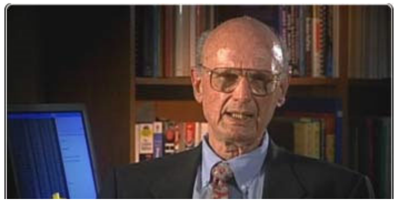
Cours de Finance (M1)

Choix de portefeuille, Capital Market Line



Harry Markowitz

Some investments do have higher expected returns than others. Which ones? Well, by and large they're the ones that will do the worst in bad times?
William Sharpe

Choix de portefeuille, Capital Market Line

- **Frontière efficiente des actifs risqués**
  - ***Préférences des investisseurs***
  - ***Concept de frontière efficiente***
  - ***Concavité de la frontière efficiente***
- Capital Market Line (CML)
  - *Portefeuille risqué + actif sans risque*
  - *Portefeuille tangent, choix optimal de portefeuille, CML*
  - *Portefeuille de marché, ratio de Sharpe*

Choix de portefeuille, Capital Market Line

- Préférences moyenne-variance
- Combinaison de deux titres risqués
- Frontière efficiente des actifs risqués
- Allocation de portefeuilles : gestion institutionnelle
- Allocation de portefeuilles : gestion privée
- Allocation de portefeuilles : particuliers
- Actif sans risque et actif risqué
- Portefeuille tangent, séparation en deux fonds, CML, ratio de Sharpe
- Frontière efficiente : exercices, compléments
- Les pères fondateurs (vidéos)

Choix de portefeuille, Capital Market Line

- Objectifs pédagogiques
- Comprendre comment classer des portefeuilles dans le plan (écart-type des rentabilités, rentabilité attendue)
- Comprendre le concept de frontière efficiente
- Savoir représenter les portefeuilles formés d'un actif sans risque et d'un actif risqué
- Comprendre le concept de portefeuille tangent
- Savoir ce que représente la CML, le ratio de Sharpe, le théorème de séparation en deux fonds
- Pourquoi le portefeuille tangent est le portefeuille de marché

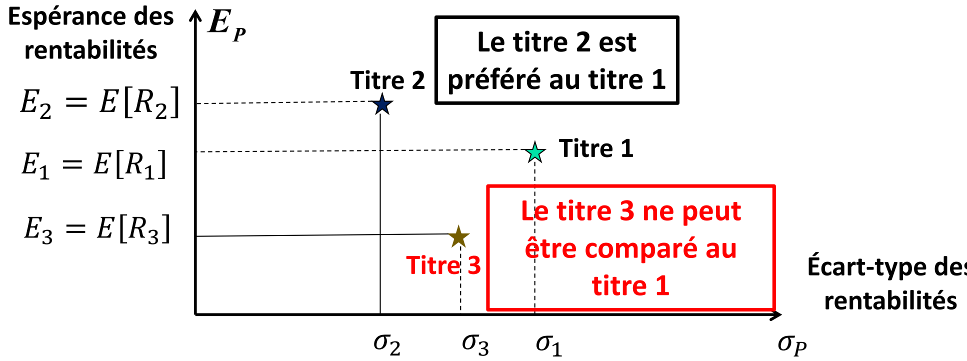
Préférences des investisseurs

$$\sum_j u(y_j)\, P(y_j).$$

- Approches normatives et positives
  - *Espérance d'utilité de la valeur du portefeuille*
    - Von Neumann et Morgenstern (1944)
  - *Distorsion des probabilités*
    - Approche duale de Yaari (1987)
  - *Théorie des perspectives*
    - Kahneman et Tverski (1979)
  - *Finance comportementale*
  - *Préférences moyenne-variance*
    - Cadre d'analyse le plus classique et le plus simple pour analyser les choix de portefeuille
    - Utilisé dans un cadre professionnel
    - Cohérence avec le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

Préférences des investisseurs

- Plan « moyenne écart-type »
  - Un investisseur préfère un portefeuille d'espérance de rentabilité plus élevé à niveau d'écart-type donné
  - Un investisseur préfère un portefeuille d 'écart-type de rentabilité plus faible à niveau d'espérance donné

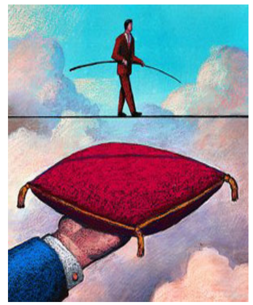


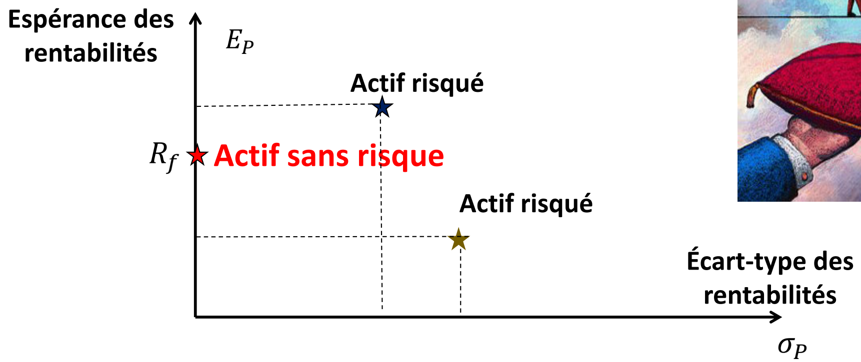
Préférences des investisseurs

- Toutes choses égales par ailleurs, un investisseur préfère détenir une action dont l'espérance de rentabilité est élevée.
  - D'autres motifs peuvent intervenir dans les choix
  - Développement durable, responsabilité sociale des entreprises
- L'écart-type est une mesure du risque pris.
  - Plus l'écart-type de la rentabilité est élevé, plus les rentabilités sont dispersées
  - Il existe d'autres mesures des risques pris, mais l'écart-type reste la plus populaire et la plus maniable
- On considère qu'un investisseur préfère détenir une action dont l'écart-type de rentabilité est faible

Préférences des investisseurs

- Actif / placement sans risque
  - *Titre dont la rentabilité est* **certaine** *: écart-type de la rentabilité* = 0
  - On note sa rentabilité R_f (Risk-free)

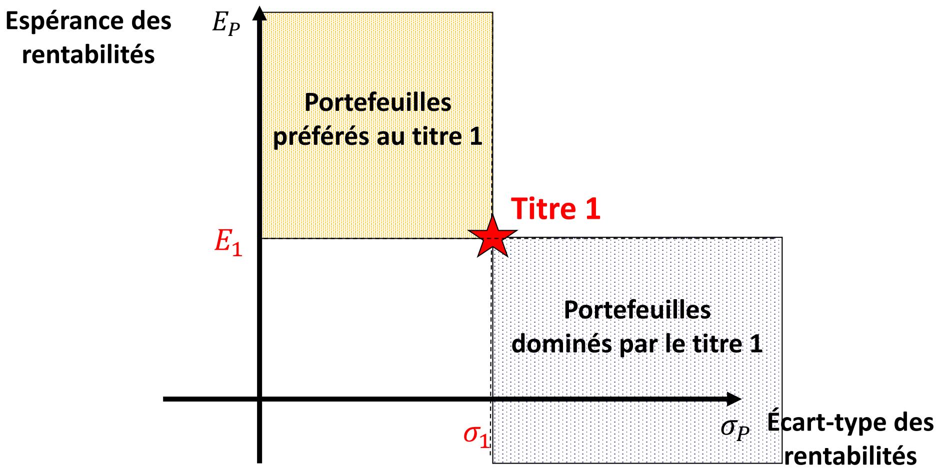




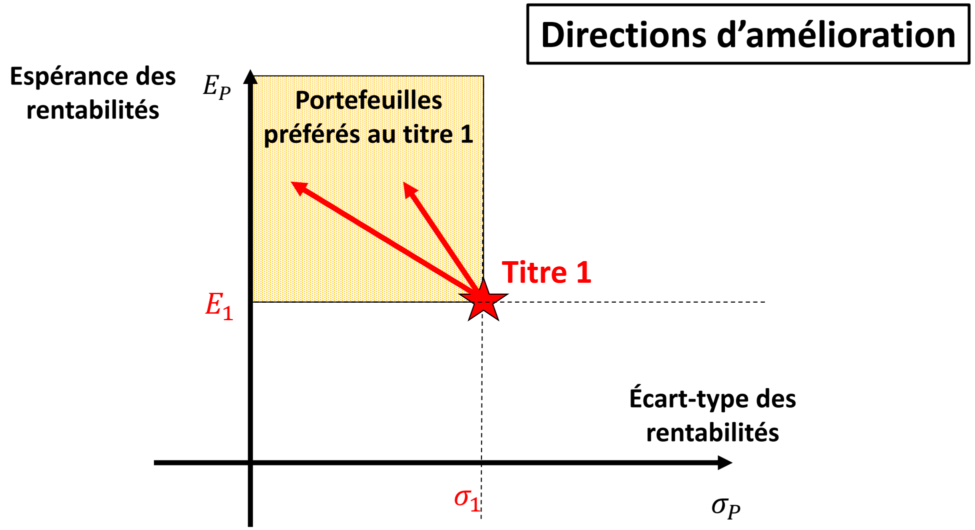
Préférences des investisseurs

- On supposera que les investisseurs sont averses vis-à-vis du risque
  - *Dans notre formalisme, à espérance de taux de rentabilité donné*
  - *Les investisseurs préfèrent un portefeuille dont la rentabilité a un écart-type (risque) plus faible*
    - En microéconomie, l'aversion vis-à-vis du risque est associée au caractère concave de la fonction d'utilité

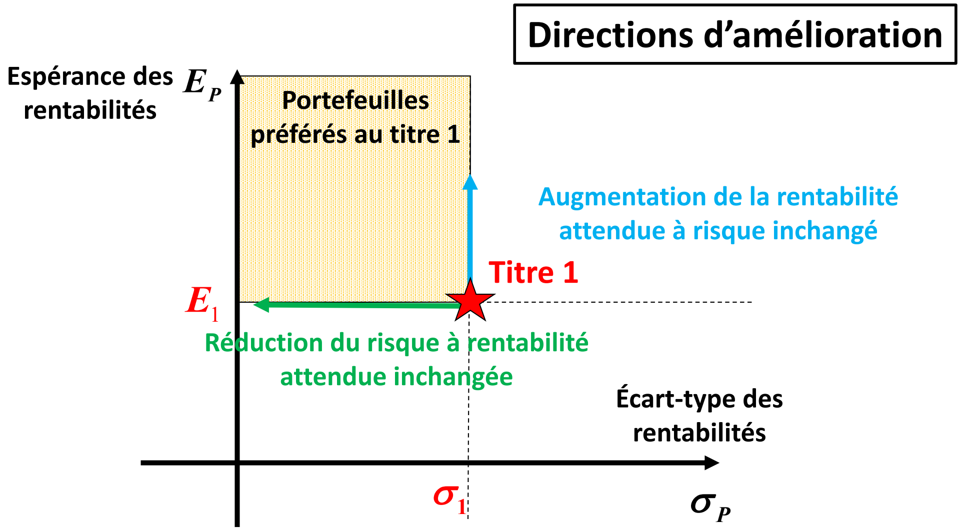
Préférences des investisseurs



Préférences des investisseurs



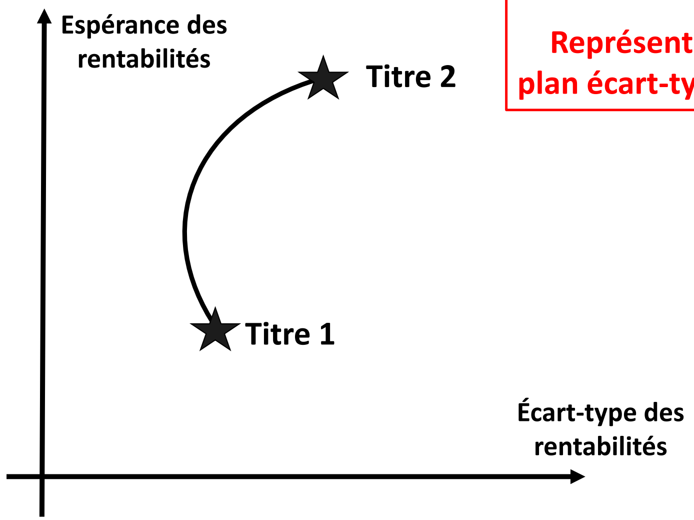
Préférences des investisseurs



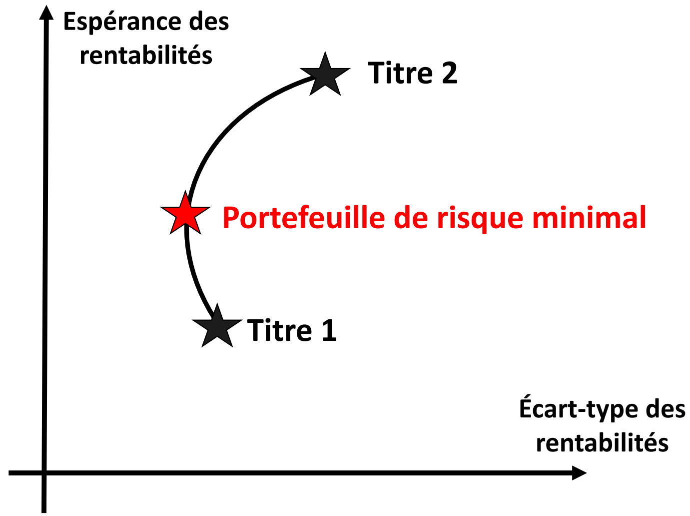
Frontière efficiente

Ensemble des portefeuilles formés des titres 1 et 2

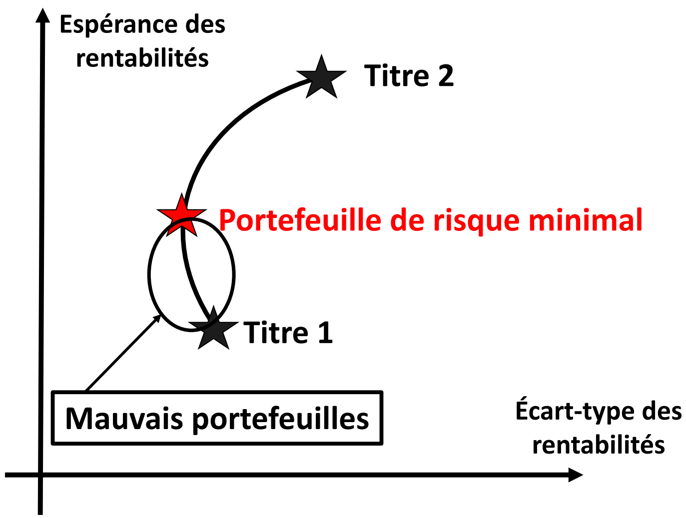
Représentation dans le plan écart-type / espérance



Frontière efficiente

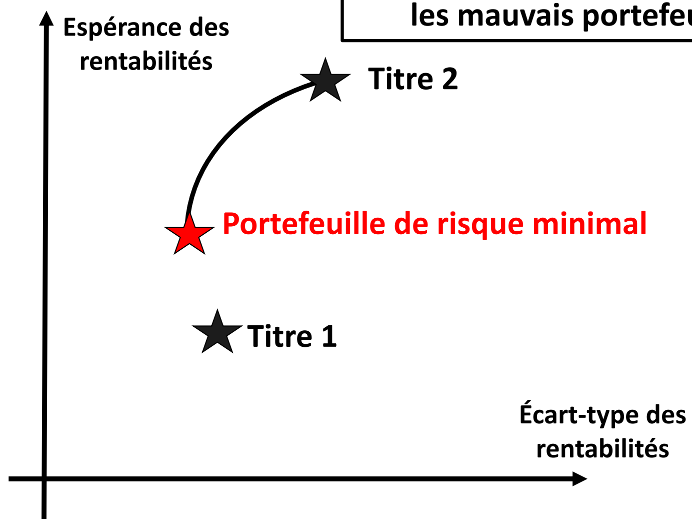


Frontière efficiente



Frontière efficiente

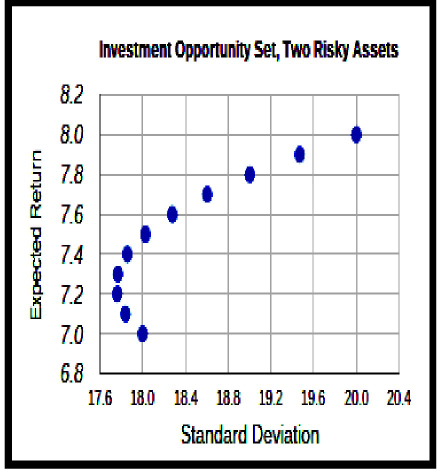
Ce qu'il reste après avoir enlevé les mauvais portefeuilles



Représentation des portefeuilles constitués des titres 1 et 2 dans le plan espérance – écart-type

- *En abscisse l'écart-type du taux de rentabilité du portefeuille* $\sigma_P(x_1)$
- *En ordonnée l'espérance du taux de rentabilité du portefeuille* $E_P(x_1)$

- À chaque point bleu correspond une valeur particulière de x_1



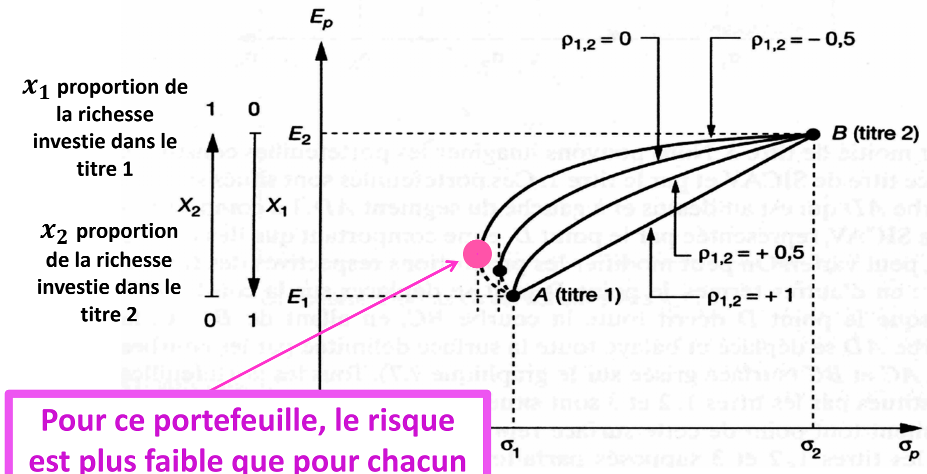
$$E_P(x_1) = E_2 + x_1 \times (E_1 - E_2)$$

$$\sigma_P^2(x_1) = x_1^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}x_1(1 - x_1)\sigma_1\sigma_2 + (1 - x_1)^2\sigma_2^2$$

La théorie du portefeuille

Graphique 2.6 – ***Portefeuilles de 2 titres – Rôle du coefficient de corrélation*** $\rho_{1,2}$

$0 \leq x_1 \leq 1$



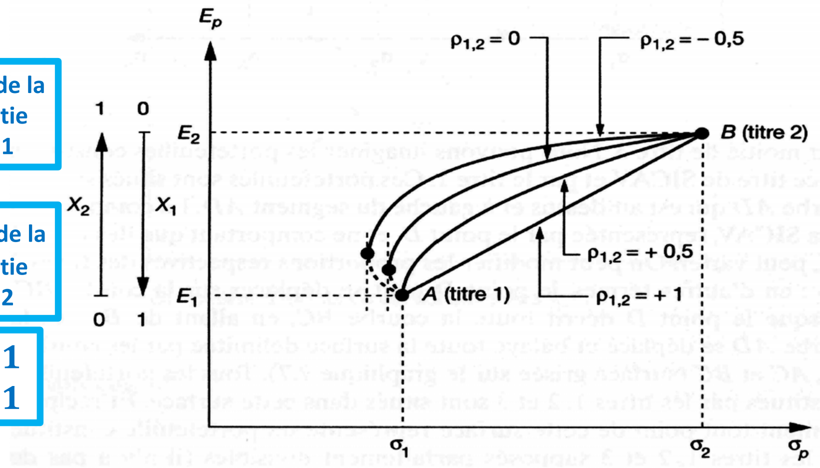
Pour ce portefeuille, le risque est plus faible pour chacun des titres pris isolément

Ensembles des portefeuilles composés des titres 1 et 2 (différents niveaux de corrélation)

x_1 proportion de la richesse investie dans le titre 1

x_2 proportion de la richesse investie dans le titre 2

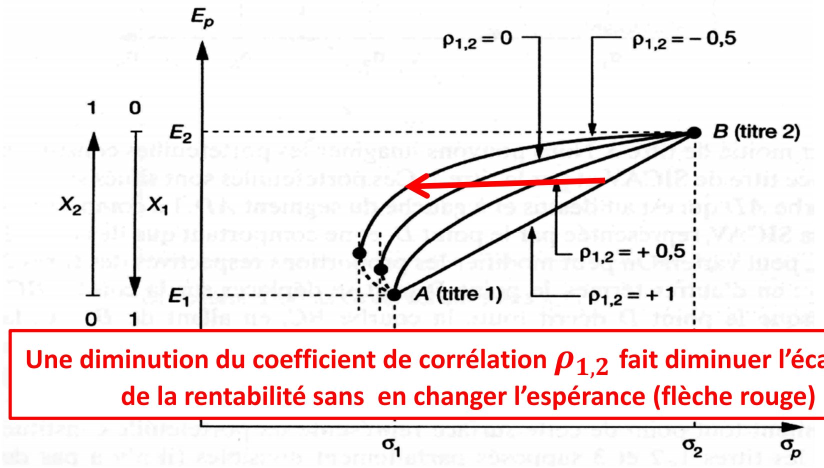
$0 \leq x_1 \leq 1$
$0 \leq x_2 \leq 1$



Chaque courbe représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2 pour un niveau de corrélation $\rho_{1,2}$ donné

Ensembles des portefeuilles composés des titres 1 et 2 (différents niveaux de corrélation)

$$E_P = x_1E_1 + x_2E_2,\ x_1 + x_2 = 1$$
$$\sigma_P^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2\rho_{1,2}x_1x_2\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2$$



Une diminution du coefficient de corrélation $\rho_{1,2}$ fait diminuer l'écart-type de la rentabilité sans en changer l'espérance (flèche rouge)

Frontière efficiente des actifs risqués

- Rappel : espérance (rentabilité attendue) et variance de la rentabilité d'un portefeuille composé de deux titres
  - *Ou deux portefeuilles* 1,2
  - E_1, E_2 *: rentabilités attendues de* 1,2
  - $\boldsymbol{x_1}$ *: part de la richesse investie dans* 1
  - $\boldsymbol{E_P(x_1)}$ *: espérance de rentabilité de P*
- $\boldsymbol{E_P(x_1) = E_2 + x_1 \times (E_1 - E_2)}$
  - Fonction affine de $\boldsymbol{x_1}$
  - $\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2}$ *: écart-types des rentabilités de* 1,2
  - $\boldsymbol{\rho_{12}}$ *: coefficient de corrélation linéaire entre les rentabilités*
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2(x_1)}$ *: variance de la rentabilité de P*
- $\boldsymbol{\sigma_P^2(x_1) = x_1^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}x_1(1-x_1)\sigma_1\sigma_2 + (1-x_1)^2\sigma_2^2}$
  - Fonction quadratique de $\boldsymbol{x_1}$

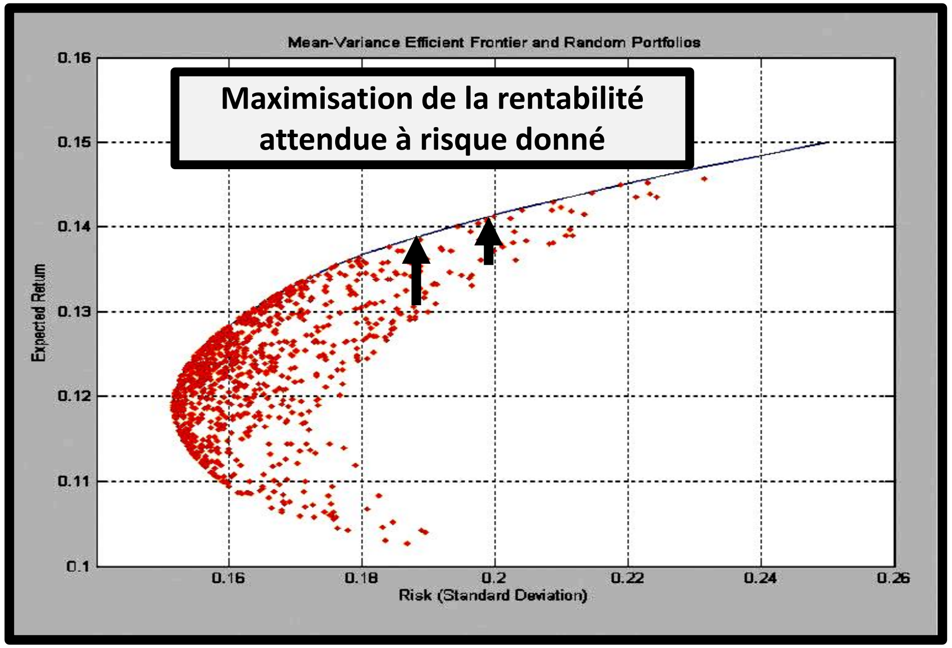
Frontière efficiente d'un ensemble de titres

- On considère un « univers » (ensemble donnée) de n titres « risqués »
  - *écarts-types des rentabilités* > 0
  - *Rentabilités exprimées dans une même devise €, $, …*
  - *On raisonne relativement à l'univers des titres qu'un investisseur donné peut acheter*
- *Loi de probabilité jointe* des rentabilités des titres supposée connue.
  - *En pratique, on aura besoin des **espérances des rentabilités** des titres (soit n valeurs)*
  - *Des **variances des rentabilités** (n valeurs) et des **coefficients de corrélation linéaires** :* $\frac{n(n-1)}{2}$ *coefficients de corrélation*

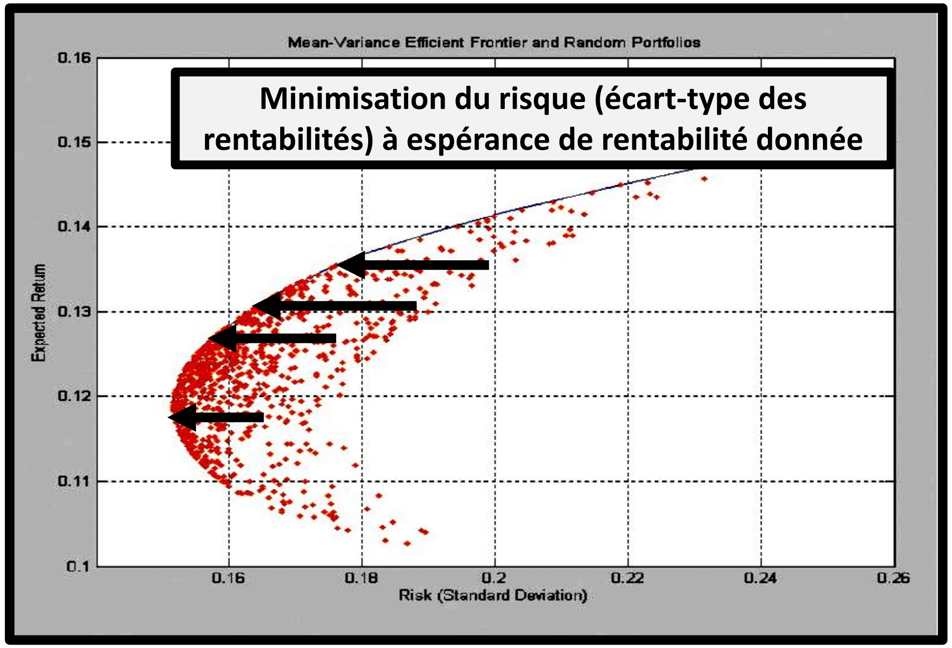
La théorie du portefeuille : frontière efficiente

- Frontière efficiente des actifs risqués
  - On part d'un ensemble de titres
  - On considère les portefeuilles constitués à partir de ces titres
- On recherche **les portefeuilles** qui à espérance de rentabilité donnée minimisent l'écart-type
  - *Ou qui à niveau donné d'écart-type des rentabilités donné maximisent l'espérance de rentabilité*
- On représente ces portefeuilles dans le plan écart-type de la rentabilité (abscisses) – espérance de rentabilité (ordonnées)
- L'ensemble de ces portefeuilles est la **frontière efficiente**
  - Les investisseurs ayant des préférences moyenne-variance vont préférer des portefeuilles sur la frontière efficiente

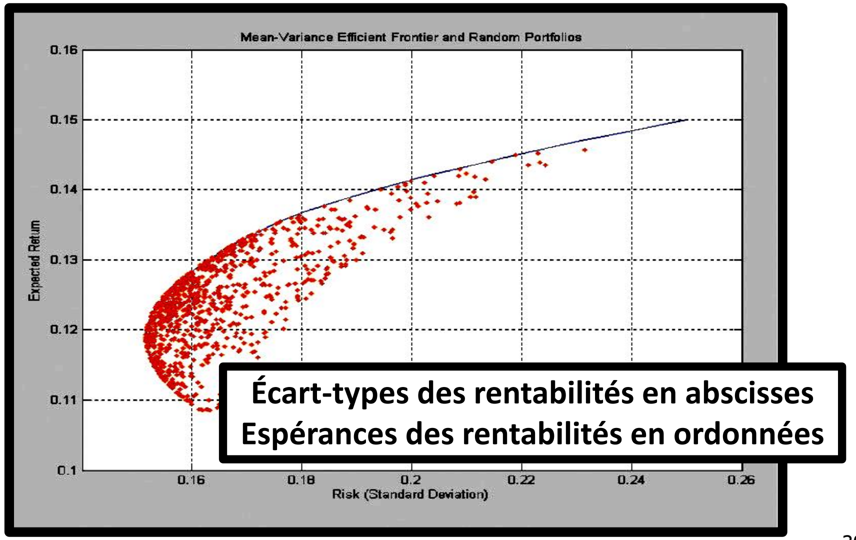
Frontière efficiente



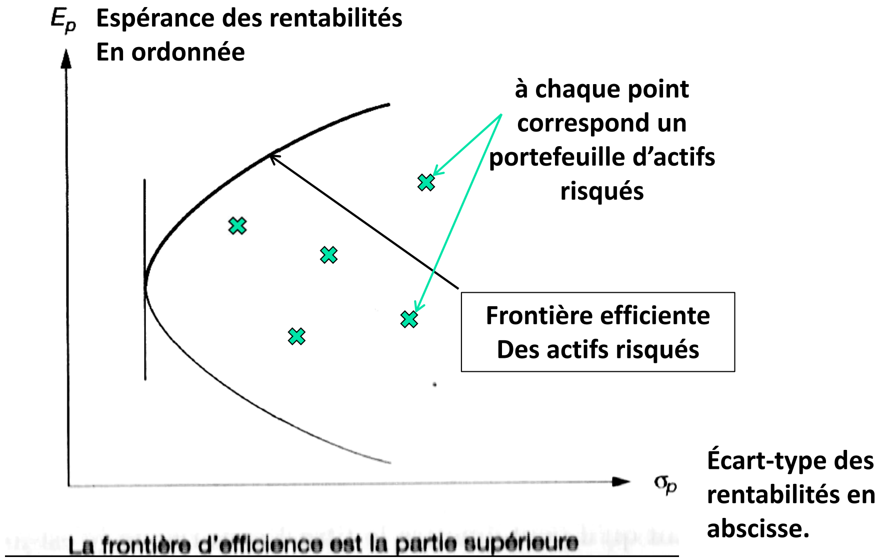
Frontière efficiente



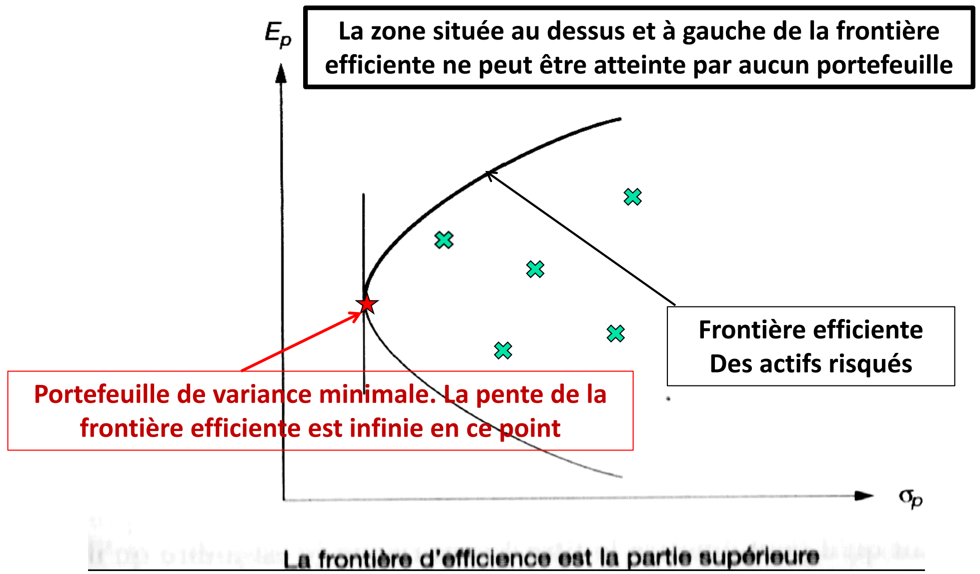
Chaque point représente un portefeuille
On constate qu'on ne peut pas aller au-delà d'une frontière dite efficiente



Frontière efficiente des actifs risqués dans le plan (écart-type des rentabilité, espérance des rentabilités)



Frontière efficiente des actifs risqués dans le plan (écart-type des rentabilité, espérance des rentabilités)



Frontière efficiente

Remise du prix Nobel d'économie à H. Markowitz

- Contribution d'Harry Markowitz
  - *Utilisation de la théorie des probabilités et des techniques d'optimisation pour la constitution de portefeuilles*
- Ce recours à la modélisation a permis de définir de manière précise quels étaient les portefeuilles « efficients »
  - *Frontière efficiente des actifs risqués*
  - *Capital Market Line*
- Ceci suppose de considérer les rentabilités aléatoires
  - *Il faut connaître leur espérance, leur écart-type et les coefficients de corrélation entre les différentes rentabilités*

Frontière efficiente

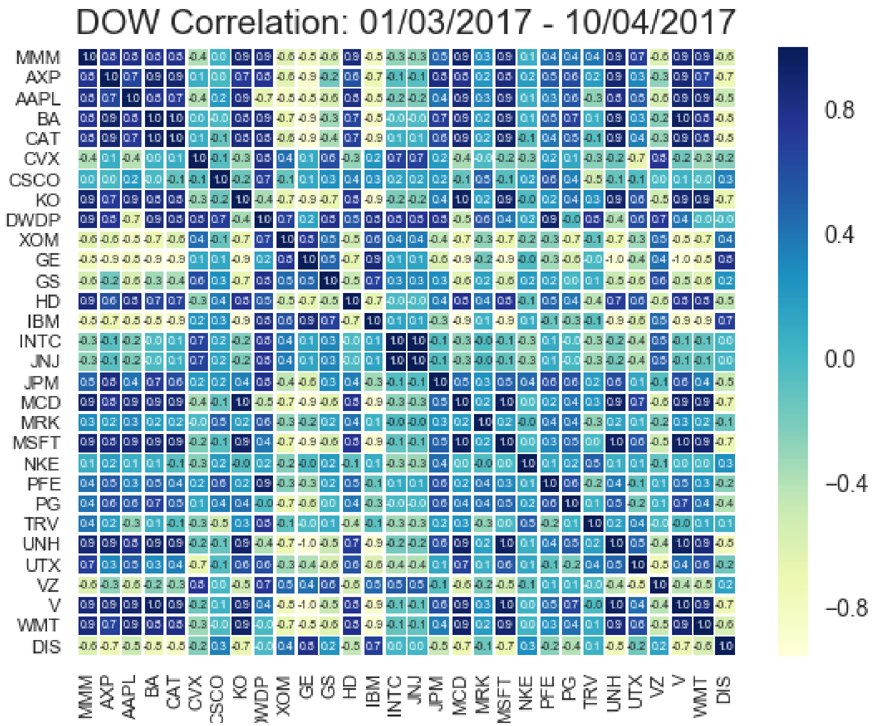
- *« La »* frontière efficiente est relative à un ensemble donné de titres
  - *Par exemple, on peut chercher des portefeuilles constitués d'actions du CAC 40 ou du Dow Jones*
  - *On aura alors deux frontières efficientes*
- Prenons le cas du Dow Jones : 30 sociétés cotées
  - $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ *poids de chacune des sociétés dans le portefeuille*
  - $x_1 + x_2 + \cdots + x_{30} = 100\%$
    - Si interdiction de vente à découvert : $x_1, x_2, \dots, x_{30} \geq 0$
  - *On va chercher à trouver une composition de portefeuille* $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ *qui minimise l'écart-type de la rentabilité* $\sigma_P(x_1, x_2, \dots, x_{30})$ *sous contrainte d'espérance de rentabilité* $E_P(x_1, x_2, \dots, x_{30}) = E$ *où E est une constante*

Les 30 sociétés composant l'indice Dow Jones au 26 juin 2018

3M Company	JPMorgan Chase & Co.
American Express Co.	McDonald's Corp.
Apple Inc.	Merck
Boeing Co.	Microsoft
Caterpillar Inc.	Nike
Chevron	Pfizer
Cisco Systems	Procter & Gamble
Coca-Cola	Travelers
DuPont	UnitedHealth Group
Exxon Mobil	United Technologies
Goldman Sachs	Verizon
Home Depot	Visa
Intel	Wal-Mart
IBM	Walgreens Boots Alliance
Johnson & Johnson	Walt Disney Company

Frontière efficiente

- Cas de deux actifs
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2\rho_{1,2}x_1x_2\sigma_1\sigma_2}$
- Cas de trois actifs
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 + 2\rho_{1,2}x_1x_2\sigma_1\sigma_2 + 2\rho_{1,3}x_1x_3\sigma_1\sigma_3 + 2\rho_{2,3}x_2x_3\sigma_2\sigma_3}$
- Cas de 30 actifs…
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{30} x_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{30}\sum_{j=1,j\neq i}^{30} \rho_{ij}x_ix_j\sigma_i\sigma_j}$
    - Le formalisme mathématique est un peu plus abstrait, mais indispensable.
    - On peut aussi utiliser des notations matricielles pour des écritures plus compactes
  - *Le problème pratique est le nombre de coefficients de corrélations : 435 ici…*



Company Name	Ticker
The 3M Company	MMM
The American Express Company	AXP
Apple Inc.	AAPL
The Boeing Company	BA
Caterpillar Inc.	CAT
Chevron Corporation	CVX
Cisco Systems, Inc.	CSCO
The Coca-Cola Company	KO
DowDuPont Inc.	DWDP
Exxon Mobil Corporation	XOM
The Goldman Sachs Group, Inc.	GS
The Home Depot Inc.	HD
International Business Machines Corporation	IBM
Intel Corporation	INTC
Johnson & Johnson	JNJ

JPMorgan Chase & Co.	JPM
McDonald's Corporation	MCD
Merck & Company, Inc.	MRK
Microsoft Corporation	MSFT
Nike, Inc.	NKE
Pfizer Inc.	PFE
Proctor & Gamble Co.	PG
The Travelers Companies, Inc.	TRV
UnitedHealth Group, Inc.	UNH
United Technologies Corporation	UTX
Verizon Communications Inc.	VZ
Visa Inc.	V
Walmart Inc.	WMT
Walgreens Boots Alliance, Inc.	WBA
The Walt Disney Company	DIS

La théorie du portefeuille : frontière efficiente

- Minimisation du risque (variance) sur l'ensemble des titres $\boldsymbol{i = 1, \ldots, n}$

$$\mathrm{Min}_{x_1,\ldots,x_n} \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \rho_{ij} x_i x_j \sigma_i \sigma_j$$

  - *Sous contraintes linéaires*

$$E_P = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i = \text{constante} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

  - *Minimisation d'une fonction quadratique sous contraintes linéaires.*
  - *Écritures matricielles simples*

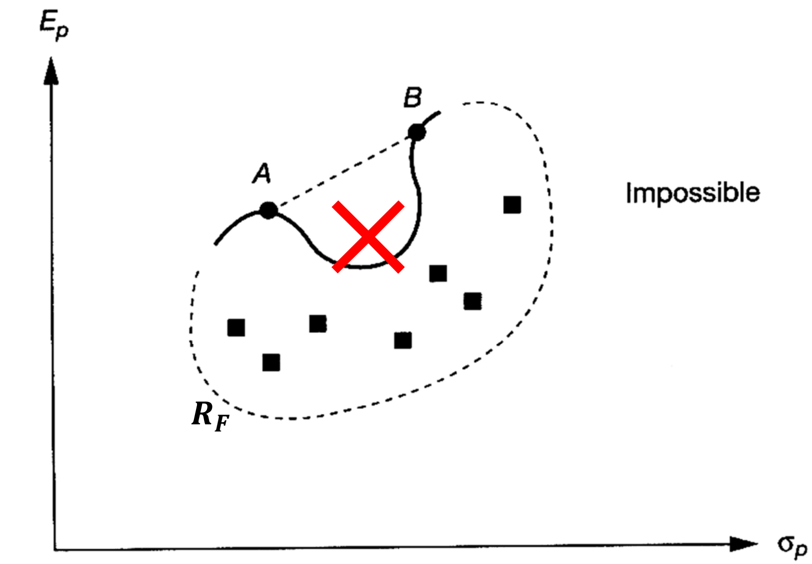
La théorie du portefeuille : frontière efficiente des actifs risqués

- Écritures matricielles compactes
- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x' = (x_1, \dots, x_n), E = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}, \mathrm{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
- $E_P(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i = x'E,$
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = x'e = 1$
  - *On supposera que* E *et* e *ne sont pas colinéaires : toutes les rentabilités attendues ne sont pas égales.*
- $\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$, matrice de variance covariance.
- $\sigma_P^2(x) = x'\Omega x$

La théorie du portefeuille : frontière efficiente des actifs risqués

- Pour résoudre le problème d'optimisation quadratique précédent, on peut écrire le lagrangien
  - $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = x'\Omega x - \lambda x'\mathrm{e} - \mu x'E$
- Puis écrire les conditions du premier ordre pour obtenir les allocations des portefeuilles efficients
  - *Voir les TD pour des applications…*
- On peut en outre montrer quelques propriétés :
  - *Les portefeuilles efficients peuvent être construits à partir de deux portefeuilles arbitraires de la frontière efficiente*
    - L'un des deux peut être le portefeuille de variance minimale
    - Cela rend plus pertinente l'analyse du cas simple avec deux titres
    - Il faut pour cela que les ventes à découvert soient autorisées
  - *Concavité de la frontière efficiente*

La théorie du portefeuille : concavité de la frontière efficiente



La théorie du portefeuille : concavité de la frontière efficiente

Frontière efficiente des actifs risqués : simple en théorie, plus délicat en pratique

- Grande variabilité des inputs (espérance, covariance) par rapport aux données utilisées, notamment la période d'estimation, le choix de l'ensemble des actifs risqués
- Grande sensibilité des compositions de portefeuille par rapport aux inputs
  - Petite modification des espérances de rentabilité associée à des modifications très importantes des allocations
  - Matrices de variance covariance « mal conditionnées » quand le nombre d'actifs est élevé
- Compositions de portefeuille « aberrantes » :
  - *Valeurs des allocations optimales trop élevées, peu réalistes.*
  - *Si on introduit des contraintes de positivité (pas de vente à découvert) : diversification insuffisante*

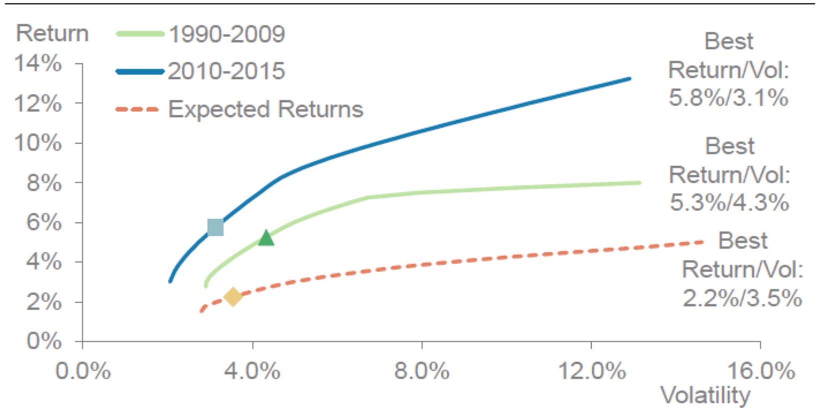
La théorie du portefeuille : frontière efficiente

- Frontière efficiente ex-post : déterminée à partir des rentabilités passées
- Concept non pertinent pour les choix de portefeuilles, sauf à penser que les lois de probabilités sont invariantes (stationnarité)
- Frontière efficiente ex-ante.
  - *Voir transparent suivant :* ***Morgan Stanley: Get Ready for a Period of Low Returns in the Market***
  - *Qui repose la question de la baisse anticipée de la rentabilité des placements risqués*
    - *https://www.bloomberg.com/news/articles/2015-11-30/morgan-stanley-get-ready-for-a-period-of-low-returns-in-the-market*
    - *Novembre 2015*

Source Bloomberg, Morgan Stanley

Exhibit 3

The Falling Efficient Frontier



Note: Based on four assets, US stocks, 10yr Treasuries, IG, HY. Marker indicates portfolio with highest Sharpe ratio. Source: Morgan Stanley Research, Bloomberg

Les frontières efficientes ex-post dépendent de la fenêtre d'estimation et peuvent différer de la frontière efficiente ex-ante qui est pertinente pour les choix de portefeuilles

http://www.bloomberg.com/news/articles/2015-11-30/morgan-stanley-get-ready-for-a-period-of-low-returns-in-the-market

La théorie du portefeuille : frontière efficiente

- Frontière efficiente des actifs risqués
  - *http://www.viddler.com/explore/RoyalVideosTV/videos/367/*
    - 3 minutes et 46 secondes
  - *Would you elaborate on the efficient frontier?*
    - Par Harry Markowitz

Fonds de placement, portefeuilles

- Professional money managers and their influence
  - http://www.youtube.com/watch?v=txTaBKZ8qrs
  - http://www.dnatube.com/video/23729/Lec-20--Professional-Money-Managers-and-their-Influence

Robert Shiller, Yale University 2011 1h12mn

Rentabilité d'un portefeuille

- Fidelity Magellan Fund
  - *http://en.wikipedia.org/wiki/Magellan_Fund*
  - *Fonds géré de manière **active***
  - *La composition du fonds s'écarte de celle de l'indice boursier de référence*
  - *AUM : **Assets Under Management***
  - *Montant total des actifs gérés par une institution financière, fonds commun, société de gestion de fonds*
  - *En 2005, le montant des actifs gérés par ce fond était d'environ 50 milliards de dollars*

Peter Lynch
Ancien gérant vedette du fonds

Rentabilité d'un portefeuille

- Fidelity Magellan Fund
  - *Montant des actifs gérés varie :*
  - *Valeur liquidative de la part*
  - *Dans les fonds ouverts, le nombre de parts varie*
    - Collecte nette (positive ou négative) d'épargne
  - *Dans un fonds fermé, on ne peut vendre ses parts*
  - *Sauf éventuellement à trouver un acheteur*

Évolution d'une part du fond
Cours en USD

Période	Rentabilité du Fond	Rentabilité d'un portefeuille dupliquant l'indice S&P 500
2008	(49.66%)	(38.91%)
2007	18.84%	3.53%
2006	7.22%	15.79%
2005	6.42%	4.91%
2004	7.49%	10.88%
2003	24.82%	26.68%
2002	(23.66%)	(22.10%)
2001	(11.65%)	(11.89%)
2000	(9.29%)	(9.11%)
1999	24.05%	21.04%
1998	33.63%	28.58%

Rentabilités annuelles comparées
Du fond Fidelity Magellan et de l'indice Standard & Poors 500

TOP TEN BINGO

Rentabilité d'un portefeuille

- Pourcentage de la richesse investie dans deux fonds
  - *Poids ω_i représentés par ordre décroissant pour deux fonds*
  - *Actions privilégiées par les gérants*

Vanguard INVESTMENTS

Fidelity INVESTMENTS

MORNINGSTAR

Détention d'actifs par les fonds
Top ten holdings 31/3/2002

	x (%)	Fidelity Magellan	Vanguard Index 500	x(%)
1	4.47%	Citigroup	General Electric	3.52 %
2	4.37%	General Electric	Microsoft	3.09%
3	2.98%	Microsoft	ExxonMobil	2.84%
4	2.83%	Viacom	Wal-Mart Stores	2.59%
5	2.71%	AIG	Citigroup	2.41%
6	2.56%	ExxonMobil	Pfizer	2.37%
7	2.41%	Wal-Mart Stores	Intel	1.93%
8	2.38%	Pfizer	Johnson & Johnson	1.89%
9	1.83%	Home Depot	AIG	1.78%
10	1.81%	Philip Morris	IBM	1.70%

source Yahoo! Finance, Morningstar

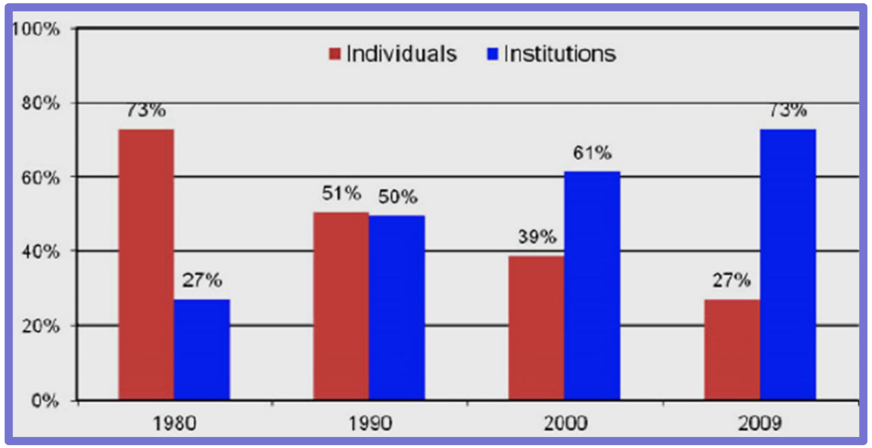
Rentabilité d'un portefeuille

- Pourcentage de la richesse investie dans les fonds
  - *Pourcentages de richesse investie par secteurs d'activité*

	Fidelity Magellan	Vanguard Index 500
Energy	8.28%	3.52 %
Financials	23.15%	3.52 %
Industrial Cyclicals	10.50%	3.09%
Consumer Durables	1.42%	2.84%
Consumer Staples	7.01%	2.59%
Services	13.26%	2.41%
Retail	9.08%	2.37%
Health	11.77%	1.93%
Technology	15.49%	1.89%

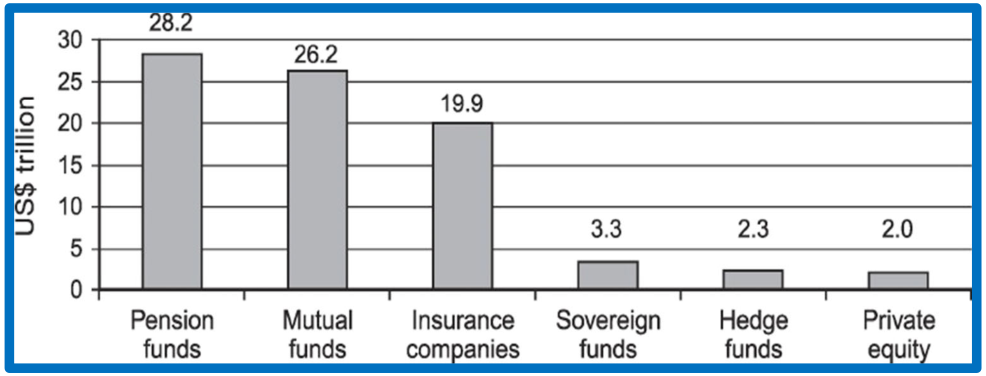
source Yahoo! Finance, Morningstar

- Le lecteur attentif remarquera au moins une coquille dans le tableau ci-dessous

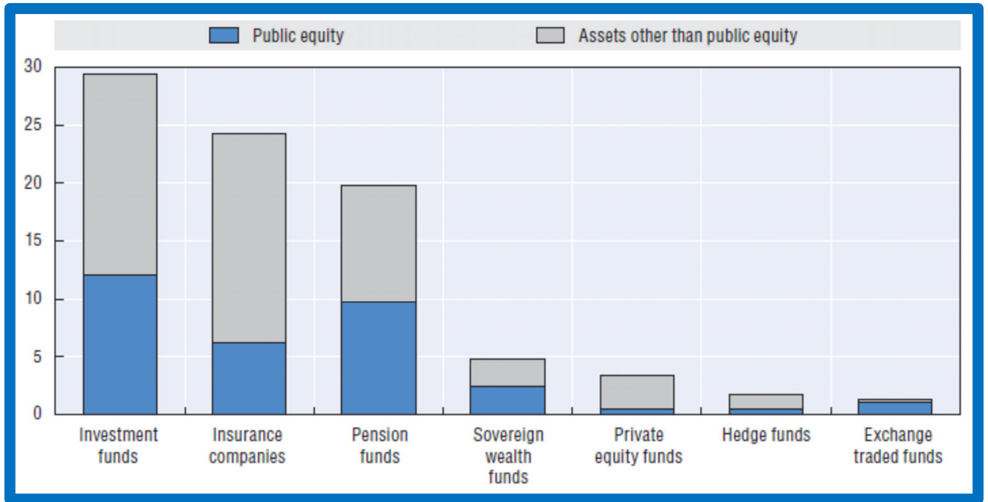


- Évolution de la détention d'actions américaines par les particuliers et par les « investisseurs institutionnels »
- La part des actions détenues par les particuliers est beaucoup plus faible dans d'autres grands pays (Japon, Royaume-Uni, France)

Différents types d'investisseurs institutionnels



- Fonds d'investissement, compagnies d'assurances, fonds de retraites (pension funds), fonds souverains, « private equity funds », hedge funds, ETF (Exchange Traded Funds)
- Gérant au total 84 000 milliards de $ en 2011, selon l'OCDE



La part investie en actions côtées varie selon les investisseurs institutionnels

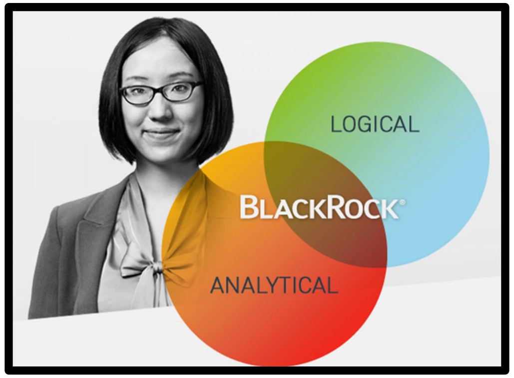
Il faut aussi prendre en compte actions non cotées, obligations, crédits, immobiliers, matières premières, …

Les nouveaux acteurs de la finance, une ambition mondiale: « less banks, more markets » ?

BLACKROCK®

INVESTING FOR A NEW WORLD™

8500 milliards de $ d'actifs gérés



Critères mis en avant par BlackRock pour le recrutement

PIMCO

1152 milliards de $ d'actifs gérés

Newport Beach, siège de PIMCO

L'évolution de la réglementation sur le cadre de gestion un peu avant et après le départ en retraite est donc un enjeu majeur de la fin de ce quinquennat ou du prochain, afin de finaliser ce qui a été commencé avec la loi Pacte.

Une fois le cadre de dé-cumulation clarifié, des solutions innovantes de gestion pourront être proposées aux épargnants par les différents acteurs privés

Extrait du document « Le bon planRetraite » de BlackRock, juin 2019

Larry Fink, patron de BlackRock à l'Elysée, le 11 juillet 2019

https://www.blackrock.com/corporate/literature/whitepaper/viewpoint-loi-pacte-le-bon-plan-retraite-juin-2019.pdf

Les dix plus grandes sociétés de gestion de fonds Données de 2015

	Company	Country	2015 total 31.12.14 (€m)
1	BlackRock	US/UK	3,844,383
2	Vanguard Asset Management	US/UK	2,577,380
3	State Street Global Advisors	US/UK	2,023,149
4	Fidelity Investments	US	1,595,380 (1)
5	BNY Mellon Invest. Management EMEA	US/UK	1,407,163
6	J.P. Morgan Asset Management	US/UK	1,266,805
7	Capital Group	US	1,167,231
8	PIMCO	US/Germany/UK	1,162,583 (1)
9	Pramerica Investment Management	US	968,628
10	Amundi	France	865,985

The Titans of Wealth

The globe's 10 largest private banks and wealth managers collectively oversee almost $9 trillion for high-net-worth clients.

Global Ranking	Institution	AUM (bil)	Growth 2013
1	UBS	$1,966.9	15.4%
2	Bank of America Merrill Lynch	1,866.6	12.5
3	Morgan Stanley	1,454.0	17.5
4	Credit Suisse	888.2	9.5
5	Royal Bank of Canada	673.2	5.6
6	BNP Paribas	395.1	11.4
7	Deutsche Bank	384.1	13.7
8	HSBC	382.0	-4.0
9	JPMorgan Chase	361.0	13.5
10	Pictet	338.1	12.0

Source: Scorpio Partnership Global Private Banking Benchmark 2014

- Les investisseurs peuvent décider eux-mêmes de leur allocation de portefeuille ou la déléguer à un tiers
  - *Fonds « communs » : prêt à porter*
  - *Gestion privée (ou sous mandat) : sur mesure*

UBS

Singapour, nouvelle frontière de la banque privée ?

UBS **Wealth Management Singapore**

UBS, première banque privée en Asie

Best Global Bank for High Net Worth Individuals (US$10 million to US$30 million)
Euromoney (2009 - 2017)
Best Private Bank in Asia for Ultra High Net Worth Individuals
Euromoney (2011 - 2017)

Le théorème de séparation en deux fonds ?

- On rappelle que d'après le théorème de séparation en deux fonds de Tobin
- Les investisseurs devraient détenir une proportion variable (selon leur niveau d'aversion vis-à-vis du risque) d'actif sans risque et de portefeuille tangent
- La composition du portefeuille d'actifs risqués devrait être la même pour tous les investisseurs
- Ceci est en contradiction avec les recommandations gestionnaires de portefeuilles
- Il semble en effet que plus le niveau de risque augmente, plus la part relative de la poche obligataire par rapport à celle des actions est faible

Le théorème de séparation en deux fonds ?

- *CANNER, N., MANKIW, N. G., & WEIL, D. N. (1997). An Asset Allocation Puzzle. THE AMERICAN ECONOMIC REVIEW.*
  - http://stat.wharton.upenn.edu/~steele/Courses/956/SeparationTheorem/MankiwSeparation.pdf

La proportion des obligations par rapport aux actions décroit avec le niveau de risque …

TABLE 1—ASSET ALLOCATIONS RECOMMENDED BY FINANCIAL ADVISORS

Advisor and investor type	Percent of portfolio: Cash	Bonds	Stocks	Ratio of bonds to stocks
A. Fidelity[a]				
Conservative	50	30	20	1.50
Moderate	20	40	40	1.00
Aggressive	5	30	65	0.46
B. Merrill Lynch[b]				
Conservative	20	35	45	0.78
Moderate	5	40	55	0.73
Aggressive	5	20	75	0.27
C. Jane Bryant Quinn[c]				
Conservative	50	30	20	1.50
Moderate	10	40	50	0.80
Aggressive	0	0	100	0.00
D. *The New York Times*[d]				
Conservative	20	40	40	1.00
Moderate	10	30	60	0.50
Aggressive	0	20	80	0.25

Le théorème de séparation en deux fonds ?

- Tous les investisseurs détiennent le même portefeuille constitué de titres risqués : le **portefeuille tangent**
- Mais les investisseurs n'ont pas tous accès aux mêmes titres
- Autant de frontières efficientes et de portefeuilles tangents que d'univers de titres dans lesquels telle ou telle catégorie d'investisseurs peut effectivement investir.
- Le portefeuille tangent peut impliquer des ventes à découvert (poids négatifs) non autorisées pour certains.
- Les investisseurs peuvent être en désaccord sur les inputs (espérances, écarts-types, corrélation)
- Pluralité de portefeuilles tangents

Le théorème de séparation en deux fonds ?

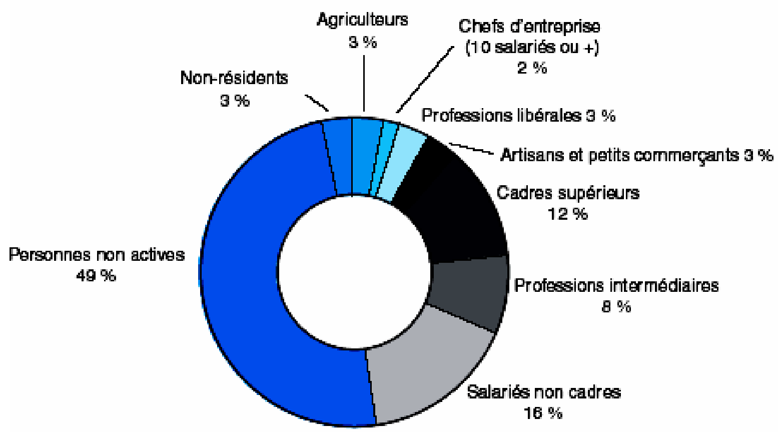
- Dans quelle mesure la théorie relative à l'efficience du portefeuille de marché a-t-elle un caractère réaliste ?
  - *Difficulté pratique de constituer le portefeuille de marché*
- On peut s'intéresser aux portefeuilles effectivement détenus par les investisseurs
  - *En pratique, les portefeuilles sont insuffisamment diversifiés*
    - L'intermédiation financière, contrats d'assurance-vie, fonds communs de placement facilite la diversification
  - *Avec trop de concentration dans les actifs immobiliers*
- On peut s'interroger sur le caractère pertinent des préférences moyenne-variance
  - *Au niveau individuel, les critères de choix de nombreux investisseurs sont plus complexes et difficiles à formaliser*

Le théorème de séparation en deux fonds ?

- Les détenteurs d'actifs risqués sont plutôt riches, âgés et ayant une bonne connaissance du monde économique
- Les riches âgés ont plus d'actifs risqués que les (peu nombreux) jeunes et riches
  - *À l'encontre des recommandations des spécialistes*
  - *C'est également à l'encontre de l'intuition selon laquelle les jeunes devraient être moins averses vis-à-vis du risque*
  - *Et qu'ils devraient détenir plus d'actions car c'est un « placement de long terme »*
  - *Explications ?*
    - Capital humain (background risk),
    - cycle de vie (immobilier),
    - contraintes d'endettement ?

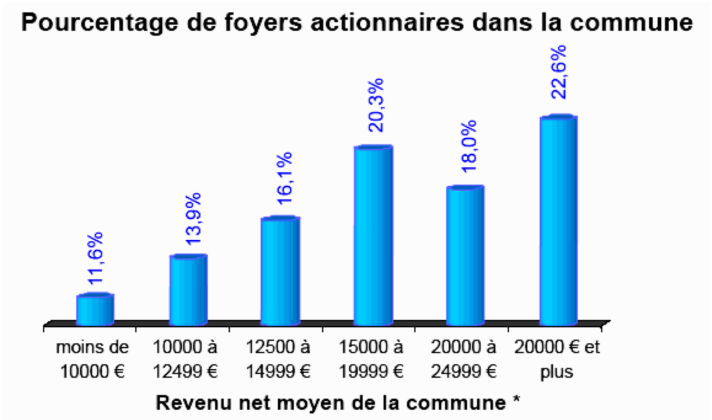
Le théorème de séparation en deux fonds ?

- *Patrimoine en valeurs mobilières des personnes physiques*
  - professions et catégories socioprofessionnelles (PCS) supérieures concentrent l'essentiel de la détention des valeurs mobilières

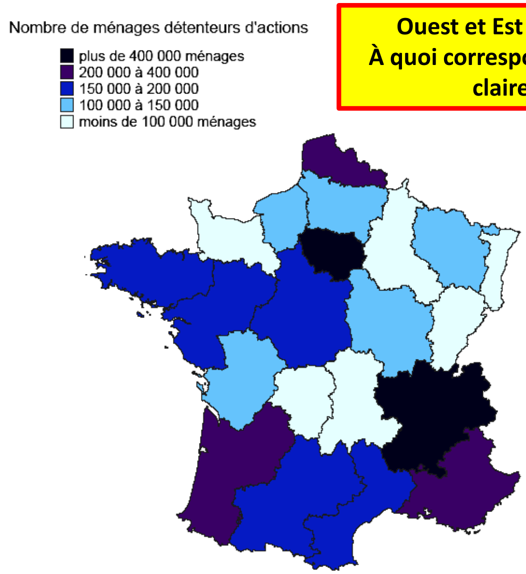


Le théorème de séparation en deux fonds ?

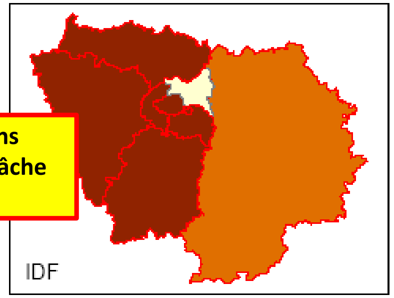
- *Répartition régionale des actionnaires individuels*
  - 4,4 millions de ménages actionnaires individuels
  - Soit 20% du nombre de ménages
  - 1,3 millions en Ile de France, soit 30% des ménages



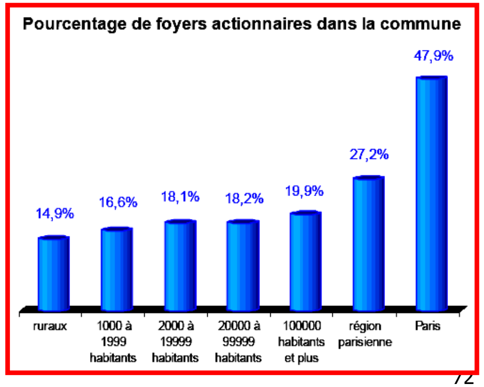
Qui détient des actifs financiers ?



Ouest et Est parisiens
À quoi correspond la tâche claire ?



Île de France



Qui détient des actifs financiers ?

- Détention d'actions (en % de ménages de la commune)
  - *Palmarès des communes d'Ile de France*
    - Milon la Chapelle, Neuilly sur Seine, Saint-Nom-la-Bretèche, Gadancourt, Louveciennes, Marnes-la-Coquette, Paris 16, Paris 7, Paris 8, Vaucresson, Le Vésinet
  - *Palmarès des communes provinciales de plus de 2000 habitants*
    - Saint-Didier-au-Mont-d'Or, Bondues, Ecully, Mouveaux, Bois-Guillaume, Lyon 06, …

Qui détient des actifs financiers (risqués)

- *Patrimoine des personnes physiques*
- *Les ménages les plus aisés ont des portefeuilles plus risqués et plus diversifiés*

En 2003

	Nombre de comptes	Montant des portefeuilles						Total des portefeuilles
		Actions		Obligations		Titres d'OPCVM		
		Françaises cotées	Étrangères	Françaises	Étrangères	Monétaires	Autres	
Moins de 7 600 euros	59,4	10,3	6,3	3,9	1,7	3,2	10,7	8,4
De 7 601 à 15 000 euros	14,6	8,2	4,6	9,0	2,4	4,7	11,7	9,2
De 15 001 à 38 000 euros	15,1	17,0	9,6	24,6	5,2	11,1	22,5	19,7
De 38 001 à 76 000 euros	6,3	16,1	11,1	22,2	7,7	12,4	18,7	17,7
De 76 001 152 000 euros	3,1	15,9	14,2	18,3	10,2	14,7	15,2	15,8
Plus de 152 000 euros	1,5	32,5	54,3	22,0	72,8	53,8	21,2	29,2
Total	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**

Qui détient des actifs financiers (risqués)

- Portefeuilles en valeurs mobilières par tranche d'âge
  - *Les « riches » sont en général âgés (théorie du cycle de vie)*

En 2003

	Nombre de comptes	Montant des portefeuilles						Total des portefeuilles
		Actions		Obligations		Titres d'OPCVM		
		Françaises cotées	Étrangères	Françaises	Étrangères	Monétaires	Autres	
Moins de 18 ans	1,5	0,6	1,0	0,6	0,3	1,0	0,5	0,6
De 18 à 25 ans	2,8	0,8	0,9	0,6	0,5	0,9	0,8	0,8
De 26 à 35 ans	10,5	4,0	3,5	1,7	2,9	4,4	4,1	3,6
De 36 à 45 ans	15,2	10,4	8,3	5,2	9,7	12,6	10,1	9,5
De 46 à 55 ans	19,0	18,5	15,3	11,0	15,9	19,6	16,9	16,5
De 56 à 65 ans	17,8	21,2	18,8	15,9	21,9	22,5	20,2	19,9
Plus de 65 ans	33,2	44,5	52,1	65,0	48,8	38,9	47,5	49,2
Total	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**	**100,0**

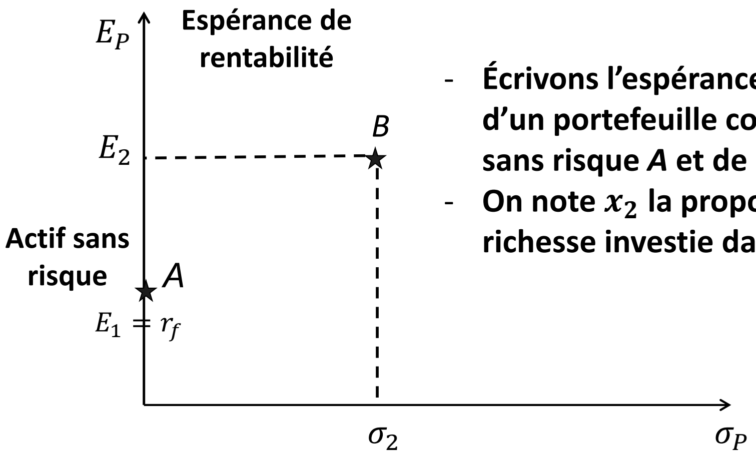
- Frontière efficiente des actifs risqués
  - *Plan « écart-type, espérance de rentabilité »*
  - *Préférences des investisseurs*
  - *Concavité de la frontière efficiente*
- **Capital Market Line (CML)**
  - ***Portefeuille risqué + actif sans risque***
  - ***Portefeuille tangent, choix optimal de portefeuille, CML***
  - ***Portefeuille de marché, ratio de Sharpe***

Capital Market Line

- Portefeuille risqué + actif sans risque
  - *Représentation dans le plan « écart-type, espérance de rentabilité »*
- Choix optimal de portefeuille
  - *Portefeuille tangent*
  - *« Capital Market Line »*
- Portefeuille de marché
  - *Demande de titres*
  - *Ratio de Sharpe*
  - *Portefeuille tangent et portefeuille de marché*

Actif sans risque + actif risqué

- Portefeuilles obtenus par combinaison d'un actif sans risque et d'un actif (ou portefeuille) risqué



- **Écrivons l'espérance et l'écart-type d'un portefeuille composé de l'actif sans risque *A* et de l'actif risqué *B***
- **On note x_2 la proportion de la richesse investie dans B**

Actif sans risque + actif risqué

- On constitue un portefeuille constitué de deux actifs
- $\boldsymbol{R_1, R_2}$ rentabilités aléatoires des titres $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$
- Espérances des rentabilités : $\boldsymbol{E_1 = E[R_1], E_2 = E[R_2]}$
- $\boldsymbol{\sigma_2 = \sigma[R_2]}$ écart-type de la rentabilité du titre $\boldsymbol{B}$
- $\boldsymbol{\sigma_1 = 0}$ Le titre $\boldsymbol{A}$ est « sans risque », sa rentabilité $\boldsymbol{R_1}$ n'est pas aléatoire
  - *On aura* $\boldsymbol{R_1 = E_1 = r_f}$
- Rentabilité du portefeuille
- $\boldsymbol{R_P = x_1 R_1 + x_2 R_2, x_1 + x_2 = 1}$
- On va s'intéresser à l'espérance et à l'écart-type de $\boldsymbol{R_P}$

Actif sans risque + actif risqué

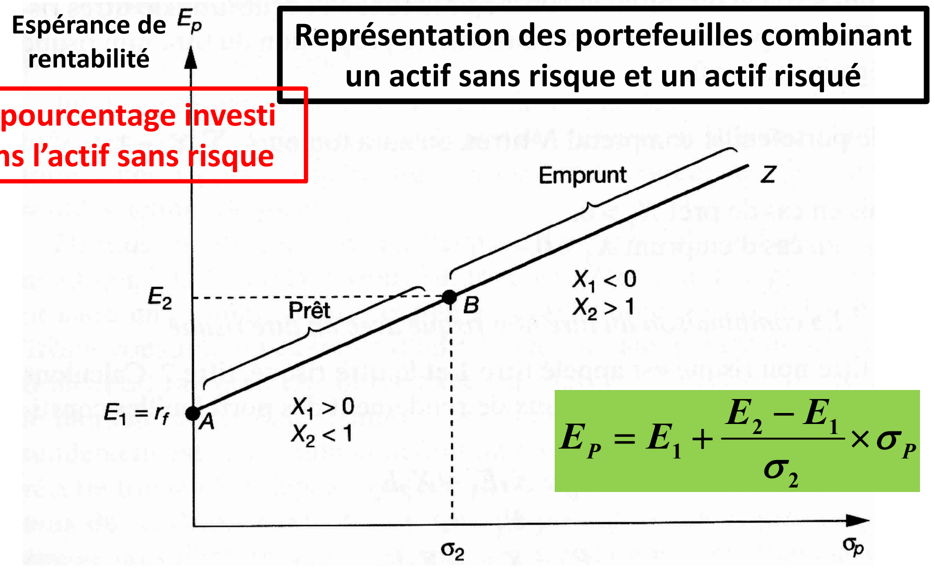
- On constitue un portefeuille constitué de deux actifs
- Espérance de la rentabilité du portefeuille
- $E_P = x_1 E_1 + x_2 E_2 = E_1 + x_2 \times (E_2 - E_1)$
- Variance de la rentabilité du portefeuille
  - $\sigma_P^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}x_1\sigma_1 x_2\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2 = x_2^2\sigma_2^2$
  - $\sigma_P = x_2\sigma_2$ <u>si</u> $x_2 \geq 0$, *d'où* $x_2 = \frac{\sigma_P}{\sigma_2}$
  - *En reportant* $x_2 = \frac{\sigma_P}{\sigma_2}$ *dans* $E_P = E_1 + \frac{\sigma_P}{\sigma_2} \times (E_2 - E_1)$
- On obtient le lien entre espérance E_P et écart-type σ_P
- $E_P = E_1 + \frac{E_2 - E_1}{\sigma_2} \times \sigma_P$
  - *Relation affine entre* σ_P *et* E_P

Actif sans risque + actif risqué dans le plan risque / rentabilité

Relation affine entre σ_P et E_P

Représentation des portefeuilles combinant un actif sans risque et un actif risqué

x_1 pourcentage investi dans l'actif sans risque



$$E_P = E_1 + \frac{E_2 - E_1}{\sigma_2} \times \sigma_P$$

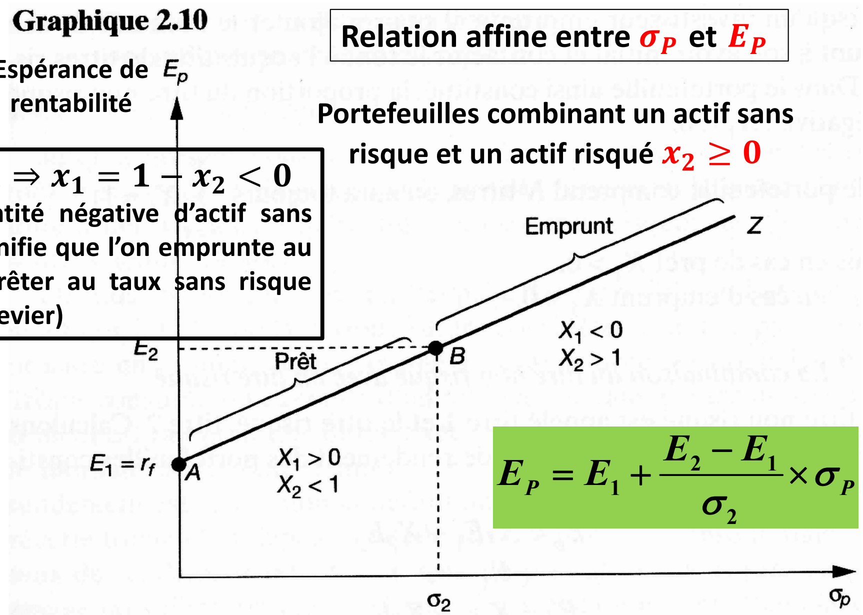
Actif sans risque + actif risqué

Graphique 2.10

Relation affine entre σ_P et E_P

Portefeuilles combinant un actif sans risque et un actif risqué $x_2 \geq 0$

$x_2 > 1 \Rightarrow x_1 = 1 - x_2 < 0$
Une quantité négative d'actif sans risque signifie que l'on emprunte au lieu de prêter au taux sans risque (effet de levier)

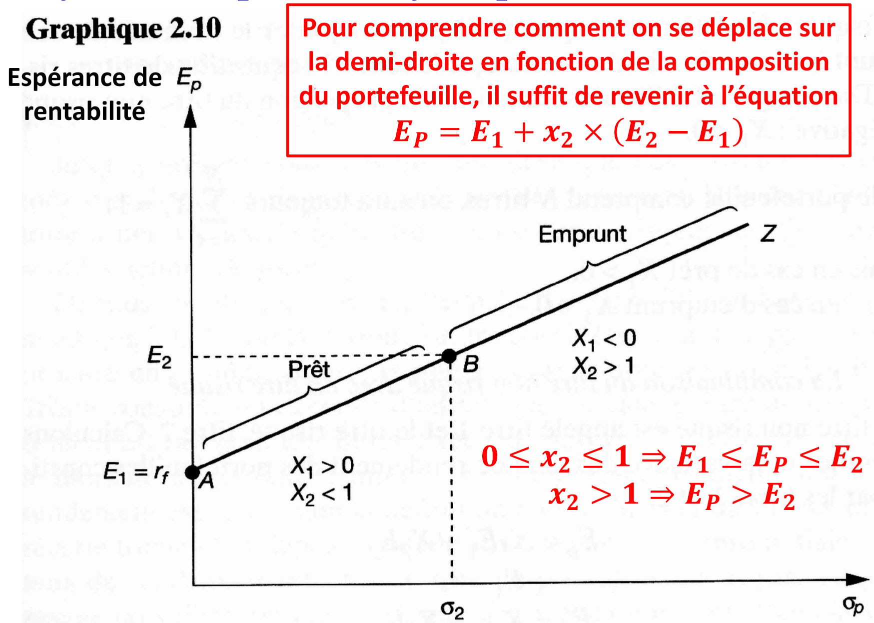


$$E_P = E_1 + \frac{E_2 - E_1}{\sigma_2} \times \sigma_P$$

Actif sans risque + actif risqué

Graphique 2.10

Pour comprendre comment on se déplace sur la demi-droite en fonction de la composition du portefeuille, il suffit de revenir à l'équation $E_P = E_1 + x_2 \times (E_2 - E_1)$



$0 \leq x_2 \leq 1 \Rightarrow E_1 \leq E_P \leq E_2$

$x_2 > 1 \Rightarrow E_P > E_2$

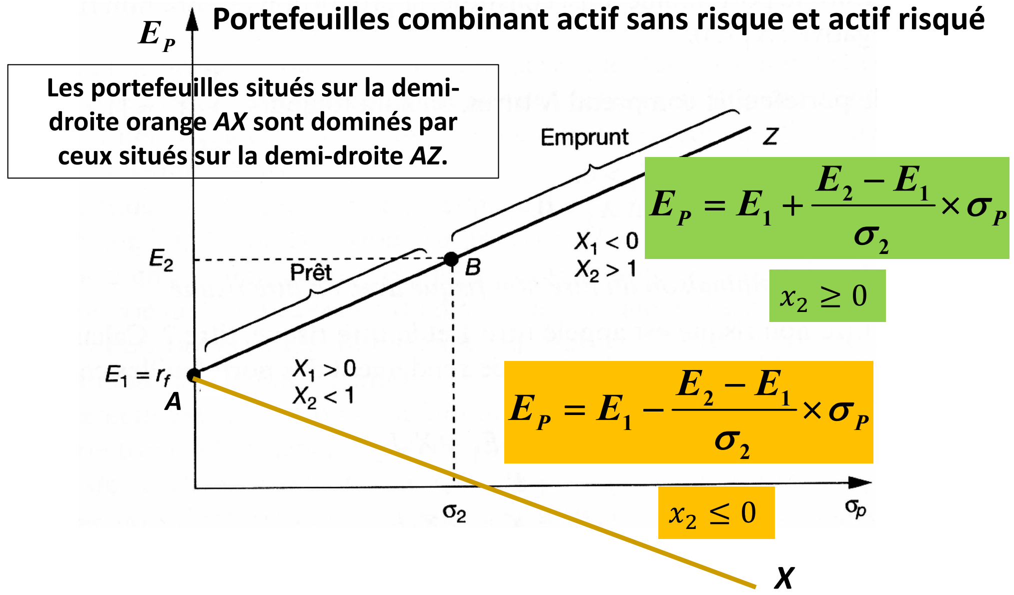
Exercice : Actif sans risque + actif risqué, impact des ventes à découvert

- Sur la demi-droite précédente, $\boldsymbol{x_2 > 0}$
  - *Interprétation financière du cas* $\boldsymbol{x_2 < 0}$
  - *Le titre risqué B est vendu à découvert*
  - *Revenons sur les équations donnant* $\boldsymbol{E_P, \sigma_P}$

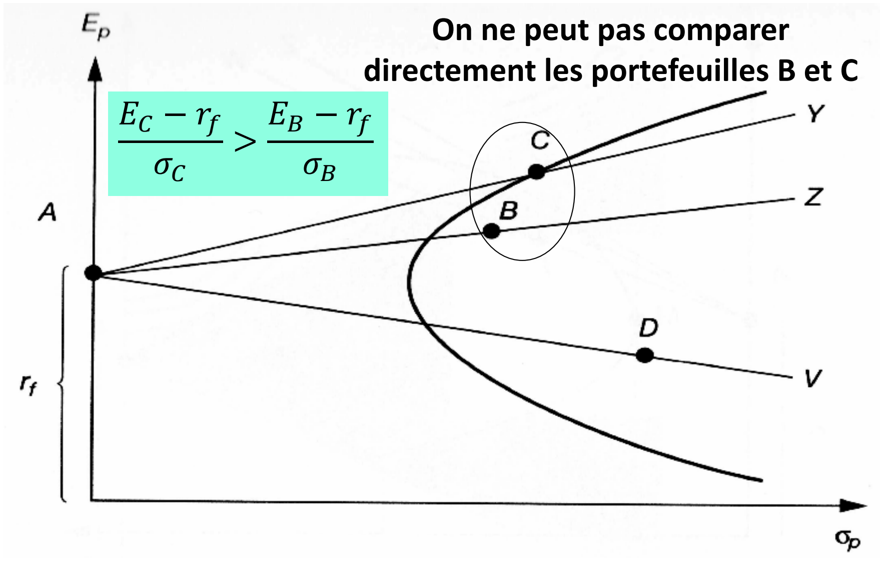
$$\begin{cases} E_P = E_1 + x_2 \times (E_2 - E_1) \\ \sigma_P^2 = x_2^2 \sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_P = |x_2| \sigma_2 \end{cases}$$

  - *Si* $\boldsymbol{x_2 < 0, \sigma_P = -x_2 \sigma_2}$
  - *D'où :* $\boldsymbol{E_P = E_1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_2}(E_2 - E_1)}$
  - *C'est l'équation d'une demi-droite*
    - Voir la demi-droite orangée sur le transparent suivant

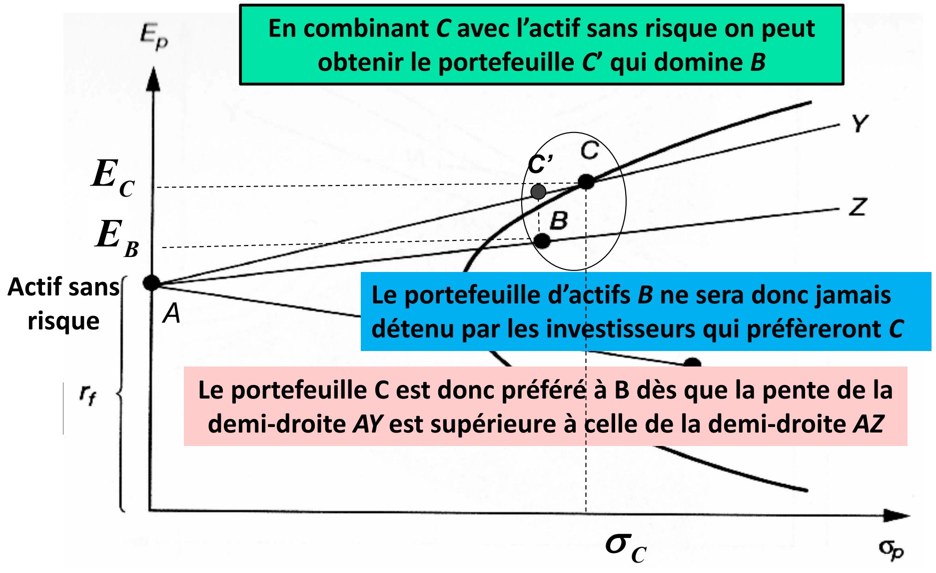
Exercice : Actif sans risque + actif risqué, impact des ventes à découvert



Actif sans risque + actif risqué

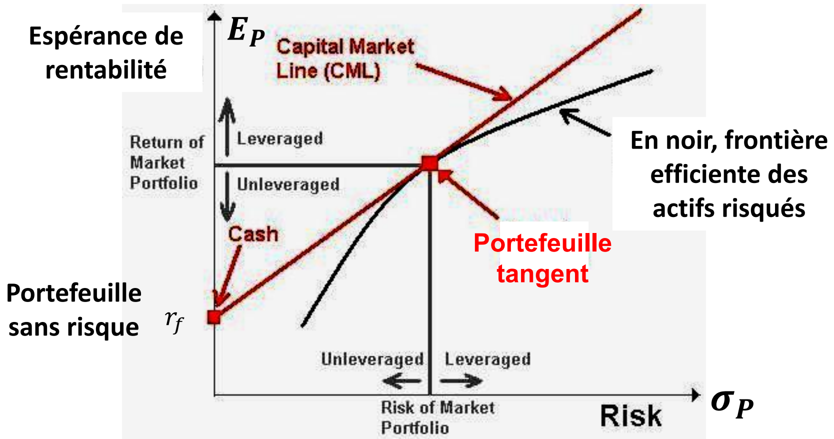


Actif sans risque + actif risqué



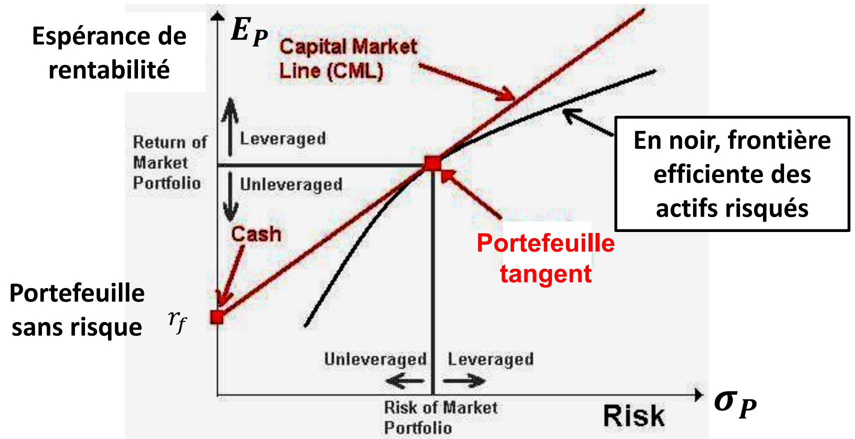
Portefeuille tangent, allocations optimales

- **En noir**, frontière efficiente des actifs risqués
  - Elle est concave, on la suppose sans angles
- **En rouge**, la demi droite d'origine l'actif sans risque est tangente à la frontière efficiente des actifs risqués



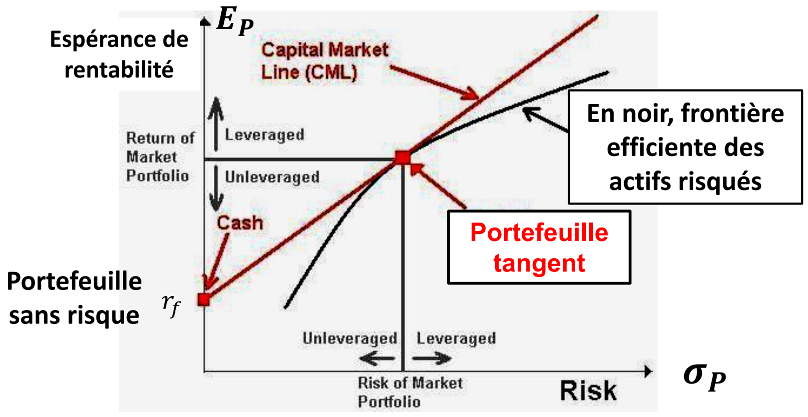
Portefeuille tangent, allocations optimales

- **Demi-droite** dont l'origine est le point associé **au placement sans risque** et qui passe par le point associé au **portefeuille tangent** : « capital market line » (CML)
  - *Abscisses : écarts-types, ordonnées : espérances de rentabilité*



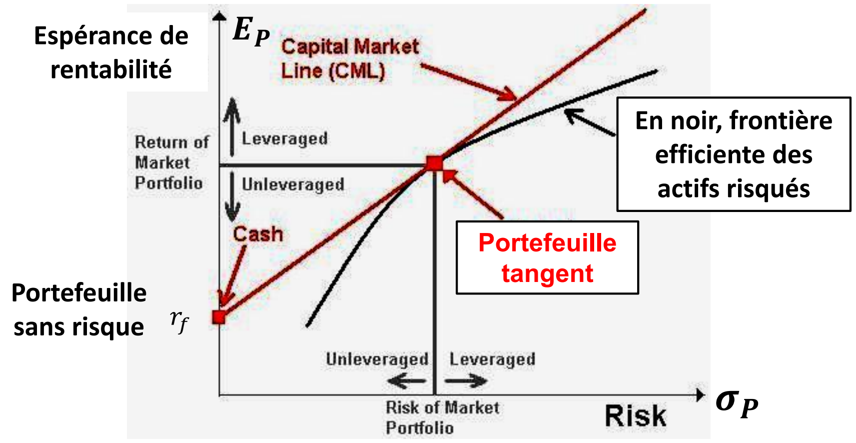
Portefeuille tangent, allocations optimales

- L'extrémité **gauche** de la CML correspond à un portefeuille investi à 100% en actif sans risque
- La CML s'obtient en reliant ce point au <u>point de tangence</u> à la frontière efficiente des actifs risqués



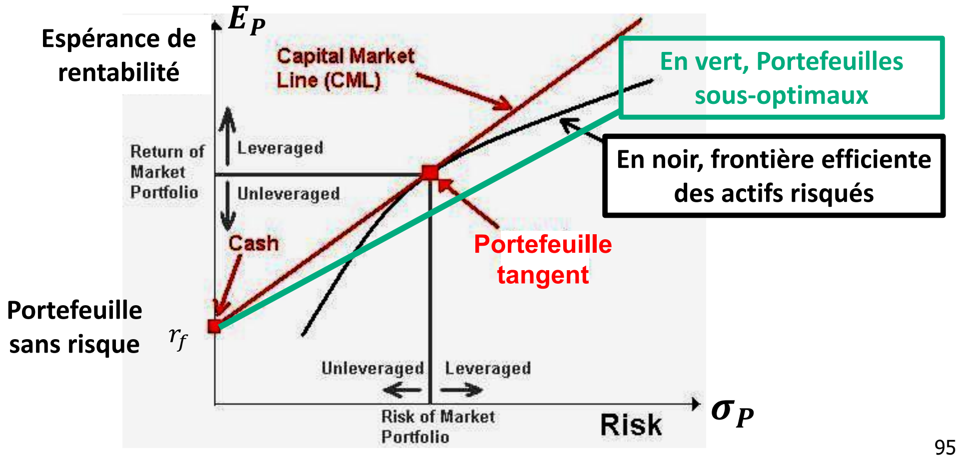
Portefeuille tangent, allocations optimales

- CML associée à l'ensemble des portefeuilles constitués du placement sans risque et du portefeuille tangent
  - Avec une position longue (acheteuse) dans le portefeuille tangent



Portefeuille tangent, allocations optimales

- La pente de la CML est maximale.
- Portefeuille tangent maximise $\frac{E_P - r_f}{\sigma_P}$ (pente des demi-droites)



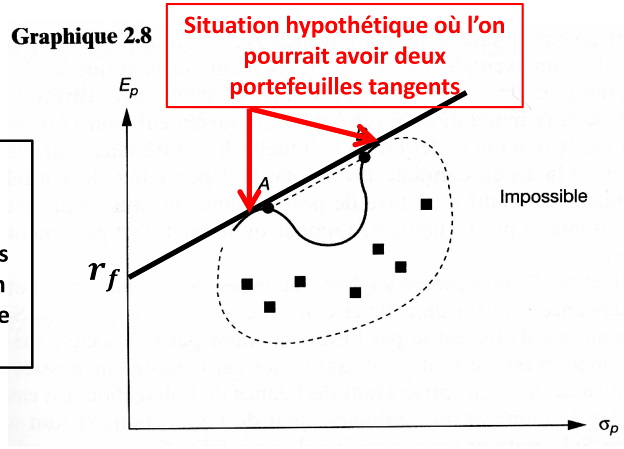
« Capital Market Line » (CML)

- Tous les portefeuilles sur la CML sont constitués de placement sans risque et de portefeuille tangent
  - *En des proportions variables*
  - ***Théorème de séparation en deux fonds***
- Les individus détiennent plus ou moins d'actif risqué en fonction de leur aversion vis-à-vis du risque
  - *Pour atteindre un niveau de rentabilité supérieur à celui du portefeuille tangent, il est nécessaire d'emprunter pour acheter des titres risqués*
    - Effet de levier
    - Actionnaires d'une entreprise finançant une partie de leurs actifs par endettement

« Capital Market Line » (CML)

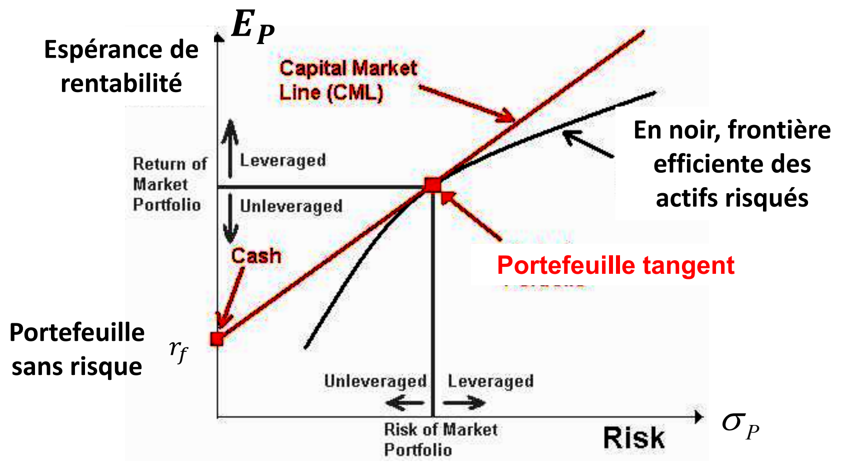
- Remarque : l'existence d'un unique portefeuille tangent est liée à la concavité de la frontière efficiente

Dans une telle situation, les investisseurs ne détiendraient pas tous une fraction du portefeuille de marché



« Capital Market Line » ex-ante (CML)

- En abscisses, le niveau de risque d'un portefeuille σ_P
- En ordonnées, l'espérance de rentabilité E_P

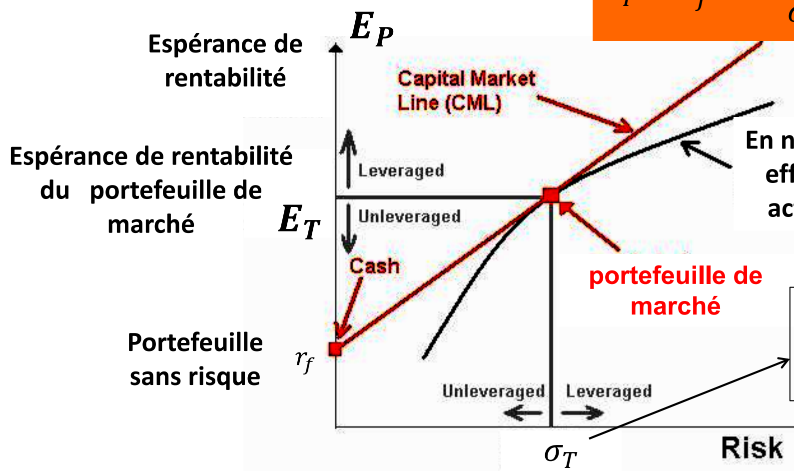


« Capital Market Line » (CML)

- *On combine le portefeuille de marché*
- *Et l'actif sans risque*

Équation de la CML

$$E_P = r_f + \frac{E_T - r_f}{\sigma_T} \times \sigma_P$$



« Capital Market Line » (CML)

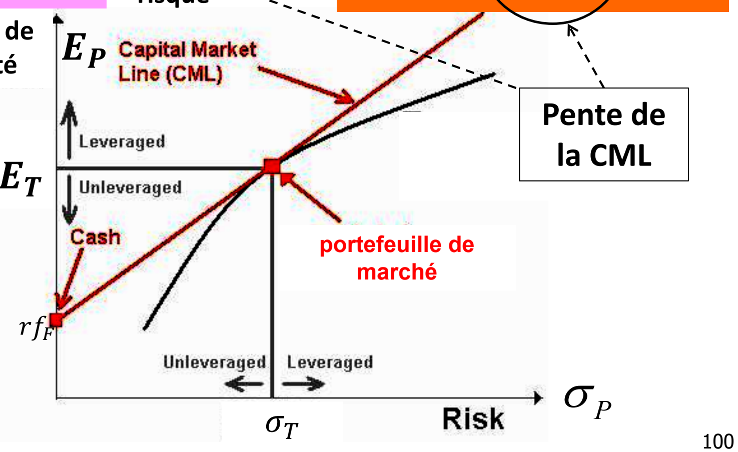
- La notion de prime de risque et de prix de marché du risque

$$\frac{E_T - r_f}{\sigma_T} =$$ Prix de marché du risque

$$E_P = r_f + \frac{E_T - r_f}{\sigma_T} \times \sigma_P$$

Étudier le cas où $E_T < r_f$

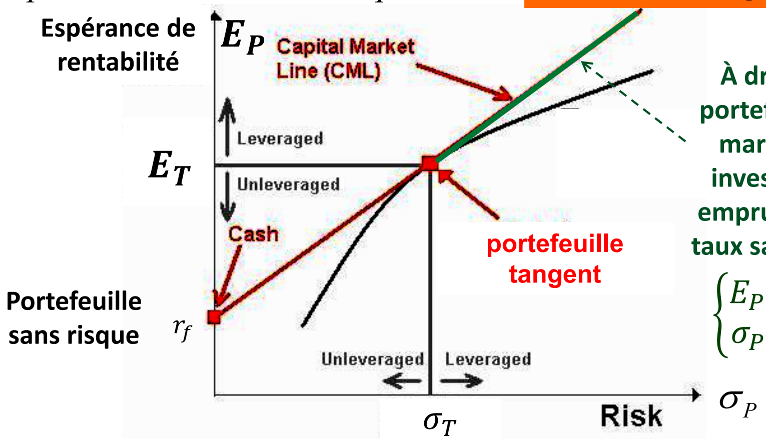
Pente de la CML



« Capital Market Line » (CML)

- Effet de levier
  - *On obtient des rentabilités supérieures à celles du portefeuille de marché en empruntant au taux sans risque*

$$E_P = r_f + \frac{E_T - R_F}{\sigma_T} \times \sigma_P$$



À droite du portefeuille de marché, les investisseurs empruntent au taux sans risque

$$\begin{cases} E_P > E_T \\ \sigma_P > \sigma_T \end{cases}$$

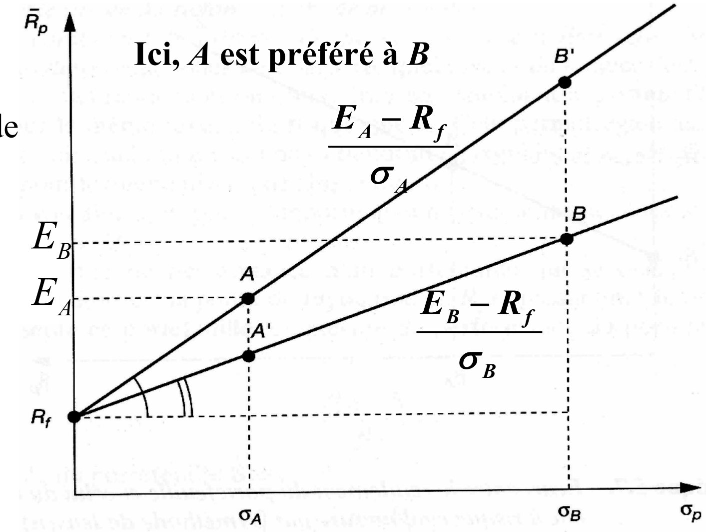
« Capital Market Line » (CML)

- <u>Ratio de Sharpe</u> : maximal pour les portefeuilles efficients

Si un portefeuille de est efficient, son ratio de Sharpe

$$\frac{E_P - R_f}{\sigma_P}$$

est maximal



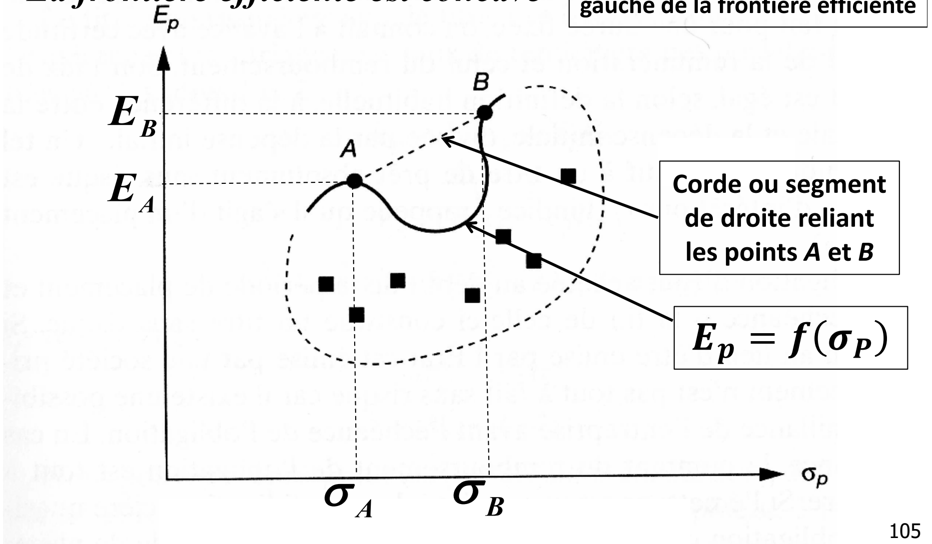
Exercice : concavité de la frontière efficiente

On va démontrer que la situation présentée sur le graphique est impossible.

La corde reliant les points A et B doit être à droite et non à gauche de la frontière efficiente

Graphique 2.8

- ***La frontière efficiente est concave***



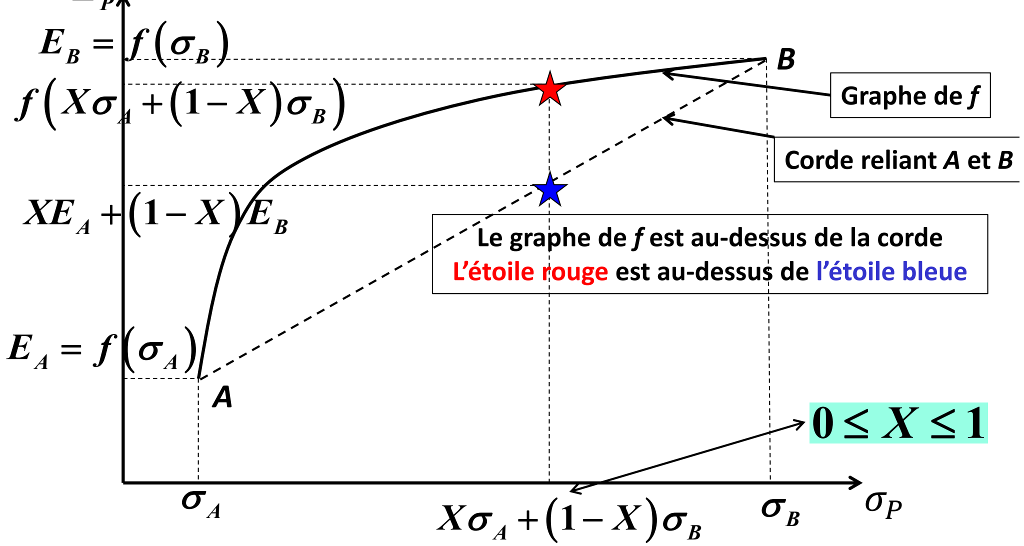
Exercice: concavité de la frontière efficiente

On remarque que dans la définition de la concavité $0 \le X \le 1$

- *Définition d'une fonction concave* $\boldsymbol{f}$
- *Une fonction réelle* $\boldsymbol{f}$ *est concave si et seulement si :*
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{X} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$,
- $\boldsymbol{X f(x) + (1 - X) f(y) \le f(Xx + (1 - X) y)}$
- *Interprétation géométrique*
- *La corde reliant les points* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f(x)})$ *et* $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{f(y)})$ *est en dessous du graphe associé à la fonction* $\boldsymbol{f}$ *:*
- *Graphe associé à la fonction* $\boldsymbol{f}$ *:* $\{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{f(z)}), \boldsymbol{x \le z \le y}\}$
- *Ici* $\boldsymbol{x = \sigma_A}, \boldsymbol{y = \sigma_B}$
- $(\sigma_A, E_A = f(\sigma_A))$ *correspond aux coordonnées du point A*
- $(\sigma_B, E_B = f(\sigma_B))$ *correspond aux coordonnées du point B*

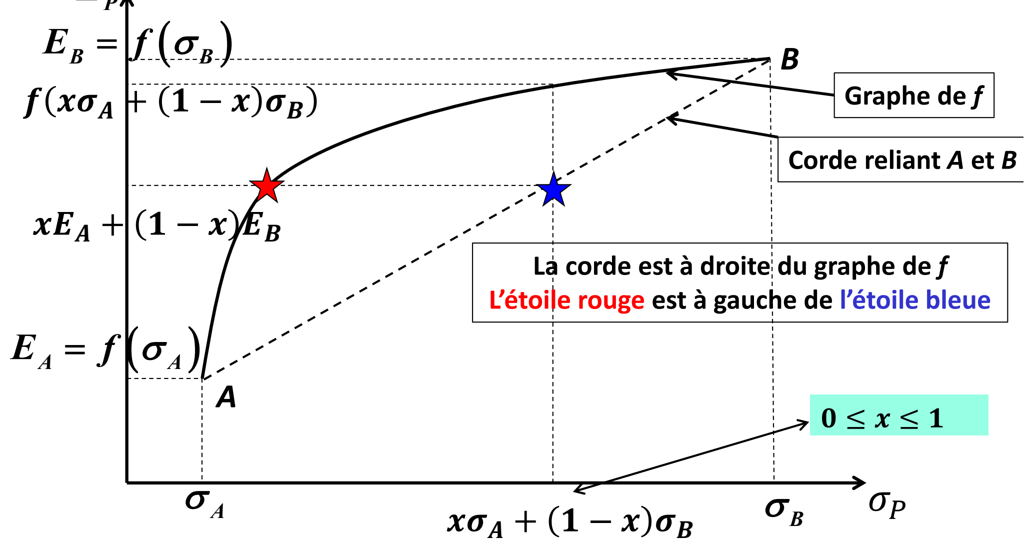
Exercice: concavité de la frontière efficiente

- *Fonction f concave : interprétation géométrique*



Exercice: concavité de la frontière efficiente

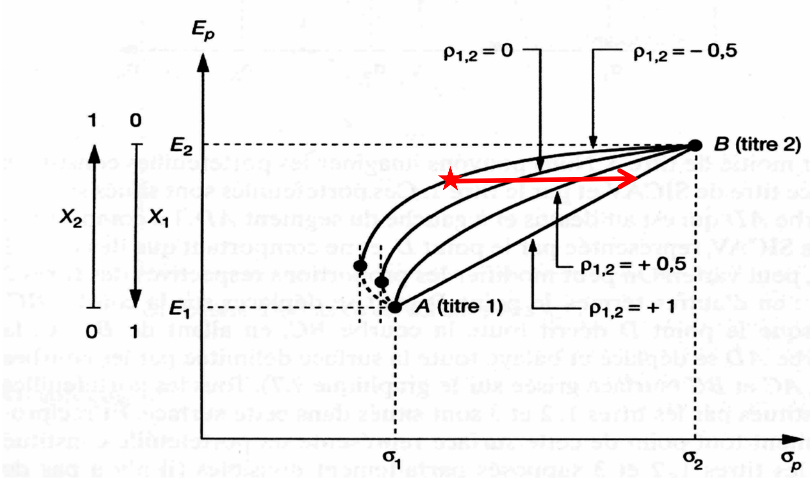
- *Fonction f concave : interprétation géométrique*



Remarque : pour tout niveau de corrélation, un portefeuille combinant A et B en quantités positives se situe à gauche de la corde qui relie A et B

Démonstration voir transparent suivant

Graphique 2.6 – *Portefeuilles de 2 titres – Rôle du coefficient de corrélation $\rho_{1,2}$*

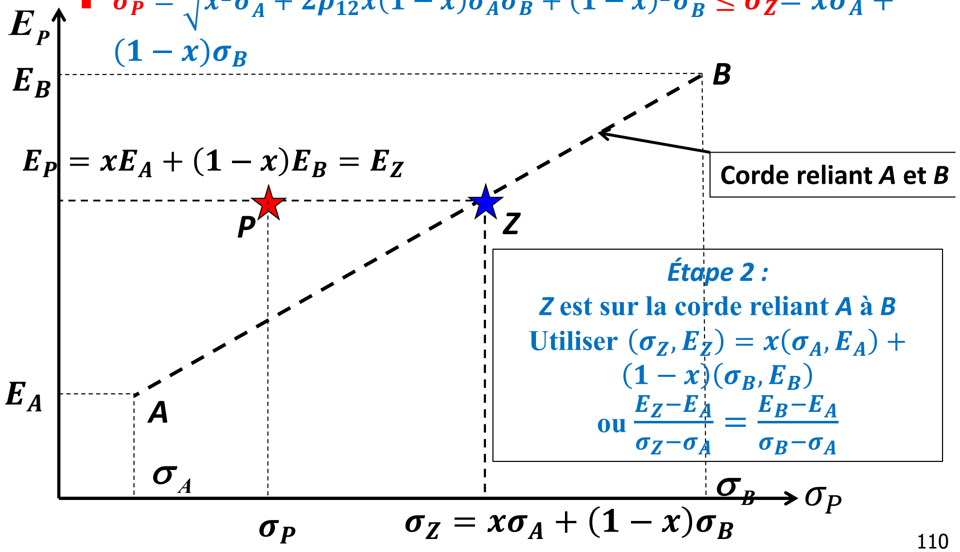


portefeuilles constitués de A et B

Exercice: concavité de la frontière efficiente

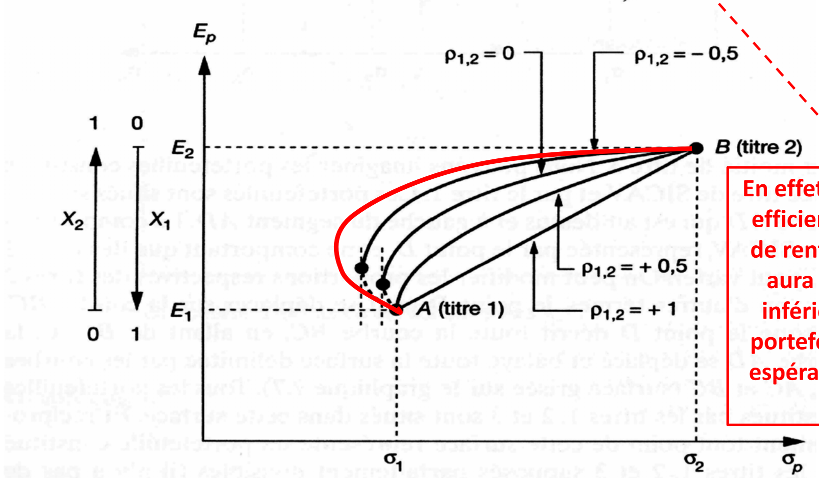
Étape 1 : P est à gauche de Z

- $E_P = xE_A + (1-x)E_B = E_Z,$
- $\sigma_P = \sqrt{x^2\sigma_A^2 + 2\rho_{12}x(1-x)\sigma_A\sigma_B + (1-x)^2\sigma_B^2} \leq \sigma_Z = x\sigma_A + (1-x)\sigma_B$



La frontière efficiente étant elle-même à gauche de l'ensemble des portefeuilles combinant A et B, elle est concave

Graphique 2.6 – *Portefeuilles de 2 titres – Rôle du coefficient de corrélation $\rho_{1,2}$*



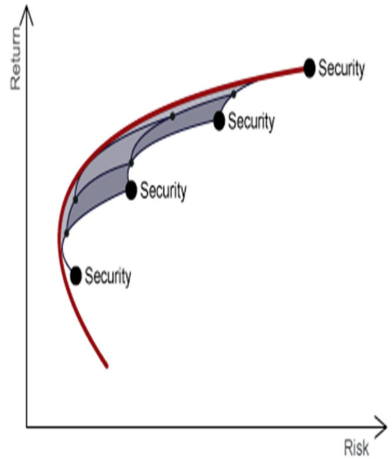
En effet un portefeuille efficient, d'espérance de rentabilité donnée aura un écart-type inférieur ou égal au portefeuille de même espérance formé de A et de B

portefeuilles constitués de A et B

Concavité de la frontière efficiente : résumé

Les portefeuilles constitués de A et de B sont eux-mêmes des portefeuilles de titres

- On considère deux portefeuilles situés sur la frontière efficiente *A* et *B*
- L'ensemble des portefeuilles constitués de *A* et *B* est à gauche du segment de droite reliant *A* et *B*
  - *Voir graphique précédent*
- La frontière efficiente est elle-même au-dessus et à gauche de cet ensemble de portefeuilles
  - *Voir graphique de droite*
- Par transitivité, la frontière efficiente est à gauche de la corde reliant *A* et *B*



Ils sont donc situés sous la frontière efficiente

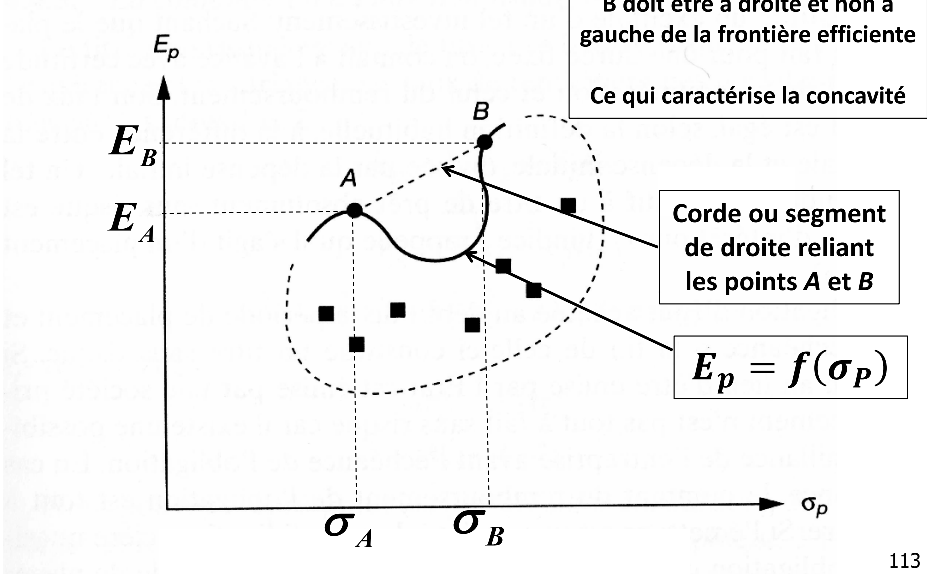
Concavité de la frontière efficiente : résumé

On vient de démontrer que la situation présentée sur le graphique est impossible.

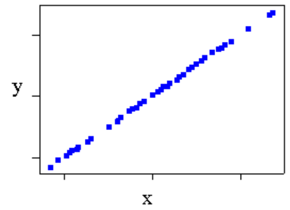
La corde reliant les points A et B doit être à droite et non à gauche de la frontière efficiente

Ce qui caractérise la concavité

Graphique 2.8

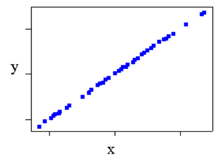


Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$



- Cas où $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$
  - *Cas particulier où le coefficient de corrélation linéaire entre les deux rentabilités R_1, R_2 est égal à 1*
  - *On rappelle que :* $\boldsymbol{\rho_{12} = \frac{\mathrm{Cov}(R_1, R_2)}{\sigma_1 \times \sigma_2}, -1 \leq \rho_{12} \leq 1}$
  - $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$ *correspond à la situation où la liaison statistique entre les deux rentabilités est la plus forte*
    - Si $\boldsymbol{R_2 = R_1}$, alors $\boldsymbol{\rho_{12} = \frac{\mathrm{Cov}(R_1, R_2)}{\sigma_1 \times \sigma_2} = 1}$
    - En effet, le numérateur est $\boldsymbol{\mathrm{Cov}(R_1, R_2) = \mathrm{Var}[R_1]}$
    - Le dénominateur est $\boldsymbol{\sigma_1 \times \sigma_1 = \mathrm{Var}[R_1]}$

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$, $\boldsymbol{0 \leq x_1 \leq 1}$, $\boldsymbol{0 \leq x_2 \leq 1}$



- $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$ Pourquoi s'intéresser à ce cas particulier ?
  - *On considèrera en outre que* $\boldsymbol{0 \leq x_1 \leq 1}$, $\boldsymbol{0 \leq x_2 \leq 1}$
    - $\boldsymbol{x_1, x_2}$ Quantités investies dans les deux titres positives
  - *Les calculs d'écart-type des portefeuilles sont plus simples que dans le cas général*
    - Écart-type fonction affine de la composition du portefeuille
    - Représentation simple des portefeuilles dans le plan écart-type – espérance des rentabilités
    - Il s'agit d'un segment de droite
  - *Comparaisons utiles avec le cas général* $\boldsymbol{\rho_{12} \leq 1}$
    - Concavité de la frontière efficiente
  - *Facilite l'analyse de la Capital Market Line (CML)*
    - Les portefeuilles sur la CML sont parfaitement corrélés
  - *Permet une introduction à la notion d'**arbitrage***

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$

- Le cas $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$ correspond à une situation extrême de liaison parfaite entre les rentabilités $\boldsymbol{R_1}$ et $\boldsymbol{R_2}$
  - *On peut démontrer que* $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$
  - *Si et seulement si* $\boldsymbol{R_2 = \alpha \times R_1 + \beta}$ *avec* $\boldsymbol{\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0}$
  Relation affine entre les deux rentabilités
    - Pas de terme de bruit comme dans une régression linéaire
    - Pas de « diversification du risque »
    - Représentation simple des portefeuilles dans le plan écart-type – espérance des rentabilités
  - *S'il existe un actif sans risque, on peut en outre montrer que le titre 2 est un portefeuille composé du titre 1 et de l'actif sans risque (et vice versa)*
    - En l'absence d'« opportunité d'arbitrage » (voir la suite des transparents)

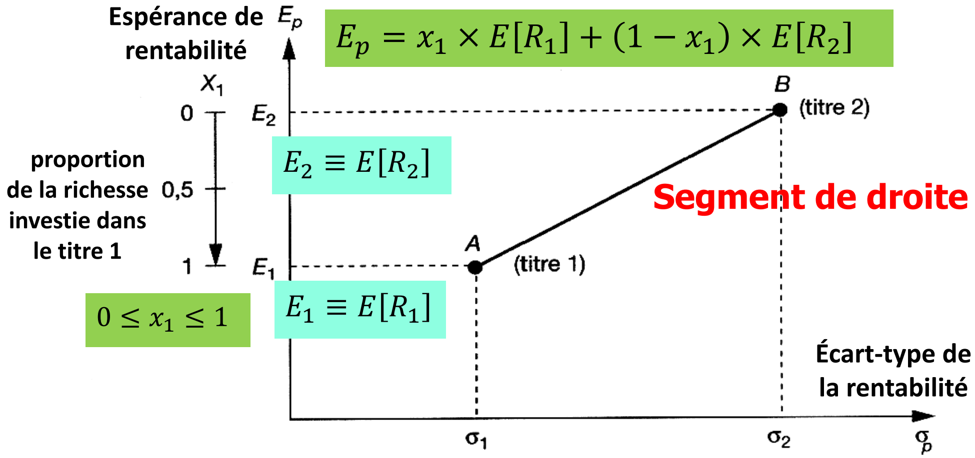
Exercice
$\rho_{12} = 1$

- Évaluation de l 'écart-type du portefeuille quand $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$
  - *On part de la formule générale*
  - $\sigma_P^2(x_1) = x_1^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}x_1(1-x_1)\sigma_1\sigma_2 + (1-x_1)^2\sigma_2^2$
  - *Qui devient*
  - $\sigma_P^2(x_1) = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1\sigma_1(1-x_1)\sigma_2 + (1-x_1)^2\sigma_2^2$
  - $= (x_1\sigma_1 + (1-x_1)\sigma_2)^2$ *(« carré parfait »)*
  - $\boldsymbol{\sigma_P(x_1) = |x_1\sigma_1 + (1-x_1)\sigma_2|}$
  - $|a|$*: valeur absolue de* $a \in \mathbb{R}$
  - $|a| = a$*, si* $a \geq 0$, $|a| = -a$ *si* $a < 0$
- $\boldsymbol{\rho_{12} = 1, 0 \leq x_1 \leq 1} \Rightarrow x_1\sigma_1 + (1-x_1)\sigma_2 \geq 0$
- $\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_P = x_1\sigma_1 + (1-x_1)\sigma_2}$

Exercice
$\rho_{12} = 1$

Le segment de droite reliant les points A et B représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2 pour un niveau de corrélation égal à 1

Graphique 2.5 – *Portefeuilles constitués par des titres parfaitement corrélés* ($\rho_{1,2} = +1$) et $0 \leq x_1 \leq 1$



$\sigma_P = x_1\sigma_1 + (1-x_1)\sigma_2$

Exercice
$\rho_{12} = 1$

Le segment de droite reliant les points A et B représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2, en quantités positives, pour un niveau de corrélation égal à 1

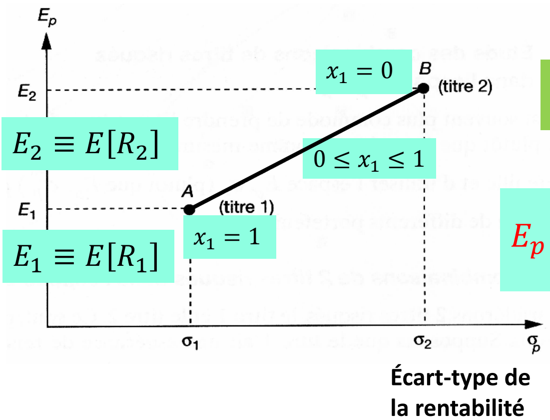
- Corrélation $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$
- **Segment de droite ?**

$$E_p = x_1 \times E[R_1] + (1-x_1) \times E[R_2]$$

$$E_p - E_2 = x_1 \times (E_1 - E_2)$$

$$\sigma_P = x_1\sigma_1 + (1-x_1)\sigma_2$$

$$\sigma_P - \sigma_2 = x_1(\sigma_1 - \sigma_2)$$



$$E_p - E_2 = (\sigma_P - \sigma_2) \times \frac{E_1 - E_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

Relation affine entre espérance de rentabilité et écart-type des rentabilités

Exercice

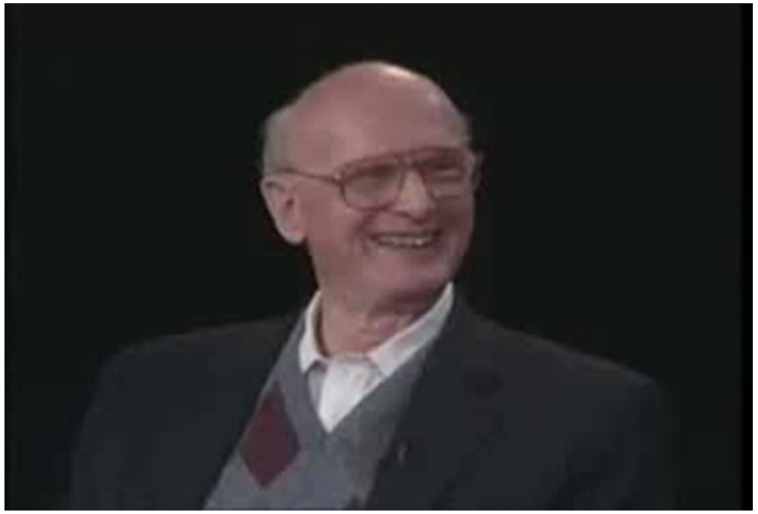
- Le cas $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$ correspond à une situation extrême de liaison parfaite entre les rentabilités $\boldsymbol{R_1}$ et $\boldsymbol{R_2}$
- Cas général $\boldsymbol{-1 \leq \rho_{12} \leq 1}$
  - *Variance et espérance de rentabilité pour* $\boldsymbol{x_1}$ *donné*
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2(x_1)}$ *variance de la rentabilité du portefeuille*
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2(x_1) = x_1^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}x_1(1-x_1)\sigma_1\sigma_2 + (1-x_1)^2\sigma_2^2}$
  - *Fonction affine du coefficient de corrélation* $\boldsymbol{\rho_{12}}$
    - **la variance de taux de rentabilité du portefeuille est d'autant plus faible que le coefficient de corrélation est faible**
  - $\boldsymbol{E_P(x_1) = x_1E_1 + (1-x_1)E_2}$
  - $\boldsymbol{E_P(x_1)}$ *espérance de rentabilité du portefeuille*
    - **L'espérance de rentabilité ne dépend pas du coefficient de corrélation** $\boldsymbol{\rho_{12}}$

La théorie : les pères fondateurs

http://www.youtube.com/watch?v=JmL1t--kBrM&feature=player_detailpage

Estimation de l'espérance de la rentabilité du portefeuille de marché
10mn36

Entretien avec Harry Markowitz



La théorie : les pères fondateurs

- Finance moderne et prix Nobel d'économie (5'30)

La théorie : les pères fondateurs

- **Vidéo: entretien avec Harry Markowitz (8mn45)**
- **http://www.youtube.com/watch?v=R6X6wcWQ95k**