie quantique est statistique parce que la nature l'est fondamentalement.*
  - Serge Haroche – Prix Nobel de Physique - Il était deux fois la révolution quantique (2016)

Mesure *de la position de l'électron*



Résultat aléatoire

Ontologie du hasard



- Nicolas Gisin aborde la question du « vrai hasard » et son existence dans le réel :
  - *La notion de vrai hasard mérite qu'on s'y attarde.*
  - *Il y a une réelle différence entre le « hasard apparent », comme celui des jets de dés, et le vrai hasard. Le vrai hasard n'est pas quelque chose de préexistant qui nous était caché*
  - *La nature n'est pas déterministe et elle est capable de réels actes de pure création : elle peut produire du vrai hasard.*
- Pour reprendre Alain Aspect, « *le débat Einstein-Bohr est complètement clos. Trois expériences récentes effacent les derniers doutes* »

Simulateurs quantiques (quantum random number generators – QRNG)

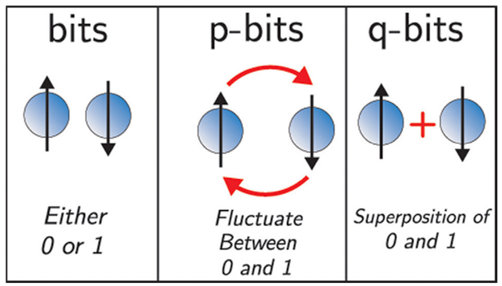
- Le lancé d'un dé relève d'un pseudo hasard ou hasard **épistémique** (**relatif à la connaissance**), lié à une ignorance ou une incapacité pratique à prévoir le futur.
- La mécanique quantique donne au hasard pur (ou **ontologique**) une position centrale.
  - *C'est le concept même de déterminisme dans la représentation du monde qui est remis en question*
  - *Il pourrait y avoir des phénomènes physiques qui surviennent sans cause.*
  - *Un objet quantique n'a pas de localisation spatiale tant que la position n'est pas mesurée*
    - Principe d'incertitude d'Heisenberg (ou d'indétermination)

Simulateurs quantiques (quantum random number generators – QRNG)

- Lancers de dés, générateur de nombre pseudo-aléatoires : déterminisme, éventuellement complexe et non-linéaire.
- Mécanique quantique de nature probabiliste
- On peut utiliser ordinateurs et algorithmique quantiques, pour générer des suites aléatoires
  - *On parle de Quantum Random Numbers Generator – QRGN*
- IBM met à disposition des ordinateurs quantiques avec 5 qubits
  - *"Programming a quantum computer: generating true random numbers"* https://blog.red-badger.com/2018/9/24/generate-true-random-numbers-with-a-quantum-computer
  - *Voir aussi "Quantum random number generation"* https://www.nature.com/articles/npjqi201621

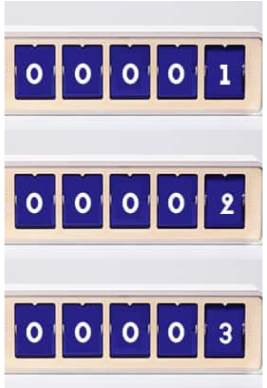
Simulateurs quantiques (quantum random number generators – QRNG)

- Un bit élémentaire peut prendre deux états 0 ou 1,
- Pbit (bit probabiliste) : loi de probabilité sur ces 2 états
  - 0 *avec probabilité* p, 1 *avec une probabilité* $1 - p$
- Qubit (quantum bit) : exemple, spin d'électron
  - ***Superposition*** *de deux états (combinaison linéaire),* $|0>$ *et* $|1>$,



$$|0> = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|1> = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

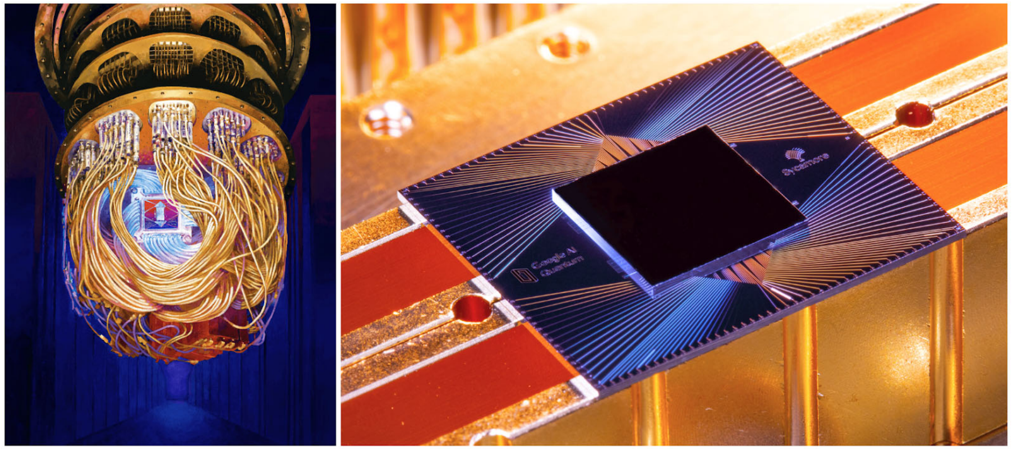


...

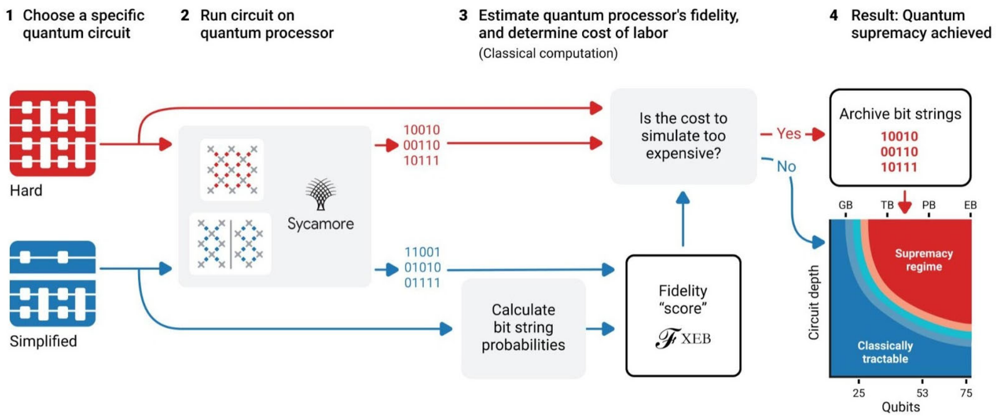
Codage classique sur cinq décimales

Codage décimal avec superposition d'états

Avec 53 qbits (ou qubits), on peut représenter toutes les suites binaires de longueur 53, soit $2^{53} \approx 10^{16}$ états, contre un seul état en informatique classique



La puce Sycamore de Google, dans le cadre d'un partenariat avec la NASA, travaille avec des entités de 53 qbits. Elle ne peut fonctionner qu'à des températures proches du zéro absolu.

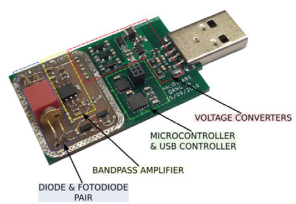


Le calculateur quantique a permis de simuler et traiter des données aléatoires en 3 minutes et 20 secondes quand il aurait fallu 10 000 ans à un super calculateur « classique » pour faire de même : « suprématie quantique » (Nature, 23 octobre 2019)

https://ai.googleblog.com/2019/10/quantum-supremacy-using-programmable.html

Simulateurs quantiques (quantum random number generators – QRNG)

- Les simulateurs aléatoires quantiques se miniaturisent et leurs prix diminuent rapidement
  - *Offre abondante, prix d'environ 1000 euros et taille d'une clé USB*



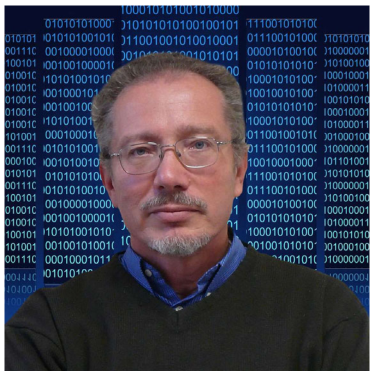
- Un aléatoire de « meilleure qualité » (en l'absence de définition formelle de l'aléatoire) ?
  - *Simulations aléatoires de scénarios (méthode de Monte Carlo)*
  - *Éviter les vols de cryptoactifs (800 000 bitcoins en 2014 sur la plateforme MtGox, 18 866 bitcoins en 2015 sur Bitstamp)*

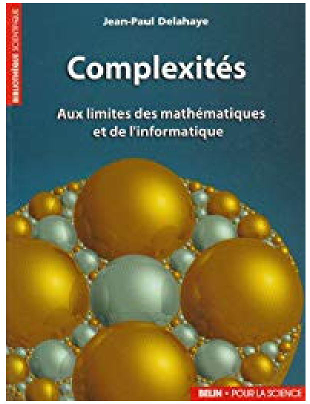
Simulation : PRGN et QRGN

- Littérature foisonnante sur l'analyse empirique et comparée des méthodes algébriques et quantiques
  - *Ce qu'on veut éviter, c'est la répétition de motifs (prévisible) dans une représentation donnée (exemple : base à pas variable)*
    - Abbott, A. A., Calude, C. S., & Svozil, K. (2014). A quantum random number generator certified by value indefiniteness. *Mathematical Structures in Computer Science*, *24*(3).
    - Trejo, J. M. A., & Calude, C. S. (2021). A new quantum random number generator certified by value indefiniteness. *Theoretical Computer Science*, *862*, 3-13.
    - Abbott, Calude, Dinneen, & Huang (2019). Experimentally probing the algorithmic randomness and incomputability of quantum randomness. *Physica Scripta*.
    - Kavulich, J. T., Van Deren, B. P., & Schlosshauer, M. (2021). Searching for evidence of algorithmic randomness and incomputability in the output of quantum random number generators. *Physics Letters A*, *388*, 127032.
    - Heese, R., Wolter, M., Mücke, S., Franken, L., & Piatkowski, N. (2021). On the effects of biased quantum random numbers on the initialization of artificial neural networks. *arXiv preprint arXiv:2108.13329*.
    - Jacak, Jóźwiak, Niemczuk & Jacak (2021). Quantum generators of random numbers. *Scientific Reports*, Nature.

La finance moderne fait un large appel à la modélisation probabiliste et statistique. Il est devenu essentiel de mieux comprendre contexte et difficultés méthodologiques.

Outre les articles inclus dans les journaux précédents, les ouvrages de N. Gauvrit, « vous avez dit hasard ? Entre mathématiques et psychologie et « Complexités » de J-P. Delahaye sont utiles en complément de ces transparents





Nicolas Gauvrit

Contingence et nécessité

- Les simulateurs physiques utilisant les principes de la mécanique classique, les suites récurrentes ne peuvent produire que du « pseudo-aléatoire »
  - *Car le futur est parfaitement défini à partir du présent*
  - *Déterminisme causal, déterminisme absolu : ce qui ne peut pas ne pas être*
  - *Une seule trajectoire, un seul scénario associé au futur qui est aussi immuable que le passé*
- En finance, cette approche n'est pas soutenable
  - *On est amené à envisager plusieurs scénarios pour l'évolution des prix, des valeurs boursières*
  - *Le futur doit être ouvert : Pluralité des possibles*
  - *Contingent (bilatéral) : ce qui peut être ou ne pas être*

Contingence et nécessité

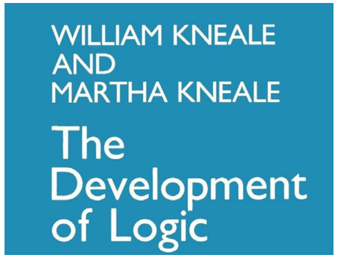
- Logique modale aléthique (ou aristotélicienne ou classique) : 4 modalités + contingent bilatéral
  - ***Nécessaire*** *(ce qui ne peut pas ne pas être)*
  - ***Contingent*** *(ce qui peut ne pas être)*
    - Contingent s'oppose à nécessaire
  - ***Possible*** *(ce qui peut être)*
  - ***Impossible*** *(ce qui ne peut pas être)*
    - Possible s'oppose à impossible
  - ***Contingent (possible) bilatéral*** *: ce qui peut être ou ne pas être*
- En termes d'événements économiques et financiers
  - *A nécessaire :* $P(A) = 1$, *A contingent :* $P(A) < 1$
  - *A possible :* $P(A) > 0$, *A impossible :* $P(A) = 0$
  - *Contingent (possible) bilatéral :* $0 < P(A) < 1$

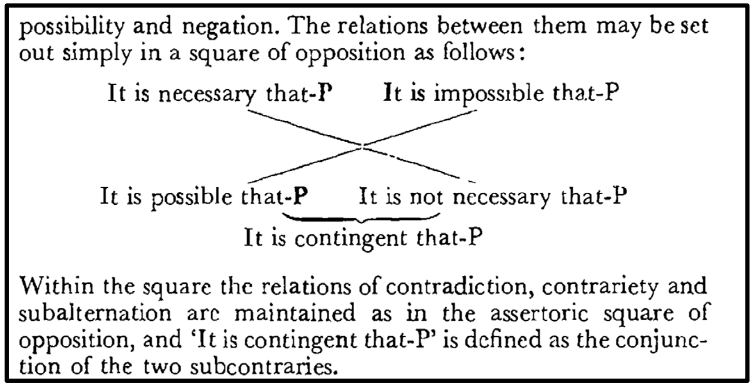
Contingence et nécessité

- On voit apparaître une tension entre deux pôles contradictoires : le **nécessaire** et le **contingent**
  - *Dans la suite, on considèrera implicitement le contingent bilatéral et on parlera alors de possibilité*
- Le nécessaire : **ce qui ne peut être autrement**
  - *Spinoza, Laplace ou Leibniz introduisent une rationalité dans le nécessaire, un enchaînement de causes et d'effets*
  - *Par opposition à la prédestination ou au bon vouloir et aux « superpouvoirs » divins*
- La nécessité telle qu'elle apparaît chez Spinoza :
  - *Il n'est rien donné de **contingent** dans la nature, mais **tout y est déterminé par la nécessité** de la nature divine à exister et à **produire quelque effet** d'une certaine manière.*

Contingence et nécessité

- Le carré modal : relations entre les modalités de la logique aristotélicienne.





possibility and negation. The relations between them may be set out simply in a square of opposition as follows:

It is necessary that-P   It is impossible that-P

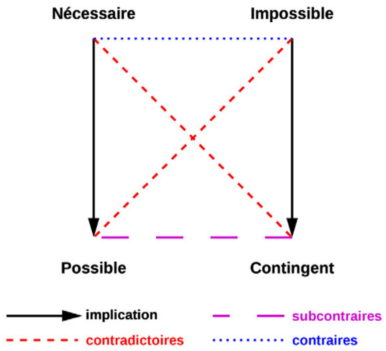
It is possible that-P   It is not necessary that-P

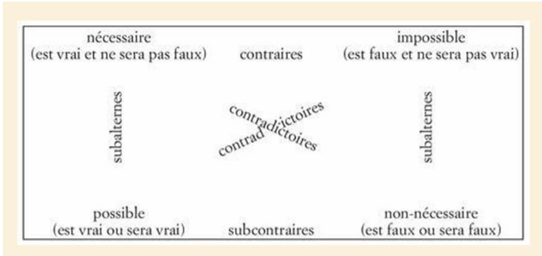
It is contingent that-P

Within the square the relations of contradiction, contrariety and subalternation are maintained as in the assertoric square of opposition, and 'It is contingent that-P' is defined as the conjunction of the two subcontraries.

Contingence et nécessité

- Le carré modal : : relations entre les modalités de la logique aristotélicienne (source Vuillemin et Wikipédia)





Contingence et nécessité

- Le **contingent** s'oppose au nécessaire
- Ce qui arrive (ou pourrait arriver) **sans nécessité** :
  - *« Hasard ontologique » : au cœur de la physique moderne, notamment de la mécanique quantique*
  - *Une particule peut se désintégrer à tout moment de par sa nature même, sans cause extérieure*
- Pour parler de probabilité d'un événement, il faut qu'il y ait pluralité des possibles (ou contingence)
  - ***Le cours de Total peut augmenter ou ne pas augmenter***
  - ***Il n'est pas prédéterminé***
- Spinoza, Laplace ou Leibniz réfutent que les lois de la nature relèvent du contingent
  - *Sans méconnaître la complexité d'une représentation du réel*

Contingence et nécessité

- La notion de contingence est centrale en finance
  - *L'analyse qu'en fait Aristote dans le problème des futurs contingents est compatible avec l'approche financière*
  - *Pluralité de scénarios futurs possibles*
- Mais récusée par les philosophes médiévaux et classiques
  - *Le déterminisme strict règne en maître*
  - *Seul le hasard épistémique a voix au chapitre*
- La contingence est au cœur de la mécanique quantique
  - *En l'absence d'interaction, cad en cas de cohérence, une particule est dans une superposition d'états*
  - *Tout se passe comme si les cours boursiers non observés montaient et baissaient en même temps*
  - *Plus de bivalence « hausse » ou « baisse » mais contingence*

Contingence et nécessité

- Si le concept de probabilité n'apparaît qu'au 17^{e} siècle, Aristote présente de manière claire la notion de hasard épistémique et d'opinion probable (plausible).

  Le chapitre IX du *De Interpretatione* d'Aristote
  Vers une réhabilitation de l'opinion comme connaissance probable des choses contingentes

  Jules Vuillemin

    - https://www.erudit.org/fr/revues/philoso/1983-v10-n1-philoso1300/203211ar.pdf
- Le « problème des futurs contingents »
  - *« C'est nécessairement que demain il y aura ou il n'y aura pas bataille navale. Mais ce n'est pas pour autant ni qu'une bataille navale arrive nécessairement demain ni qu'elle n'arrive pas ».*
  - *« Ce n'est pas sur le modèle des choses qui sont que se comportent les choses qui, n'étant pas, sont en puissance d'être ou de ne pas être. »*

Contingence et nécessité

- Jules Vuillemin établit que les prémisses des probabilités transparaissent dans le texte d'Aristote sur les futurs contingents

> Ainsi l'intuition développée dans le *de Interpretatione* n'est pas logiquement contradictoire. Elle exige toutefois qu'on distingue, dans le possible qui regarde la réalité et se distingue donc du pur possible logique ou mathématique, l'essence et l'accident. Seul l'accident relève de la probabilité. Être déjà vrai ou faux, pour un accident, c'est être déjà tombé dans le domaine de la réalité, c'est-à-dire avoir une probabilité égale à 1 ou à 0. Ne pas avoir de valeur de vérité déterminée, c'est avoir une probabilité comprise entre ces deux extrêmes. Alors toutes les expressions modales utilisées au chapitre IX se traduisent en des expressions probabilistes et les paradoxes que les logiciens ont signalés s'évanouissent[66].
>
> Chaire de philosophie de la connaissance
> Collège de France

Contingence et nécessité

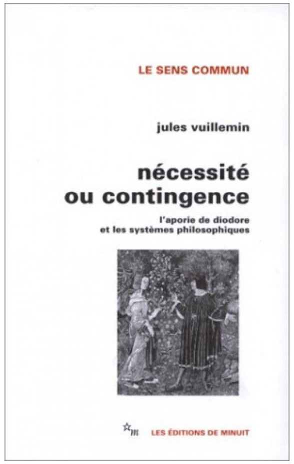
- L'interprétation probabiliste du problème des futurs contingents

1. p est possible	$\pi(A) \geq 0$
p est nécessaire	$\pi(A) = 1$
p est impossible	$\pi(A) = 0$
2. Il est nécessaire que p ou non p	$\pi(A \cup \sim A) = 1$
Il est impossible que p et non p	$\pi(A \cap \sim A) = 0$
S'il est nécessaire que p ou non p ce n'est pas pour autant qu'il est nécessaire que p ou qu'il est nécessaire que non p.	Si $\pi(A \cup \sim A) = 1$, cela n'entraîne pas que $\pi(A) = 1$ ou que $\pi(\sim A) = 1$

Contingence et nécessité

- « C'est parce qu'il y a des propositions portant sur le futur qui ne sont ni vraies ni fausses qu'il y a, pour Aristote, du probable ».

Jules Vuillemin



Contingence et nécessité

- Il y a de fortes résistances à reconnaître la contingence
  - *La contingence est une dissonance qui doit être réduite.*
  - *La négation de la contingence est une forme de réduction de la dissonance (voir infra sur la dissonance cognitive)*
- Citations de Daniel Kahneman (Système 1 / système 2)
  - *« Nous sommes bien trop disposés à ne pas admettre que ce que nous voyons dans la vie est dû au hasard »*
  - *« On peut facilement se raconter une histoire, trouver des causes pour expliquer »*
  - *"The idea that the future is unpredictable is undermined every day by the ease with which the past is explained"*
- Ces résistances sont illustrées dans les transparents suivants, par quelques citations célèbres.

Contingent et nécessaire

- *Il n'y a rien de **contingent** dans la nature des choses ; elles sont au contraire déterminées par la nécessité de la nature divine à exister et opérer d'une manière certaine.*
    - **Spinoza**, Ethique I, proposition 29
- *Pour toute chose, il doit y avoir une cause, ou **raison assignable**, pourquoi elle existe ou pourquoi elle n'existe pas*
    - *Raison assignable = ce que par quoi un événement arrive = cause efficiente : « une pierre tombe à cause du vent (vent : cause efficiente)*
- Pour les tenants de l'efficience informationnelle, c'est l'arrivée de nouvelles informations relatives à la valeur d'une action qui causent les variations du prix de l'action.

Contingence et nécessité

- La raison (suffisante) déterminante de Leibniz
    - « ***C'est que jamais rien n'arrive, sans qu'il y ait une cause*** *ou du moins une raison déterminante, c'est-à-dire quelque chose qui puisse servir à rendre raison a priori, pourquoi cela est existant plutôt que non existant, et pourquoi cela est ainsi plutôt que de toute autre façon* ».
- Le « démon (ou au génie) de Laplace
    - «***Une intelligence*** *qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent (...)* ***Rien ne serait incertain pour elle****, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux.* »

Contingence et nécessité

- Spinoza, Laplace : connaissance imparfaite des causes, ce qui amène à imaginer plusieurs futurs possibles
    - *La **possibilité** et la **contingence** (...) ont été tenues par quelques-uns pour des affections des choses, alors qu'elles **ne sont rien cependant que les défauts de notre entendement**.*
        - Spinoza, pensées métaphysiques, Du nécessaire, de l'impossible, le possible et le contingent
- Laplace : ce qu'on appelle hasard n'est que **« l'expression de l'ignorance où nous sommes des véritables causes »**

Contingence et nécessité

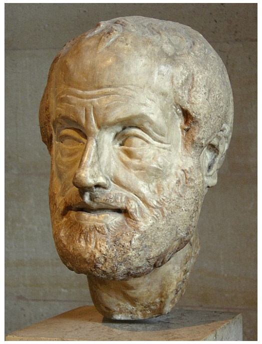
- Principe de la raison suffisante : rien n'arrive sans raison
    - *« Et pourtant, rien n'est mû par hasard, mais il faut toujours qu'il existe une cause déterminée»*
        - Aristote (1071b-1072a), La Métaphysique, Livre douzième, Nécessité d'un premier Moteur éternel. https://philosophie.cegeptr.qc.ca/wp-content/documents/M%C3%A9taphysique.pdf
    - *« Jamais rien n'arrive sans qu'il y ait une cause ou du moins une raison déterminante, c'est-à-dire qui puisse servir à rendre raison a priori pourquoi cela est existant plutôt que non existant et pourquoi cela est ainsi plutôt que de toute autre façon ».*
        - Leibniz, Essais de théodicée, 1710.
- Pour Leibniz, cela ne veut pas pour autant dire que ces raisons déterminantes nous soient accessibles
    - *A nouveau, problème de l'abduction, c'est-à-dire recherche des déterminants des cours boursiers*

Contingence et nécessité

- Laplace (*Essai philosophique sur les probabilités,*1814)
  - https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k96200351/f9.image.texteImage
  - *« **Mais l'ignorance des différentes causes à l'origine des événements et leurs complexités** nous empêchent d'atteindre la même certitude dans la plupart des phénomènes ».*
  - *« Ainsi il y a des choses qui sont incertaines pour nous, des choses qui sont plus ou moins probables, et **nous cherchons à compenser notre impossibilité de les connaître en déterminant leurs différents degrés de vraisemblance** ».*
  - *« C'est ainsi que **nous devons à la faiblesse de l'esprit humain** l'une des plus délicates et des plus ingénieuses théories mathématiques, **les probabilités** ».*

Contingence et nécessité

- A. Comte est le plus virulents contempteur des probabilités
  - *Les efforts des géomètres pour élever le calcul des probabilités (...) n'ont abouti (...) qu'à présenter, relativement à la théorie de la certitude, (...) quelques propositions presque triviales.*
  - *... L'intervention du calcul des probabilités serait du reste ici ou puérile ou «sophistique», comme en tant d'autres occasions.*
  - *C'est ainsi que l'absence de toute discipline philosophique a radicalement vicié la première page du vrai système de nos connaissances théoriques et rationnelles (...) les consécrations accordées au prétendu calcul des chances suffiraient à caractériser pour tous les bons esprits les ravages scientifiques d'une telle anarchie mathématique.*
  - *On doit déplorer l'espèce d'encouragement dont les géomètres ont quelquefois honoré une aberration aussi profondément irrationnelle en faisant de vains et puérils efforts pour déterminer d'après leur illusoire théorie des chances le nombre de cas propres à légitimer chacune de ces indications statistiques*

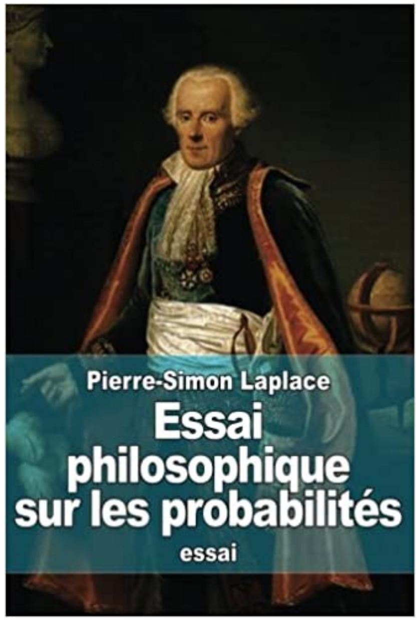


Aristote

Spinoza

Laplace

Leibniz



Blaise Pascal

Les conceptions ou dimensions du hasard

- Hasard comme expérience de pensée (ou intuition mathématique) : idéalisation du jeu de pile ou face
- Hasard naturalisé et formalisé : stratégies mixtes en théorie des jeux (Von Neumann)
- Hasard comme négation de la prévisibilité (Piaget)
- Pseudo-hasard ou hasard épistémique
- Hasard « associé » à la négation de la nécessité : affirmation de la contingence et du caractère ouvert du futur
  - *Futurs contingents (Aristote)*
- Hasard quantique ou « vrai hasard »
- Théorie des nombres et définitions du hasard vs axiomatique de Kolmogorov
- Hasard à la Cournot

Ontologie du hasard

- On peut à la question du hasard et de l'aléatoire sous plusieurs angles
- Diachronique :
  - *Comment le hasard apparaît dans l'histoire (Hacking) ?*
  - *Comment le concept de hasard se développe dans le cerveau de l'enfant et de l'adolescent (approche constructiviste de Piaget) ?*
- Les tentatives de construction et de définition du hasard
  - *Dans le domaine physique : physique statistique, jeux de hasard*
  - *En mathématiques : théorie des nombres, approches théoriques des probabilités*
  - *Par « construction positive », on s'intéresse à l'existence de méthodes physiques, mathématiques ou algorithmiques permettant de « produire » de l'aléatoire*

Ontologie du hasard

- Même à supposer que les lois de la Nature s'accordent avec le déterminisme, nous avons pu définir une **antinomie** : nécessaire s'oppose à contingent.
- Dès que nous disposons d'un **langage** ou d'un **système logique** qui admet la **négation** d'un concept existe
  - *Imprévisible s'oppose ainsi à prévisible*
- Le concept ainsi défini ne se réfère pas nécessairement à quelque d'existant dans la Nature, mais c'est une existence logique ou langagière (on utilise le terme **nominal**)

Ontologie (existence) du hasard

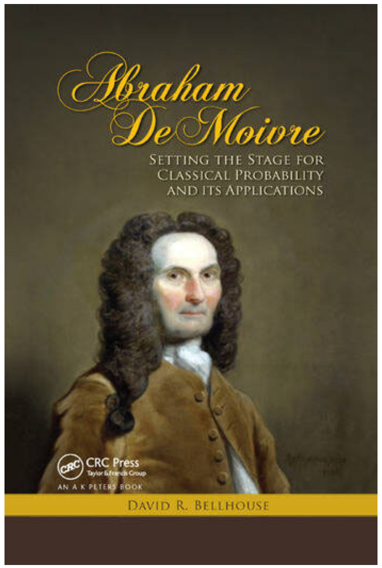
- $\exists\neg P$: l'imprévisible existe …
  - *Si P est une proposition telle que le futur est prévisible et si on note $\neg$, l'opérateur de négation, la proposition $\exists\neg P$ (l'imprévisible existe) est bien formulée*
  - *Cette proposition est-elle « vraie » ? Ici est-elle en rapport avec quelque chose d'existant dans le monde (de la finance) ?*
  - *Dans la construction, $\exists\neg P$ hasard n'est pas construit « positivement », ce qui pose la question de son existence.*
- Selon le déterminisme (ou le nécessitarisme), il n'y a rien de tel que le hasard dans le monde
  - *Chance, when strictly examined, is a mere negative word, and means not any real power which has anywhere a being in nature.*
    - Hume (An Enquiry Concerning Human Understanding)

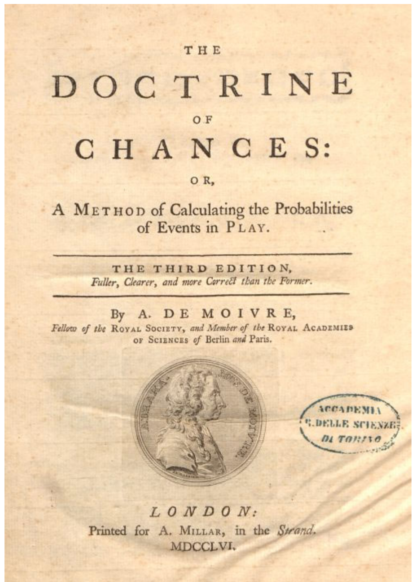
Ontologie du hasard

- Un tenant du déterminisme pourrait dire : « *Le contingent n'existe pas* »
  - *Ce à quoi selon l'argument de Platon, on pourrait lui rétorquer que le contingent doit bien exister pour qu'on puisse affirmer quelque chose à son sujet.*
  - *La contradiction n'est qu'apparente : examinons la proposition « le Père Noël n'existe pas ». Tout le monde en comprend la signification et tout adulte admettra qu'elle est vraie*
  - *Ce que la proposition signifie, c'est qu'il existe un personnage imaginaire que nous avons baptisé « Père Noël ». Il existe dans les contes pour enfants, mais il n'existe aucun personnage associé. Les « modes d'existence » sont différents.*
  - *Pour un tenant du déterminisme, croire au hasard, c'est croire au Père Noël !*

Ontologie du hasard

- Abraham De Moivre explicite bien cette conception nominaliste du hasard :
  - *Le Hasard, dans des écrits ou discours athées, est un son complètement dénué de sens : il n'implique de détermination à aucun mode d'Existence ; ni en fait à l'Existence elle-même, pas plus qu'à la non-existence ; il ne peut être ni défini ni compris ; aucune Proposition le concernant ne peut être ni affirmée ni réfutée, excepté celle-ci, « <u>C'est simplement un mot</u> ».*
- Il récuse d'ailleurs cette approche nominaliste, puisque pour lui, le lancé de dés est une véritable expérience aléatoire.




THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A METHOD of Calculating the Probabilities of Events in PLAY.

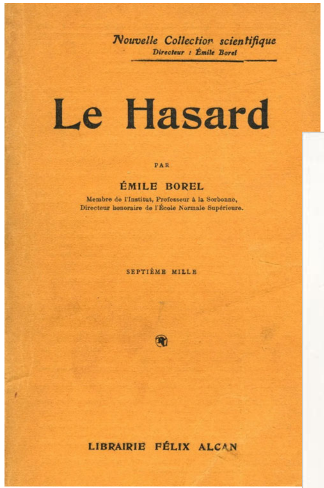
THE THIRD EDITION,
Fuller, Clearer, and more Correct than the Former.

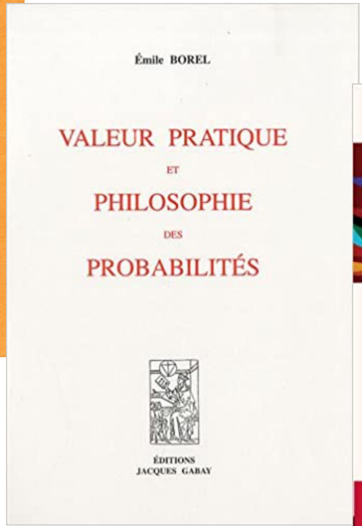
By A. DE MOIVRE,
Fellow of the ROYAL SOCIETY, and Member of the ROYAL ACADEMIES OF SCIENCES of Berlin and Paris.

LONDON:
Printed for A. MILLAR, in the Strand.
MDCCLVI.

Ontologie (existence) du hasard

- Si l'on peut « fabriquer » du pseudo-hasard, le hasard « pur » ne peut être construit.
  - *D'où la question : Peut-on **définir** quelque chose que l'on ne peut pas **construire** ?*
- Chaitin : paradoxe du hasard indéfinissable de Borel
  - *Considérons les nombres dont le développement binaire est associé à une suite aléatoire et ceux qui ne le sont pas*
  - *Considérons à présent un premier nombre aléatoire.*
  - *Il a fallu le déterminer selon un certain procédé ou règle, qui ne peut être aléatoire (sinon raisonnement circulaire).*
  - *S'il est construit à partir d'une règle (algorithme), il est calculable donc non aléatoire…*
- La réponse des maths à la question précédente : oui





En référence au « paradoxe du hasard indéfinissable » de Borel, repris par Chaitin

Ontologie du hasard

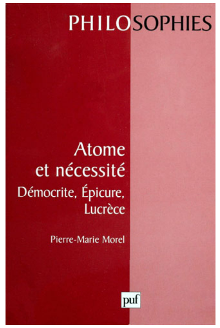
- L'expérience aléatoire doit être définie de manière négative : une expérience dont on ne peut connaître l'issue, c'est-à- dire non prévisible.
  - *Cette expérience peut être temporelle : par exemple, prévoir la valeur boursière d'une entreprise à un horizon d'un an.*
  - *Ou non temporelle : estimer la valeur d'une entreprise aujourd'hui à partir des informations (états financiers) disponibles*
- C'est pourquoi l'aléatoire ne peut pas être « construit ».
  - *Logique à quatre modes d'Aristote : possible, impossible (s'oppose au possible), déterminé, contingent (s'oppose au déterminé).*
  - *L'aléatoire est associé au contingent et suppose l'existence de plusieurs « possibles » (s'oppose au déterminé).*

Ontologie du hasard

- Le hasard a-t-il une existence en dehors du langage ou de l'abstraction ?
  - *Ontologie renvoie à la question de l'existence*
  - *Peut-on rencontrer le hasard dans la nature, sur les marchés financiers ?*
- Dans la théorie des marchés efficients, les cours boursiers suivent des marches aléatoires.
  - *Random walks*
  - *Du fait de l'efficience informationnelle, d'absence d'opportunités d'arbitrage*
- Les concepts de hasard, d'aléatoire, d'expérience aléatoire sont au cœur de la finance moderne

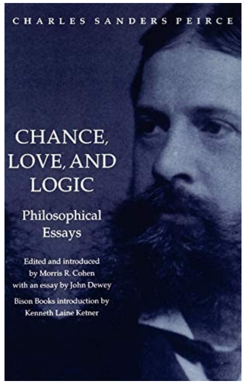
Le « vrai » hasard ? Epicure et Lucrèce

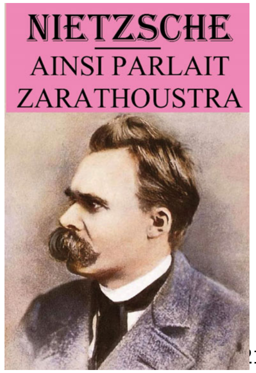
- Qualifier Epicure de théoricien du hasard serait un anachronisme, mais …
- certains écrits d'Epicure font penser à la physique statistique
  - *L'atomisme, repris à Démocrite*
  - *Clinamen : déviation spontanée de la course des atomes*
  - *« Il leur arrive, on ne saurait dire où ni quand, de s'écarter un peu de la verticale, si peu qu'à peine on peut parler de déclinaison »*
    - – De la nature des choses – (Lucrèce) est un poème composé à partir de l'ouvrage d'Epicure – La Nature -
  - *« Tu concevras alors quels infinis hasards bercent les éléments dans l'étendue épars. »*



Le « vrai » hasard

- Charles Sanders Peirce s'est (en autres choses …) intéressé au rôle du hasard et son rapport avec la connaissance scientifique
  - *Turley (1969). Peirce on chance. Transactions of the Charles S. Peirce Society.*
  - *Peirce (1998). Chance, love, and logic: Philosophical essays. U of Nebraska Press.*
- Nietzsche - Ainsi parlait Zarathoustra
  - *En vérité, c'est une bénédiction et non une malédiction lorsque j'enseigne : « Sur toutes choses, se trouve le ciel hasard (...)*
  - *« Par hasard » — c'est là la plus vieille noblesse du monde, je l'ai rendue à toutes choses, je l'ai délivrée de la servitude du but.*
  - *(...) J'ai trouvé dans toutes choses cette certitude bienheureuse : elles préfèrent danser sur les pieds du hasard.*
  - *(...) que tu es un lieu de danse pour les hasards divins, que tu es une table divine pour le jeu de dés et les joueurs divins !*





Le concept d'aléatoire en finance

- Plusieurs concepts de hasard ou d'aléatoire
  - *En finance, ce qui prévaut est l'**imprévisibilité** (des cours boursiers)*
    - Prévisibilité implique la présence de « free lunchs », d'arbitrages qui impliquent une (certaine) efficience des marchés.
  - *Et non pas l'**absence de causes***
    - Impact des ordres d'achat et de vente : direct via les mécanismes d'appariement des ordres et indirect via le contenu informationnel des ordres : aspect endogène au marché
    - Arrivée d'informations économiques et financières non anticipées (exogènes au marché) et transmission des informations privées lors de la négociation sur les marchés financiers :
    - Même s'il est très difficile de remonter des variations des cours aux causes économiques et financières ou à la dynamique propre des acheteurs et des vendeurs;

Imprévu et imprévisible

- Le terme « hasard » est entendu dans deux sens différents, celui d'*imprévu* et celui d'*imprévisible*
- Événement imprévu ou *fortuit* renvoie à ce qui n'a pas été prévu, mais aurait pu l'être a posteriori
- Parce que les causes de l'événement auraient pu être identifiées a priori, si l'on y avait porté attention.
- L'imprévu peut avoir une dimension subjective, voire psychologique : d'où le terme imprévoyant.
- Le démiurge de Laplace a la capacité de tout prévoir.
- Dans l'antiquité, les devins et oracles étaient supposés porter une connaissance de l'avenir inaccessible au commun des mortels …

Hasard épistémique

- « Épistémique » est ce qui à voir avec la connaissance
- Le hasard épistémique ne remet pas en question le déterminisme ou relation nécessaire de cause à effet (ou conséquence)
  - *Compatible avec la physique classique*
  - *Théorie cinétique des gaz : implication de la mécanique newtonienne*
- Deux variantes du hasard épistémique
  - *Multiplicité de causes, en partie indéterminées et mal quantifiées*
    - Conditions initiales du lancer de pièce (cause mal quantifiée)
    - Informations financières simultanées dont l'impact sur les valeurs boursières est difficilement quantifiable.
    - Abduction (Pierce) : effets certains, causes incertaines

Hasard épistémique

- Deux variantes du hasard épistémique
  - *1) ignorance des conditions initiales : multiplicité des causes, causes mal déterminées et quantifiées*
  - *2) relations non linéaires entre causes et effets : sensibilité très grande aux conditions initiales*
- Hasard épistémique : ne remet pas en cause le déterminisme
  - *Tout se passe « comme si » certains phénomènes relevaient du hasard*
  - *On parle parfois de hasard épistémologique*
  - *Approche privilégiée dans le domaine scientifique jusqu'aux débats sur l'interprétation de la mécanique quantique*
  - *Comme en témoignent les citations des transparents suivants*

Hasard épistémique

- Si l'on est face à du hasard épistémique, alors la prévision boursière est en théorie possible
- À condition de dissiper (un peu) l'ignorance
- Chose peu facile :
  - *Quantités de phénomènes ont des causes multiples, inconnues ou mal quantifiées*
  - *Le rapport de cause à effet peut être hautement non linéaire*
- C'est l'objectif et ce que prétend faire le fonds Medallion
- Il faudra par ailleurs préciser ce qu'on entend par « prévision boursière »
  - *En précisant notamment le concept de primes de risques attachées à des facteurs de risque commun*

Hasard épistémique

- Mais s'il est difficile de prévoir un phénomène aussi simple que le résultat d'un lancer de dé
  - *On connait les relations entre les causes et les effets*
    - Les équations de la mécanique
  - *Mais les conditions initiales sont entachées d'aléa*
    - Vitesse de lancer, angle, nature de la surface
- Il est peu crédible de prétendre prédire l'évolution du cours de l'euro par rapport au dollar
  - *Conditions initiales nombreuses et mal identifiées*
  - *mécanismes complexes entre causes (arrivée de nouvelles informations) et conséquences (variations des prix)*

Hasard épistémique : citations

- Le hasard épistémique n'est pas le « vrai hasard »
  - *« Rien alors n'est ni ne devient soit par l'effet du hasard, soit d'une manière indéterminée, rien qui sera ou ne sera pas, mais tout arrive nécessairement et sans aucune indétermination ».*
    - Aristote, chapitre IX du De Interpretatione
  - *« Le hasard n'a aucune réalité en lui-même : ce n'est qu'un terme propre à désigner notre ignorance sur la manière dont les différentes parties d'un phénomène se coordonnent entre elles et avec le reste de la Nature ».*
    - Pierre-Simon Laplace (1773, 1776)
  - *« Ce que nous appelons hasard n'est et ne peut être que la cause ignorée d'un effet connu »*
    - Voltaire – dictionnaire philosophique, 1764, article Atomes

Hasard épistémique : citations

- *« Ce qui peut sembler contingent à quelqu'un en une circonstance, pour un autre (ou plutôt pour le même) en un autre temps, une fois les causes connues, sera nécessaire; si bien que la contingence est surtout en rapport avec notre connaissance »*
  - Bernoulli, De l'Art de Conjecturer.
- *« Il n'y a point de hasard à proprement parler, mais il y a son équivalent : l'ignorance où nous sommes des vraies causes des événements a sur notre esprit l'influence qu'on suppose au hasard »*
  - D'Alembert (1750)
- *Il est cependant certain que tout ce qui arrive est le résultat de quelque loi, est un effet de certaines causes, et pourrait être prévu si l'on connaissait ces causes et leurs lois.*
  - John Stuart Mill - – Système de logique déductive et inductive (livre II : du raisonnement)

Hasard épistémique : citations

- *La possibilité et la contingence ne sont rien que des défauts de notre entendement.*
  - Spinoza – Pensées Métaphysiques
- *« Le hasard n'est que la mesure de notre ignorance. Les phénomènes fortuits sont par définition ceux dont nous ignorons les lois ».*
  - Henri Poincaré – Calcul des Probabilités
- *« Le hasard n'est que le nom donné à notre ignorance ; pour un être omniscient la probabilité n'existerait pas... Quels que soient les progrès des connaissances humaines, il y aura toujours place pour l'ignorance, et par suite pour le hasard et la probabilité ».*
  - Emile Borel – Le Hasard
- *« Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard » -*
  - Henri Poincaré (Calcul des Probabilités)

Hasard épistémique : citations

- *On peut dire que le hasard est le nom commun que l'on attribue à un ensemble de causes trop complexe pour pouvoir l'analyser*
  - René de Possel - Sur la Théorie Mathématique des Jeux de Hasard et de Réflexion (1937)
- *Lorsque nous lançons des dés, ce qui nous manque, c'est manifestement une connaissance suffisante des conditions initiales.*
  - Karl Popper – La logique de la découverte scientifique
- *Nous pensons, bien que depuis les travaux de Heisenberg d'éminents savants ne soient pas de cet avis, que la notion de hasard est une notion que le savant introduit parce qu'elle est commode et féconde, mais que la nature ignore.*
  - Paul Lévy (1940)
- *La fiction du hasard n'est possible que parce que notre science n'embrasse pas toutes les causes qui produisent le cas.*
  - Vaihinger (1920)

Hasard essentiel (ou ontologique ou « vrai hasard »)

- Hasard attaché à l'objet (chose) étudié
  - « de re », à propos de la chose
  - *« Les cours boursiers sont aléatoires »*
    - Proposition relative au cours boursiers qui peut être vraie que l'on y croit ou pas : pas de subjectivité → de re
    - Les cours boursiers sont (nécessairement) aléatoires.
  - *« Les marchés boursiers sont (nécessairement) efficients »*
    - Si l'efficience est vue comme résultant de la rencontre d'une offre et d'une demande, tout marché qui organise cette rencontre l'est.
    - L'efficience est alors une caractéristique essentielle du marché
  - *« Nécessairement, les marchés boursiers sont efficients*
    - Peut se voir comme une proposition relative aux marchés boursiers : il est nécessaire que les marchés soient efficients
    - (par exemple s'il y a absence d'opportunité d'arbitrage : nécessité conditionnelle)

Hasard essentiel (ou ontologique ou « vrai hasard »)

- Ce qui est associé à la connaissance, au discours que l'on peut porter sur l'objet (proposition relative à l'objet)
  - « de dicto » : ce qui est dit (de la chose)
  - « Fama pense que les cours boursiers suivent une marche aléatoire »
  - Croyance de Fama en la vérité de la proposition → de dicto
  - « Il est nécessaire que les marchés boursiers soient efficients » → de dicto
  - De dicto : dimension épistémique
- Opacité des « attitudes propositionnelles » (Quine)
  - Quine **pense que** **la société (du CAC 40) dont le PER est le plus élevé est surévaluée**.
  - S'il s'agit d'une propriété : on considère l'ensemble des 40 sociétés, il est nécessaire que celle dont le PER est le + élevé soit surévaluée : de dicto
  - La société particulière à laquelle se réfère Quine est surévaluée : de re

Hasard essentiel (ou ontologique ou « vrai hasard »)

- Le caractère aléatoire des cours boursiers peut avoir une dimension épistémique ou ontologique
  - *« On sait que les cours boursiers sont aléatoires » : de dicto, relatif à une connaissance*
  - *Les cours boursiers sont aléatoires : propriété intrinsèque des cours boursiers*
- Comment faire la différence entre les deux dimensions ?
  - *Ce qui est épistémique doit faire l'objet d'un « test de réalité »*
  - *Il faut trouver un moyen (statistique) de valider l'hypothèse et donc disposer d'observations (de données)*
  - *Pour un réaliste (le monde existe indépendamment de ce que l'on peut en connaître), ontologie et épistèmê*

Ontologie du hasard : le renversement de Kolmogorov

- L'ingéniosité de Kolmogorov a permis de sortir de l'ambiguïté épistémique
  - *Comment manipuler quelque chose dont l'existence même n'est pas établie ?*
  - *On a commencé au 17e siècle à quantifier le hasard, via la mesure de probabilité, en établir les propriétés importantes sans l'avoir défini*
- La construction de Kolmogorov évite cet écueil.
- Cette construction mathématique est-elle applicable à des données réelles ?
  - *C'est l'objet des tests statistiques et de la détermination d'intervalle de confiance.*

Ontologie du hasard : le grand renversement

- Kolmogorov (suite) : si l'aléatoire existe, on peut déduire logiquement un certain nombre de propriétés des suites aléatoires : loi des grands nombres, théorème central limite, par exemple.
- Confronté à des données (physiques, boursières), on pourra *avec un certain degré de confiance*, considérer que ces données sont issues d'un processus aléatoire.
  - *C'est l'objectif de la statistique mathématique d'établir ce degré de confiance selon les procédures les plus rigoureuses possibles*
  - *Mais la certitude (d'être en présence de l'aléatoire) est pratiquement et logiquement impossible, encore plus en finance, qu'en physique : expérimentation plus limitée en finance, performativité de la connaissance.*

Ontologie du hasard : le grand renversement

- Jusque dans les années 1930, les mathématiciens faisaient du « calcul des probabilités », sans avoir défini l'aléatoire.
- Mais quelle que soit l'approche utilisée (probabilités dites classiques, fréquences empiriques, probabilités subjectives), on retrouvait quelques propriétés :
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *pour deux événements disjoints.*
  - $P(A) + P(A^c) = 1$ *(A^c est le complémentaire de A)*
  - $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ *pour deux événements indépendants.*
- Kolmogorov (1933) change la perspective : si le hasard existe et est mesurable, il doit suivre un certain nombre d'axiomes.

L'axiomatique de Kolmogorov (1933)

- Sert aujourd'hui de référence (à juste titre)
  - *Renverse le paradigme antérieur ayant émergé en 1660*
  - *On ne cherche plus à définir l'aléatoire* ***à partir de*** *son rapport au « réel »*
  - *On pose quelques axiomes simples vérifiés aussi bien dans les approches épistémiques et fréquentiste des probabilités.*
    - Principe d'additivité des probabilités d'événements disjoints et définition formelle de l'indépendance.
    - Kolmogorov ne définit pas ce qu'est une expérience aléatoire
    - Néanmoins, ses explications vont vers l'expérience de pensée, une **idéalisation** du lancer de dés.
- On s'intéresse dans un second temps si la théorie peut décrire correctement des situations « réelles »
  - *Ce sera la problématique de la statistique mathématique*

L'axiomatique de Kolmogorov

Andreï Kolmogorov: un grand mathématicien au coeur d'un siècle tourmenté : https://www.youtube.com/watch?v=73FdVyUUNlY

Andrey Nikolaevich Kolmogorov

(1903, Tambov, Russia—1987 Moscow)

- Measure Theory
- Probability
- Analysis
- Intuitionistic Logic
- Cohomology
- Dynamical Systems
- Hydrodynamics
- Kolmogorov complexity

L'axiomatique de Kolmogorov (1933)

- Commençons par quelques rappels (et compléments)
- On considère un espace fondamental Ω ou « univers » ou « ensemble des issues possibles » ou ensemble des « événements élémentaires »
    - Mais il faut bien comprendre que ceci n'a aucun rapport avec une expérimentation, un « tirage ».
- La première partie du livre de Kolmogorov traite du cas où le cardinal de Ω est fini
    - *On considère une famille de sous-ensembles de Ω, comprenant Ω, stable par réunion et passage au complémentaire :algèbre $\mathcal{F}$*
    - *Pour simplifier $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$: ensemble de tous les sous-ensembles inclus dans Ω*
    - *Ex :* $\Omega = \{0,1\}$. $\mathcal{F} = \{\{0\},\{1\},\{0,1\},\emptyset\}$

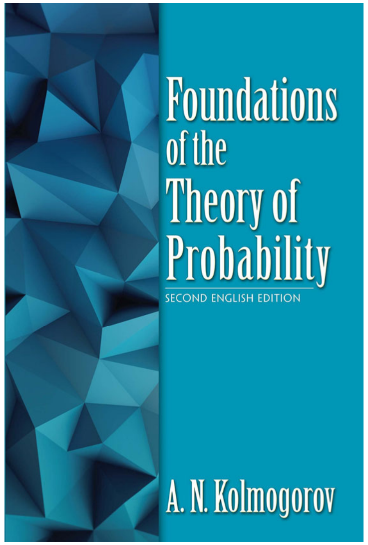
L'axiomatique de Kolmogorov (1933)

- Une probabilité P est une fonction de $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$dans $[0,1]$
    - $A \subset \Omega \rightarrow P(A) \in [0,1]$
- P vérifie les axiomes suivants :
- $P(\Omega) = 1.$
    - Un événement de probabilité 1 peut être interprété comme certain, mais rien dans la théorie n'impose cette interprétation.
    - Exemple, la longueur d'un sous-ensemble de l'intervalle [0,1] (quand elle existe) définit une probabilité…
    - La longueur de l'intervalle [0,1] est 1
    - Il ne viendrait à personne l'idée de dire que l'intervalle [0,1] est certain
- Additivité : $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Et c'est tout… On fait des mathématiques.

Indépendance de deux événements :

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Lien avec des “tirages aléatoires indépendants” ?



“One of the most important problems in the philosophy of the natural sciences is to make precise the premises which would make it possible to regard any given events as independent”.

This question, however, is beyond the scope of this book.

A. Kolmogorov

L’axiomatique de Kolmogorov (1933)

- « variable aléatoire » : une **fonction** mesurable
  - *Ainsi l’application $x \in [0,1] \rightarrow x \in [0,1]$ est une variable aléatoire (c’est l’application identité ...)*
    - On laisse de côté volontairement la question de la définition des ensembles mesurables qui n’a pas d’importance pour cet exemple.
- Les « expériences aléatoires » ne sont jamais définies
  - *Le lancer de dés est une analogie*
  - ***Applicabilité*** *(connexion avec le « monde réel ») ?*
  - *Repose l’analyse de suite infinies, alors qu’on ne dispose jamais que d’un nombre fini d’observations*
  - *Présentation scolaire des probabilités discutable car donne à penser que l’expérience aléatoire est objectivement définie*

L’axiomatique de Kolmogorov (1933)

- Probabilité : « mesure » positive de masse totale égale à un
  - *Exemple : longueur d’intervalles inclus dans* $[0,1]$
  - *La longueur de l’intervalle* $A = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ *est égale à* $0,5$. *La longueur de l’intervalle* $B = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *est égale à* $0,5$
  - $A \cap B = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. *La longueur de* $A \cap B$ *est égale à* $0,25$ *soit le produit des longueurs de* A *et de* B
  - *Il ne viendrait à l’esprit de personne de dire que les deux intervalles* $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ *et* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *sont indépendants… C’est pourtant le cas.*
    - On doit imaginer qu’il existe une « variable aléatoire » U uniformément distribuée dans $[0,1]$ et on dira les événements $\left\{U \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\right\}$ et $\left\{U \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$. Cela oblige à imaginer qu’il existerait un autre espace fondamental Ω' d’événements sur lequel est défini la fonction U.
    - On a mis la poussière sous le tapis : qu’est-ce qu’Ω' ?

Suites aléatoires

- Une suite binaire est de la forme 0100011 …
- Elle peut être déterminée à partir d'une règle de récurrence ou d'une autre règle de construction de manière déterministe
- Elle peut être construite à partir de tirages aléatoires indépendants : on parle de suite aléatoire
- Une suite aléatoire ne pouvant être « construite », il est difficile de la caractériser
- Les tentatives des années 30 (Von Mises, Church) ont été des échecs.

Suites aléatoires

- Outre le paradoxe de Borel, voici quelques difficultés
- N'importe quelle suite binaire finie peut être le début de n'importe quelle suite aléatoire
  - *On ne peut travailler sur un échantillon et inférer sur la population*
  - *Appréhender une suite aléatoire, c'est appréhender l'infini en acte, la suite dans sa totalité et non par un passage à la limite.*
- Presque toutes les suites binaires ressemblent à de l'aléatoire
  - *Concept de nombre normal de Borel*
  - *La loi des grands nombres n'est pas une spécificité de l'aléatoire*
  - *Presque toutes les suites binaires sont telles que les fréquences conditionnelles ont des limites identiques à celles des suites aléatoires*

Suites aléatoires

- Ce n'est que dans la seconde moitié du XXe siècle que l'on est arrivé à trois caractérisations / définitions de suites aléatoires
  - *L'une intuitive pour la finance : absence d'opportunité d'arbitrage pour des stratégies « convenables »*
  - *Les autres liée à la théorie de la complexité algorithmique (maximale) et la théorie de l'information (incompressibilité sans perte)*
- Ce n'est aussi que récemment que l'on a obtenu des exemples de suites aléatoires positivement définies
  - *Omega de Chaitin*
  - *Chaque suite aléatoire étant associée à un langage*
  - *Seuls les premiers éléments d'une suite simple sont calculables*

« Martingales », aléatoire et paris

- Si l'on reprend l'exemple du jeu de pile ou face, l'espérance du gain cumulé est égale à 0 à tout horizon t
- $\left(\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times(-1)\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times(-1)\right)=0$
- La valeur espérée du gain en $T \geq t$ est égale au gain à la date t (car l'espérance des gains postérieurs est nulle).
- Le processus de gain cumulé est une « **martingale** »
  - *Les suites aléatoires sont des martingales (au sens probabiliste du terme)*

« Martingales », aléatoire et paris

- Dans le sens commun, une martingale (au casino) est une stratégie gagnante à tous les coups
  - *Stratégie de doublement : on mise* 0 *avec une probabilité* $\frac{1}{2}$ *de gagner* 1 *et une probabilité* $\frac{1}{2}$ *de « gagner »* -1
  - *Si on gagne au premier coup, on s'arrête, gain net* $= 1$
  - *Si on perd, on double la mise, si on gagne au second coup, on récupère* $2 - 1 = 1$
  - *On continue ainsi jusqu'à gagner, le gain est alors* $2^n - 2^{n-1} - \cdots - 1 = 1$
  - *Mais la mise de fonds n'est pas bornée : s'il y a une contrainte sur les liquidités disponibles du joueur (et qu'il doive s'arrêter), l'espérance de gain est bien nulle.*

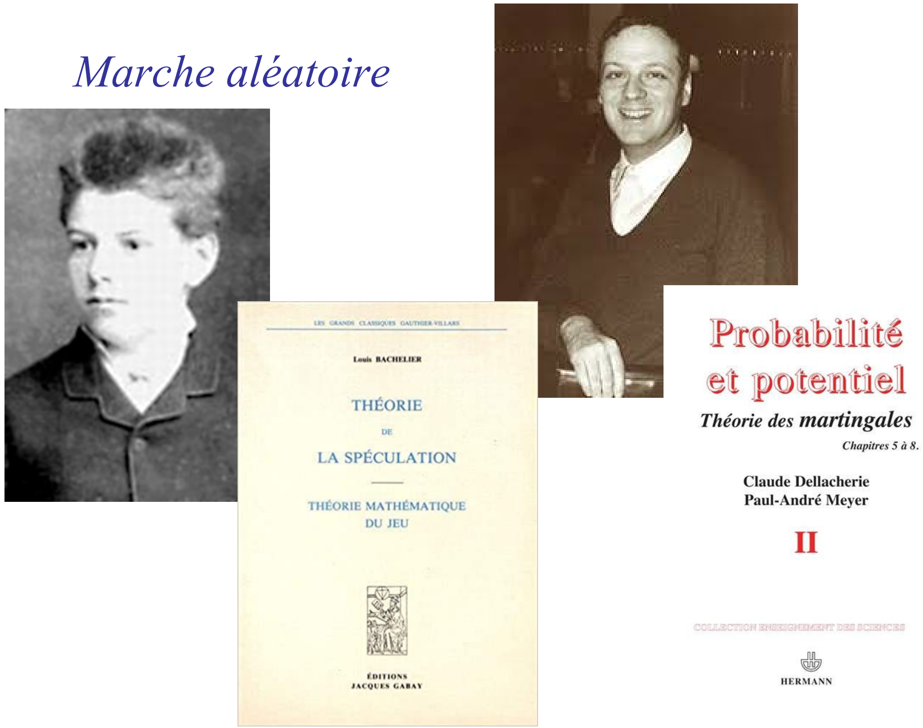
« Martingales », aléatoire et paris

- Une martingale (au sens commun) s'appelle une opportunité d'arbitrage (ou un "fair lunch")
- Schnorr (1971) montre qu'une suite aléatoire ne peut être associée à une « martingale » (au sens commun), c'est-à-dire à une stratégie gagnante « constructible »
  - *Constructible : une stratégie ne peut pas utiliser la connaissance des prix futurs*
- Résultats similaires établis par les mathématiciens sur les dynamiques de prix admissibles en finance
  - *Sous des réserves du type précédent, par exemple limitation a priori du montant des risques pris*

Martingales, aléatoires et paris

- Attention : il existe des suites déterministes qui ressemblent beaucoup à des martingales
- Par exemple, il n'est pas possible de gagner de l'argent en se limitant à des stratégies utilisant des motifs (voir le cours sur l'algorithmic trading)
- Alors qu'il existe d'autres types de stratégies gagnantes à tous les coups.
- On retrouve les problématiques liées aux générateurs pseudo-aléatoires où il est très difficile d'inférer la règle prédictive (et c'est bien l'objectif !)

Marche aléatoire



Induction et « théorie des nombres »

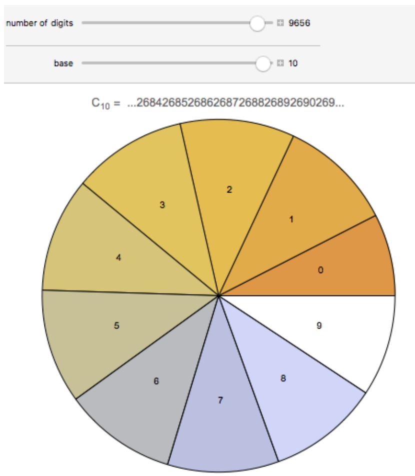
- Rappels : on peut coder une suite passée de hausses et de baisses des cours boursiers $HHBHB$ de manière binaire 11010
- A chaque suite binaire finie, on peut associer un unique nombre entier (et réciproquement)
  - *Par exemple, à* 11010 *correspond* $1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 16 + 8 + 2 = 26$
- Considérons maintenant la partie fractionnaire d'un nombre décimal
  - *Par exemple, de* $3{,}625$ *est* $0{,}625$
  - *On peut écrire* $0{,}625 = 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$

Induction et théorie des nombres

- Constante de Champernowne (1933)
- $C_{10} = 0{,}12345678910111213141516\ldots$
  - C_{10} *égrène, après la virgule, la suite croissante des entiers naturels :* $1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,16, \ldots$
  - *Tout nombre entier apparaît donc dans le développement décimal de* C_{10}
- Si l'on se place en base 2, les entiers consécutifs sont 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000,…
- $C_2 = 0{,}11011100101110111000\ldots$
- La suite C_2 est déterministe : **on peut parfaitement prévoir** la suite des occurrences de 1 et 0

Induction et théorie des nombres

- Fréquence d'apparition des 10 chiffres pour les dix mille première décimales de C_{10} : on est proche de l'équirépartition



Induction et théorie des nombres

- Qu'est ce qu'un « nombre univers » ?
- Considérons la constante de Champernowne C_2
  - *Elle est constituée en concaténant la suite croissante des entiers naturels en base 2*
    - $0,1,10,11,100,101,110,111, \ldots$
    - $C_2 = 0{,}0110111001011101 11 \ldots$
  - *Considérons une suite binaire finie quelconque*
    - Mot de longueur finie dont les caractères sont des 0 et des 1
      - Si la suite commence par le caractère 0, on rajoute un 1 au début de la suite.
    - Une fois que l'on aura passé tous les entiers naturels plus petits que cette suite, elle va apparaître dans l'écriture des décimales de C_2
    - Donc, toutes les suites binaires finies apparaissent dans le développement binaire de C_2

Induction et théorie des nombres

- **<u>Définition</u>** : un nombre univers (disjuntive sequence) est tel que l'on retrouvera toute suite finie de chiffres dans son développement
- **<u>Propriété</u>** : C_2 est un nombre univers.
  - *Nous venons en effet de le vérifier*
- **<u>Remarque</u>** : Comme pour C_{10}, par construction, tous les termes du développement de C_2 sont prédéterminés
- Ce qui va nous intéresser, c'est qu'un nombre univers ne peut pas être associé à une répétition de motifs

David Champernowne

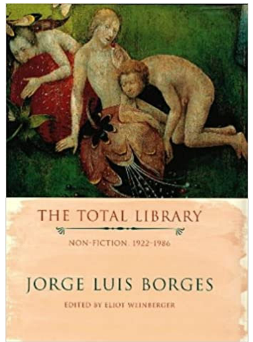
Induction et théorie des nombres

- La bibliothèque de Babel : nouvelle de Jorge Luis Borges
  - *Composée de tous les livres de 410 pages, soit environ* 2×10^{1834097} *livres.*
- Elle contient, par exemple, votre biographie, y compris la description de votre vie future
- C_2 contient la bibliothèque de Babel et bien plus encore.
- On peut en effet coder de manière binaire tous les livres de 410 pages possibles.
- Et cela reste une suite binaire finie

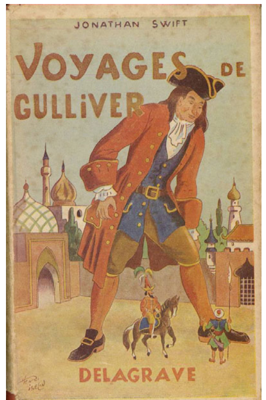
Induction et théorie des nombres

- Remarquons (voir exercice) que les suites binaires aléatoires forment aussi des nombres univers
- Paradoxe du singe savant dû à Emile Borel
  - *Concevons qu'on ait dressé un million de singes à frapper au hasard sur les touches d'une machine à écrire et que, sous la surveillance de contremaîtres illettrés, ces singes dactylographes travaillent avec ardeur dix heures par jour avec un million de machines à écrire de types variés. Les contre-maîtres illettrés rassembleraient les feuilles noircies et les relieraient en volumes. Et au bout d'un an, ces volumes se trouveraient renfermer la copie exacte des livres de toute nature et de toutes langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde.*
    - Borel, É. (1913). La mécanique statique et l'irréversibilité. J. Phys. Theor. Appl.
    - Voir aussi « Le hasard » du même auteur
  - *Borel souhaitait d'ailleurs montrer que la probabilité que ceci se produise était infime. Il aurait fallu beaucoup plus de singes …*

Induction et théorie des nombres



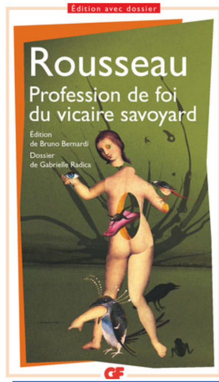
- « La bibliothèque de Babel » (1941) reprend l'idée déjà exprimée dans « la bibliothèque totale (1939) du même auteur et dans « La bibliothèque universelle » (1901) de Kurd Lasswitz
- Dans les Voyages de Gulliver (1721), Jonathan Swift dépeignait un professeur de la grande académie de Lagado essayant de créer une liste complète de toutes les connaissances scientifiques en faisant générer par ses étudiants des chaînes de lettres aléatoires en tournant des manivelles sur un mécanisme !
- Aristote (*de la production et de la destruction*) remarquait déjà que toute tragédie n'était qu'une combinaison de caractères alphabétiques.



Induction et théorie des nombres

- Les controverses à propos de la « connaissance » contenue dans les suites aléatoires ont porté la faible probabilité d’obtenir un texte faisant du sens, même pour une suite de grande taille
  - C’était l’objection de Borel, que l’on retrouve chez Cicéron : « *lorsqu’on admet cette possibilité, je ne comprends pas pourquoi on ne penserait pas aussi que les vingt et une lettres de l’alphabet, en or ou en n’importe quelle matière, reproduites à d’innombrables exemplaires, si on les rassemble en un lieu quelconque pour les jeter ensuite sur le sol, peuvent produire les Annales d’Ennius, telles qu’on puisse en faire une lecture continue ; je doute pour ma part que le hasard puisse réussir à former un seul vers* ».
  - Chez Jean-Jacques Rousseau : « *Cependant si l'on me venoit dire que des caractères d'imprimerie projettés au hazard ont donné l'Eneide toute arrangée, je ne daignerois pas faire un pas pour aller vérifier le mensonge* ».

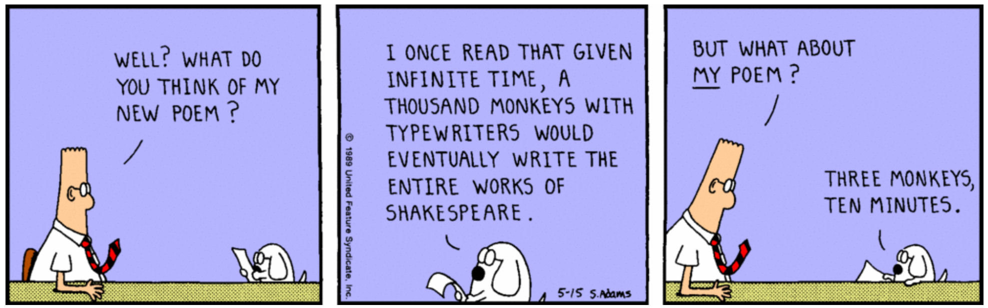
Induction et théorie des nombres

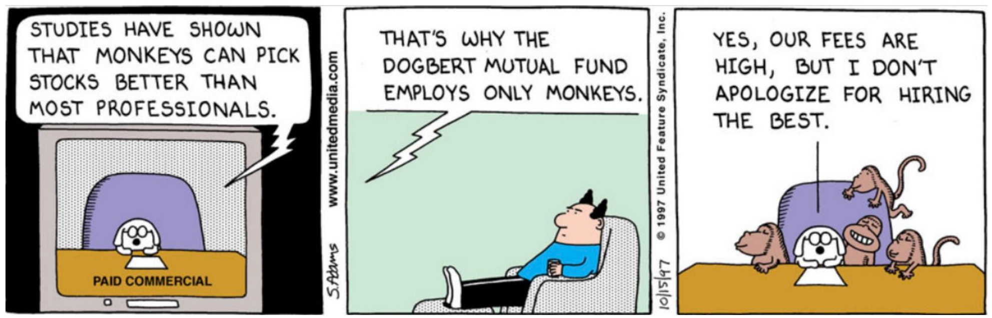


- Jean-Jacques Rousseau poursuit :
- « *Vous oubliez, me dira-t-on, la quantité des jets ; mais de ces jets-là combien faut-il que j’en suppose pour rendre la combinaison vraisemblable ?* »
- On retrouve la même objection chez le physicien Arthur Eddington (1929) :
- “*If I let my fingers wander idly over the keys of a typewriter it might happen that my screed made an intelligible sentence. If an army of monkeys were strumming on typewriters they might write all the books in the British Museum. The chance of their doing so is decidedly more favourable than the chance of the molecules returning to one half of the vessel*”
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Infinite_monkey_theorem#cite_note-16
  - http://eva.almassy.free.fr/le.singe/Page_3x.html

WE'VE ALL HEARD THAT A MILLION MONKEYS BANGING ON A MILLION TYPEWRITERS WILL EVENTUALLY REPRODUCE THE ENTIRE WORKS OF SHAKESPEARE. NOW, THANKS TO THE INTERNET, WE KNOW THIS IS NOT TRUE.

- ROBERT WILENSKY -





Induction et théorie des nombres

- Les controverses à propos de la « connaissance » contenue dans les suites aléatoires ont aussi porté sur la non-intentionnalité et le sens de ce qui est produit
  - *“if a monkey played with a typewriter ... he would produce ... the complete text of Shakespeare. ... the interest of the suggestion lies in the revelation of the mental state of a person who can identify the 'works' of Shakespeare with the series of letters printed on the pages of a book ..”*
  - *Collingwood (1938) affirme qu'on ne peut confondre l'œuvre de Shakespeare avec une simple suite de caractères.*
  - *Pour une position opposée : “If infinitely many monkeys were to type for an infinite long time, one would eventually produce a replica of the text. That replica, we maintain, would be as much an instance.”*
    - Goodman, & Elgin (1986). Interpretation and Identity: Can the Work Survive the World?

Induction et théorie des nombres : Et la prévision boursière ?

- Imaginons un marché boursier totalement prévisible où les hausses et les baisses suivent le développement de C_2
- Imaginons que la suite 1010101011 code les 10 dernières variations des cours boursiers
  - *Et que cette information soit considérée comme suffisante pour la prévision boursière*
  - 10101010110 *et* 10101010111 *seront tous les deux présents dans la suite*
- En d'autres termes, aucune information boursière passée n'est suivie, avec certitude, d'une hausse ou d'une baisse.
    - Remarque : dans un nombre univers, toute sous-suite finie se répète une infinité de fois. On pourra toujours avoir hausse ou baisse après la séquence 1010101011

Induction et théorie des nombres : Et la prévision boursière ?

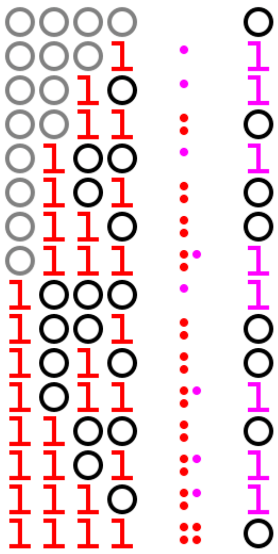
- L'exemple précédent supposait que C_2 codait les hausses et baisses du marché boursier
- Hypothèse évidemment peu réaliste !
- Mais si on tire « au hasard » de manière uniforme un nombre réel dans l'intervalle [0,1], on peut montrer que c'est presque toujours un nombre univers.
- Être un nombre univers est la norme, ne pas l'être est l'exception.
- Cela remet en question, à partir de considérations logiques, la possibilité même d'une prévision certaine.

Induction et théorie des nombres : Et la prévision boursière ?

- Une absence de répétition d'un motif peut aussi donner lieu à des gains certains !
- Supposons que le motif 0110 n'apparaisse jamais.
- Alors si l'on voit apparaître le motif 011, on est certain que le chiffre suivant sera 1 (hausse du marché).
- On peut alors acheter, avec certitude de réaliser un gain
  - *Puisque le marché sera haussier à la date suivante*
- La suite binaire de Thue-Morse est un exemple où il ne peut y avoir trois hausses ou trois baisses consécutives
  - *On va donc vendre après deux hausses consécutives et acheter après deux baisses consécutives*
  - *Voir transparents suivants pour la construction de la suite*

Nombres, algorithmes et prévision boursière

- Construction de la suite de Thue-Morse **substitution** :
  - 0 → 01
  - 1 → 10
- En itérant la substitution :
  - 0 → 01 → 0110 → 01101001 → 0110100110010110 → ⋯
- Autre construction (ci-contre)
  - *On considère le développement en base 2 du nombre entier n*
  - *Si la somme des « digits » est paire, la valeur de la suite est 0, 1 sinon*



Générer la suite de Thue Morse avec Excel (suite)

- Utilisation d'Excel : Construction par substitution
  - $a_0 = 0, b_0 = 1$
  - $a_1 = CONCATENER(a_0; b_0),\ b_1 = CONCATENER(b_0; a_0)$ …
  - $a_n = CONCATENER(a_{n-1}; b_{n-1}),\ b_n = CONCATENER(b_{n-1}; a_{n-1})$

	v_n
0	1
1	10
2	1001
3	10010110
4	1001011001101001
5	10010110011010010110100110010110
6	1001011001101001011010011001011001101001100101101001011001101001

Générer la suite de Thue Morse avec Excel (suite)

- Utilisation d'Excel (suite) : Générer la suite de Thue Morse
  - *On considère l'écriture en base* 2 *de* n *: pour* 18*, il s'agit* **10010** $= \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{0} \times 2^0$
  - *On additionne les termes du développement* $\mathbf{1 + 0 + 0 + 1 + 0 = 2}$
  - *Si cette somme est paire, la valeur de la suite est* 0
  - *Si la somme est impaire, la valeur de la suite est* 1
  - *Ceci s'écrit :* $t_n = s_n[2]$*, où* s_n *est la somme des chiffres de* n*.*

0	0	0
1	1	1
2	10	1
3	11	0
4	100	1
5	101	0
6	110	0
7	111	1
8	1000	1
9	1001	0
10	1010	0
11	1011	1
12	1100	0
13	1101	1
14	1110	1
15	1111	0
16	10000	1
17	10001	0
18	10010	0
19	10011	1
20	10100	0

Générer la suite de Thue Morse avec Excel (suite)

- $s_n = DECBIN(n), n \leq 1024$
  - *Écriture d'un nombre entier* n *en décimal (*$n \leq 511$*)*
    - =TEXTE(DECBIN(ENT(n /512));"#")&DECBIN(MOD(n;512);9)
    - Pour $n \geq 512$
- Extraction des bits
  - *CNUM(STXT(*s_n*;1;1)),CNUM(STXT(*s_n*;2;1)),…*
  - *Comme CNUM(STXT(*s_n*;3;1)) renvoie une valeur vide pour des nombres comme 11 ou 10, on remplace par 0 : =SI(STXT(*s_n*;3;1)="";CNUM(0);CNUM(STXT(*s_n*;3;1)))*
- Calcul de parité
  - *=MOD(SOMME(CNUM(STXT(*s_n*;1;1)): CNUM(STXT(*s_n*;k;1)));2) où* $k = 10$ *si l'on veut obtenir des valeurs de la suite jusqu'au rang* $2^k = 1024$

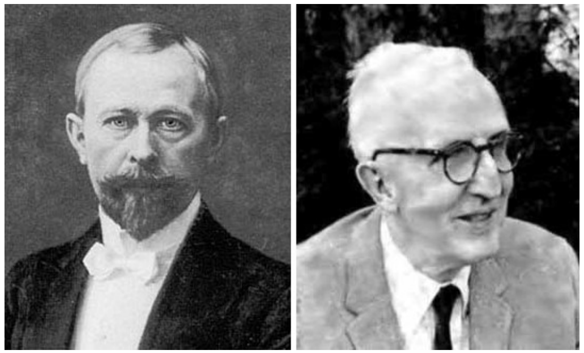
Répétition de motifs et suite de Thue Morse

- **<u>Propriété</u>** : La suite de Thue-Morse ne comporte pas trois fois de suite le même «motif» (pattern)
  - *On dit que la suite est « sans cube »*
  - *Ceci inclut les motifs les plus simples comme* 1 *ou* 0
- Il n'y a pas donc pas d'occurrence des motifs 111 ou 000
- Prévision : $t_{2n} = t_n, t_{2n+1} = 1 - t_n$
- $\Rightarrow$ Si n est la date courante, il est possible de connaître directement les n occurrences suivantes
- Et ainsi de suite : on peut donc faire une prévision à l'infini, la suite est déterministe.

Suite de Thue Morse et stratégie boursière

- On génère les 1024 premières valeurs de la suite
  - *Ceci correspond à environ 4 années de transactions boursières quotidiennes, compte tenu des jours fériés*
  - *On trouve que la proportion de* 1 *est de* $50\% = \frac{1}{2}$, *ce qui est logique puisque la méthode de substitution conserve à chaque étape la parité des* 0 *et des* 1
  - *Mais, il n'y a pas indépendance : dans l'échantillon, on trouve* 171 *occurrences de* 11, 342 *occurrences de* 01, *pour* 512 *occurrences de* 1 *:* $P(H|H) = 0{,}33398438 = \frac{1}{3}$, $P(H|B) = \frac{2}{3}$
    - La fréquence d'apparition d'une hausse après une hausse est d'environ $\frac{1}{3}$, celle d'une hausse après une baisse, environ $\frac{2}{3}$
  - *Il n'y pas d'occurrence de* HHH *ou* BBB, *d'où* $P(B|HH) = 1, P(H|BB) = 1$

L'analyse des motifs (patterns) dynamiques (jeu de pile ou face)



Axel Thue et Marston Morse

David Champernowne (1912-2000), mathématicien, statisticien et économiste, assistant de Keynes, puis professeur à Cambridge et Oxford

Reconnaissance de « motifs » (pattern recognition)

- La constante de Champernowne C_2, outre qu'elle contient tous les motifs a une propriété remarquable
- C'est un « nombre normal » (en base 2) au sens du mathématicien Emile Borel
  - *Les nombres normaux sont associés à des suites qui présentent les mêmes caractéristiques que les « marches aléatoires », associées à des marchés financiers « sans opportunité d'arbitrage ».*
- Le développement en base 2, d'un nombre réel est associé à une suite de 1 (hausse) et de 0 (baisse)
  - *fréquences d'apparition de hausses et des baisses, correspondant aux motifs simples, mais aussi de motifs plus complexes ?*

Reconnaissance de « motifs » (pattern recognition)

- Définition d'un nombre « normal » : fréquences d'apparition de tous les motifs de taille donnée égales
  - *Considérons d'abord les motifs* 1 *et* 0 *(motifs de taille* 1*)*
  - *Les fréquences d'apparition doivent être égales à* $\frac{1}{2}$
  - *C'est le cas de* C_2 *et de la suite de Thue Morse*
  - *Comment définir les fréquences d'apparition pour des suites infinies ?*
  - *On prend les* $n \in \mathbb{N}$ *premiers termes de la suite.*
  - *On calcule la fréquence d'apparition du motif* 1*. Pour un nombre normal, cette fréquence tend vers* $\frac{1}{2}$ *quand* $n \to \infty$.
  - *Les hausses et les baisses sont asymptotiquement aussi fréquentes.*

Reconnaissance de « motifs » (pattern recognition)

- Considérons les motifs de taille 2 : 00, 01, 10, 11
- fréquences d'apparition étant identiques, elles sont de $\frac{1}{4}$
- On peut considérer les fréquences conditionnelles :
  - *Exemple : (limite de)* $\frac{\#\{10\}}{\#\{1\}}$ *, où* $\#\{10\}$ *est le nombre de fois où le motif* 1 *apparaît après un* 0
  - *Correspond à la fréquence d'apparition d'un* 1 *après un* 0
    - $\frac{\#\{10\}}{n} \to \frac{1}{4}, \frac{\#\{1\}}{n} \to \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\#\{10\}}{\#\{1\}} \to \frac{1}{2}$
  - *De même la fréquence d'apparition d'un* 0 *après un* 0 *est de* $\frac{1}{2}$
- Les quatre fréquences conditionnelles sont égales à $\frac{1}{2}$

Reconnaissance de « motifs » (pattern recognition)

- **Nombre normal ⇔ équirépartition des motifs**
- 1011 devrait apparaître autant de fois que 0100.
  - *Si le motif* 1011 *apparaît beaucoup plus souvent que* 1010, *alors hausse, baisse, hausse* (101) *annonce une hausse* (1)
- Il y a $2^4 = 16$ motifs associés à 4 jours de Bourse
  Leur fréquence d'apparition devrait être proche de $\frac{1}{16}$
- Les 8 motifs associés à 3 jours de Bourse (000, 001, …) : leur fréquence devrait être proche de 1/8
- Alors, $P(1|011) = \frac{P(1011)}{P(011)} = \frac{1}{2} = P(0|011)$
- Les fréquences conditionnelles sont toutes égales

Reconnaissance de « motifs » (pattern recognition)

- Une suite binaire est dite **indifférente** si les fréquences d'apparition de 1 (respectivement de 0) sont indépendantes du motif qui précède.
  - $P(1) = P(1|1) = P(1|0) = P(1|11) = P(1|01) = P(1|10) = P(1|00) = P(1|011) \ldots.$
  - *Ville (1939) dans Etude critique de la notion de collectif, chapitre 3, « les suites indifférentes ».*
- Un nombre normal (en base 2) est donc associé à une suite binaire indifférente.
- Les fréquences conditionnelles sont toutes égales à $\frac{1}{2}$
- Comme dans le cas du jeu parfait de pile ou face

L'analyse des motifs (patterns) dynamiques (jeu de pile ou face) : $k -$ uniformité

Fréquence de motifs

Motif	fréquence
0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$
00	$\frac{1}{4}$
01	$\frac{1}{4}$
10	$\frac{1}{4}$
11	$\frac{1}{4}$
000	$\frac{1}{8}$
$\vdots$	$\vdots$
010011	$\frac{1}{2^6}$
$\vdots$	$\vdots$

La k −uniformité est simplement liée à l'égalité à $\frac{1}{2}$ des fréquences conditionnelles

Définition (k-uniformité)

La fréquence d'aparition d'un motif de taille k dans une infinité de lancers d'une pièce non biaisée est égale à $\frac{1}{2^k}$.

Définition (∞-uniformité)

Une suite est <u>∞*-uniforme*</u> *si elle est k-uniforme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$*

L'analyse des motifs (patterns) dynamiques (jeu de pile ou face)

- *Rappel : Un nombre est* ***normal*** *en base 2 si dans son développement (binaire), les fréquences d'apparition des motifs de longueur donnée sont* <u>*égales*</u>
  - Pour un développement en base 2, un nombre réel ∈ [0,1] est une suite de 1 et de 0. $x = 0{,}000110101$ …
  - Fréquence d'apparition des 0 et des 1 tend vers $1/2$
  - Fréquence d'apparition des motifs 01, 10, 00, 11 tend vers $1/4$
- **Normalité en base 2 ⇔ indifférence (Ville) ⇔ ∞ − uniformité**
  - *Un nombre est normal (au sens de Borel) s'il est normal dans toutes les bases*
- Remarque : La loi des grands nombres est toujours vraie pour les nombres normaux.

L'analyse des motifs (patterns) dynamiques (jeu de pile ou face) : une voie sans issue ?

- La suite C_2 est déterministe mais indifférente et ∞ −uniforme car C_2 est normal (en base 2)
- Les fréquences d'apparitions des motifs sont **identiques** à ceux qu'on obtiendrait avec une « **vraie » suite aléatoire**, issue d'un jeu de pile ou face « non biaisé »
- Les fréquences conditionnelles du type $\#\{110\}/\#\{11\}$, où $\#\{110\}$ est le nombre d'occurrences du motif $\{110\}$ dans un échantillon, convergent vers $\frac{1}{2}$ comme pour une « vraie suite aléatoire » où l'on aurait la convergence vers $P(\{110\})/P(\{11\}) = P(0|11) = 1/2$

L'analyse des motifs (patterns) dynamiques

- La normalité d'un nombre au sens de Borel implique l'uniformité de la distribution des motifs
- Les fréquences conditionnelles sont toutes égales à $\frac{1}{2}$
- On peut également montrer que les hausses et les baisses des cours ne sont pas corrélées.
- On note I_t, la variable qui prend la valeur 1 en cas de hausse à la date t et 0 sinon
  - *I_t variable indicatrice de hausse à la date t*
  - *Il y aura hausse à la date t et hausse à la date $t - k$, où $k > 0$ est un retard (lag) si $I_t \times I_{t-k} = 1$*
  - ***On peut vérifier*** *(voir exercice)* ***que le coefficient de corrélation linéaire entre $\mathbf{I_t}$ et $\mathbf{I_{t-k}}$ est nul pour tout $\mathbf{k > 0}$***

L'analyse des motifs (patterns) dynamiques

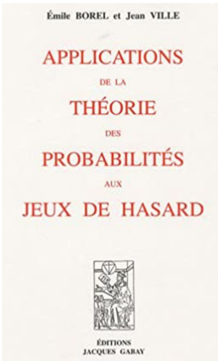
- Hors, la nullité des autocorrélations est aussi une propriété du jeu de pile ou face, donc des suites aléatoires !
- Tests « portemanteau » (Box et Pierce (1970), Ljung et Box (1978))
  - *Utilisés pour savoir si l'on est en présence d'un « bruit blanc fort »*
- La statistique de Ljung et Box (1978) est calculée comme $Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{h}\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$, où $\hat{\rho}_k$ est l'autocorrélation pour un décalage de k
- La suite C_2 est déterministe, ses autocorrélations sont nulles et pourtant elle vérifie de le test de Ljung et Box.

L'analyse des motifs (patterns) dynamiques

Emile Borel

- La normalité d'un nombre au sens de Borel implique l'uniformité de la distribution des motifs
- Les fréquences conditionnelles sont toutes égales à $\frac{1}{2}$
- Hausses et baisses ne sont pas corrélées
- Borel (1909) a montré que la probabilité qu'un nombre réel dans [0,1] soit normal est égale à 1.
- Il existe potentiellement beaucoup de suites déterministes qui se comportent comme des suites aléatoires

Richard von Mises



Jean André Ville

Definition (von Mises, 1919)

A sequence $A \in 2^{\omega}$ is random (*kollektiv*) if every sequence B extracted from A via a reasonable process satisfies the Law of Large Numbers.

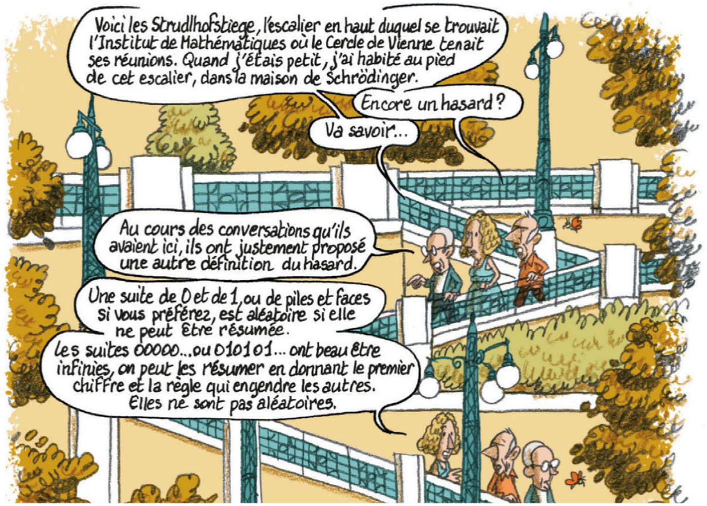
Le concept de « collectif » ou de suite aléatoire considéré par Von Mises (1919), puis Karl Popper (1935) et Alonso Church (1940) nécessite de préciser, ce qu'on entend par « raisonnable ». Voir Ville (1939) dans Etude critique de la notion de collectif, chapitre 3, « les suites indifférentes ». Il faut qu'il n'y ait pas une stratégie « calculable » et gagnante des temps de paris : Auquel cas, la loi des grands nombres ne serait pas vérifiée pour la sous-suite associée.

« Martingales », aléatoire et paris

- On peut montrer que toute suite aléatoire est associée à un nombre normal
  - *Mais il y a une grande différence entre C_2 (nombre normal) et une suite aléatoire.*
  - *Les termes de C_2 sont déterministes : Il y a des stratégies de trading gagnantes à tout coup.*
  - *Si le marché est plutôt du type C_2, on peut « casser » le code du marché*
  - *Pour une suite aléatoire, il n'y a pas de stratégie gagnante*
    - En présence d'aléatoire, aucune technique de machine learning ou algorithmic trading ne peut fonctionner.
    - Si cela semble fonctionner, c'est que la méthode de validation n'a pas bien fonctionné …

Suites aléatoires et théorie des nombres

- Source : La petite Bédéthèque des Savoirs - Le Hasard. Une approche mathématique, Ivar Ekeland et Étienne Lécroart



Suites aléatoires et théorie des nombres

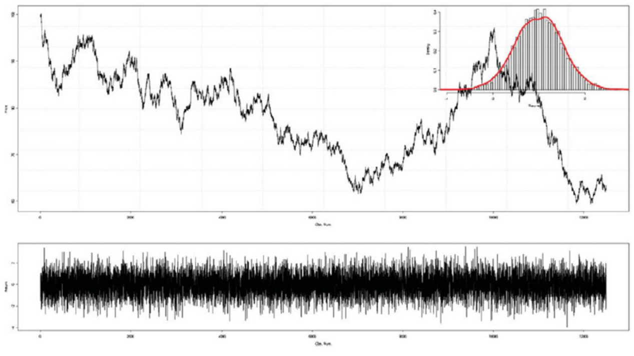


Fig. 5. Pseudo financial time series generated from decimals of π.

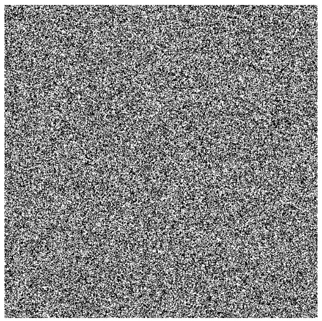
L'article “Estimating the algorithmic complexity of stock markets” de Brandouy, Delahaye & Ma (2015) publié dans Algorithmic Finance, applique le concept de complexité algorithmique de Kolmogorov Chaitin aux séries financières. On remarque que la suite des décimales du nombre π permet de générer ce qui ressemble beaucoup à des séries financières et que la « distribution » des « rentabilités » ainsi générées est gaussienne !

Olivier Brandouy, Professeur de Finance, maintenant conseiller référendaire en service extraordinaire à la Cour des Comptes.

Suites aléatoires et théorie des nombres

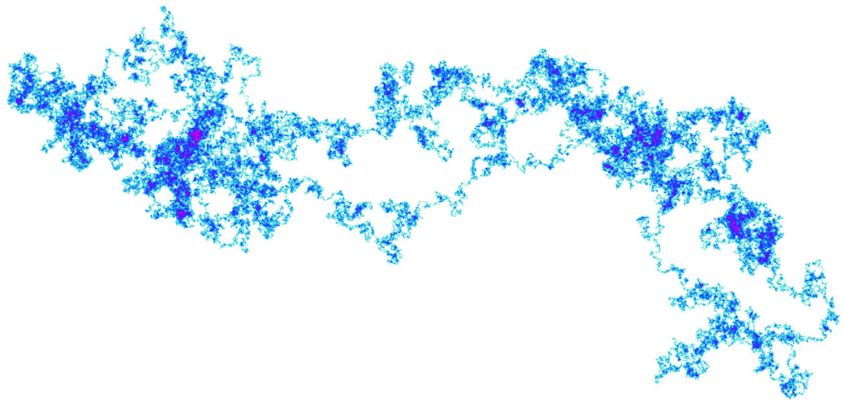
- On ne sait pas si π est un nombre normal, mais c'est vraisemblable.
  - *Dès 1997, on disposait de* 10^{12} *bits de π*
  - *Les 262144 (*512×512 *bits) de π (les* 1 *forme un point noir, les zéro un point blanc)*

Fabrice Bellard



Suites aléatoires et théorie des nombres

- π n'est pas associé à une suite aléatoire (caractère déterministe), mais en présente de nombreux aspects



Chemin construit à partir des 100 premiers millions de bits de π. Pour une représentation avec 100 milliards de bits, voir https://carma.newcastle.edu.au/walks/presentations.html

Suites aléatoires et théorie des nombres

- Chemin construit à partir d'une suite pseudo-aléatoire

Ressemble au graphique précédent. Pour plus de critères de proximité avec une « vraie » marche aléatoire, voir https://carma.newcastle.edu.au/jon/walking.pdf

Suites aléatoires et théorie des nombres

- Le graphique ci-dessous est associé au développement en base 4 de C_4 : 0123101112132021222330313233 …
  - *Si le nombre dans le développement est* 0 *on se dirige vers l'est, si c'est* 1*, on se dirige vers le nord,* 2 *vers l'ouest,* 3 *vers le sud.*

Représentation de la trajectoire pour 600 000 valeurs de C_4 : elle diffère qualitativement des représentations associées à π où à une marche pseudo-aléatoire

Suites aléatoires et théorie des nombres

- Le caractère apparemment aléatoire de π quand on examine son développement en base 2 ou en base 10 est une illusion
  - *Le développement des décimales de π est prévisible*
- Dans la base à pas variable $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \ldots\right]$, π s'écrit 2,2222..
- Dans le développement de Madhava-Gregory-Leibniz, le nombre π s'écrit 111111
- Ceci est cohérent avec le résultat de Nelson Goodman (la seconde énigme de l'induction – le paradoxe vleu) selon lequel la notion de régularité est spécifique à un langage.
  - *Les fréquences d'occurrence de motifs de caractère sont très différentes en anglais et en français pour des « mêmes textes »*

Dans un langage où grue et bleen définissent les couleurs de base, green et blue deviennent irréguliers : green est grue jusqu'à une certaine date et bleen ensuite. Les langages sont des conventions propres à une culture (et pas toujours traduisibles) ; la notion de régularité utilisée dans l'induction n'a pas une portée universelle.

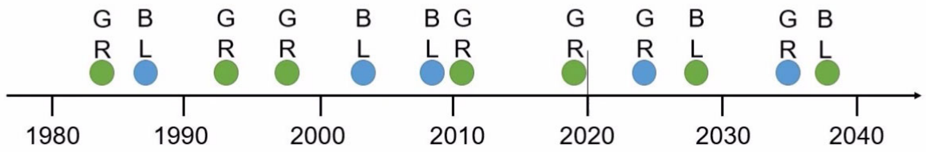
Goodman shows that this is not true for induction. With induction, *content matters*. We can use the predicate "green" but not the predicate "grue". We can only use "projectable predicates".

How do we know whether a predicate is deviant or projectable?

1 "Grue" is defined to refer to an arbitrary time. The predicates we use for induction should not be defined relative to specific times or places.

But consider a language that starts with "grue" and "bleen" as basic predicates. Then we can define "green":

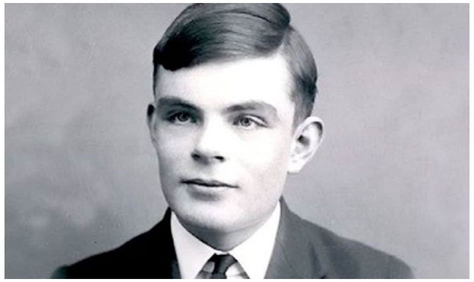
"*x* is green" means: Either (1) *x* is observed before 2020 and is grue, or
(2) *x* is not observed before 2020 and is bleen.



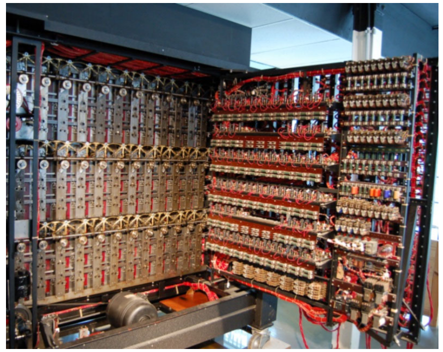
Suites aléatoires et théorie des nombres

- Alan Turing peut être considéré comme l'inventeur de l'ordinateur et le précurseur du *machine learning*
- Il a pu « casser » le code Enigma utilisé pour crypter les messages utilisés par l'armée allemande.
- Il a défini des **nombres calculables** comme pouvant être « approximés » par un nombre fini d'itérations d'un algorithme :
  - *On peut approximer π par la formule de Ramanujan (1910)*

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{1103+26390n}{396^{4n}}}.$$



Alan Turing (voir le biopic Imitation Game)

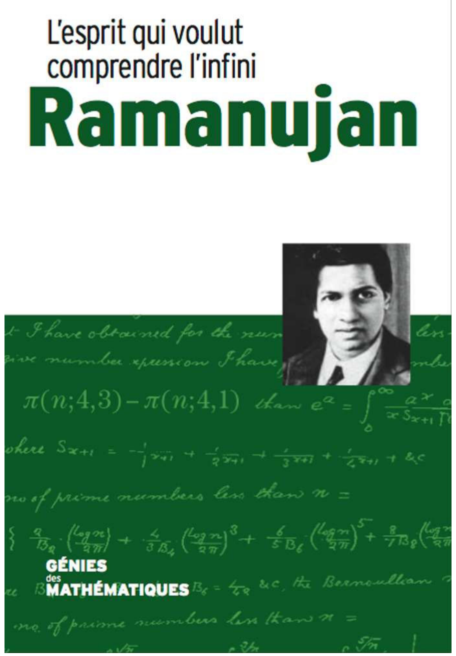


L'ordinateur de Turing à Bletchley Pak

Suites aléatoires et théorie des nombres

- Alan Turing peut être considéré comme l'inventeur de l'ordinateur et le précurseur du *machine learning*
- Turing a « cassé » le code Enigma utilisé pour crypter les messages utilisés par l'armée allemande.
- En informatique et algorithmique, un nombre réel est **calculable** si on peut l'approximer avec le degré de précision souhaité par un programme informatique

Une machine Enigma



Le nombre π est calculable

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{1103+26390n}{396^{4n}}}.$$

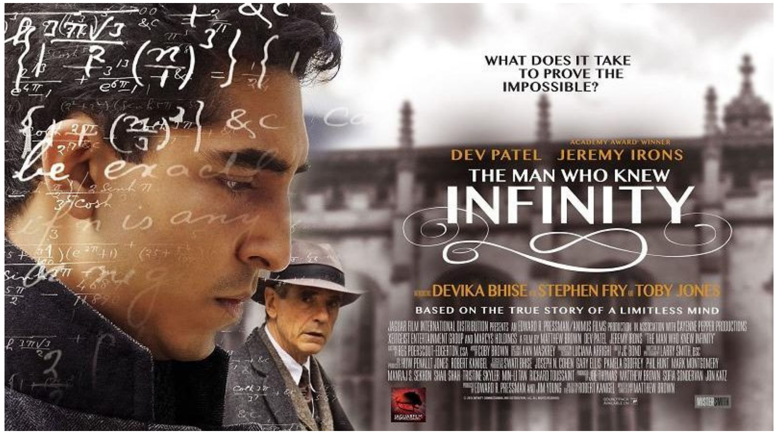
$$n = 0, \pi \approx \frac{9801}{2 \times 1103 \times \sqrt{2}} = 3{,}14159273001$$

La formule de Ramanujan fournit huit décimales supplémentaires de 1/π à chaque incrément de de la série.

Elle n'a été (complètement) démontrée qu'en 1987

Suites aléatoires et théorie des nombres

« L'homme qui défiait l'infini » (biopic sur le génie indien de la théorie des nombres avec Dev Patel)



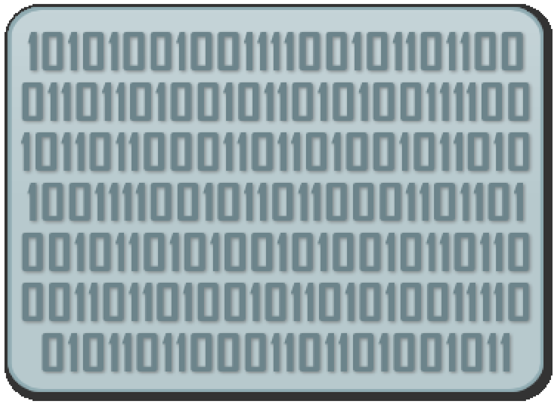
Suites aléatoires et théorie des nombres

- Ce que l'aléatoire n'est pas.
  - *Un nombre peut être normal sans être aléatoire :* C_2 *est normal en base 2*
  - *Un nombre calculable (computable) peut être prévu.*
  - *Une suite régulière peut se « décrire » de manière plus concise qu'elle-même. Elle est compressible, donc non aléatoire*
- Ce qu'une suite aléatoire est :
  - *incompressible, complexe, imprévisible, ne permet pas de gagner de l'argent (martingalité) par des stratégies de pari sur les valeurs suivantes*

Suites aléatoires et théorie des nombres

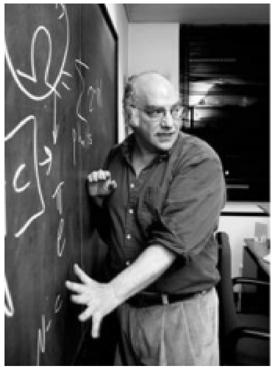
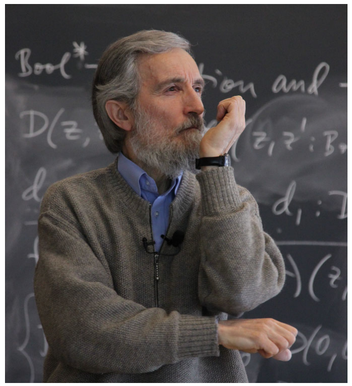
- Une suite (infinie) aléatoire ne possède aucune structure, régularité, ou règle de prédiction identifiable.

Aucun ordinateur, ni aucune technique algorithmique (réseaux de neurones de type deep learning, etc. ne peut prévoir la valeur suivante à partir d'une base d'apprentissage



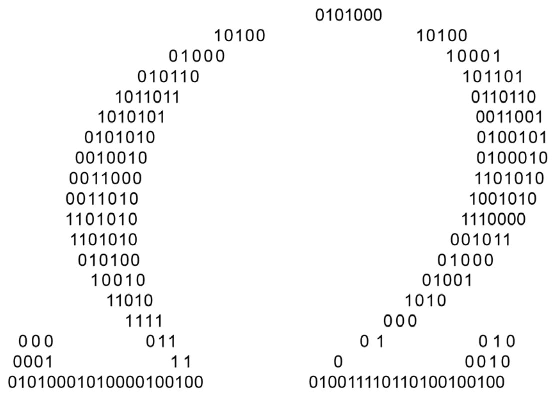
Suites aléatoires et théorie des nombres

- C'est récemment que la notion de suite aléatoire (donc de marche aléatoire) a été bien définie
  - *Martin-Löf (1965), Schnorr (1971), Chaitin*
- Et vient utilement compléter les approches antérieures


Typologie des nombres réels et algorithmique

- Un Ω (de Chaitin) est nombre « bien spécifié », aléatoire et « inaccessible » car **non calculable** (au sens de Turing).



Suites aléatoires et théorie des nombres

- Suite des chiffres (bits) associées à un Ω de Chaitin
  - *Une machine de Turing est un programme écrit dans un langage*
    - https://www.cl.cam.ac.uk/projects/raspberrypi/tutorials/turing-machine/one.html
  - *Problème de l'arrêt : est-ce qu'un programme va tourner en boucle ?*
  - *Théorème : il n'existe pas de programme qui permette de déterminer si un programme quelconque s'arrête (Turing 1936)*
  - *Omega de Chaitin : un développement en base 2 de la probabilité d'arrêt de certains types de programmes*
    - Définition précise (mais compliquée) donnée dans l'article "Computing a glimpse of randomness" Calude, Dinneen, & Shu (2002).
  - *Il y a autant d'Omega de Chaitin que de langages informatiques*

Suites aléatoires et théorie des nombres

- Un Ω de Chaitin est un exemple de suite binaire aléatoire
- C'est l'analogue de tirages obtenus dans un jeu de pile ou face « parfait ».
  - *Résout le problème des suites aléatoires de Von Mises*
- Ω de Chaitin : bien défini mais non calculable (Turing)
  - *Calude, Dinneen, & Shu (2002) Donnent les 64 premiers bits d'un* Ω_U
  - 0000001000000100000110001000011010001111110010111011101000010000
  - *Dans l'article "Exact approximations of omega numbers", Calude et al (2007) donnent les premiers bits de deux autres nombres Ω*
  - 00010 00000 01000 01010 01110 11100 01000 00101 110
  - 00010 00000 01000 01010 01110 11100 00111 11010
- Portée pratique limitée puisque toute combinaison de bits peut être le début d'une suite aléatoire

Suites aléatoires et théorie des nombres

- Théorie algorithmique de l'information : Chaitin-Levin
  - *01010101...est visiblement non aléatoire est descriptible en peu de mots : « répéter 01 à l'infini » (ce qui est l'équivalent d'un programme),*
  - *Une suite aléatoire « 0110100101111001... » n'est descriptible qu'avec le programme : « écrire chaque nombre de suite » qui est un programme aussi long que la suite elle-même.*
  - *Nombre aléatoire s'il n'existe pas d'algorithme plus petit que la taille même du nombre pour le générer.*
- Autres définitions/caractéristiques des suites aléatoires
  - *Ne peuvent être **comprimées** sans perte d'information*
  - *En effet, une information redondante permettrait une prévision*

Suites aléatoires et théorie des nombres

- On ne peut définir l'aléatoire que pour des suites infinies.
- Il est assez facile de montrer que ce l'on considère habituellement comme de l'aléatoire n'en est pas.
  - *Ce qui permet de comprendre que l'aléatoire est difficile à* ***concevoir*** *et à* ***construire***
- Pour des suites finies, on ne peut pas dire avec certitude si elles sont aléatoires
  - *On est confronté à la problématique de l'induction*
  - *Dans le domaine de la finance, on ne peut pas reproduire des expériences à l'infini*
  - *On peut,* ***dans le meilleur des cas****, établir qu'avec un « degré de confiance raisonnable », les données sont en accord avec une théorie*

Suites aléatoires et théorie des nombres

- Kolmogorov avait conscience des difficultés liées à la finitude des données et l'**applicabilité** des probabilités

$$\boxed{\text{Axioms of Probability}} + \boxed{\quad ? \quad} \Longrightarrow \boxed{\text{Applications of Probability}}$$

- Il a mis près de cinquante ans (après sa contribution de 1933) à formuler la problématique de l'aléatoire (randomness) et est à l'origine des travaux sur la ***complexité algorithmique***
- Relie théorie des nombres, algorithmique, théorie de l'information, prévision et probabilités
- Permet d'avoir un regard neuf sur le lien entre randomness, probabilités et stabilité des fréquences
- D'une grande utilité aujourd'hui : **machine learning, cryptographie**

Kolmogorov Complexity

Given a target bitstream B, what is the shortest bitstream C_B that outputs B.

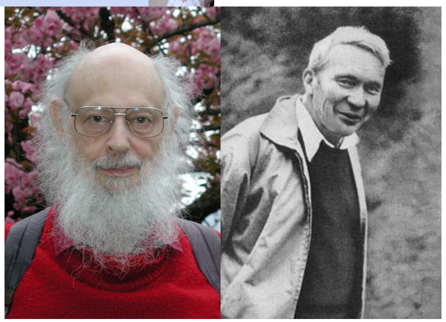
- Definition: The Java-Kolmogorov complexity $K_J(B)$ is the length of the shortest Java program (in bytes) that generates B.
  - There IS an answer. It just might be very hard to find.

Fact #1: Kolmogorov Complexity is effectively independent of language.

- For any bit stream, the Java-Kolmogorov Complexity is no more than a constant factor larger than the Python-Kolmogorov Complexity.
  - Why?

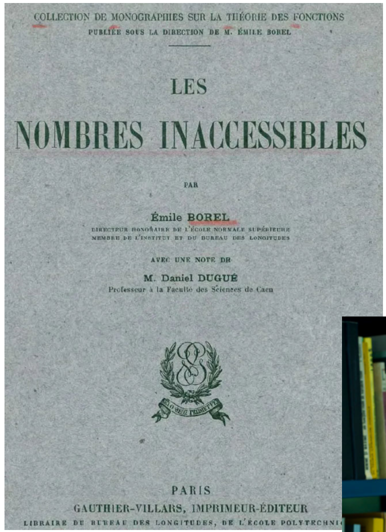
0010000001110000... (C_B: OptimalHP.java, ??? bits) → Java Interpreter → B: HugPlant.bmp 0100001001001101... (8,389,584 bits)

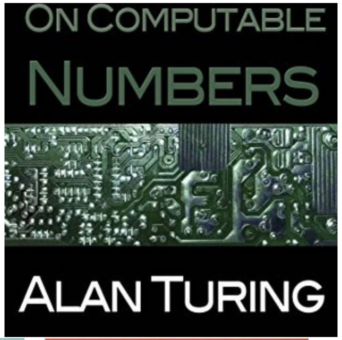
La complexité de Kolmogorov-Solomonoff d'une suite ou complexité algorithmique ou complexité aléatoire est la taille du plus petit algorithme qui engendre cette suite.



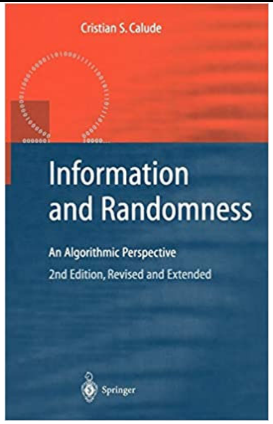
Complexité algorithmique (intuition)

- Considérons la suite :
  - *abababababababababababababababab*
  - *Elle peut se coder de manière courte :"répéter ab 16 fois"*
  - *Faible complexité algorithmique*
- Considérons la suite
  - *4c1j5b2p0cv4w1x8rx2y39umgw5q85s7*
  - *Elle est plus complexe à décrire*
  - *Le niveau le plus élevé de complexité consiste à écrire un programme qui énumère les caractères : 4, puis c, puis l,*
  - *Une suite aléatoire ne peut se définir que de cette manière, sinon on pourrait « prévoir » le prochain caractère.*
  - *Sa complexité algorithmique est maximale*
  - *Les cours boursiers ont une grande complexité algorithmique*



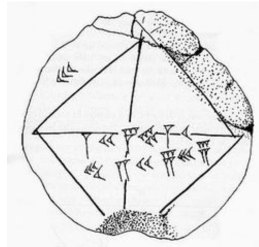


Christian Calude



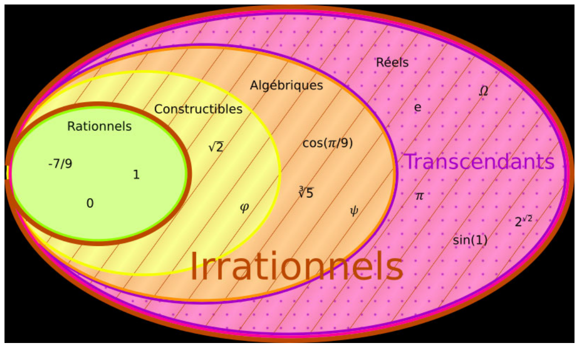
Suites aléatoires et théorie des nombres

Tablette babylonienne sur l'extraction de la racine de 2
On savait déjà résoudre certaines équations du second degré



- ***Nombre algébrique*** *: solution d'une équation polynomiale dont les coefficients sont entiers*
- *Point constructible : traçable à la règle non graduée et au compas (Grèce antique).*
- *Nombre constructible : abscisse d'un point constructible*
- $\sqrt{2}$ *est constructible et algébrique (Pythagore) et irrationnel*

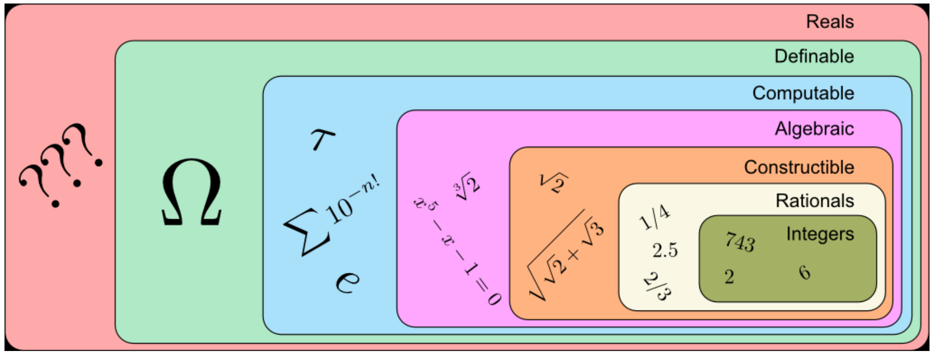
Digression mathématique : typologie des nombres réels et intérêts composés



e est transcendantal. Il apparaît pour la première fois chez Bernoulli, pour la résolution de la **capitalisation en continu**. Un placement d'un euro au taux continu r, rapporte :

$$e^r = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

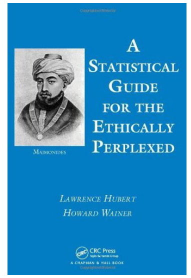
Suites aléatoires et théorie des nombres



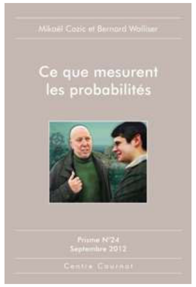
Suites aléatoires et théorie des nombres

- Pour aller plus loin
  - *Laurent Bienvenu, Mathieu Hoyrup : Une brève introduction à la théorie effective de l'aléatoire* *https://hal.inria.fr/inria-00449022*
  - *Bienvenu (2008). Caractérisations de l'aléatoire par les jeux : imprédictibilité et stochasticité (Doctoral dissertation, Royal Holloway).*
    - https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjVqqyI8t3kAhUy4YUKHfQVAlsQFjAAegQIABAC&url=https%3A%2F%2Ftel.archives-ouvertes.fr%2Ftel-00332425v2%2Ffile%2Fslides.pdf&usg=AOvVaw27ofNnd8n7LGOsJBAtuqFw

Finance, probabilités, statistiques et leur bon usage



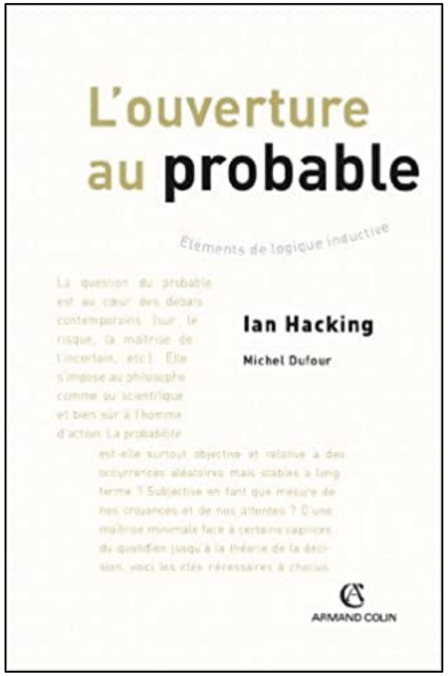
- Quelques références complémentaires sur les problèmes méthodologiques
  - *A Statistical Guide for the Ethically Perplexed*
    - L. Hubert & H. Wainer
    - http://www.crcpress.com/product/isbn/9781439873687
  - Le livre ne concerne pas particulièrement la finance, mais on retrouve les mêmes problèmes méthodologiques dans d'autres domaines où les données sont importantes pour la prise de décision
  - 4.3 : paris et le « spread betting », 5 : corrélation et 6 : prévision
    - http://www.youtube.com/watch?v=6c1WDlTXceM (pour une présentation par un des auteurs)
    - Transparents en accès libre, mais moins en rapport avec le cours
  - *Ce que mesurent les probabilités*
    - M. Cozic & B. Walliser
      - http://www.centre-cournot.org/?wpfb_dl=114
    - Ontologique/objectif/irréductible/fréquentiste vs épistémique/subjectif/radical/révélation



Complément des transparents présentés dans cette partie du cours et des problèmes du TD1 : « L'ouverture au probable : éléments de logique inductive», adaptation en français de l'ouvrage « An introduction to Probability and Inductive Logic ». Contient du cours et des exercices.

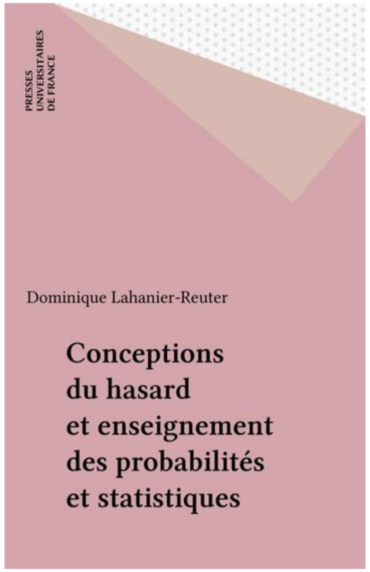
Ce qui peut être lu:
- **Partie 1 : logique**
- **Partie 2 : comment calculer les probabilités**
- **Partie 4 : Les divers types de probabilité**
- **Partie 5 : probabilité épistémique**
- **Partie 6 : probabilité fréquentiste**

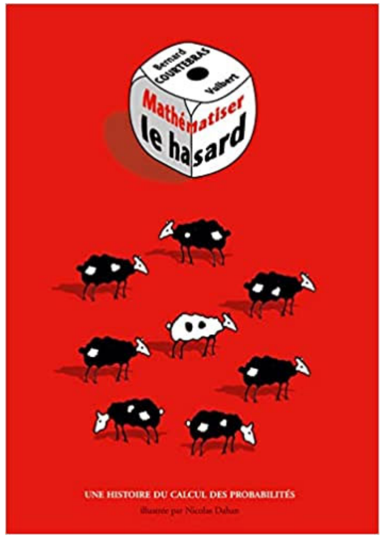
« Aucune maîtrise préalable en logique ou en mathématiques – hormis les quatre opérations – n'est requise pour prendre le risque de la lecture.
Ce livre constitue revient sur des notions vues au Lycée ou dans le cycle L, tout en évitant les redondances.



229

De la difficulté d'enseigner et d'aborder le « calcul des probabilités »



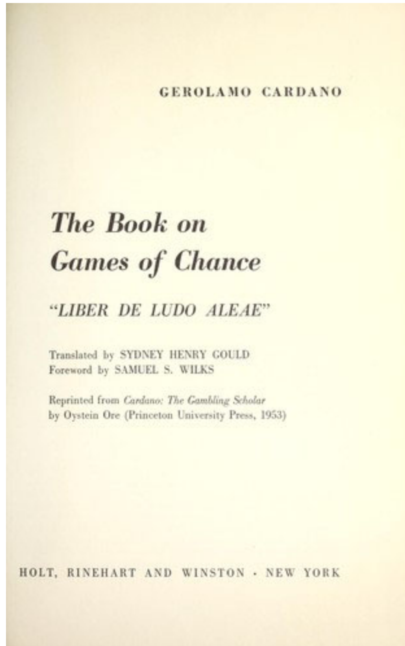


230

L'émergence de l'aléatoire en occident

- Jérôme Cardan mathématicien et joueur de dés invétéré explicite le concept d'équiprobabilité dans le Liber de ludo aleae vers 1564.
  - Le « hasard » apparaît dans les jeux d'argent
- *« Le principe le plus fondamental de tous, dans le jeu, est simplement des conditions égales en ce qui concerne (…) le dé lui-même ».*
- *« Dans la mesure où vous vous écartez de cette égalité, si c'est en faveur du joueur qui vous est opposé, vous êtes fou, et si c'est en votre faveur, vous êtes injuste. »*
  - Cardan s'intéresse à des « dés honnêtes », mais comment déterminer a priori si le dé est non pipé ?

231



GEROLAMO CARDANO

The Book on Games of Chance

"LIBER DE LUDO ALEAE"

Translated by SYDNEY HENRY GOULD
Foreword by SAMUEL S. WILKS

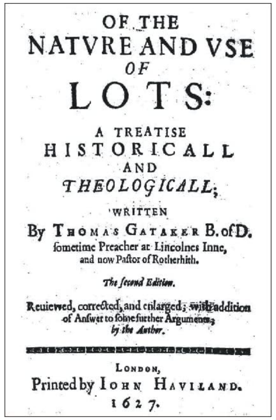
Reprinted from *Cardano: The Gambling Scholar* by Oystein Ore (Princeton University Press, 1953)

HOLT, RINEHART AND WINSTON · NEW YORK

232

L'émergence de l'aléatoire en occident

- Thomas Gataker (1627) est l'un des premiers à analyser les loteries comme résultant du hasard



OF THE
NATVRE AND VSE
OF
LOTS:
A TREATISE
HISTORICALL
AND
THEOLOGICALL;
WRITTEN
By THOMAS GATAKER B. of D.
sometime Preacher at Lincolnes Inne,
and now Pastor of Rotherhith.
The second Edition.
Reviewed, corrected, and enlarged; with addition
of Answer to some further Arguments,
by the Author.
LONDON,
Printed by IOHN HAVILAND.
1627.

Chance and random events

Chance or randomness lies at the heart of a lottery, with random events being the subject matter of lotteries. Because the nature of chance is so significant for our present concerns, this Chapter gives due consideration to clarifying the nature of lots and lotteries and the questions which need to be asked about them. Concerning 'chance' and 'random events' we will consider four things. The name of it. (Chance); The nature of the thing so named. Two distinct Acts concurring in it; and Certain conclusions or aphorisms concerning it.

L'émergence de l'aléatoire en occident

- On peut déceler les prémisses du calcul des probabilités dès le Moyen-Âge
- Au 13e siècle, le "traité des contrats" (Pierre de Jean Olivi) énonce que le **profit est juste** s'il est le fruit du « risque » (doute sur le résultat futur).
  - *« De tels marchands exposent leur argent, ainsi que leurs personnes, puis les marchandises achetées par leur argent, à de nombreux **périls**, et ils ne sont pas certains que les marchandises achetées leur permettront de retrouver leur capital. »*
- *Periculum* : dommage **fortuit** que peut subir un bien
  - *Si à l'origine, le risque est **subi**, dès le 13^{e} siècle, periculum recouvre la notion de risque **délibérément pris***

L'émergence de l'aléatoire en occident

- Décrétale naviganti de Grégoire IX (Liber Extra)
  - *Il ne suffit pas d'assumer le seul risque de mer (foenus nauticum, puis prêt à la grosse aventure) ou invoquer l'incertitude du gain final pour que l'apporteur de capital ait droit à une rémunération (échappe à l'usure)*
- Mais Olivi fait appel aux « mathématiques financières »
  - *« le marchand à qui il a remis ce capital lui a acheté la cause du profit futur de ce capital, **pour un prix équivalent à la probabilité du gain futur telle qu'elle peut être raisonnablement estimée avant que le gain ne se réalise**.*
  - *la **valeur de la probabilité appréciable ou de l'espoir probable de gain** qui pourra être tiré de ce capital (…). **cette probabilité possède une certaine valeur, appréciable par un certain prix temporel, elle peut donc être licitement vendue***

Grégoire IX

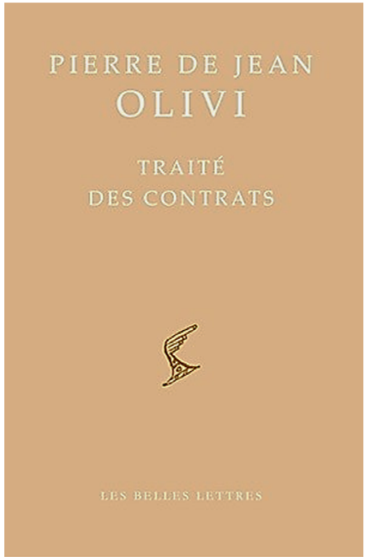
Pierre de Jean Olivi

L'émergence de l'aléatoire en occident

Piron, S. (2007). *Le traitement de l'incertitude commerciale dans la scolastique médiévale*. Electronic Journal for History of Probability and Statistics.

Piron, S. (2004). L'apparition du resicum en Méditerranée occidentale, XIIe-XIIIe siècles.

Piron, S. (1997). Marchands et confesseurs. Le Traité des contrats d'Olivi dans son contexte

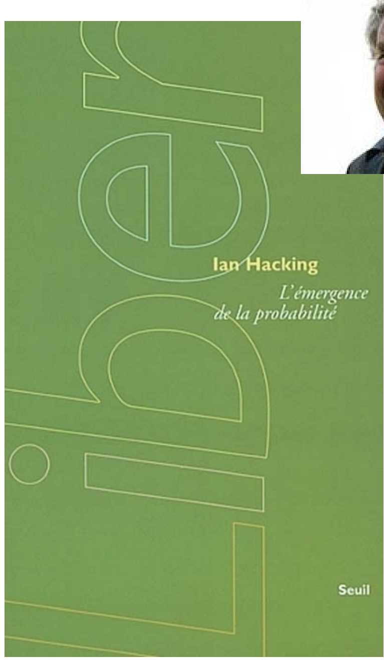


L'émergence de la probabilité

- Mais pour Ian Hacking, « l'archéologue de la probabilité », la « probabilité numérique » émergea vers 1660.
  - *Changement de sens de la notion de **signe**, qui, au lieu de renvoyer à une évidence externe aux choses et aux phénomènes du monde, devient l'expression d'une évidence interne, immanente aux phénomènes*
    - Exemple de signe dans ce contexte : le côté pile ou face sur lequel la pièce retombe
  - *Méthodologie inspirée par Foucault : chapitres II et III, Les mots et les choses*

L'émergence de la probabilité

- Hacking met en avant une dualité fondamentale
  - *Probabilité vue comme degré de croyance (ou raison de croire), épistémique (relative à la connaissance), subjective (mais non pas irrationnelle), logique et relative à des propositions*
    - Peut s'appliquer à des événements singuliers
    - Intègre des a priori sur les probabilités (bayésiannisme)
  - *Probabilité « statistique », « fréquentiste », plus centrée sur l'observation de fréquences aléatoires stables dans le long terme (loi des grands nombres), objective et relative à des événements*
    - Implique l'utilisation de tirages aléatoires indépendants ou expériences aléatoires
    - Pas compatible avec les événements singuliers, la non-stationnarité
    - S'applique bien aux sciences expérimentales



Ian Hacking, « l'archéologue de la probabilité »

L'analyse historique et conceptuelle de Hacking de l'émergence de la probabilité numérique vers 1660 permet d'ordonner les nombreuses et parfois complexes interprétations des probabilités, autour d'une dualité consubstantielle : probabilité épistémique (degré de croyance) et probabilité de type fréquentiste.

Cette dualité est au cœur de la finance. L'économétrie de la finance est marquée par l'approche fréquentiste. Les marchés financiers, eux par la probabilité épistémique, à laquelle ils donnent objectivité et rationalité. En outre, ce sont les dynamiques de prix des marchés financiers (no free lunch) qui permettent de comprendre la notion mathématique complexe d'aléatoirité.

Probabilité et degré de croyance (credence)

- Pendant l'antiquité et jusqu'au moyen âge, le **probable** était lié à un **argument d'autorité** et reflétait un **degré de croyance**
  - *Pour Aristote, « sont probables les opinions qui sont reçues par tous les hommes, ou par la plupart d'entre eux, ou par les sages, et parmi ces derniers, soit par tous, soit par la plupart, soit enfin par les plus notables et les plus illustres »*
- C'est avec la prise de distance par rapport à l'église catholique, que l'argument d'autorité s'estompe et qu'il faut recourir à l'observation des faits, au raisonnement pour établir des degrés de croyance (probabilités épistémiques)

Probabilités subjectives ?

L. Savage

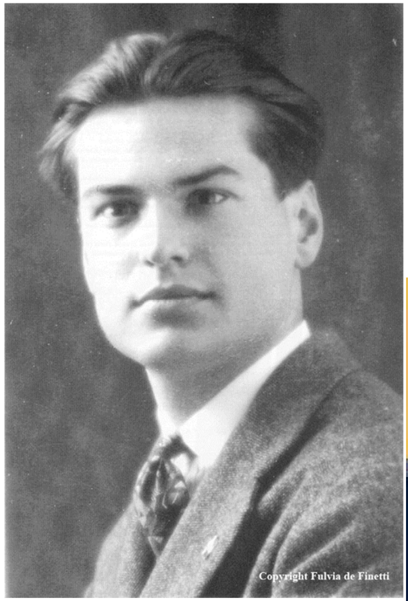
- Degré de croyance dans la survenance d'un événement ou dans la plausibilité d'une hypothèse
  - Evénement de nature unique : **fait singulier**
  - Ne se prête pas à une répétition d'expériences
- Opinion personnelle, dires d'expert, opinion collective ?
  - Probabilité que Emmanuel Macron soit réélu selon vous-même, d'après les sondages, les bookmakers ?
  - Ces degrés de croyance peuvent être réévalués en fonction des interactions avec d'autres agents ou de nouvelles informations
    - Paradoxe d'Aumann, Keynes (1921)
- Les marchés financiers (ou de « paris ») donnent une réalité aux probabilités « subjectives »

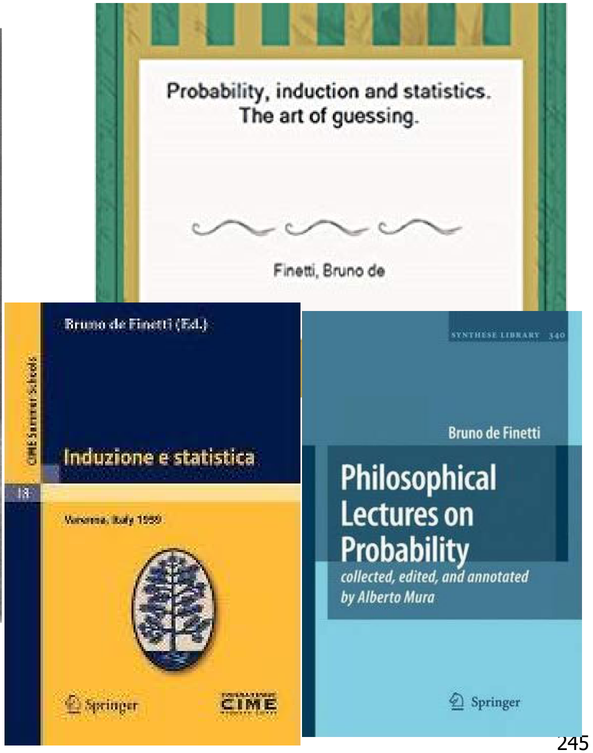
Probabilités « subjectives »

- Le terme subjectif est péjoratif, comparé à objectif.
- On insiste souvent, à tort, sur le caractère plus ou moins arbitraire d'une estimation par un « sujet »
    - Quand bien même il s'agirait d'un expert
  - *par rapport à une approche par répétition d'expériences indépendantes et identiques : approche fréquentiste*
  - *Approche fréquentiste discutable en finance*
- La notion de probabilités subjectives remonte à l'analyse des paris et a un lien étroit avec l'**investissement financier**, notamment l'activité de négoce des produits structurés et des options par les grandes banques

La cohérence des degrés de croyance

- Ramsey (1926), De Finetti (1937) mettent en avant que l'ensemble des « **degrés de croyance** » dans des événements futurs suivent les **axiomes des probabilités**
  - « Supposons qu'un individu soit obligé d'évaluer le prix p pour lequel il serait disposé d'échanger la possession d'une somme quelconque S (positive ou négative) subordonnée à l'arrivée d'un événement donné, E, avec la possession de la somme pS »
  - « Nous dirons par définition que ce nombre p est la mesure du degré de probabilité attribué par l'individu considéré à l'événement E, ou, plus simplement, que p est la probabilité de E (selon l'individu considéré ; cette précision pourra d'ailleurs être sous-entendue s'il n'y a pas d'ambiguïté) ».
    - La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Bruno de Finetti (1937), page 6



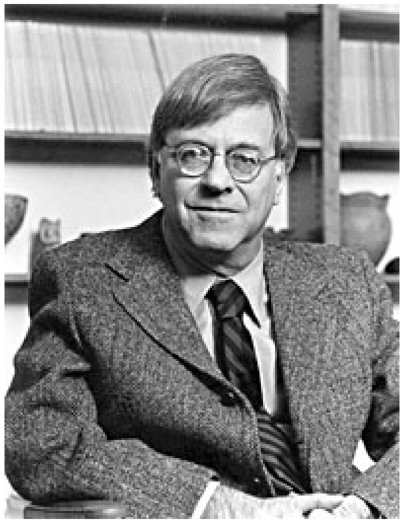


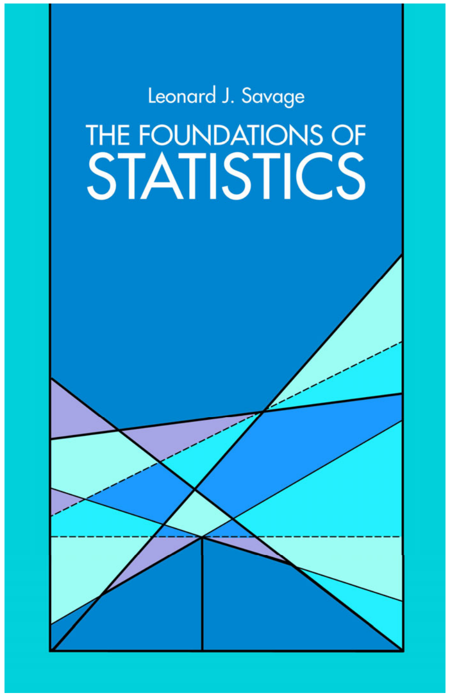
De Finetti et Ramsey, les génies précoces

Frank Ramsey : Truth and probability (1926), General Propositions and Causality (1929)

Un « dutch book » est un système de paris, qui permet des gains certains (arbitrages) car il n'est pas fondé sur un système de probabilités

"These are the laws of probability, which we have proved to be necessarily true of any consistent set of degrees of belief" (1926). Voir TD2 sur l'analyse des systems de paris.





A partir d'axiomes sur le comportement des individus face au risque, comme le « sure thing principle », Savage étend le concept de « probabilité subjective » dans l'évaluation du risque.

Dutch Book et probabilités subjectives

- Pour une banque ou un broker « vendant » et « achetant » des paris, **les prix qui sont pratiqués vérifient les axiomes des probabilités** : Ramsey (1926), de Finetti (1931)
  - *Contexte concurrentiel : même prix à l'achat et à la vente.*
  - *Achat/vente : pari pour/contre*
  - *Exemple : David contre Goliath, qui va gagner ?*
  - *Pari 1 : On reçoit/paye un euro si David gagne/perd. La mise est égale à p*
  - *Pari 2 : On reçoit/paye un euro si Goliath gagne/perd. La mise est égale à q*
  - *Si $p + q < 1$, on joue à la fois David et Goliath et on gagne à coup sûr $1 - (p + q)$.*

Dutch Book et probabilités subjectives

- On peut complexifier le raisonnement précédent
- Supposons qu'outre David et Goliath, nous ayons un combattant supplémentaire Zorglub.
- Il y a d'abord un combat triangulaire dont l'issue est de savoir quels seront les protagonistes du second combat.
- Dans ce cas, on peut parier sur la victoire de Goliath contre David, sachant que Zorglub ne sera pas au second tour.
- Ou la victoire de David contre Goliath, sachant que Zorglub ne sera pas au second tour.
- La somme des primes pour ces paris est égale à la prime du pari selon lequel Zorglub sera éliminé au premier tour

Probabilités subjectives et marchés

- Supposons maintenant qu'il y a un marché de brokers.
- Si deux brokers pratiquent des prix différent pour un même pari, on peut alors les arbitrer.
  - *Acheter le pari au prix bas, vendre le pari au prix élevé*
  - *C'est une opportunité d'arbitrage qui n'existe pas dans un marché sans « frictions », car elle permet des gains illimités*
    - Frictions : restrictions à l'achat et à la vente, des dépôts de garanties à financer, des prix différents à l'achat et à la vente
- Prix des paris : associés à une mesure de probabilité non individuelle, dérivée du marché, observable et « opérable »
  - *Il existe des contrats financiers de transfert de risque associés à ces probabilités*

Quelles approches du hasard en finance ?

- **Approche fréquentiste** des probabilités appliquées aux rentabilités boursières
  - Les principaux éléments de décision (espérance et écart-types des rentabilités, …) peuvent alors être déterminés par des méthodes statistiques standard
  - **Ces quantités sont supposées (relativement) stables au cours du temps : rolling regressions**
- **Approches utilisant les probabilités subjectives issues du marché (market implied ou risque-neutre)**
  - *Couverture des risques possibles*
- Analyse des événements rares et extrêmes
  - *Scénarios prospectifs de stress (tests de résistance ou stress-tests)*

http://www.pourlascience.fr/ewb_pages/a/article-les-des-sont-pipes-23561.php

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- Pascal, Laplace, …
  - *Une nouvelle approche des jeux de «hasard »*
  - *Tirage de dés, jeu à pile ou face*
  - *Angle d'une aiguille lancée en l'air (Buffon)*
  - *Souvent liée à une **égale répartition des chances***
    - Probabilités uniformes
    - Tirage à pile ou face
    - Deux événements : pile et face
    - Probabilité que la pièce tombe sur pile = $\frac{1}{2}$
- Le lancer idéalisé d'une pièce est alors vu comme une « **expérience aléatoire** » reproductible

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- Le lancer idéalisé d'une pièce illustre l'émergence du **contingent**
  - *Il n'y a pas de cause particulière (efficiente) à ce qu'une pièce retombe sur pile ou sur face*
  - *La trop grande complexité à déterminer sur quel côté la pièce doit (nécessairement) tomber ouvre la voie à un ensemble de possibles*
- Le principe de la raison suffisante (déterminante) de Leibniz vu comme un principe logique « *rien n'arrive sans raison* » aboutit (paradoxalement) à **l'égale répartition des chances :** $p = \frac{1}{2}$ ou équiprobabilité
  - *Les forces qui gouvernent le mouvement de la pièce s'appliquent avec une égale intensité pour qu'elle retombe sur pile ou sur face*
  - *Probabilités déterminées a priori par **symétrie***

Pièce ancienne : pile ou croix.

Pièce républicaine : pile ou face.

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- L'égale répartition des chances ouvre la voie à un **calcul (combinatoire) des probabilités** :
  - Laplace (essai, p. 11) : « probabilité : rapport du nombre de cas favorables à celui de tous les cas possibles ».
- Et à la notion d'**indépendance**.
  - *Soit 2 tirages d'une pièce, l'ensemble des possibles est PP, PF, FP, FF. L'égale répartition des chances entre 2 tirages consécutifs implique que chacun des 4 états a une probabilité de* $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, *où* $A, B = P, F$
    - Les probabilités contemporaines (Kolmogorov) définissent d'abord l'indépendance par $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$,
    - On analyse ensuite des suites de tirages pour « savoir » s'ils sont indépendants.

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- L'égale répartition des chances about aussi au concept de **probabilité conditionnelle** :
  - *Probabilité d'obtenir un 3 « sachant » que le résultat est impair* $= \frac{P(\{D=3\}\cap D\in\{1,3,5\})}{P(D\in\{1,3,5\})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$,
  - $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, *probabilité de A sachant B*
- Ce qui nous amène au théorème de Bayes
  - $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
  - $P(A)$ *: probabilité a priori de A (ou probabilité marginale)*
  - *L'observation de B, permet de réviser la probabilité de A,* $P(A|B)$ *est souvent appelée probabilité a posteriori*

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

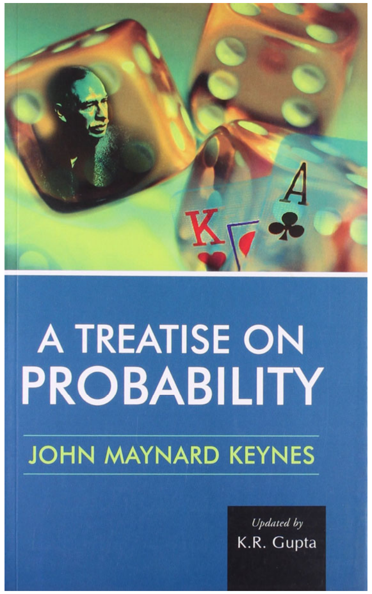
- Supposons maintenant que la pièce puisse être « biaisée »
  - Il est en pratique très difficile de biaiser une pièce, contrairement à un dé : essayez !
  - *L'absence de symétrie a priori ne permet alors pas de conclure à l'équiprobabilité.*
  - *« Il pourroit se faire en effet (& je suis même porté à le croire), que le cas pile croix ne fût pas exactement aussi probable que le cas croix seul ; mais le rapport des probabilités me paroit inappréciable »*
    - d'Alembert Opuscules Mathématiques tome 2, pages 21-22, 1761
  - *Pourtant pour Laplace (essai philosophique sur les probabilités, 1814), « s'il existe dans la pièce, une inégalité qui fasse paraître une des faces plutôt que l'autre, sans que l'on connaisse quelle est la face favorisée par cette inégalité ; la probabilité d'amener croix (pile) au premier coup sera toujours* $\frac{1}{2}$ *».*

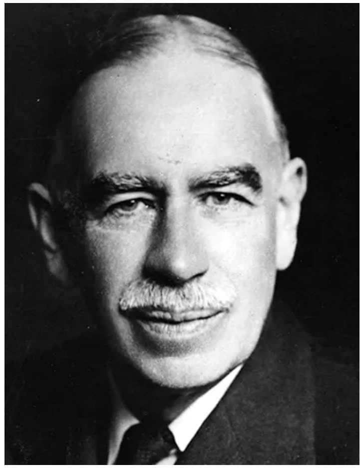
Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- Laplace n'exclut pas que $p \neq \frac{1}{2}$
  - *« Lorsque qu'on ne voit aucune raison qui rende l'une plus probable que l'autre, parce que, quand bien même il y aurait une inégale possibilité entre elles, comme nous ignorons de quel côté est la plus grande, cette incertitude nous fait regarder l'une comme aussi probable que l'autre»*
    - « Mémoire sur la probabilité des causes par les événements » (1774), page 61, où Laplace analyse les jeux de dés pipés.
- Laplace reprend le principe de la raison non suffisante de Bernoulli
  - *"In the absence of any prior knowledge, we should assume that the* ***events*** *have equal probability"*
    - Ars Conjectandi (The Art of Conjecturing), J. Bernoulli, 1713

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- Principe d'indifférence : Keynes (1921) dans son traité des probabilités renomme/reformule le principe de la raison non suffisante :
  - *« S'il n'y a aucune raison connue pour attribuer à notre sujet une alternative plutôt qu'une autre, parmi plusieurs alternatives possibles, alors, ces alternatives ont une probabilité égale relativement à notre connaissance.*
  - *Des probabilités égales doivent donc être assignées à chacun des différents arguments, s'il n'y a pas de raison de leur assigner des probabilités inégales ».*
- Il est à noter que Keynes est avant tout un critique du principe d'indifférence.





Ouvrage foisonnant et intéressant, mais difficile à appréhender. Une lecture critique en est faite par C.P. Robert (2011) : Reading Keynes' Treatise on Probability. International Statistical Review ; elle nécessite néanmoins de (très) bonnes connaissances en probabilités.

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- Bayes et Laplace abordent la question de tirages à pile ou face sous un angle nouveau.
  - Par tirage à pile ou face, on entend expérience aléatoire où il n'y a que deux résultats possibles, 0 ou 1, hausse ou baisse des cours
  - *On ne connait toujours pas la probabilité p …*
  - *On procède à n tirages et on tombe $k \leq n$ sur pile*
  - *Que peut-on en déduire sur la valeur inconnue de p ?*
  - *En l'absence d'information a priori sur la valeur de p, Bayes et Laplace supposent que p suit une* ***loi de probabilité uniforme*** *sur l'intervalle* $]0,1[$
  - *Ils montrent que la distribution de p sachant k est une loi dite Beta.*
  - *On peut alors construire des intervalles de confiance pour p*

LII. *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr.* Bayes, *F. R. S. communicated by Mr.* Price, *in a Letter to* John Canton, *A. M. F. R. S.*

Références à l'essai sur la manière de résoudre un problème dans la doctrine des risques :
https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1763.0053
https://www.jstor.org/stable/105741?seq=1#metadata_info_tab_contents

Référence sur la biographie de Thomas Bayes:
https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/bayespic.htm

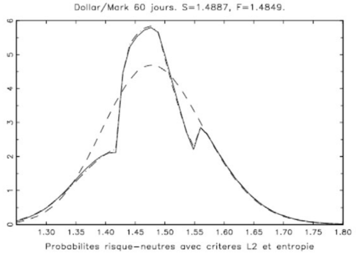
Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- Probabilités a priori et approches bayésiennes.
  - *Principe d'indifférence et choix d'une distribution a priori uniforme pour la probabilité p (Bayes, Laplace) : premiers jalons*
  - *Dans certains contextes, le choix d'une distribution a priori est guidé par des considérations logiques (symétrie)*
    - Choisir une distribution uniforme pour p dans le cas du lancer d'une pièce n'est pas très logique…
- La distribution uniforme : nécessité logique ?
  - *Deux joueurs peuvent-ils s'accorder sur un jeu de pile ou face avec des mises différentes de 2 contre 1 ?*
    - Non, car toute distribution de probabilité « raisonnable » sur p dans ce contexte doit avoir une espérance égale à $\frac{1}{2}$
  - *Si l'un des joueurs a une information privilégiée sur l'asymétrie de la pièce, cette information est révélée par le pari (Aumann)*

Des probabilités classiques au principe d’indifférence

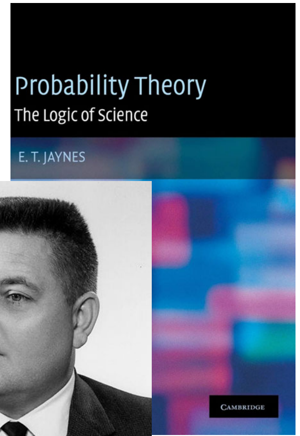
- La distribution uniforme est-elle une nécessité logique ?
  - *En théorie de l’information, l’équiprobabilité correspond à une entropie $\sum_i p_i \times ln(p_i)$ maximale*
    - Plus précisément, si on maximise $\sum_{i=1}^{n} \sum_i p_i \times ln(p_i)$ sous les contraintes, $p_1, \dots, p_n \geq 0$ et $p_1 + \cdots + p_n = 1$, on obtient : $p_1 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$
    - Approche défendue notamment par **Jaynes** à partir des années 1950
      - Jaynes a aussi contribué à éclairer (sinon à résoudre) le paradoxe de Bertrand en cherchant à « bien poser » le problème du « tirage au hasard ».
    - Cette approche est parfois présentée comme une extension du principe d’indifférence : « **bayésianisme objectif** ».
  - *On maximise $\sum_i p_i \times ln(p_i)$ en intégrant des contraintes liées à des observations de prix d’actifs financiers*
    - Jackwerth & Rubinstein (1996). Recovering probability distributions from option prices. The Journal of Finance.
    - Buchen & Kelly (1996). The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices. Journal of Financial and Quantitative Analysis.

Des probabilités classiques au principe d’indifférence



Fonction de densité des taux de change (à un horizon de 60 jours), compatibles avec les primes d’option de change :
Maximisation de l’entropie et fonction de densité a priori log-normale (modèle de Black et Scholes),

Multimodal Implied Risk-Neutral Densities, Frachot et al (1999)



Edwin Jaynes considère que deux agents rationnels ayant la même information devraient aboutir aux mêmes lois de probabilités (par ex. sur les prix des actifs financiers).

Les limites de l’équiprobabilité : doit-on supposer le taux de change \$/€ ou €/\$ équiprobable ?

- Considérons le résultat d’une entreprise qui exporte pour 100 \$ aux US.
- On note e_t le nombre de \$ pour acheter un €.
  - *Aujourd’hui,* $e_0 \approx 1{,}17\$$
- Le résultat R en € est donné par : $R = 100/e_1$.
  - *Où* e_1 *est le taux de change « pour l’année à venir »*
  - *On suppose que* e_1 *peut varier de* $\alpha = \pm 10\%$ *autour de* e_0 *de manière uniforme*
    - Hypothèse discutable d’un point de vue statistique et économique, choisie ici par commodité de calcul
  - *Exercice Thème 1 :*
    - Calculer l’espérance du taux de change futur
    - Calculer l’espérance du résultat futur. Discuter ce résultat.

Les limites de l’équiprobabilité

- On vient de voir à propos des taux de change que choisir une probabilité uniforme pour e ou $\frac{1}{e}$ est affaire de convention

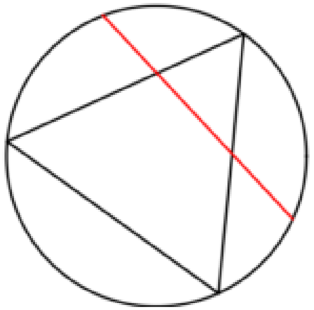
REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE PROBABILITÉ;

Par M. Émile Borel.

1. On sait que les questions de probabilité où interviennent des variables continues ne peuvent acquérir de sens qu’en vertu de *conventions* précises. Comme le fait observer Joseph Bertrand, si une variable x est assujettie à rester comprise entre 0 et 1, son carré x^2 est assujetti aux mêmes conditions et la probabilité pour que x soit compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ est égale à la probabilité pour que x^2 soit compris entre 0 et $\frac{1}{4}$. Cela serait absurde (1) si l’on supposait à chacune de ces probabilités une valeur *intrinsèque*, c’est-à-dire définie objectivement d’une manière indépendante de toute convention.

(1) Voir Poincaré, *Calcul des probabilités*, 8e Leçon.

Paradoxe de Bertrand : comment tirer une corde au hasard ?

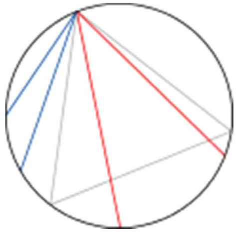


- On considère un cercle. On se demande comment tirer une corde (en rouge) au hasard ?
  - Rappels de géométrie : étant donné un triangle, il existe un unique cercle passant par les sommets du triangle, dit cercle circonscrit.
  - Le centre de ce cercle est le point de concourance des médiatrices du triangle.
  - si r est le rayon du cercle la longueur des côtés du triangle équilatéral est égale à $r\sqrt{3}$
- Quelle est la probabilité que la corde rouge, « tirée au hasard » soit plus longue qu'un côté du triangle ?

Joseph Bertrand

Paradoxe de Bertrand : comment tirer une corde au hasard ?

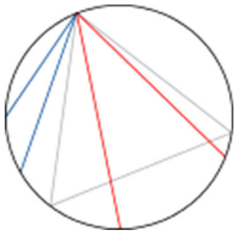
- 3 procédures possibles pour choisir une corde au hasard : extrémités aléatoires, rayon aléatoire, milieu aléatoire
  - *Extrémités aléatoires : on choisit un premier point sur le cercle en tirant de manière uniforme (la mesure d'')un angle (par rapport à un axe de référence) dans* $[0°, 360°]$*. On fait de même pour obtenir un second point.*
  - *On trace le triangle équilatéral de sommet le premier point (voir dessin)*
  - *Les cordes à l'intérieur du triangle (en rouge) sont plus longues que le côté du triangle. Leur extrémité est située sur l'arc de cercle opposé au sommet. Sa longueur est le tiers de la circonférence du cercle.*



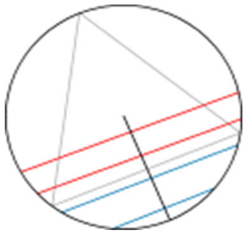
Extrémités aléatoires :
On déduit de l'analyse géométrique que la probabilité que la corde soit plus longue qu'un côté probabilité 1/3

Paradoxe de Bertrand : comment tirer une corde au hasard ?

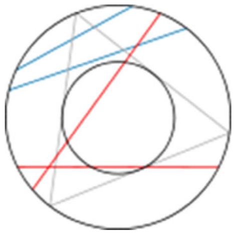
- 3 méthodes possibles pour choisir la corde : extrémités aléatoires, rayon aléatoire, milieu aléatoire
  - *En rouge, cordes plus longues que la longueur du côté du triangle, en bleu cordes plus courtes*
  - *Dans chaque cas, la loi uniforme est utilisée, mais pas de la même manière*



Extrémités aléatoires
probabilité 1/3



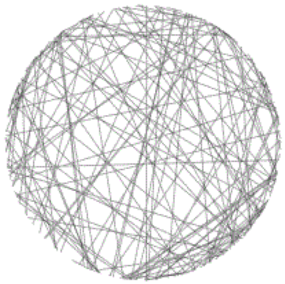
Rayon aléatoire
probabilité 1/2



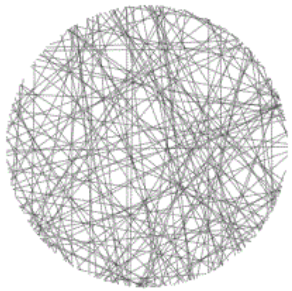
Milieu aléatoire
probabilité 1/4

Principe et formalisation des calculs : https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Bertrand Pour un tuto fait par des étudiants du MIT : http://web.mit.edu/tee/www/bertrand/problem.html Pour des liens vers du code Python, R, Matlab https://hpaulkeeler.com/the-bertrand-paradox/

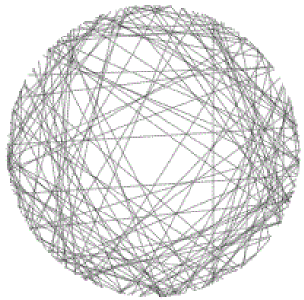
Paradoxe de Bertrand : comment tirer une corde au hasard ?



Extrémités aléatoires
150 simulations



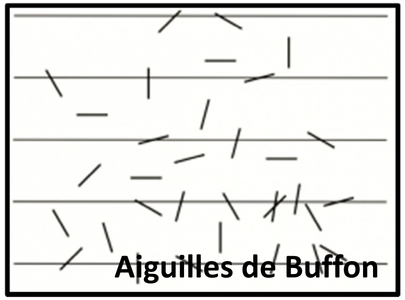
Rayon aléatoire
150 simulations



Milieu aléatoire
150 simulations

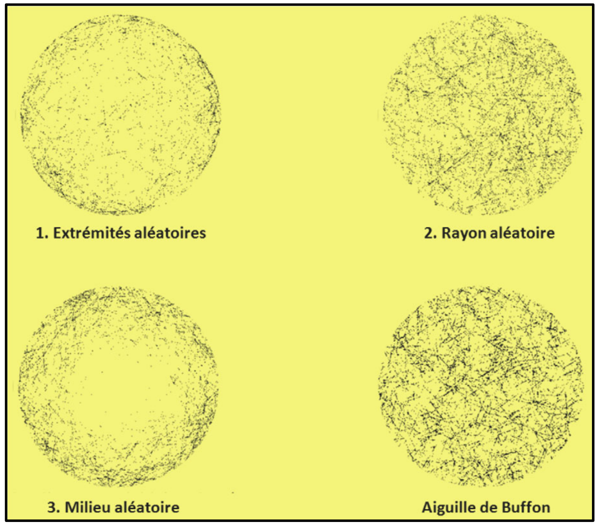
Paradoxe de Bertrand : comment tirer une corde au hasard ?

- L'aiguille de Buffon ?



- *On lance un grand nombre de fois une aiguille sur un parquet, composé de planches parallèles de même largeur.*
- *On comptabilise le nombre de fois où l'aiguille tombe à cheval sur une rainure du parquet par rapport au nombre total de lancers.*
  - La proportion d'aiguilles à cheval sur deux lames tend vers $2/\pi$.
  - Première illustration de calculs par simulation (méthode de Monte Carlo)

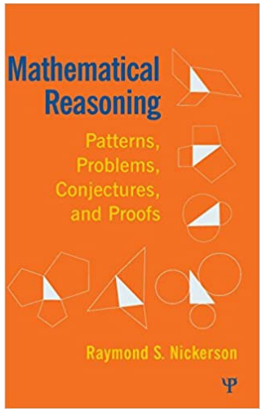
Paradoxe de Bertrand plus aiguille de Buffon : comment tirer une corde au hasard ?

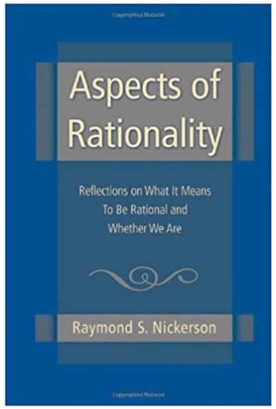


On rajoute une quatrième méthode pour tirer des cordes « au hasard », celle utilisée par Buffon. Position du centre de l'aiguille suivant une loi uniforme, angle de l'aiguille suivant une loi uniforme.

Paradoxe de Bertrand et psychologie cognitive

- Comment nos capacités cognitives nous permettent d'appréhender le « tirage au hasard » des cordes





Nickerson, R. (2005). Bertrand's chord, Buffon's needle, and the concept of randomness. Thinking & reasoning

Paradoxe de Bertrand et psychologie cognitive

- Enquête 1 auprès de 35 personnes ayant une qualification universitaire en probabilités : 30% répondent 1/3 , 30% répondent ½, personne n'a répondu qu'il pouvait y avoir plusieurs réponses possibles.
- Enquête 2 : 75 universitaires ayant du temps pour répondre par écrit. Très peu ont noté l'ambiguïté de la question ou la possibilité de réponses multiples. 1/3 domine largement ½
- Enquête 3 : On demande de **dessiner** des cordes au hasard. Les cordes longues sont beaucoup plus fréquentes ; il n'y a pas indépendance entre les longueurs consécutives. Les cordes sont placées pour combler les « blancs ».

- *The prevailing opinion among researchers appears to be that people are not very good at randomisation tasks*
  - Faulty conceptions of randomness, attention, information processing

Paradoxe de Bertrand plus aiguille de Buffon : comment tirer une corde au hasard ?

- TD : Questions simples (visuelles)
  - *Est-ce que le problème de lancer d'aiguille de Buffon se ramène à l'un des cas étudiés par Bertrand ?*
  - *Que repère-t-on en regardant les trois simulations précédentes (à propos de la répartition des cordes) ?*
  - *Est-ce que l'on peut reformuler le problème de « simulation » de corde de manière plus naturelle ?*
    - Et à quelle solution cela correspond-il ? (Emile Borel)
- TD : Questions plus techniques (géométrie)
  - *Comment formuler « tirer des milieux » au hasard en termes de position de la corde sur un rayon (géométrie) ?*
  - *Comment formuler tirer des « extrémités au hasard » en termes de position de la corde par rapport à un rayon ?*

Le paradoxe de Bertrand et le principe d'indifférence

- Le paradoxe de Bertrand et principe d'indifférence
  - *Choisir une corde « au hasard » peut être fait de différentes manières, toutes ayant un sens*
  - *On peut reformuler le problème de manière unifiée en termes de position du milieu d'une corde sur un rayon du cercle*
  - *Et se rendre compte que l'on fait tantôt des hypothèses de loi uniforme sur des angles, des distances ou des coordonnées cartésiennes*
  - *Loi uniforme : mais sur quels paramètres du modèle ?*
- Utilité de cette analyse
  - *Comprendre les différentes approches cognitives du hasard*
  - *Bien formuler les méthodes de simulation aléatoire (rentabilités, compositions de portefeuilles, …)*

Des probabilités classiques au principe d'indifférence

- *Références complémentaires sur l'origine du principe d'indifférence et les interprétations des probabilités*
  - En bleu, celles qui nécessitent des bonnes connaissances en mathématiques

- Cozic, & Drouet (2009). Interpréter les probabilités. *Pour la science*.
- Gerville-Réache (2017). A la recherche des lois de probabilités de D'Alembert.
- Gerville-Réache, & Rochel (2017). D'Alembert : controverses et probabilités.
- Henry (2009). Émergence de la probabilité et enseignement. Définition classique, approche fréquentiste et modélisation.
- Robert (2011). Reading Keynes' Treatise on Probability. *International Statistical Review*.
- Martin, Frazier & Robert (2020). Computing Bayes: Bayesian Computation from 1763 to the 21st Century
- Borel, É. (1905). Remarques sur certaines questions de probabilité. *Bulletin de la Société mathématique de France*.

Hasard calculable et non calculable

- Différence entre jeu de dés et évolution des cours boursiers ?
- Pour le jeu de dés, on connaît a priori la loi de probabilité d'apparition des numéros
  - *De par la nature même du jeu*
  - *Probabilité uniforme*
  - *On parle de « probabilités classiques »*
- On ne connaît pas a priori les lois de probabilité des rentabilités boursières

Hasard calculable et non calculable

- Distinction entre risque et incertain
  - *Frank Knight*
- Risque : calculable (utilisation des probabilités)
- Incertain : risque non « calculable »
  - *Limites cognitives, rationalité limitée*
  - *We also know there are* ***known unknowns****; that is to say we know there are some things we do not know. But there are also* ***unknown unknowns*** *- the ones we don't know we don't know.*

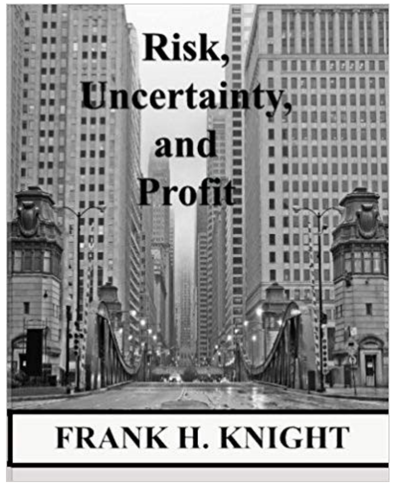
- D. Rumsfeld à propos de la politique américaine en Irak
- en.wikipedia.org/wiki/There_are_known_knowns

Hasard calculable et non calculable

- Connaissance ou pas des lois de probabilité
  - http://fr.reuters.com/article/frEuroRpt/idFRL6N0Q415T20140729?pageNumber=2&virtualBrandChannel=0
- Annonce des résultats trimestriels 2014 de Deutsche Bank
  - *"Il y a une incertitude de taille sur le calendrier et sur l'ampleur de l'impact potentiel. Par conséquent, le coût réel des frais de justice sur le bilan de l'exercice 2014 est* ***imprévisible****" a toutefois prévenu la banque.*
- Ici, la banque se refuse à communiquer une valeur moyenne ou un intervalle de confiance des coûts juridiques
  - *Peu d'éléments de comparaison, grande variabilité des sanctions, durcissement ou pas de la politique judiciaire aux États-Unis*

Hasard calculable et non calculable

- Risque et incertain selon Frank Knight : Risk, Uncertainty, and Profit (1921)



Hasard calculable et non calculable

- Pour Frank Knight, le **risque** est « calculable » :
  - *Calculable : Knight parle de « known risk »*
  - *Répétition d'expériences indépendantes à volonté,*
  - *Invariance des lois de probabilité (stationnarité)*
  - *Connaissance des lois de probabilité*
  - *Implique loi des grands nombres, théorème de la limite centrale.*
  - *Statistique inférentielle classique*
- La question n'est pas tant de savoir si les risques financiers sont calculables, mais si les « preneurs de risque » pensent qu'ils sont calculables

Hasard calculable et non calculable

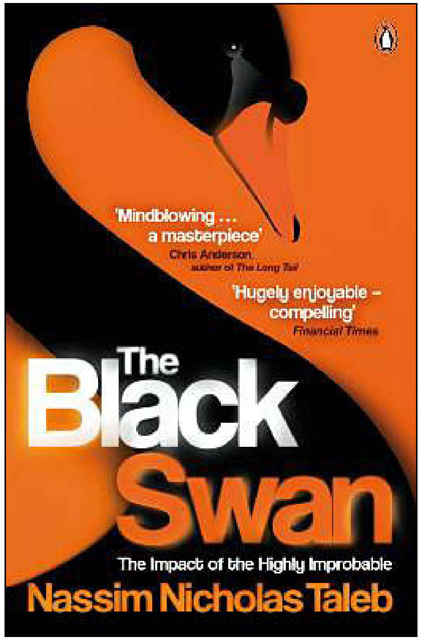
- L'**incertain** se détermine par opposition au risque
  - *Incertain : « true uncertainty »*
  - *N'est pas mesurable*
    - difficulté à identifier les risques possibles (états de la nature)
    - difficulté par manque de données ou non stationnarité à déterminer les probabilités des événements futurs
- Knight considère que les décisions à prendre dans les affaires sont du ressort de l'incertain
  - *Business decisions, for example, deal with situations which are **far too unique** (...) for any sort of statistical tabulation to have any value for guidance. The conception of an objectively measurable probability or chance is simply inapplicable*

Hasard calculable et non calculable

- Keynes reprend l'analyse de Knight en matière de décision financière
    - General Theory, Chapter 12. The State of Long-Term Expectation
  - *The outstanding fact is **the extreme precariousness** of the basis of **knowledge** on which our estimates of **prospective yield** have to be made.*
  - *Our knowledge of the **factors which will govern the yield of an investment** some years hence is **usually very slight and often negligible.***
  - *If we speak frankly, we have to admit that our basis of knowledge for estimating the yield ten years hence (...) of amounts to little and sometimes to nothing.*

Hasard calculable et non calculable

- L'incertain selon Keynes :
  - *"By 'uncertain' knowledge, let me explain, I do not mean merely to distinguish what is known for certain from what is only probable. The sense in which I am using the term is that in which the prospect of (...) the price of copper and the rate of interest twenty years later (...). About these matters, there is no scientific basis on which to form any calculable probability whatever. We simply do not know.*
    - Pour une analyse des différences entre Knight et Keynes, voir
    - Sakai (2019). Daniel Ellsberg on JM Keynes and FH Knight: Risk, Ambiguity, and Uncertainty. In *JM Keynes Versus FH Knight* (pp. 61-77) Springer.

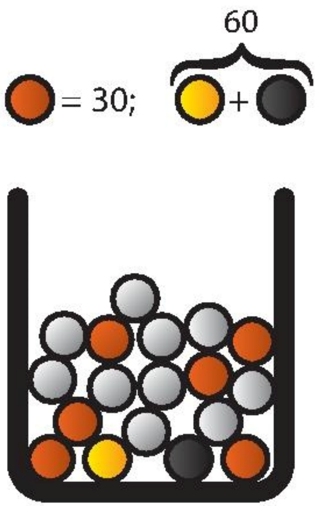


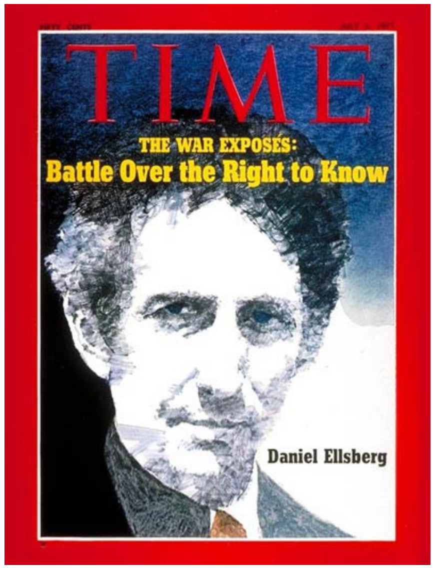
The Black Swan, Nassim Taleb

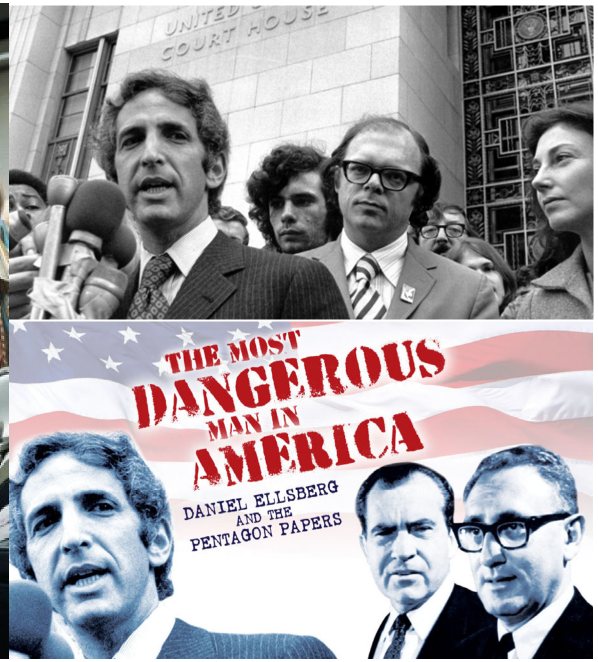
L'Extêmistan de Taleb

- Nassim Taleb distingue deux types de fonctionnement du monde (financier)
- Le Médiocristan est le monde du calculable, du régulier, du normal, du prévisible.
- L'Extrêmistan est le monde de l'incalculable, de l'accidentel, de l'invisible, de l'imprévible.
- L'Extrêmistan est le lieu de prédilection des **cygnes noirs**.
  - *Cygne noir : événement très rare dont l'influence est extrême et dont la prévisibilité n'est que rétrospective (à nos yeux) ; crise financière majeure*

Ambiguïté, incertitude et paradoxe d'Ellsberg







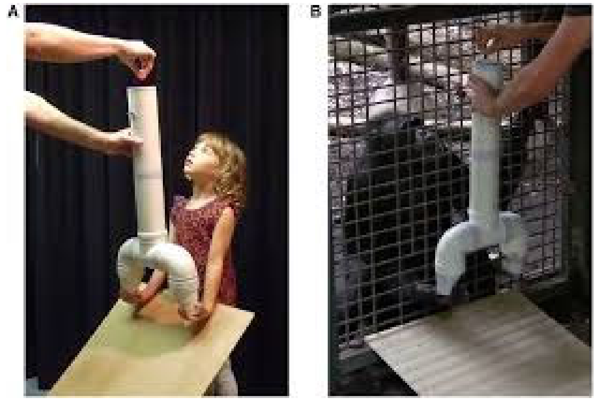
Daniel Ellsberg

Ambiguïté, incertitude et paradoxe d'Ellsberg

- Daniel Ellsberg prolonge les réflexions de Knight ou de Keynes sur ce qui est calculable ou pas en matière de risque
- Il introduit le concept d'ambiguïté, proche de celui d'incertain, utilisé par Knight
- Le paradoxe d'Ellsberg, construit à partir de tirages de boules de différentes couleurs, amène à une réflexion sur l'utilisation du cadre probabiliste dans la prise de décision et la mesure des risques.
  - Ellsberg (1961). Risk, ambiguity, and the Savage axioms. *The quarterly journal of economics*.
  - Epstein, & Zhang (2001). Subjective probabilities on subjectively unambiguous events. *Econometrica*, *69*(2).

Probabilités, scénarios et neurosciences

- Le cerveau humain peut traiter de multiples scénarios ou états de la nature possibles de manière logique.
  - Redshaw & Suddendorf (2016). Children's and apes' preparatory responses to two mutually exclusive possibilities. *Current Biology*
  - Tomasello, M., & Herrmann, E. (2010). Ape and human cognition: What's the difference?. *Current Directions in Psychological Science*, *19*(1), 3-8.



$\boldsymbol{A} = \{\text{récompense tombe à gauche}\}$

$\boldsymbol{A^C} = \{\text{récompense tombe à droite}\}$

Un enfant de 4 ans (mais pas de deux ans), sait que $A \cup A^C = \Omega$ sans aucun apprentissage (système 1), mais ce n'est pas le cas du chimpanzé

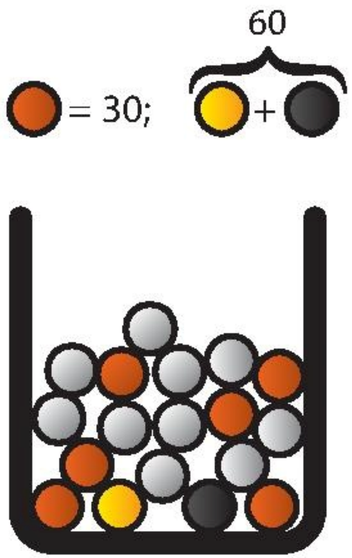
Neurosciences, logique, réalité

- L'enfant humain de 4 ans a déjà accès au plan symbolique (maniement des concepts), ici au principe du tiers exclu.
- Ce n'est pas le cas du chimpanzé qui n'a pas la même capacité de conceptualisation
- D'où l'interrogation du philosophe Ludwig Wittgenstein

Avec le premier Wittgenstein, celui du Tractatus, nous sommes dans la peau d'un logicien qui s'interroge sur les rapports entre le langage (et ses contraintes internes) et la réalité (les faits extérieurs). Quand je dis qu'une porte est ouverte ou fermée, se demande Wittgenstein, est-ce que j'exprime une loi du monde physique (la porte ne peut pas être dans deux états en même temps) ou bien s'agit-il d'une contrainte logique (le contraire de A est non A : si une porte n'est pas fermée, alors elle est logiquement ouverte) ? Penser ce rapport entre la logique (identifiée au langage) et la réalité du monde extérieur : tel est le projet du Tractacus.

Commentaire extrait du livre de Jean-François Dortier,, « Toute la philosophie en 4 questions »

Ambiguïté, incertitude et paradoxe d'Ellsberg



Ellsberg's Paradox

Imagine an urn known to contain 90 balls. Thirty of the balls are red, the remaining 60 are black and yellow in unknown proportions. One ball is to be drawn at random from the urn. Consider the following actions and payoffs:

Situation X

On préfère le pari 1 au pari 2

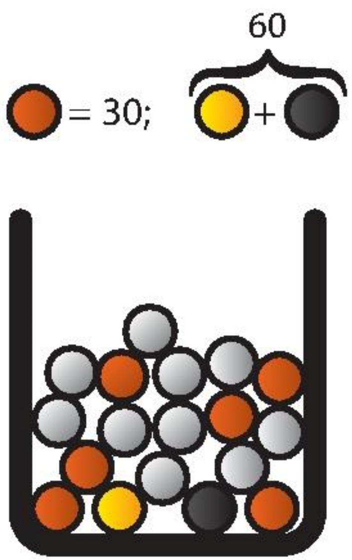
	30	60	
	Red	Black	Yellow
Act 1. Bet on red	\$100	\$0	\$0
Act 2. Bet on black	\$0	\$100	\$0

Situation Y

Act 3. Bet on red or yellow	\$100	\$0	\$100
Act 4. Bet on black or yellow	\$0	\$100	\$100

On préfère le pari 4 au pari 3

Ambiguïté, incertitude et paradoxe d'Ellsberg



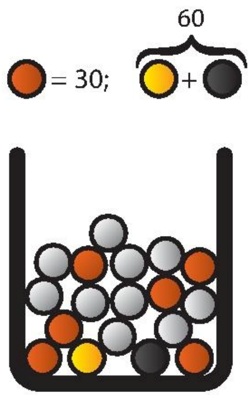
Ambiguïté, incertitude et paradoxe d'Ellsberg

- p_b proportion de boules noires inconnue mais comprise entre 0 et 2/3
  - *les deux bornes correspondent à 0 et 100% de boules noires parmi les* 60 *dont on ne connait pas la couleur.*
  - $p_b = 1/3$ *si le principe d'indifférence s'applique*
  - *On suppose que l'agent raisonne en espérance de gain*
- 1 préféré à 2 (aversion à l'ambiguïté): $p_r > p_b$
- 4 préféré à 3 (aversion à l'ambiguïté) : $p_r + p_y < p_b + p_y \Rightarrow p_r < p_b$
- Pas de probabilité p_b qui permette de justifier la cohérence des deux choix précédents.

Ambiguïté, information, événements

Dans le langage des probabilités, un événement est un ensemble d'états de la nature pour lequel on peut définir une probabilité

Ici, on a trois états de la nature, rouge, jaune, noir. {Rouge} est un événement, {Jaune,Noir} est aussi un événement, mais pas {Jaune} ou {Noir}



Si {Jaune} et {Noir} étaient des événements, l'ambiguïté serait levée et on l'on disposerait de plus d'information sur les états de la nature : plus d'événements veut dire plus d'information

Ambiguïté, incertitude et paradoxe d'Ellsberg

- Exercice : construire un mécanisme financier (opportunité d'arbitrage) qui permette de tirer parti des contradictions précédentes. Qu'en conclure ?
    - Lien entre existence d'un système de probabilités et absence d'opportunité d'arbitrage : problème du Dutch Book étudié par de Finetti ou Savage. Voir https://plato.stanford.edu/entries/dutch-book/
- Questions :
    - *Que se passe-t-il si deux agents ont des probabilités subjectives de réalisation d'un événement égales à 0 pour le premier, 1 pour le second et qu'ils n'apprennent pas au cours de l'échange ?*
    - *Que se passe-t-il si tous les agents ont les mêmes probabilités subjectives ?*

Induction et événements rares (krachs boursiers)

- Analyse statistique des événements extrêmes et rares
    - *Par exemple, krachs boursiers*
    - *On a deux approches, l'une due à Nassim Taleb*
    - *Ces événements sont singuliers et ne correspondent à aucune régularité statistique ; ils sont essentiellement non prévisibles*
    - *« Unknown unknows » de Donald Rumseld : événements « non-conçus ».*
    - *Autre approche issue de l'assurance : probabilité d'occurrence constante, mais très faible ; indépendance des événements.*
    - *Notons* $I_t = 1$, *si occurrence d'un krach boursier et* $I_t = 0$ *sinon*
    - *Il y a environ un krach boursier tous les* 20 *ans, soit environ* 5000 *jours.*
    - $p = 2 \times 10^{-4}$

Induction et événements rares (krachs boursiers)

- Supposons que l'on observe 252 jours (≈ 1 an) de transactions
- Probabilité d'observer au moins un 1 (un krach) sur cette période : $1 - (1 - p)^{252} = 4{,}9\%$
- Dans 95% des cas la suite des 252 valeurs observées est constituée uniquement de 0.
- Attention : l'approche inductive n'est pas appropriée pour les événements de faible probabilité.
    - *Elle nécessite une grande quantité de données.*

Induction et événements rares (krachs boursiers)

- Une application pratique : une vente de tickets de loto.
- On considère un vendeur de tickets de loto. Le prix du ticket est de 1 €. Le gain est de 1000000 €, avec une probabilité de $\frac{1}{1000000}$
- Ces informations sont connues des participants.
- En quoi ceci s'apparente aux dérives de la finance ?
- Un statisticien observe les gains/pertes d'un parieur. Que va-t-il observer ? Peut-il comprendre la nature du jeu ? Que peut-il prédire ? L'inférence statistique est-elle utile ? Dangereuse ?
- Exercice en rapport (voir TD)

Induction et événements rares (krachs boursiers)

- Comment définir une perte maximale sur une vente à découvert ?
  - *Dans un modèle gaussien, celle-ci n'est pas « bornée » (il n'y a pas de plafond ou de borne supérieure ; on dira que la perte maximale est « infinie ».*
  - *Définition de scénarios de stress ?*
- Est-il raisonnable d'affirmer qu'un événement a une probabilité nulle (impossible) ou égale à 1 (qu'il arrivera avec certitude) ?
  - *Cela suppose que l'espace des possibles a été* ***préalablement*** *correctement identifié.*
  - *Facile pour les dés, difficile pour les risques financiers*

Induction et événements rares (krachs boursiers)

- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0.$
  - *A-t-on correctement identifié l'espace fondamental Ω, ou espace des* ***possibles*** *(ou des événements élémentaires) ?*
  - *Dans le jeu de pile ou face, $\Omega = \{P, F\}$ semble un choix naturel.*
  - *Si on s'intéresse à* ***<u>appliquer</u>*** *les probabilités au monde réel, c'est moins évident.*
  - *On pourrait penser à des événements que l'on n'a jamais « vus » (car de faible probabilité) ou conçus, qui peuvent néanmoins se « réaliser »*
    - Cygne noir de Taleb, incertain radical de Franck Knight, « unknown unknowns » de Donald Rumselfd.
  - *L'applicabilité de la théorie des probabilités au monde réel est à distinguer de la théorie des probabilités*

Hasard accidentel , hasard « à la Cournot »

- Que signifie « c'est arrivé par hasard » ?
  - *Si l'on pense au « vrai hasard », l'expression est malheureuse, car on transforme le hasard en cause, alors que l'effet dont on parle est sans cause*
- En pratique, cela renvoie à la notion d'accidentel
  - *1) C'est arrivé de manière fortuite, imprévue, inattendue, mais prévisible.*
  - *2) Ou ce n'était pas intentionnel*
    - Ainsi la chute d'une pierre n'a pas lieu en vue de frapper quelqu'un ; donc sous ce rapport la chute de la pierre vient du hasard, car si elle n'était pas un hasard la chute serait le fait de quelqu'un et provoquée en vue de frapper (Aristote)

Hasard accidentel

- Pour Aristote le hasard (**automaton**) est ce qui produit en dehors de tout dessein humain ou divin et de tout ordre stable.
  - *Triple négation*
- Alea désigne le dé, le jeu de dés et hasard en latin
- Le mot hasard apparaît dans la langue philosophique, puis dans le langage courant à la Renaissance
- Il dérive de **az-zahr** (jeu de dés), terme par les exégètes arabes d'Aritoste, qui auraient (mal) traduit son concept d'automaton

Hasard accidentel

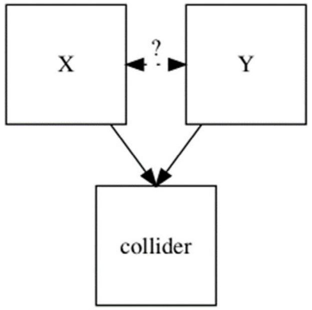
- Aristote : concept d'*automaton*
  - *Un passant marche le long d'une maison, une tuile se détache à ce moment du toit et tombe sur la tête du passant.*
- Relation de cause (efficiente) à effet entre la chute de la tuile et la blessure du passant, mais pas d'**intentionnalité**
    - C'est en ce sens qu'il faut entendre « **accidentel** », fortuit
    - Ce qui se passe n'est pas lié à la recherche d'un but, il n'y a pas de finalité ou cause finale, même si cette absence d'intention produit des effets.
    - La pierre n'est pas tombée pour frapper
    - Si quelqu'un avait lancé la tuile avec l'intention de frapper le passant ou si le passant avait cherché à mettre fin à ses jours, Aristote n'aurait pas utilisé le terme « Automaton »
  - *Automaton renvoie à la **cause d'événements accidentels***

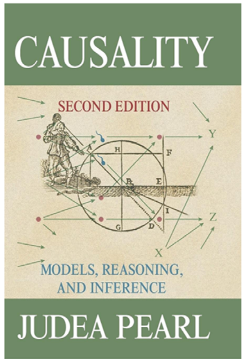
Hasard accidentel

  - *Un passant marche le long d'une maison, une tuile se détache à ce moment du toit et tombe sur la tête du passant.*
- Pour Cournot, il s'agit de la **rencontre de deux séries causales « indépendantes »**
    - Le passant marche le long de la maison
    - La tuile tombe du toit (sous l'effet du vent, de sa fragilité)
    - « *Les événements amenés par la combinaison ou la rencontre de phénomènes qui appartiennent à des séries **indépendantes**, **dans l'ordre de la causalité**, sont ce qu'on nomme des **événements fortuits** ou des **résultats du hasard*** »
      - Cournot 1843, § 40, 55
  - *Il ne s'agit pas de « vrai hasard », mais de coïncidence ; on parle parfois de « hasard objectif »*

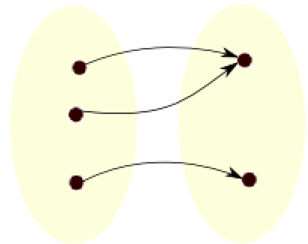
Hasard à la Cournot

- Hasard à la Cournot est compatible avec le déterminisme
- Indépendance de chaînes causales : elles ne se rencontrent pas antérieurement au phénomène
  - *Plusieurs chaînes causales « indépendantes » produisant un effet*
  - *Les graphes orientés permettent une représentation géométrique*

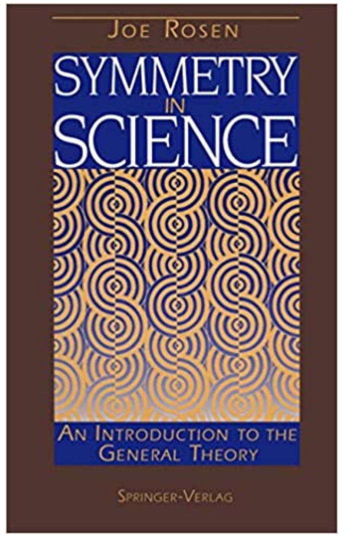




Causalité en Physique : comment distinguer causes et effets ?



à gauche, causes, à droite effets



Curie-Rosen-symmetry principle

- The effects are more symmetric than the causes. (*Curie*)
- For an isolated system the degree of symmetry cannot decrease as the system evolves, but either remains constant or increases. (*Rosen*)

Thierry Martin, auteur d'une brève histoire du hasard et spécialiste du « hasard à la Cournot » et auteur d'« une brève histoire du hasard »


RAISON PRÉSENTE

LE HASARD

Avant-propos.
Michel Morange et Michèle Leduc
Une brève histoire du hasard.
Thierry Martin
Hasard, probabilités, incertitude, déterminisme, chaos…
Roger Balian
Le hasard quantique.
Michel Le Bellac
Hasard faible, hasard moyen et hasard fort en informatique.
Jean-Paul Delahaye
Crises économiques : hasard exogène ou endogène ?
Jean-Philippe Bouchaud
Le hasard dans la théorie de l'évolution.
Francesca Merlin
Le hasard dans la cellule.
Thomas Heams
Quelle est la part de hasard dans l'apparition des cancers ?
Jean-Pascal Capp
Hasard et contingence en histoire
Cristiana Oghina-Pavie
Du hasard au cinéma.
Penny Starfield

Trimestrielles
Sciences, cinéma, théâtre, atlas des arts vivants, à travers quelques livres, notes de lecture

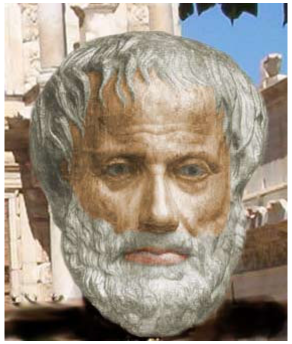
198

Imprévu et imprévisible

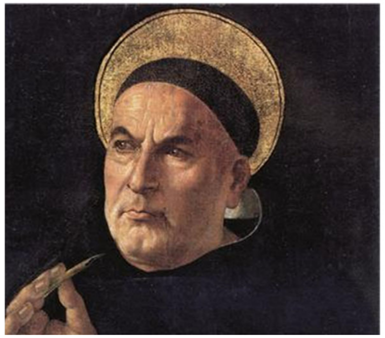
- Cournot adapte Saint Thomas d'Aquin
  - *Tout effet provenant du concours de deux volontés non ordonnées entre elles, est un effet de hasard: c'est le cas de celui qui, voulant faire un achat, rencontre inopinément au marché un créancier.*
    - Thomas, Somme contre les Gentils, II, 44 et 83 (reprenant Aristote)
- Bergson : caractère subjectif de la notion de hasard qui nous amène à nous interroger sur le caractère fortuit de certains événements qui attirent notre attention.
  - *« Une énorme tuile, arrachée par le vent, tombe et assomme un passant. Nous disons que c'est un hasard ».*
  - *« Le dirions-nous, si la tuile s'était simplement brisée sur le sol ? il n'y a de hasard que parce qu'un intérêt humain est en jeu ».* Bergson : Les deux sources de la morale et de la religion

Imprévu et imprévisible

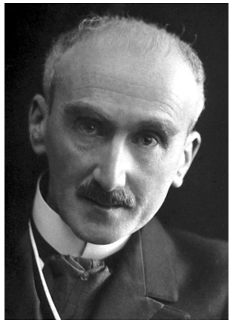
- Dans les différentes interprétations de la tuile tombant sur notre malheureux passant
- Les causes n'ont pas été (pré)vues.
- Quand ce dont la cause est extérieure n'a pas été en vue de ce qui est arrivé, que nous parlons de hasard
  - *Le hasard est donc le mécanisme se comportant comme s'il avait une intention (Bergson)*
- Le hasard : une cause fictive
- Mentalité primitive (Levy-Bruhl) cité par Bergson, pour qui il n'y a pas de hasard



Aristote (image de synthèse…)



Thomas d'Aquin



Bergson

Cournot

- La dimension poétique du hasard, de l'inattendu
  - *Je t'ai rencontré par hasard*
    Ici ailleurs ou autre part, (La Vie d'Artiste – Léo Ferré)

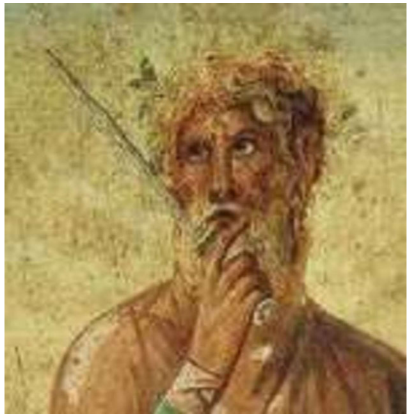
Fortuna, déesse romaine (Tadeusz Kuntze, 1754) est souvent représentée les yeux bandés, vagabonde, inconstante, incertaine, changeante

Qu'est-ce, en effet, que le sort, la chance, le hasard, l'évènement, sinon ce qui arrive et se produit de telle manière qu'il aurait pu arriver et se produire autrement ? De quelle manière donc ce qui arrive fortuitement, par l'aveugle hasard de la fortune versatile, peut-il être ressenti et prédit ? Cicéron, De divinatione

- « *L'homme a appelé hasard la cause de toutes les surprises, la **divinité sans visage** qui préside à tous les espoirs insensés, à toutes les craintes sans mesure, qui **déjoue les calculs les plus soigneux**, qui **change les imprudences en décisions heureuses** ». Paul Valéry*

- *Ca et là quelqu'un joue avec nous – le cher hasard : il mène notre main à l'occasion, et la providence la plus sage ne saurait inventer plus belle musique que celle qui réussit à notre main insensée. Nietzsche*

Cassandre, personnage de l'Iliade, avait le don de divination, mais fut condamnée par Apollon à ne jamais être crue



Calchas, célèbre devin grec, apparaissant dans diverses scènes de l'Iliade

Tiresias : le devin aveugle

Au IVe siècle av. J.-C., Tyché symbolise le désordre et l'irrationnel