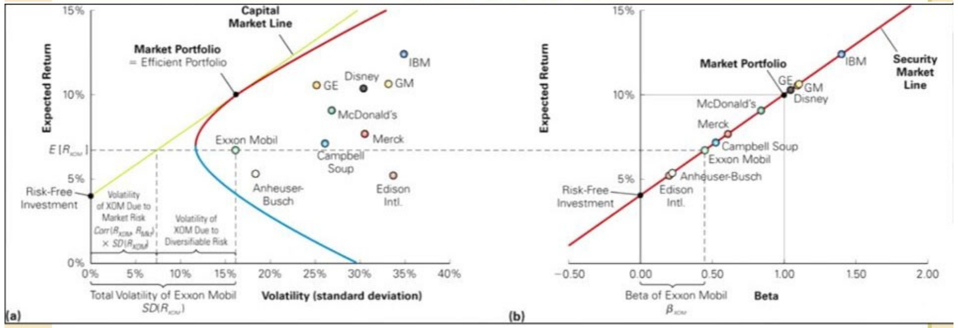
Cours de Finance (M1)

Exercices : Bêtas, Security Market Line

The Capital Market Line and the Security Market Line



Exercices corrigés

- Betas et SML
- SML et ratio de Sharpe
- Cas Markoland

Betas et SML

- *Problème posé par P-A. Patard (2012)*
  - $R_f = 3\%$

Problème (7 points)

Soit un marché composé de 3 titres risqués notés A_1, A_2, A_3 dont les capitalisations boursières (exprimées en milliards d'€) et les rendements espérés E_i sont donnés dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, il existe un actif non risqué (un bon du trésor), l'actif A_0, dont le taux de rendement est $R_f = 3\%$.

Actif	A_1	A_2	A_3
CB (Mds€)	250	150	100
E_i	3%	2.5%	5%

1. Donner la composition du portefeuille de marché M (calculer les poids des titres dans celui-ci).
2. En déduire E_M puis déterminer l'équation de la SML.
3. Calculer β_i pour chaque titre.

Betas et SML

- $\boldsymbol{X_1 = 50\%, X_2 = 30\%, X_3 = 20\%}$
- $E_M = 0{,}5 \times E_1 + 0{,}3 \times E_2 + 0{,}2 \times E_3$
- $\boldsymbol{E_M} = 0{,}5 \times 3\% + 0{,}3 \times 2{,}5\% + 0{,}2 \times 5\% = \boldsymbol{3{,}25}\%$
- La SML est donnée par $\boldsymbol{E_i = r_f + \beta_i \times (E_M - r_f)}$
- $\boldsymbol{E_i = 3\% + \beta_i \times 0{,}25\%}$
- $\beta_i = \frac{E_i - 3\%}{0{,}25\%}, E_1 = 3\%, E_2 = 2{,}5\%, E_3 = 5\%$
- $\boldsymbol{\beta_1 = 0, \beta_2 = -2, \beta_3 = 8}$

Betas et SML

- Suite du problème

Nous donnons ci-dessous la composition du portefeuille Medalyon.

Actif	A_0	A_1	A_2	A_3	Total
Montant Investi (M€)	10	45	27	18	100

4. Donner le poids de chaque actif dans le fonds.
5. Calculer le beta du fonds β_P et son rendement attendu E_P.
6. Donner le montant du portefeuille investi sur les titres risqués, en déduire le poids de la poche taux (investie sur l'actif sans risque) et le poids de la poche action (investie sur les actifs risqués).
7. Le portefeuille est-il efficient ? Justifiez.

Betas et SML

- $\beta_P = X_0 \times \beta_0 + X_1 \times \beta_1 + X_2 \times \beta_2 + X_3 \times \beta_3$
  - *Le premier actif étant sans risque* $\beta_0 = 0$
  - $X_1 = 45\%, X_2 = 27\%, X_3 = 18\%$
  - $\beta_1 = 0, \beta_2 = -2, \beta_3 = 8$
- $\boldsymbol{\beta_P} = 0{,}27 \times (-2) + 0{,}18 \times 8 = \boldsymbol{0{,}9}$
- $\boldsymbol{E_P = 3\% + \beta_P \times 0{,}25\% = 3{,}225\%}$
  - **90**% *du portefeuille est investi en actions,* **10**% *en actif sans risque*
  - *Au sein de la poche risquée, la part investi dans le titre 1 est* $45/90 = 50\%$, *dans le titre 2,* $27/90 = 30\%$ *et donc la part investie dans le titre 3 de* 20%
- L'allocation est identique à celle du portefeuille de marché (supposé efficient)

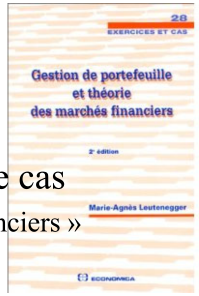
SML et ratio de Sharpe

- Problème : caractérisation des portefeuilles efficients
  - *On considère un portefeuille* $\boldsymbol{P}$
  - $\boldsymbol{E_P}, \boldsymbol{\sigma_P}$ *espérance et écart-type de la rentabilité du portefeuille*
  - $\boldsymbol{\beta_P}$ *beta du portefeuille (par rapport au portefeuille de marché)*
  - $\boldsymbol{E_M}, \boldsymbol{\sigma_M}$ *espérance et écart-type de la rentabilité du portefeuille de marché*
  - $\boldsymbol{r_f}$ *taux sans risque*
  - $\boldsymbol{\rho_{PM}}$ *coefficient de corrélation entre la rentabilité du portefeuille* $\boldsymbol{P}$ *et celle du portefeuille de marché*
- Utiliser l'équation de la SML pour montrer que le ratio de Sharpe est maximal pour les portefeuilles efficients

SML et ratio de Sharpe

- Problème : caractérisation des portefeuilles efficients
  - *ratio de Sharpe du portefeuille* $\boldsymbol{P}$*:* $\frac{\boldsymbol{E_P - r_f}}{\boldsymbol{\sigma_P}}$
  - *Équation de la SML :* $\boldsymbol{E_P = R_F + \beta_P(E_M - r_f)}$
  - $\boldsymbol{\beta_P = \frac{\rho_{PM}\sigma_P\sigma_M}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{PM}\sigma_P}{\sigma_M}}$
  - $\boldsymbol{\frac{E_P - r_f}{\sigma_P} = \rho_{PM}\frac{E_M - r_f}{\sigma_M} \leq \frac{E_M - r_f}{\sigma_M}}$*, puisque* $\boldsymbol{\rho_{PM} \leq 1}$
  - *Le ratio de Sharpe du portefeuille* $\boldsymbol{P}$ *est inférieur ou égal au ratio de Sharpe du portefeuille de marché*
  - *Égalité si* $\boldsymbol{\rho_{PM} = 1}$ *: le portefeuille* $\boldsymbol{P}$ *est parfaitement corrélé avec le portefeuille de marché*
  - *Portefeuilles combinant actif sans risque et* $\boldsymbol{M}$*, donc efficients*

Le cas Markoland



- Cas extrait d'un livre d'exercices corrigés et de cas
  - « Gestion de portefeuille et théorie des marchés financiers »
  - Marie-Agnès Leutenegger, Economica, 3$^{\text{ième}}$ édition
- Données du problème
  - Titres A et B de prix aujourd'hui 120 € et 1700 €, valeur d'un part de portefeuille de marché M aujourd'hui : 260 €
  - Dividende de 10 € pour A et de 100 euros pour B, payés en fin de période.

Probabilité	Cours de A en €	Cours de B en €	Valeur du portefeuille de marché M
0.2	100	2200	250
0.3	130	1500	330
0.3	150	2000	340
0.2	180	2400	360

Le cas Markoland

- Question 1
  - *Calculer pour A, B et M, les taux de rentabilité possibles, leur niveaux espérés* $\boldsymbol{E_A}, \boldsymbol{E_B}, \boldsymbol{E_M}$*, les écart-types des rentabilités* $\boldsymbol{\sigma_A}, \boldsymbol{\sigma_B}, \boldsymbol{\sigma_M}$*, le coefficient de corrélation linéaire* $\boldsymbol{\rho_{AB}}$ *et les Betas ,* $\boldsymbol{\beta_A}, \boldsymbol{\beta_B}$

Le cas Markoland

- Tableau des rentabilités

Probabilité	rentabilité de A	rentabilité de B	rentabilité de M
0.2	-8.33%	35.29%	-3.85%
0.3	16.67%	-5.88%	26.92%
0.3	33.33%	23.53%	30.77%
0.2	58.33%	47.06%	38.46%

- Espérances de rentabilités
- $\boldsymbol{E_A} = 0{,}2 \times (-8{,}33\%) + 0{,}3 \times 16{,}67\% + 0{,}3 \times 33{,}33\% + 0{,}2 \times 58{,}33\% = \mathbf{25\%}$
- $\boldsymbol{E_B} = \mathbf{21{,}76\%}, \boldsymbol{E_M} = \mathbf{24{,}23\%}$

Le cas Markoland

- Remarques sur la manière de mener les calculs
  - *Il est plus simple de compléter le tableau précédent à partir d'Excel*
  - *Si Excel est disponible …*
    - Les fonctions statistiques standard d'Excel ne sont pas utiles ici
    - Attention également aux différentes formules de calcul d'écart-type « dans l'échantillon » ou « dans la population » (ce dernier étant privilégié en finance)
  - *Dans quelques cas, on peut simplifier les calculs à la main*
    - $E_A = 0{,}2 \times \frac{110-120}{120} + 0{,}3 \times \frac{140-120}{120} + 0{,}3 \times \frac{160-120}{120} + 0{,}2 \times \frac{190-120}{120} = \frac{0{,}2\times(-10)+0{,}3\times20+0{,}3\times40+0{,}2\times70}{120} = \frac{-2+6+12+14}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$
  - *Mais ce n'est pas généralisable*

Le cas Markoland

- Écarts types des taux de rentabilité
  - $\sigma_A^2 = 0{,}2 \times (-8{,}33\% - E_A)^2 + +0{,}3 \times (16{,}67\% - E_A)^2 + 0{,}3 \times (33{,}33\% - E_A)^2 + 0{,}2 \times (58{,}33\% - E_A)^2$
  - *Avec* $E_A = 25\%$
  - *On trouve* $\boldsymbol{\sigma_A = 22,05\%, \sigma_B = 19,87\%, \sigma_M = 14,60\%}$
- Covariance entre les taux de rentabilité de A et de B
  - $\boldsymbol{C_{AB}} = 0{,}2 \times (-8{,}33\% - E_A) \times (35{,}29\% - E_B) + 0{,}3 \times \cdots = \mathbf{0,015196}$
- Coefficient de corrélation linéaire $\boldsymbol{\rho_{AB}}$
  - $\boldsymbol{\rho_{AB}} = \frac{\boldsymbol{C_{AB}}}{\boldsymbol{\sigma_A \times \sigma_B}} = \frac{0{,}015196}{22{,}05\% \times 19{,}87\%} = \mathbf{0,3469}$

Le cas Markoland

- Calcul des Betas
  - $\boldsymbol{\beta_A} = \frac{\mathbf{Cov}(\boldsymbol{R_A,R_M})}{\boldsymbol{\sigma_M^2}} = \frac{\boldsymbol{C_{AM}}}{\boldsymbol{\sigma_M^2}}$
  - *On calcule* C_{AM} *de la même manière que* C_{AB} *et on trouve*
  - $C_{AM} = 0{,}0292$
  - $\boldsymbol{\beta_A} = \frac{0{,}0292}{0{,}0213} = \mathbf{1,3683}$
  - $\boldsymbol{\beta_A > 1}$ *(titre offensif)*
  - *Le même raisonnement appliqué à B donne* $\boldsymbol{\beta_B = -0,1072}$
  - $\boldsymbol{\beta_B < 0}$ *(situation atypique).*

Le cas Markoland

- Question 2 :
  - *Il existe un actif sans risque de taux de rentabilité* $\boldsymbol{r_f = 10\%}$
  - *Quelle est la prime de risque de marché* $\boldsymbol{E_M - r_f}$ *?*
  - *Quelle est la rentabilité espérée des titres A et B d'après l'équation de la SML ?*
  - *Comment interpréter les différences avec les rentabilités espérées obtenues à la question 1 ?*

Le cas Markoland

- Question 2 :
  - $\boldsymbol{E_M - r_f = 24,23\% - 10\% = 14,23\%}$
    - En utilisant la SML, on obtient la rentabilité attendue de A
  - $\boldsymbol{E_A = r_f + \beta_A \times (E_M - r_f)} = 10\% + 1{,}3683 \times 14{,}23\% = \mathbf{29,47\%}$
    - De même, on trouve que $\boldsymbol{E_B = 8,47\%}$
  - *Or, le premier calcul a donné* $\boldsymbol{E_A = 25\%}$
  - *Comment interpréter la différence entre les 2 valeurs de* $\boldsymbol{E_A}$ *?*
    - Un (au moins) des deux calculs pose problème
    - On a pu se tromper sur les probabilités des différentes rentabilités
    - Ce qui affecte les calculs dans les deux approches
    - Si les calculs sont effectués avec un échantillon de rentabilités observées, on a fait un calcul dans l'échantillon et non pas dans la population (ce qui revient à une erreur sur les données)

Le cas Markoland

- Question 2 : Comment interpréter cette différence ? (suite)
  - *S'il n'y avait aucun « bruit d'échantillonnage »*
    - Connaissance parfaite des lois de probabilité des rentabilité
    - Et donc des espérances de rentabilité et des betas titres
  - *On pourrait encore se tromper sur le taux sans risque* $\boldsymbol{r_f}$
  - *Si ce n'est pas le cas, soit le Médaf est invalidé, soit les marchés sont inefficients*
    - Dans le premier cas, on donne une valeur normative au Médaf
    - C'est souvent l'approche des ouvrages académiques (la théorie prime)
    - Ici, $\boldsymbol{\alpha_A = E_A - \left(R_f + \beta_A \times (E_M - r_f)\right) < 0}$ alpha de Jensen négatif
    - Le taux de rentabilité proposé par le marché est inférieur au taux normatif du MEDAF
    - Pour qu'il remonte et revienne « à la normale », le prix de A doit baisser
    - Stratégie de vente à découvert du titre ?

Le cas Markoland

- Question 3 : on suppose que le portefeuille de marché est efficient et que c'est le portefeuille tangent. Établir l'équation de la CML

Le cas Markoland

- Question 3 : on suppose que le portefeuille de marché M est efficient et que c'est le portefeuille tangent. Établir l'équation de la CML
  - *La CML est la demi-droite qui relie l'actif sans risque et le portefeuille de marché dans le plan (écart-type des rentabilités, espérance des rentabilités)*
  - *Actif sans risque* $\boldsymbol{r_f = 10\%}$
  - *Portefeuille de marché :* $\boldsymbol{E_M = 24,23\%}$, $\boldsymbol{\sigma_M = 14,60\%}$
  - *Soit un portefeuille P sur la CML. On écrit l'égalité des pentes entre l'actif sans risque et les portefeuilles P ou M*
  - $\boldsymbol{\frac{E_P - r_f}{\sigma_P} = \frac{E_M - r_f}{\sigma_M} = \frac{24,23\% - 10\%}{14,6\%} = 0,9747}$ *(ratio de Sharpe de M)*
  - $\boldsymbol{E_P = 10\% + 0,9747 \times \sigma_P}$

Le cas Markoland

- Question 4 : l'investisseur s'est fixé un niveau de risque de $\boldsymbol{12\%}$
- Calculer l'espérance de rentabilité de son portefeuille et sa composition

Le cas Markoland

- Question 4 : l'investisseur s'est fixé un niveau de risque de $\mathbf{12}\%$
- Calculer l'espérance de rentabilité de son portefeuille et sa composition
  - *On part de* $\boldsymbol{E_P} = \mathbf{10}\% + \mathbf{0,9747} \times \boldsymbol{\sigma_P}$ *avec* $\boldsymbol{\sigma_P} = \mathbf{12}\%$
  - *D'où* $\boldsymbol{E_P} = \mathbf{21,7}\%$
  - *On sait que sur la CML,* $\boldsymbol{\sigma_P} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma_M}$*, où x est la proportion investie en portefeuille de marché*
  - *Or,* $\boldsymbol{\sigma_P} = \mathbf{12}\%$, $\boldsymbol{\sigma_M} = \mathbf{14,60}\%$
  - *D'où* $\boldsymbol{x} = \mathbf{82,2}\%$
  - *La part investie en actif sans risque est* $\mathbf{1} - \boldsymbol{x} = \mathbf{17,8}\%$

Le cas Markoland

- Question 5 : calculer le risque total, le risque de marché et le risque spécifique du titre B

Le cas Markoland

- Question 5 : calculer le risque total, le risque de marché et le risque spécifique du titre B
  - *On rappelle que* $\boldsymbol{\sigma_B^2} = (\boldsymbol{\beta_B \sigma_M})^2 + \boldsymbol{\sigma_\varepsilon^2}$
  - *Où* $\boldsymbol{\sigma_\varepsilon}$ *est le risque spécifique,* $\boldsymbol{\sigma_B}$ *le risque total et* $|\boldsymbol{\beta_B \sigma_M}|$ *le risque de marché.*
  - *On a déjà calculé* $\boldsymbol{\sigma_B} = \mathbf{19,87}\%$
  - $\boldsymbol{\beta_B} = -\mathbf{0,1072}, \boldsymbol{\sigma_M} = \mathbf{14,60}\%$
  - *D'où* $|\boldsymbol{\beta_B \sigma_M}| = \mathbf{1,56}\%$
  - *De* $\boldsymbol{\sigma_\varepsilon^2} = \boldsymbol{\sigma_B^2} - (\boldsymbol{\beta_B \sigma_M})^2$*, on tire* $\boldsymbol{\sigma_\varepsilon} = \mathbf{19,81}\%$
  - *Le risque spécifique de B est prépondérant.*

Taux de rentabilité (simple) d'un titre

- $R = \frac{P_1 + D_1 - P_0}{P_0}$
  - *Variation relative du prix d'un titre entre deux dates*
  - P_0 *est le prix d'achat du titre à la date initiale,* P_1 *est le prix de revente du titre ;*
  - *On a supposé le paiement d'un dividende (ou coupon)* D_1 *juste avant le*
  - *Fréquences habituelles de calcul : quotidien, hebdomadaire, mensuel ou annuel*
  - *Pour des périodes supérieures à un an, on utilise des taux de rentabilité composés (ou géométriques)*

Taux de rentabilité (simple) d'un portefeuille

- Un exemple avec deux titres
- $\boldsymbol{R_P = X_1 R_1 + X_2 R_2}$
  - $\boldsymbol{R_P}$ *Rentabilité du portefeuille*
  - $\boldsymbol{R_1}$ *Rentabilité du titre 1*
  - $\boldsymbol{R_2}$ *Rentabilité du titre 2*
  - *Ici les indices* 1,2 *font référence*
  - $\boldsymbol{X_1}$ *Part de la richesse (en %) investie dans l'action 1*
  - $\boldsymbol{X_2}$ *Part de la richesse (en %) investie dans l'action 2*
  - $\boldsymbol{X_1 + X_2 = 1}$, *d'où* $\boldsymbol{R_P = R_1 + (X_2 - X_1) \times R_2}$

Taux de rentabilité composé $\bar{R}$

- Un exemple avec deux périodes
- R_t, R_{t+1} : taux de rentabilité entre les dates $t-1$ et t, puis entre les dates t et $t+1$
- $(1+\bar{R})^2 = (1+R_t) \times (1+R_{t+1})$
- $(1+R_t) \times (1+R_{t+1})$: Il s'agit de la valeur acquise en $t+1$ d'un investissement de 1 € à la date $t-1$
- $\bar{R}$ est aussi connu comme le taux de rentabilité géométrique
- $\bar{R} \geq \frac{1}{2} \times (R_t + R_{t+1})$, le terme de droite est le taux de rentabilité arithmétique moyen

Espérance du taux de rentabilité

- On considère la rentabilité future d'un portefeuille R comme une variable aléatoire
- R peut prendre N valeurs $R^1, \ldots, R^N$. Ces valeurs correspondent à des « scénarios » (« états de la nature » en économie théorique)
- Si P_t est la valeur du portefeuille à la date courante t et si l'on omet la présence de coupons, $R = \frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}$
  - *$t+1$ est l'horizon auquel on mesure le risque (1 jour, une semaine, deux semaines, …)*
  - *On a N valeurs possibles du portefeuille demain : $P_{t+1}^1 = (1+R^1) \times P_t, \ldots, P_{t+1}^N = (1+R^N) \times P_t$*

Espérance du taux de rentabilité

- A chaque scénario est associé un <u>choc</u> sur la valeur initiale
  - *Ici, les chocs sont relatifs, c'est-à-dire proportionnels à la valeur à la date courante P_t*
  - *Dans d'autres cas*
- Les scénarios peuvent être des rentabilités passées sur un horizon de temps variable (un an, deux ans, dix ans ou plus) : méthode dite historique (ou empirique en statistique)
- Les scénarios peuvent être obtenus par simulation : tirage aléatoire dans une loi de probabilité donnée, par exemple une loi normale: « Monte Carlo »

Espérance du taux de rentabilité

- Les scénarios peuvent être définis par des experts de manière prospective :
  - *« supervisory stress tests » définis par la banque centrale américaine (Fed), l'ESRB (European Systemic Risk Board) pour l'Union Européenne*
  - *Par les institutions financières elles-mêmes : SPAN du Chicago Mercantile Exchange pour la détermination de marges de garanties*
- Le plus souvent, les scénarios sont équipondérés, mais on peut aussi attribuer des probabilités plus fortes aux scénarios récents (approche historique)

Espérance du taux de rentabilité

- Espérance du taux de rentabilité
  - *On suppose que les scénarios sont équiprobables*
- $E[R] = \frac{1}{N} \times (R^1 + \cdots + R^N)$
- Variance du taux de rentabilité
- $\frac{1}{N} \times \left((R^1 - E[R])^2 + \cdots + (R^N - E[R])^2\right)$
- Écart-type : racine carrée de la variance (écart quadratique moyen)