Cours de Finance (M1)

Exercices : frontière efficiente, CML

Are Markets Efficient? http://harvardecon.org/?p=2816 Harvard Economic Review (avec la permission de Dilbert !)

Exercices corrigés

- Risque et coefficient de corrélation
- Portefeuille de variance minimale
- Trois actifs parfaitement corrélés
- Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs
- De l'utilité des « mauvaises actions »
- Variation du taux sans risque et classement des actifs risqués
- Portefeuille tangent, ratio de Sharpe, taux sans risque
- Simulation d'allocations
- Vente à découvert, actifs parfaitement corrélés
- Corrélation parfaite, arbitrage
- Corrélation $= -1$

Risque et coefficient de corrélation

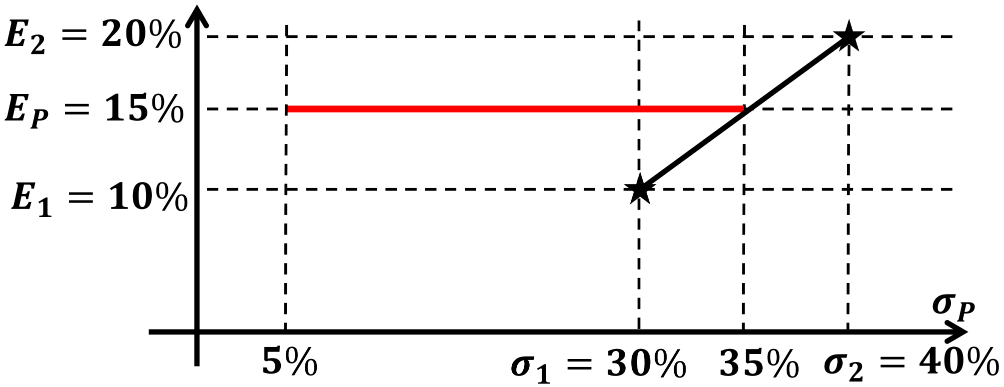
- Problème : risque et coefficient de corrélation
  - *Portefeuille de deux titres* $\mathbf{1, 2}$
  - *Espérances de rentabilités :* $\boldsymbol{E_1 = 10\%, E_2 = 20\%}$
  - *Écart-types des rentabilités* $\boldsymbol{\sigma_1 = 30\%, \sigma_2 = 40\%}$
  - $\boldsymbol{x_1 = x_2 = 50\%}$
  - *A) Représenter graphiquement dans le plan* $(\boldsymbol{E_P, \sigma_P})$, *le portefeuille précédent quand le coefficient de corrélation* $\boldsymbol{\rho}$ *entre les rentabilités des titres* $\mathbf{1}$ *et* $\mathbf{2}$ *varie entre* $\mathbf{-1}$ *et* $\mathbf{+1}$.
  - *B) Trouver le coefficient de corrélation tel que l'écart-type de la rentabilité du portefeuille est égal à l'écart-type de la rentabilité du titre* $\mathbf{1}$.

Risque et coefficient de corrélation

- Problème : risque et coefficient de corrélation
  - *Il suffit de reprendre les formules donnant* $\boldsymbol{E_P}$ *et* $\boldsymbol{\sigma_P}$
  - $\boldsymbol{E_P = x_1E_1 + x_2E_2 = 0,5 \times 10\% + 0,5 \times 20\% = 15\%}$
  - $\boldsymbol{E_P}$ *ne dépend pas de* $\boldsymbol{\rho}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\rho\sigma_1\sigma_2}$
  - *Avec* $\boldsymbol{x_1 = x_2 = 50\%, \sigma_1 = 30\%, \sigma_2 = 40\%}$
  - $\boldsymbol{2x_1x_2\sigma_1\sigma_2 = 0,06 \geq 0}$
  - $\boldsymbol{-1 \leq \rho \leq +1}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P}$ *croît de manière affine avec* $\boldsymbol{\rho}$
  - *Valeur maximale de* $\boldsymbol{\sigma_P}$ *quand* $\boldsymbol{\rho = +1}$
  - *On a alors*
  - $\boldsymbol{\sigma_P = |x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2| = 0,5 \times 30\% + 0,5 \times 40\% = 35\%}$

Risque et coefficient de corrélation

- Problème : risque et coefficient de corrélation (suite)
  - $\boldsymbol{\sigma_P}$ *croît de manière affine avec* $\boldsymbol{\rho}$
  - *Valeur minimale de* $\boldsymbol{\sigma_P}$ *quand* $\boldsymbol{\rho = -1}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P = |x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2| = |0,5 \times 30\% - 0,5 \times 40\%| = 5\%}$

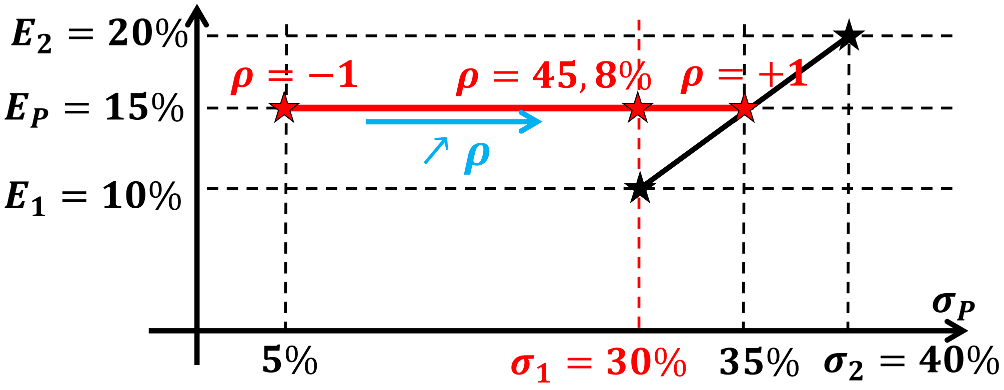


Risque et coefficient de corrélation

- Problème : risque et coefficient de corrélation (suite)
  - *B) Trouver le coefficient de corrélation tel que l'écart-type de la rentabilité du portefeuille est égal à l'écart-type de la rentabilité du titre* $\mathbf{1}$.
  - *Il faut trouver* $\boldsymbol{\rho}$ *tel que*
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\rho\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^2}$
  - *Comme* $\boldsymbol{x_1 = x_2 = 1/2}$, *il faut trouver* $\boldsymbol{\rho}$ *tel que*
  - $\boldsymbol{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 = 4\sigma_1^2}$
  - $\boldsymbol{2\rho\sigma_1\sigma_2 = 3\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$
  - *Comme* $\boldsymbol{\sigma_1 = 0,3, \sigma_2 = 0,4}$
  - $\boldsymbol{\rho = 11/24 = 45,8\%}$

Risque et coefficient de corrélation

- Problème : risque et coefficient de corrélation (suite)
  - *Les trois situations étudiées* $\boldsymbol{\rho = \pm 1, \rho = 45,8\%}$

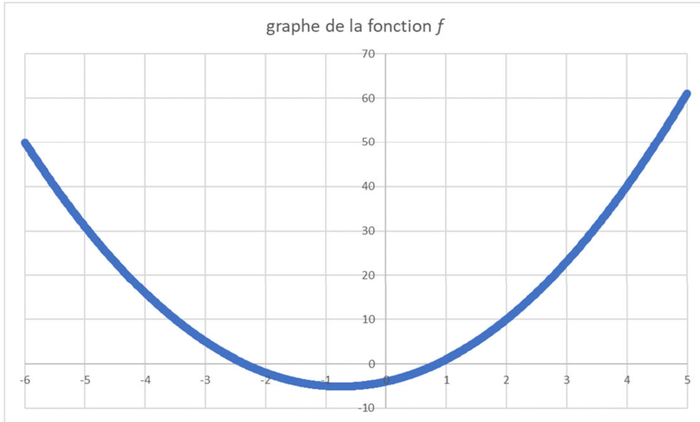


Choix de portefeuille (corrigé de l'exercice 3, partiel janvier 2019)

- Rappel sur les polynômes du second degré
  - *Programmes de première Voir les nombreuses vidéos sur youtube*
    - https://www.youtube.com/watch?v=lQxJhGg2GQY&index=3&t=0s&list=PLVUDmbpupCaorRlxu3gIJSnPqOy-n61hW
- $x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = ax^2 + bx + \mathrm{c}$
  - $a, b, c \in \mathbb{R}$
  - *f : fonction réelle (Leibniz (1602))*
  - *x : variable, $f(x)$: image de f pour la valeur x de la variable.*
  - *Exemple : $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$,*

Rappels de mathématiques de première, minimisation d'un trinôme

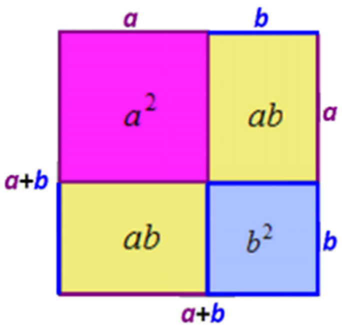
- $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$
- Graphe de la fonction f : ensemble des points $(x, f(x))$ pour x réel (ou dans l'ensemble de variation)



Rappels de mathématiques de première, minimisation d'un trinôme

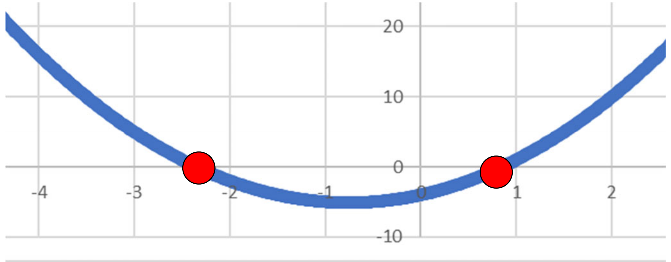
- Identité remarquable (Babylone – 1000 bc).
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, pour a, b réels
- Démonstration $(a, b > 0)$: on considère un carré de longueur de côté $a + b$: son aire est $(a + b)^2$

On découpe ce carré un carré bleu de côté b, un carré rose de côté a et deux rectangles jaunes.
L'identité remarquable exprime que l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux petits carrées et des deux rectangles jaunes



Rappels de mathématiques de première, minimisation d'un trinôme

- Racine d'un polynôme de second degré
- Un nombre réel x tel que $ax^2 + bx + \mathrm{c} = 0$



  - *Il s'agit de l'abscisse d'un point d'intersection du graphe de la fonction associée au polynôme et de l'axe des abscisses*

Rappels de mathématiques de première, minimisation d'un trinôme

- Un polynôme du second degré peut avoir zéro, une ou deux racines réelles
- Forme canonique (exemple) : $2x^2 + 8x - 1$
- $2x^2 + 8x - 1 = 2(x^2 + 2 \times (2x) + 2^2) + 2^3 - 1$
- $2x^2 + 8x - 1 = 2 \times (x + 2)^2 + 7$
- Comme $(x + 2)^2 \geq 0$ et vaut 0 en $x = -2$, la valeur minimale du polynôme est atteinte en $x = -2$ et vaut 7 (ici il n'y a pas de racine réelle).
  - *Ici, la valeur minimale est atteinte quand la dérivée du polynôme est égale à zéro:*
  - $\frac{d(2x^2+8x-1)}{dx} = 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Application : portefeuille de variance minimale

- On suppose que l'on a deux actifs de volatilité (écart-type de la rentabilité) 30%.
- On note $x_1 = 1 - x_2$, la proportion de la richesse investie dans l'actif 1 et ρ le coefficient de corrélation linéaire
- La variance (carré de l'écart-type) de la rentabilité du portefeuille est égale à $(30\%)^2 \times (x_1^2 + 2 \times \rho x_1 x_2 + x_2^2)$
- $x_1^2 + 2 \times \rho x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2(1 - \rho)x_1 x_2 = 1 + 2(1 - \rho) \times (-x_1 x_2)$
- $\rho \leq 1$: variance minimale si $x_1(x_1 - 1)$ est minimal

Application : portefeuille de variance minimale

- $x_1(x_1 - 1) = x_1^2 - x_1 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$
- La variance est alors minimale pour $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ (portefeuille équipondéré)
- Composition du portefeuille de variance minimale (dans notre exemple) est indépendante du niveau du coefficient de corrélation linéaire ρ
- Cette variance minimale est égale à $(30\%)^2 \times \left(\frac{1+\rho}{2}\right)$
- Si $\rho = -0{,}5$, l'écart-type minimal est 15%
- Si $\rho = -1$, l'écart-type minimal est 0%

Exercice : portefeuille de variance minimale

Cet exercice nécessite de savoir trouver le minimum d'une fonction

- Problème : portefeuille de variance minimale
  - *On considère deux titres risqués* $\mathbf{1}, \mathbf{2}$
  - *Espérances des rentabilités :* $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}$
  - *Écart-types des rentabilités* $\boldsymbol{\sigma_1}, \boldsymbol{\sigma_2}$
  - *Coefficient de corrélation entre les rentabilités* $\boldsymbol{\rho}$
- A)Variance du portefeuille
  - $\boldsymbol{\omega_1}, \boldsymbol{\omega_2}$ *: fractions de la richesse allouées au titres* $\mathbf{1}, \mathbf{2}$
  - *Rappeler l'expression de la variance du portefeuille* $\boldsymbol{\sigma_P^2}$
  - *Dépend-elle des espérances de rentabilité ?*
  - *À quoi correspond la fonction* $\boldsymbol{\omega_1} \rightarrow \boldsymbol{\sigma_P^2}(\boldsymbol{\omega_1})$ *?*

Exercice : portefeuille de variance minimale

- Problème : portefeuille de variance minimale
  - $\sigma_P^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2\rho x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 + x_2^2 \sigma_2^2$
  - *Où* $x_2 = 1 - x_1$
  - σ_P^2 *ne dépend pas de* E_1, E_2
  - $\sigma_P^2(x_1)$ *est un trinôme*
    - Polynôme du second degré de la forme $ax_1^2 + bx_1 + c$
  - *Le graphe de la fonction* $\omega_1 \rightarrow \sigma_P^2(x_1)$ *est une parabole*
- B) Minimum de $\sigma_P^2(x_1)$, pas de contrainte de vente à découvert
  - *Trouver l'allocation* x_1, *telle que la variance du portefeuille est minimale*
  - *Quand* x_1 *devient-il négatif ?*

Exercice : portefeuille de variance minimale

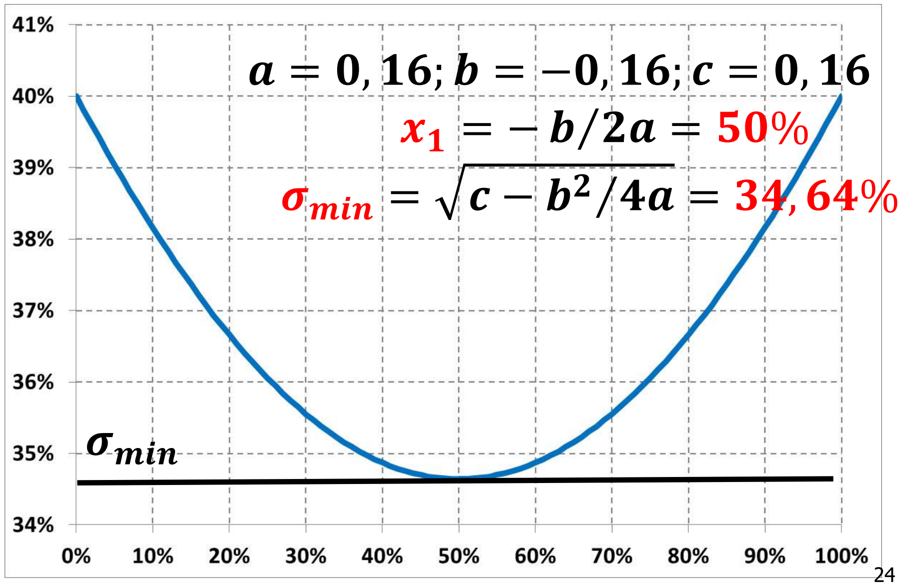
- Allocation x_1 minimisant de $\sigma_P^2(x_1)$
  - $\sigma_P^2(x_1) = x_1^2\sigma_1^2 + 2\rho x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 + x_2^2 \sigma_2^2$
    - Où $x_2 = 1 - x_1$
  - $\sigma_P^2(x_1) = ax_1^2 + x_1X_1 + c$
    - $a = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$
    - $b = 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2$
    - $c = \sigma_2^2$
- Si $a > 0$, $\sigma_P^2(x_1)$ est minimal en $x_1 = -b/2a$
    - Calcul de la dérivée de $\sigma_P^2(x_1)$
    - $d\sigma_P^2(x_1)/dx_1 = 2ax_1 + b = 0 \Leftrightarrow x_1 = -b/2a$
- $\omega_1 < 0 \Leftrightarrow b > 0 \Leftrightarrow \rho\sigma_1 > \sigma_2 \Leftrightarrow \beta_{1/2} > 1$

Exercice : portefeuille de variance minimale

- Problème : portefeuille de variance minimale
  - *Minimum de* $\sigma_P^2(x_1)$, *pas de contrainte de vente à découvert*
- C) Quel est le minimum de la variance du portefeuille ?
- Minimum de $\sigma_P^2(x_1)$
  - $\sigma_P^2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c$
    - $a = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$
    - $b = 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2$
    - $c = \sigma_2^2$
  - *Écriture de la forme canonique du trinôme*
  - $\sigma_P^2(x_1) = a(x_1 - b/2a)^2 + c - b^2/4a$
- Le minimum de $\sigma_P^2(x_1)$ est donc $c - b^2/4a = -\Delta/4a$
  - *Où* $\Delta = b^2 - 4ac$ *est le discriminant du trinôme*

En bleu, $\omega_1 \rightarrow \sigma_P(\omega_1)$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 40\%, \rho = 0,5$



Exercice : portefeuille de variance minimale

- Problème : portefeuille de variance minimale
- D) Il n'est maintenant plus possible de vendre à découvert le titre **1**. Quelle est l'impact de cette contrainte ?
  - *Il faut minimiser* $\boldsymbol{\sigma_P^2(x_1)}$ *sous la contrainte* $\boldsymbol{x_1 \geq 0}$
  - *Si la contrainte n'est pas active, comme dans le cas précédent, où* $\boldsymbol{x_1 = 50\%}$*, rien ne change*
  - *Si* $\boldsymbol{x_1 = -b/2a < 0}$ *ou de manière équivalente si* $\boldsymbol{\rho\sigma_1 > \sigma_2}$*, l'optimum précédent ne satisfait pas la contrainte de vente à découvert*
  - *On obtient alors le graphique suivant*
    - Allocation en abscisse
    - Écart-type des rentabilités du portefeuille en ordonnée

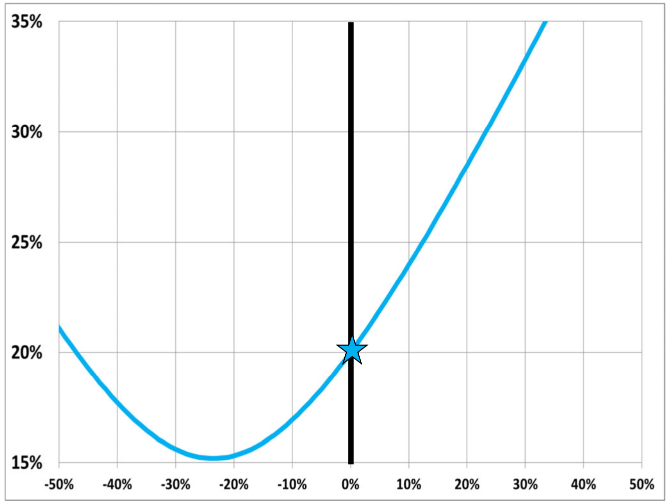
contrainte $x_1 \geq 0$

Exercice : portefeuille de variance minimale

- portefeuille de variance minimale : cas où $\boldsymbol{\rho\sigma_1 > \sigma_2}$

Minimum de la variance obtenu pour $x_1 < 0$
À droite du point minimum, la variance croit avec x_1

Pour $x_1 \geq 0$**,**
$\boldsymbol{\sigma_P^2(x_1) \geq \sigma_P^2(0)}$
le portefeuille de variance minimale est obtenu pour
$\boldsymbol{x_1 = 0}$
Optimum en coin



Choix de portefeuille (corrigé de l'exercice 3, partiel janvier 2019)

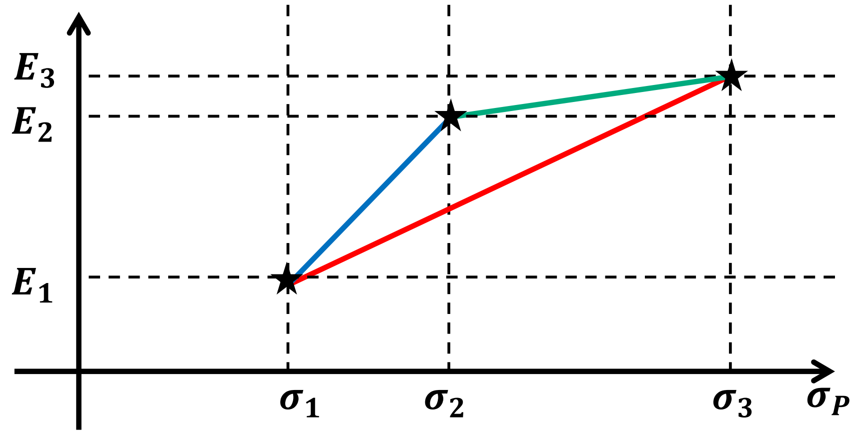
- Suite du corrigé de l'exercice…
  - *Voir annales*

Trois actifs parfaitement corrélés

- Problème : trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - $E_1 < E_2 < E_3, \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$
  - $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
  - $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 1$
- Quelle forme prend la frontière efficiente ?
  - *On distinguera deux cas de figure*
  - *Remarque : on sait comment combiner les titres deux à deux séparément*
  - *Il s'agit des segments de droite qui relient les points associés aux titres dans le plan* (E_P, σ_P)
  - *Un dessin met en évidence deux cas de figure*

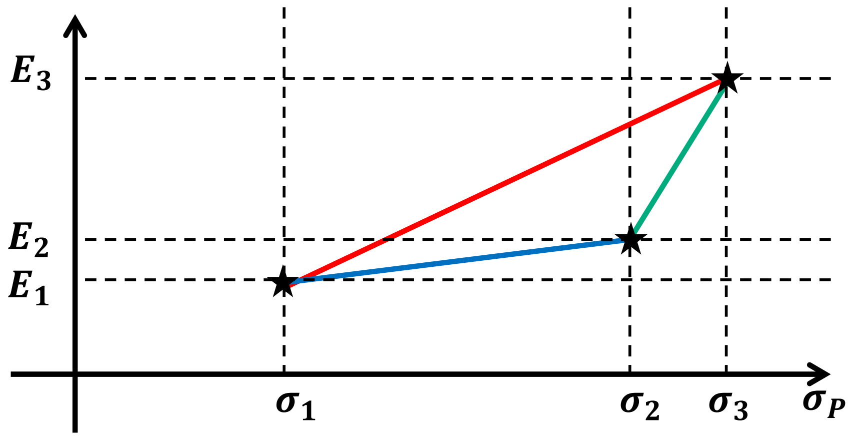
Trois actifs parfaitement corrélés

- Problème : trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Premier cas de figure*



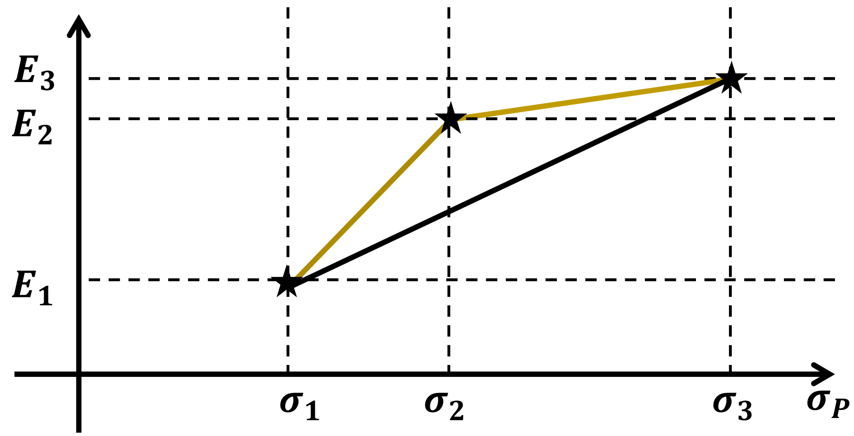
Trois actifs parfaitement corrélés

- Problème : trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Second cas de figure*



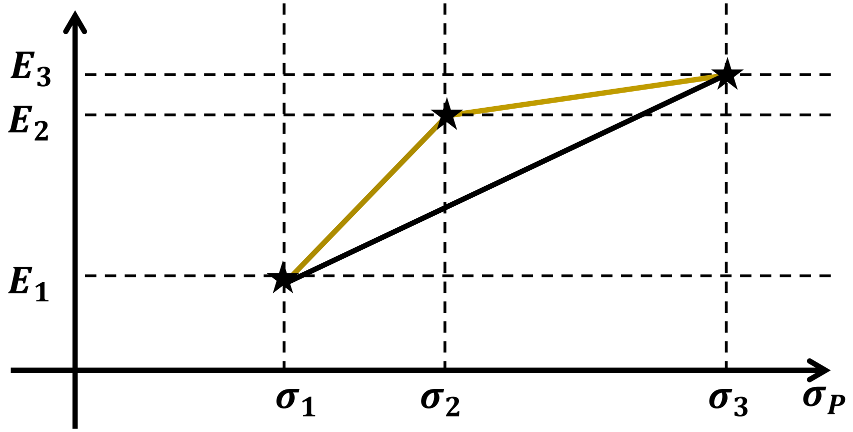
Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Ensemble des portefeuilles atteignables : intérieur du triangle*
  - $E_P = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$, $\sigma_P = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$



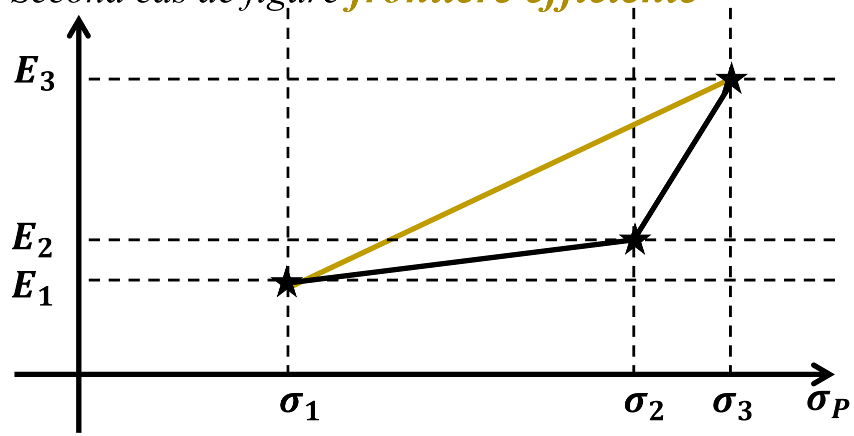
Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Ensemble des portefeuilles atteignables : intérieur du triangle*
  - *premier cas de figure* ***frontière efficiente***



Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Ensemble des portefeuilles atteignables : intérieur du triangle*
  - *Second cas de figure* ***frontière efficiente***

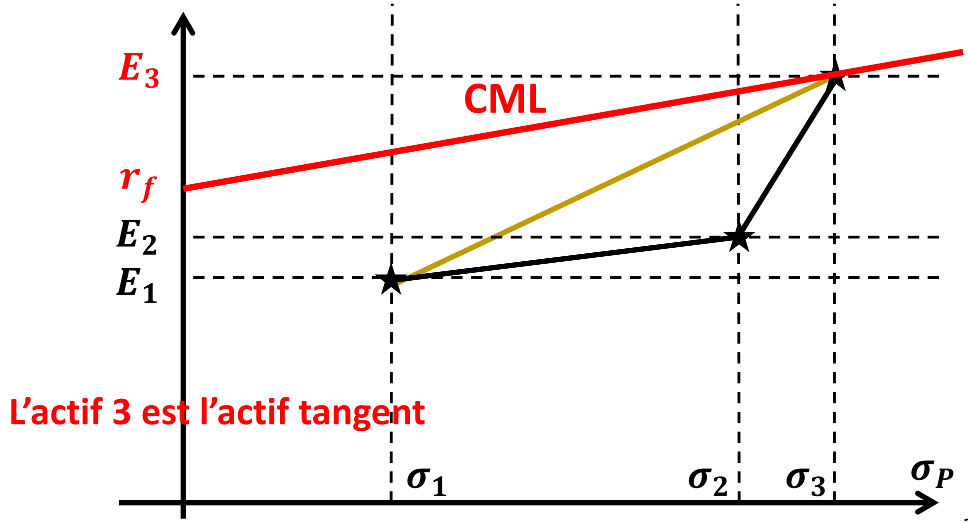


Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
- Introduction d'un placement sans risque, taux r_f
  - *Quelle est la forme du portefeuille « tangent » intervenant dans la CML ? On distinguera les deux cas précédents, ainsi que l'influence du niveau du taux sans risque.*
  - *Le portefeuille tangent est constitué d'actifs risqués*
  - *La pente de la demi-droite reliant l'actif sans risque à un portefeuille est le ratio de Sharpe de ce portefeuille*
  - *Le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe*
  - *Les deux graphiques suivants montrent deux situations correspondant à deux valeurs de* r_f

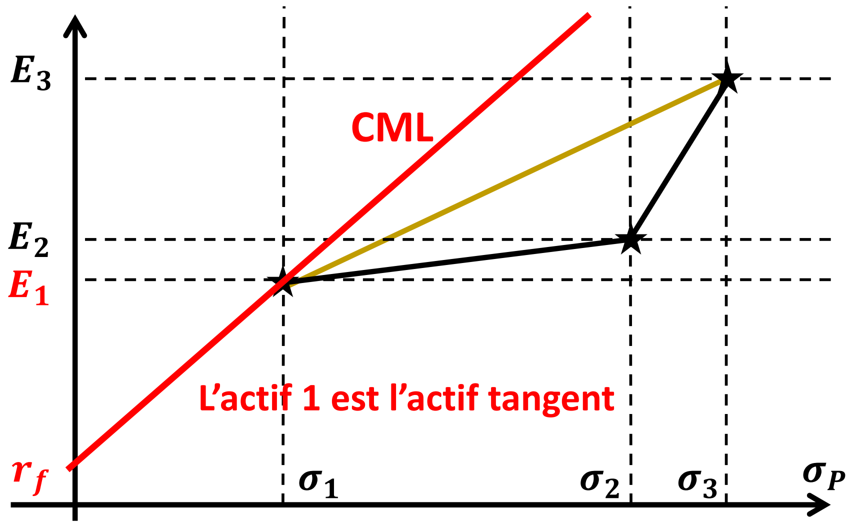
Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert



Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert



Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Selon la valeur du taux sans risque $\boldsymbol{r_f}$, le portefeuille tangent est toujours constitué uniquement d'un des trois actifs*
    - On omet les cas dégénérés où le portefeuille tangent n'est pas unique, correspondant à l'égalité des ratios de Sharpe.
  - *Le portefeuille tangent maximisant le ratio de Sharpe, il suffit donc de calculer les ratios de Sharpe des trois actifs*
  - *Le portefeuille tangent est constitué à 100% de l'actif de ratio de Sharpe maximal $\boldsymbol{E_i - r_f/\sigma_i}$*
    - Il n'y a aucune demande pour les deux autres actifs, qui sont parfaitement corrélés
    - Ils n'apportent donc aucun bénéfice en termes de diversification et ils sont dominés

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles (mutuellement) exclusifs
  - *Source : Finance 3e édition, Pearson, Collection Synthex*
  - *Farber, Laurent, Oosterlink & Pirotte*
    - Pages 62 et suivantes
  - *Tante Gaga est soumise à un choix cornélien : dans quelle sicav va-t-elle investir son épargne ?Elle a reçu des offres de trois banques (A, B et C) ayant des caractéristiques très différentes*
    - $\boldsymbol{E_A = 5\%, \sigma_A = 6\%}$
    - $\boldsymbol{E_B = 10\%, \sigma_B = 10\%}$
    - $\boldsymbol{E_C = 13\%, \sigma_C = 20\%}$
    - **Le taux sans risque, $\boldsymbol{r_f}$ est égal à 3%**

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles (mutuellement) exclusifs
  - *Supposons que l'objectif de tante Gaga est d'obtenir une espérance de rentabilité de* **9%**
  - *A) Quelle allocation d'actifs devrait-elle réaliser selon la sicav choisie et quel serait le risque correspondant ?*
  - *B) Que devrait-elle choisir ?*
    - $\boldsymbol{E_A = 5\%, \sigma_A = 6\%}$
    - $\boldsymbol{E_B = 10\%, \sigma_B = 10\%}$
    - $\boldsymbol{E_C = 13\%, \sigma_C = 20\%}$
    - $\boldsymbol{r_f}$ =3%

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles
  - *Notons x la part de la richesse investie dans la sicav*
  - $\boldsymbol{E_P = xE_i + (1-x)r_f = 9\%, \sigma_P = X\sigma_i,\ i = A, B, C}$
  - *D'où* $\boldsymbol{X = \frac{E_P - r_f}{E_i - r_f}}$
  - $\boldsymbol{x_A = 300\%, \sigma_P = 18\%}$
  - $\boldsymbol{x_B = 86\%, \sigma_P = 8,57\%}$
  - $\boldsymbol{x_C = 60\%, \sigma_P = 12\%}$
  - *Remarque : si* ***A*** *est choisie, tante Gaga empruntera pour investir un montant supérieur à son épargne initiale*
  - *Tante Gaga choisit la solution qui minimise le risque, c'est-à-dire la sicav B*

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

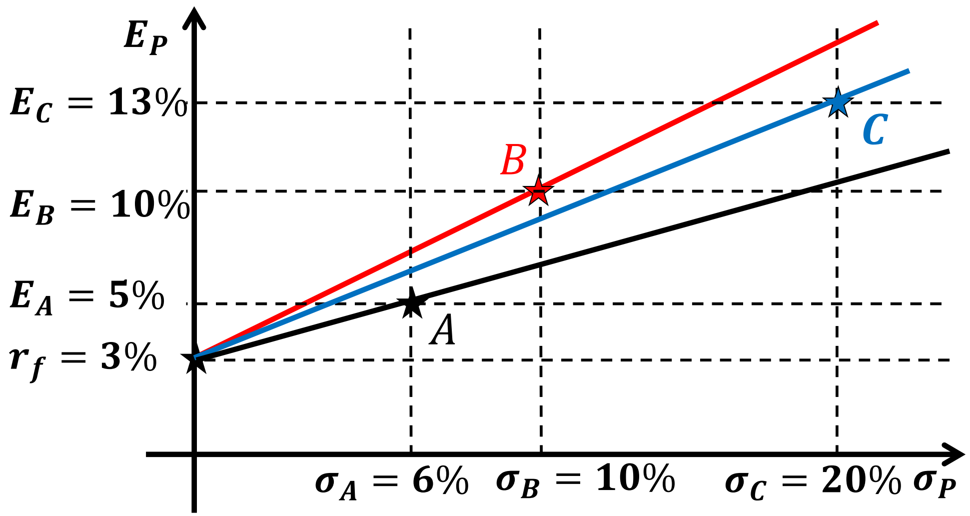
- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles
  - *Tante Gaga est maintenant prête à accepter que le risque de son portefeuille soit de* **15%**
  - *C) Quelle allocation d'actifs devrait-elle réaliser selon la sicav choisie et quelle serait l'espérance de rentabilité correspondante ?*
  - *D) Que devrait-elle choisir ?*
  - *E) Le choix de la sicav dépend-il de son objectif ?*
    - $\boldsymbol{E_A = 5\%, \sigma_A = 6\%}$
    - $\boldsymbol{E_B = 10\%, \sigma_B = 10\%}$
    - $\boldsymbol{E_C = 13\%, \sigma_C = 20\%}$
    - $\boldsymbol{r_f = 3\%}$

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles
  - *Si Tante Gaga exprime son objectif en termes de risque, la proportion à investir dans la sicav choisie est*
  - $\boldsymbol{x = \sigma_P/\sigma_i, i = A, B, C}$ *avec* $\boldsymbol{\sigma_P = 15\%}$
  - *L'espérance de rentabilité est alors*
  - $\boldsymbol{E_P = xE_i + (1-x)r_f = r_f + \frac{E_i - r_f}{\sigma_i} \times \sigma_P}$
  - $\boldsymbol{X_A = 250\%, E_P = 8\%}$
  - $\boldsymbol{X_B = 150\%, E_P = 13,50\%}$
  - $\boldsymbol{X_C = 75\%, E_P = 10,50\%}$
  - *Tante Gaga choisit la solution qui lui donne la rentabilité attendue la plus élevée : la sicav B de nouveau*

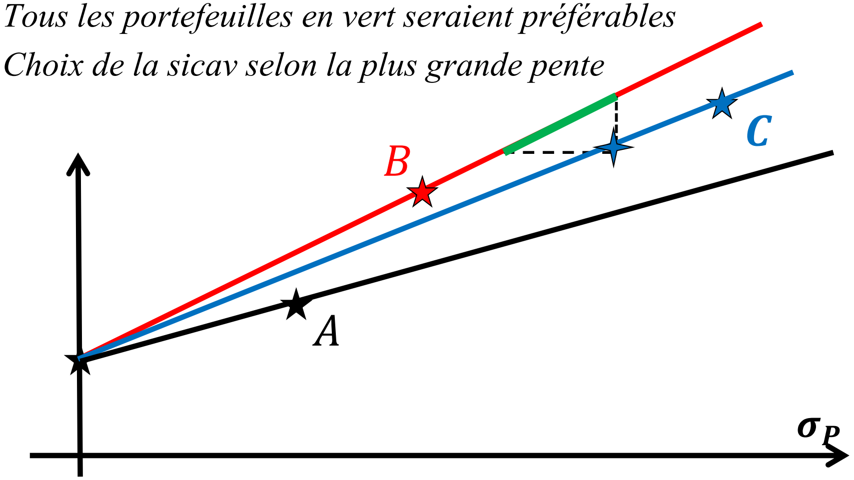
Révisions, exercices finance de marché

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles



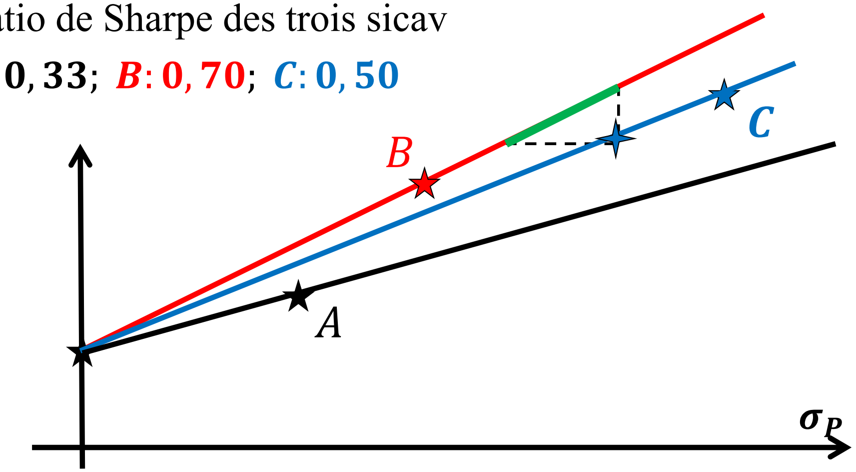
Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- B est toujours préférée
  - *Si le portefeuille est sélectionné, impliquant le choix C*
  - *Tous les portefeuilles en vert seraient préférables*
  - *Choix de la sicav selon la plus grande pente*



Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Pente des demi-droites $\boldsymbol{\frac{E_i - r_f}{\sigma_i}}$ (ratio de Sharpe)
- Ratio de Sharpe des trois sicav
- $\boldsymbol{A: 0,33;\ B: 0,70;\ C: 0,50}$



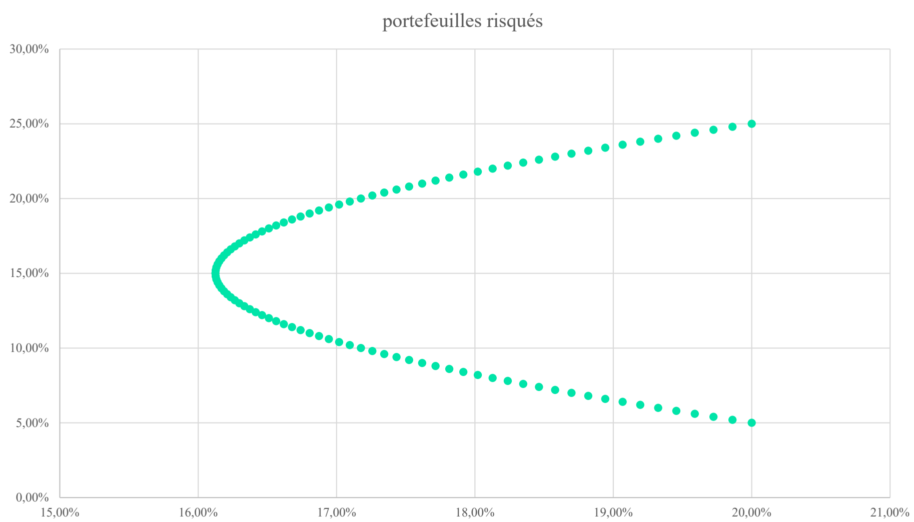
Exercice : de l'utilité des mauvaises actions…

- Contexte : on rappelle (article JFE) que la quasi-totalité de la création de richesse est due à un très faible pourcentage de grandes sociétés
- Deux types d'actions (à partir des rentabilités ex-post)
  - *Actions du type Amazon, Apple, etc. forte rentabilité moyenne*
  - *Autres actions : rentabilité moyenne = taux sans risque*
- Les actions peu performantes doivent-elles être éliminées ?

Exercice : de l'utilité des mauvaises actions…

- Hypothèses
  - $E_1 = 25\%, E_2 = r_f = 5\%, \sigma_1 = \sigma_2 = 20\%,\ \rho = 0{,}3$
- Question 1 : représenter graphiquement les portefeuilles composés des titres risqués 1 et 2
  - *Avec des allocations positives (pas de vente à découvert)* $x_1 \geq 0, x_2 = 1 - x_1 \geq 0$. *On notera* $y = x_2/x_1 , y \geq 0$
- Question 2 : (difficile) écrire le ratio de Sharpe $S(y)$ en fonction de y et du ratio de Sharpe de l'actif 1, $S_1 = \frac{E_1 - r_f}{\sigma_1}$, puis montrer que $S(y) \leq S_1$. Conclure.
- Question 3 (difficile) : montrer que ce résultat reste vrai uniquement sous les conditions $E_2 = r_f, E_1 > r_f$.

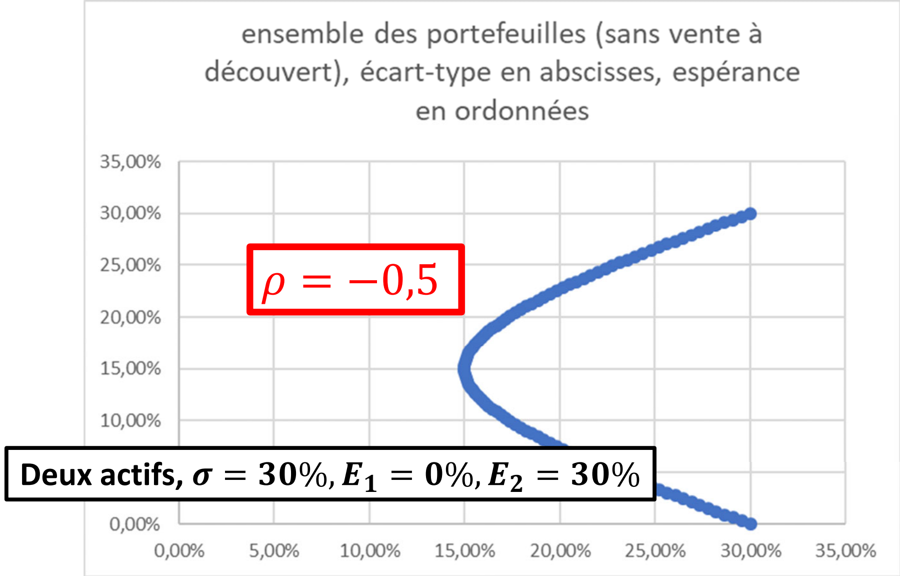
Portefeuilles risqués :



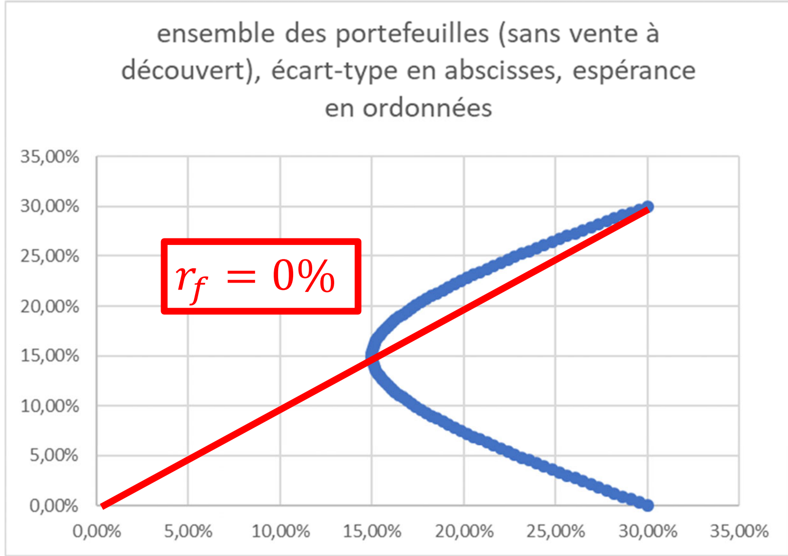
Exercice : Variation du taux sans risque et classement des actifs risqués selon le ratio de Sharpe

- Représenter graphiquement une frontière efficiente des actifs risqués (plan écart-type, espérance des rentabilités),
- Représenter la demi-droite reliant l'actif sans risque au portefeuille tangent
  - *On rappelle que le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe (ou la pente de la demi-droite)*
- Faire de même en augmentant le taux sans risque. Comparer les ratios de Sharpe des deux portefeuilles tangents.
- En déduire qu'un changement de taux sans risque change la hiérarchie des classements selon le ratio de Sharpe
- Qu'en conclure à propos du Médaf ?

Portefeuille tangent, ratio de Sharpe, taux sans risque



$\sigma = 30\%, \rho = -0{,}5\ E_1 = 0\%, E_2 = 30\%$



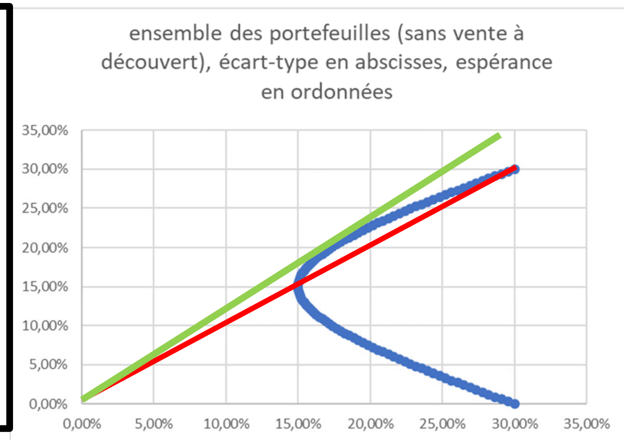
$\sigma = 30\%, \rho = -0{,}5\ E_1 = 0\%, E_2 = 30\%$, $r_f = 0\%$

- $E_P = x_1 E_1 + x_2 E_2 = x_2 \times 30\%$
- Ratio de Sharpe du portefeuille du portefeuille composé de l'actif 2 ($x_2 = 1, x_1 = 0$) : $\frac{E_2 - r_f}{\sigma} = 1$
- Ratio de Sharpe du portefeuille de variance minimale ($x_2 = x_1 = 0{,}5$) : $\frac{15\% - 0\%}{15\%} = 1$
  - *Ces deux portefeuilles sont sur la première bissectrice*
- Tous les portefeuilles au dessus de la première bissectrice ont des ratios de Sharpe supérieurs à 1
- Ils sont préférés à l'actif 2 et au portefeuille de variance minimale

$\sigma = 30\%, \rho = -0{,}5\ E_1 = 0\%, E_2 = 30\%$, $r_f = 0\%$

- Portefeuille tangent entre le portefeuille de variance minimale et l'actif 2 : $0 < x_1 < 0{,}5$

La demande en actif 1 (d'espérance de rentabilité nulle) est positive, même s'il est risqué et que sa rentabilité est n'est pas supérieure au taux sans risque : c'est parce que l'actif 1 a un bénéfice de couverture du risque



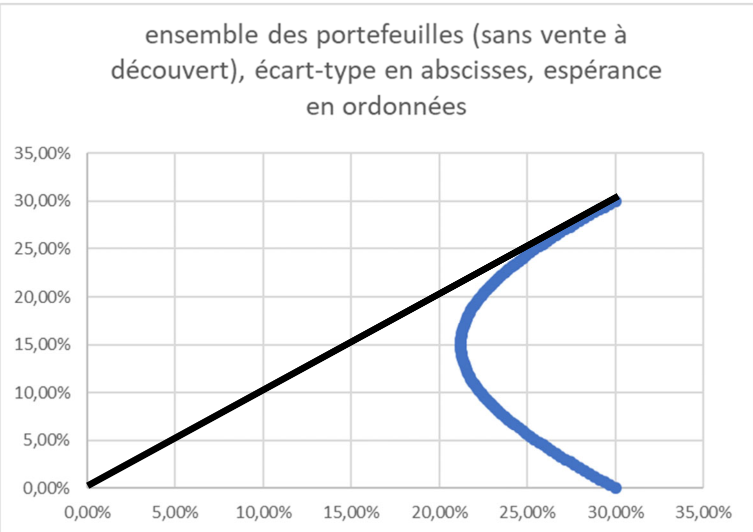
Composition du portefeuille tangent

- Portefeuille tangent : maximise le ratio de Sharpe
- $S(\omega_2) = \frac{30\% \times x_2}{30\% \times \sqrt{x_1^2 + 2 \times \rho x_1 x_2 + x_2^2}}$
- Cherchons x_2 qui minimise $\frac{1}{S(x_2)^2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2\rho \frac{\omega_1}{\omega_2} + 1.$
- En notant $y = \frac{x_1}{x_2}$, on doit minimiser $y^2 + 2\rho y + 1.$
  - *Condition du premier ordre :* $2y + 2\rho = 0$
  - *Ce qui donne* $\frac{x_1}{1-x_1} = -\rho$
  - $x_1 = -\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{3}$ *si* $\rho = -0{,}5$

Composition du portefeuille tangent

- La maximisation du ratio de Sharpe n'est pas immédiate.
- Il existe une approche plus simple pour déterminer la composition du portefeuille tangent T.
- $E_1 = r_f + \beta_1 \times (E_T - r_f)$
- $E_1 = r_f\ (= 0) \Rightarrow \beta_1 = 0$
- Comme $\beta_1 = \frac{\mathrm{cov}(R_1, R_T)}{\mathrm{var}(R_T)}$ et $R_T = x_1 R_1 + (1 - x_1) R_2$
- $\mathrm{cov}(R_1, R_T) = x_1 \sigma_1^2 + (1 - x_1)\rho\sigma_1\sigma_2 = 0$
- $\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow x_1 + (1 - x_1)\rho = 0$
- $x_1 = -\frac{\rho}{1-\rho}$ (on retrouve le résultat du transparent précédent)

$\sigma = 30\%, \rho = 0, E_1 = 0\%, E_2 = 30\%, r_f = 0\%$



$\sigma = 30\%, \rho = 0, E_1 = 0\%, E_2 = 30\%, r_f = 0\%$

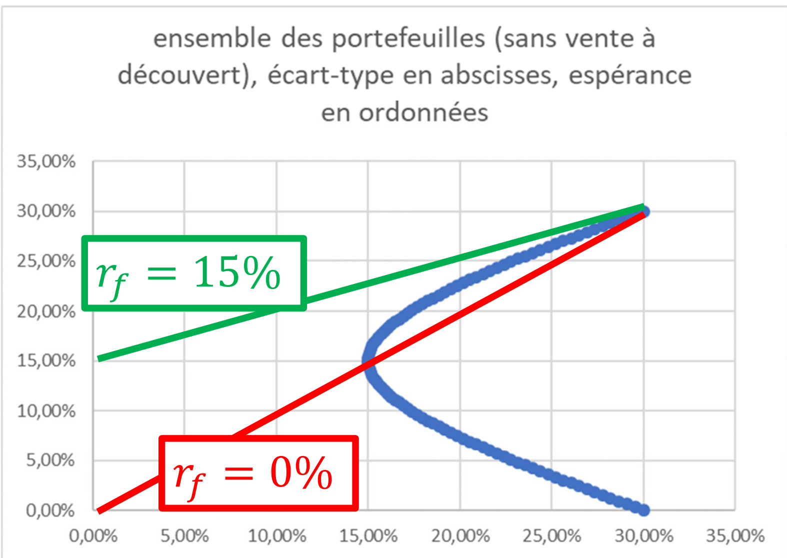
- Ratio de Sharpe maximal quand $x_1 = -\frac{\rho}{1-\rho} = 0$
- La demande en actif 1 est nulle
- Le titre ne pourrait pas être émis, sauf à baisser son prix de vente, pour que E_1 augmente.
- Il faut que $\rho < 0$, pour que le portefeuille tangent contienne de l'actif 1, si son espérance de rentabilité est égale au taux sans risque
- Question : si on veut émettre un montant $\bar{x}_1$, quel devrait être ce niveau E_1 ?

- Si on veut émettre un montant $\bar{x}_1$, quel devrait être E_1?
  - *On suppose* $0 < \bar{x}_1 < 1$ *(à l'équilibre quantités positives détenues dans les deux actifs)*
- $E_1 = r_f + \beta_1(E_T - r_f)$ où l'indice T fait référence au portefeuille tangent
  - *On ne suppose pas ici que* $r_f = 0$
  - $\beta_1 = \frac{\text{cov}(R_1, R_T)}{\text{var}(R_T)}$, $R_T = \bar{x}_1 R_1 + (1 - \bar{x}_1) R_2$
  - $\beta_1 = \frac{\bar{x}_1\sigma_1^2 + (1-\bar{x}_1)\rho\sigma_1\sigma_2}{\bar{x}_1^2\sigma_1^2 + 2\bar{x}_1(1-\bar{x}_1)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1-\bar{x}_1)^2\sigma_2^2}$
  - *Comme* $\sigma_1 = \sigma_2$, $\beta_1 = \frac{\bar{x}_1 + (1-\bar{x}_1)\rho}{\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_1(1-\bar{x}_1)\rho + (1-\bar{x}_1)^2}$
  - β_1 *est connu. Si* $\rho = 0$, $\beta_1 = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_1^2 + (1-\bar{x}_1)^2}$

$\sigma = 30\%, \rho = 0, E_1 = ?, E_2 = 30\%, r_f = 0\%$

- $E_1 = r_f + \beta_1(\bar{x}_1 E_1 + (1 - \bar{x}_1)E_2 - r_f)$
- $E_1 = \frac{r_f + \beta_1((1-\bar{x}_1)E_2 - r_f)}{1 - \beta_1\bar{x}_1}$
  - *Remarque : on vérifie facilement que* $0 < \beta_1\bar{x}_1 < 1$
  - *Si* $r_f = 0$, $E_1 = \frac{\beta_1(1-\bar{x}_1)}{1-\beta_1\bar{x}_1} \times E_2$
  - *On obtient* $E_1 = \frac{\bar{x}_1}{1-\bar{x}_1} \times E_2 = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \times E_2$
  - *Exemple numérique :* $\bar{x}_1 = \frac{1}{3}$, $E_1 = \frac{E_2}{2} = 15\%$

$\sigma = 30\%, \rho = -0{,}5\ E_1 = 0\%, E_2 = 30\%$

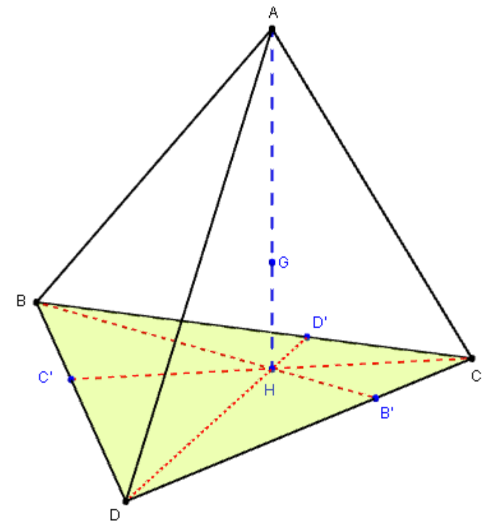


Ratio de Sharpe et taux sans risque

- Le taux sans risque passe de 0% à 15%. Comparer les portefeuilles tels que $0{,}5 < x_2 < 1$ à l'actif 2 ($x_2 < 1$) dans chacun des deux cas
- Cas 1 : $r_f = 0\%$, les ratios de Sharpe des portefeuilles tels $0{,}5 < x_2 < 1$ sont supérieurs à celui de l'actif 2 ; ils sont donc préférés à l'actif 2.
- Cas 2 : $r_f = 15\%$, les ratios de Sharpe des portefeuilles tels $0{,}5 < x_2 < 1$ sont inférieurs à celui de l'actif 2. C'est l'actif 2 qui est préféré.
- Un changement de r_f entraîne un changement de l'ordre de préférence selon le ratio de Sharpe.

Simulation d'allocations de portefeuille (voir exercices et révisions)

- Simulation aléatoire et uniforme d'allocations x_i, $i = 1, \dots n$
  - *On se restreint à des allocations positives :* $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots n$ *(n, nombre d'actifs),* ω_i *pourcentage de la richesse investie dans l'actif i*
  - *En outre,* $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.
  - *Ceci définit un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^n$*, connu comme le simplexe régulier (probability simplex)*
  - *Dans le cas* $n = 3$*, le simplexe est un triangle équilatéral*
  - *Dans le cas* $n = 4$*, le simplexe est un tétraèdre régulier (figure géométrique à quatre faces dans le plan, chaque face étant un triangle équilatéral)*
    - Problème posé au bac, il y a peu.



Simplexe probabiliste (représentation géométrique de portefeuilles avec 4 actifs risqués) : Tétraèdre régulier construit avec le logiciel du collège géogebra. Il y a quatre sommets, 6 arêtes et 4 faces, chacune étant un triangle équilatéral

Simulations d'allocations de portefeuille

- Tirage uniforme dans le simplexe (interdiction de vente à découvert), cas $n = 3$
  - $U_1, \dots, U_n$ *variables aléatoires uniformes sur* $[0,1]$ *indépendantes*
  - $-ln(U_1) \dots, -ln(U_n)$. $T = -ln(U_1) - ln(U_2) - ln(U_3)$, $x_i = \frac{-ln(U_i)}{T} 0$, $i = 1,2,3$
  - *Autre approche : On ordonne les variables* $U_1, \dots, U_{n-1}$ *de la plus petite à la plus grande, soit* $0 < U^1 < \cdots < U^{n-1} < 1$*, les variables ordonnées. On définit* $U^0 = 0$, $U^n = 1$*, puis on considère les* n *écarts* $S_{i-1} = U_i - U^{i-1}$, $i = 1, \dots, n$.
  - *Les écarts* $S_0, \dots, S_{n-1}$ *suivent une loi uniforme sur le simplexe*

Simulations d'allocations de portefeuille

- Simulation à partir des écarts (espacements) entre les statistiques d'ordre de variables aléatoires uniformes indépendantes

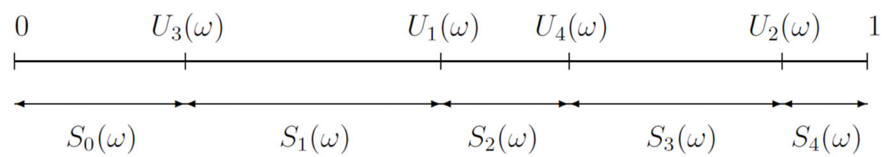


FIGURE 1.4 – Espacements d'un 4-échantillon

Tirage uniforme sur une sphère (simulation uniforme d'actifs risqués, en présence d'un actif non risqué)

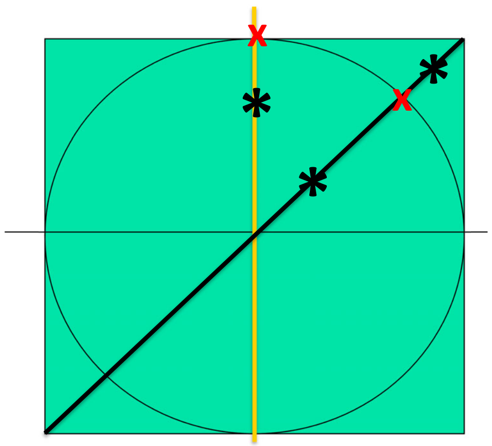
- On va chercher des allocations d'actifs risqués $(x_1, \dots, x_n)$
- x_i pourcentage de la richesse investie dans l'actif risqué i
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 - x_0$. x_0, proportion de la richesse investie dans l'actif sans risque.
- Quand on introduit l'actif sans risque, on n'a plus la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$
- Pour que le problème de simulation uniforme soit bien posé, on introduit la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$
- Les x_i sont sur une sphère centrée sur l'origine et de rayon unitaire

Tirage uniforme sur une sphère (simulation uniforme d'actifs risqués, en présence d'un actif non risqué)

- Tirage aléatoire d'un point sur une sphère ?
- On va commencer par tirer de manière uniforme dans le cube contenant la sphère
- Les côtés du cube sont de longueur 2 et le cube est centré sur l'origine
- $y_i = 2 \times \left(\text{alea}() - \frac{1}{2}\right)$, $i = 1, \dots n$
  - *dans Excel alea() génère une va uniforme sur [0,1]*
- On projette ensuite le point $(y_1, \dots, y_n)$ sur la sphère (le cercle dans les illustrations qui suivent) : $x_i = \frac{y_i}{\sqrt{\sum_k y_k^2}}$, $i = 1, \dots n$. On a bien $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$

Tirage uniforme sur une sphère (simulation uniforme d'actifs risqués, en présence d'un actif non risqué)

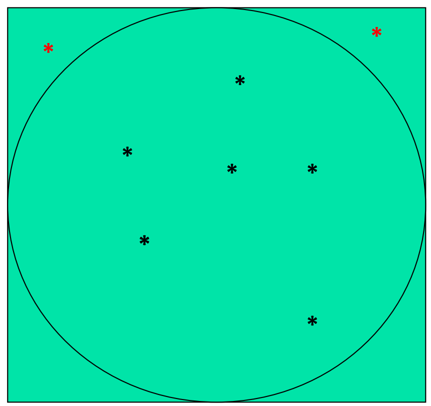
- S'agit-il d'un tirage uniforme ?
  - ** correspond à (y_1, y_2), x correspond à (x_1, x_2) projection sur le cercle*



La probabilité de tirer selon la première bissectrice (équipondération) est $\sqrt{2}$ fois plus élevée que selon l'axe des abscisses ou des ordonnées (un seul actif)

Méthode de rejet

- On tire de manière uniforme dans l'hypercube (les côtés sont de longueur égale à 2). Si $\sum_{j=1}^{n} y_j^2 > 1$, on oublie le tirage. Sinon on retient $\left(y_i / \sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)_{i=1,\dots,n}$

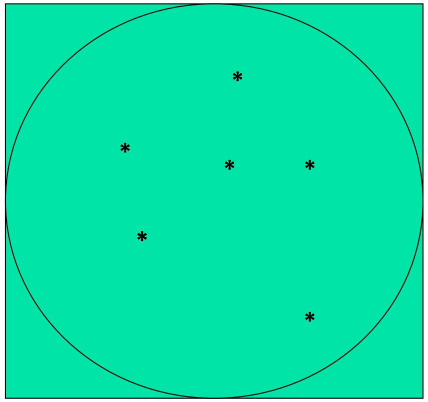


En noir, points acceptés
En rouge, points rejetés

https://fr.wikipedia.org/wiki/N-sph%C3%A8re

Méthode de rejet

- On tire de manière uniforme dans l'hypercube (les côtés sont de longueur égale à 2). Si $\sum_{j=1}^{n} y_j^2 > 1$, on oublie le tirage. Sinon on retient $x_i = y_i / \sum_{j=1}^{n} y_j^2,\ i = 1, \dots, n$



Problème : rejet fréquent quand n grand. Volume de l'hypercube 2^n, Volume de l'hypersphère $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$, taux de rejet rapport entre les volumes

https://fr.wikipedia.org/wiki/N-sph%C3%A8re

Simulations d'allocations positives ?

- On peut corriger le biais précédent, en ne prenant en compte que les points tombant à l'intérieur du cercle.
- Pour $n = 3$, l'algorithme consiste donc à ne prendre en compte que les tirages (y_1, y_2, y_3) tels que $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \leq 1$
  - *Remarque : le nombre de tirages retenus rapporté au nombre de tirages est une mesure du rapport entre la surface du cercle, π et celle du carré, 4*
  - *On n'utilise pas tous les tirages : peu économique en grande dimension*
  - *Remarque : En dimension 2, on aurait pu faire simplement, par exemple en tirant de manière uniforme la valeur de l'angle dans* $[0,2\pi]$. *Mais, on ne peut pas généraliser.*

Simulations sur la sphère

- On peut aussi utiliser des simulations de lois normales
- Soit $U_1, \dots, U_n$, n variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0,1]$.
- On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,
- On considère les n variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes $X_1 = \Phi^{-1}(U_1), \dots, X_n = \Phi^{-1}(U_n)$
- On génère des allocations, $x_1 = \frac{X_1}{\sum_i X_i^2}, \dots, x_n = \frac{X_n}{\sum_i X_i^2}$

Simulations sur la sphère

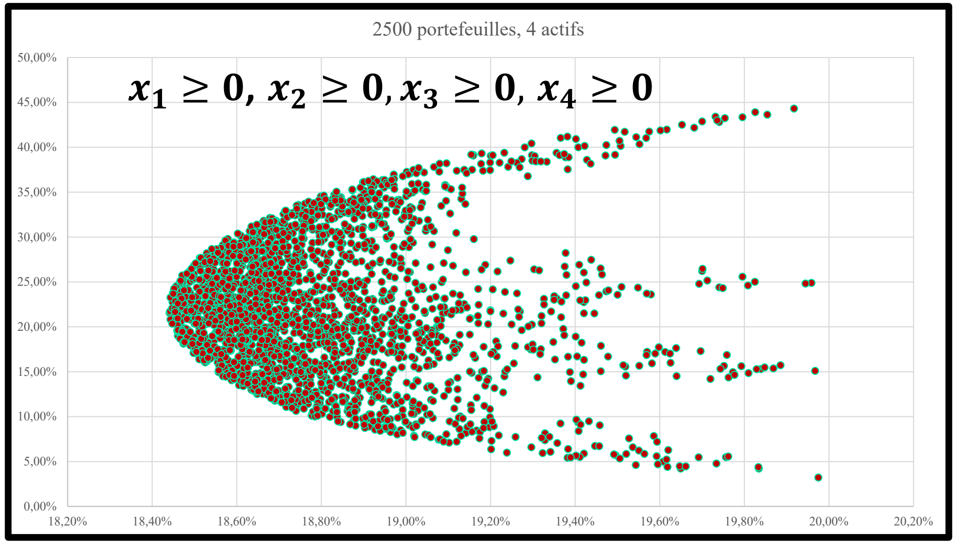
- Les allocations $(x_1, \dots, x_n)$ sont uniformément distribuées sur la sphère
  - *De par les propriétés des lois normales*
  - *La loi de $(X_1, \dots, X_n)$ est invariante par rotation*
  - *Il en est donc de même pour la loi de $(x_1, \dots, x_n)$*
  - *Les courbes d'isodensité de $(X_1, \dots, X_n)$ sont des sphères centrées sur l'origine.*
- Cette approche peut être utilisée pour trouver, par simulation, la composition du portefeuille tangent
  - *Kim, & Lee (2016). A uniformly distributed random portfolio. Quantitative Finance.*

Simulations sur la sphère

- En effet, le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe.
- C'est vrai aussi pour tout portefeuille de la CML, c'est-à-dire combinant actif sans risque et portefeuille tangent
- Notons x_0 l'allocation en actif sans risque et $x_1, \dots, x_n$ les allocations en actifs risqués. $x_1 + \cdots + x_n = 1 - x_0$
- $E_P - r_f = x_0 r_f + \left(\sum_{i\geq 1} x_i\, E_i\right) - r_f = \sum_{i\geq 1} x_i \left(E_i - r_f\right)$
- Notons $\bar{E}_i = E_i - r_f$, l'espérance de rentabilité nette du taux sans risque. $\sum_{i\geq 1} x_i\, \bar{E}_i = x'\bar{E}$ où x' est le transposé du vecteur (colonne) x
- Le ratio de Sharpe s'écrit comme $\frac{x'\bar{E}}{(x'\Omega x)^{1/2}}$

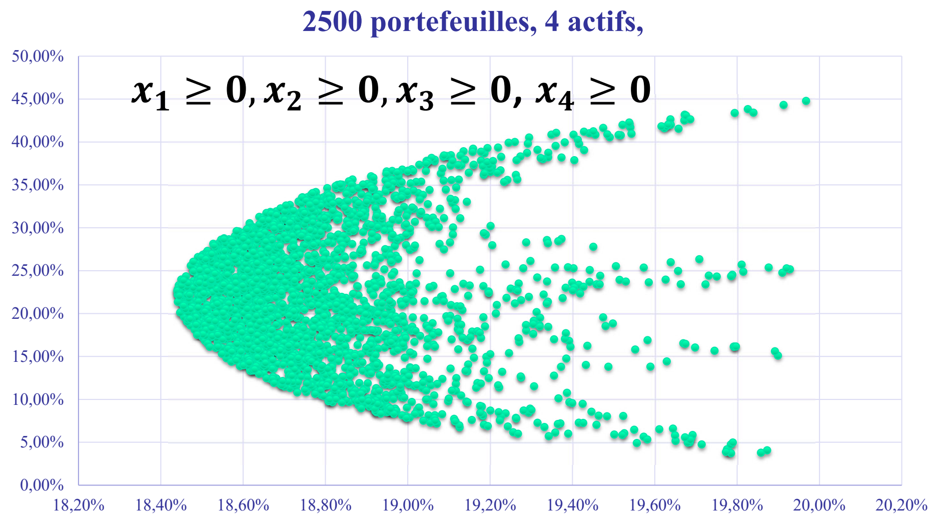
Simulations d'allocations positives

- Remarque : L'algorithme précédent permet de réaliser des tirages (x_1, x_2, x_3) uniformément distribués sur la sphère unité.
- On remarque que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ et $x_1^2 \geq 0, x_2^2 \geq 0, x_3^2 \geq 0$
- On peut donc utiliser cet outil pour simuler des allocations dans le simplexe (c'est-à-dire en cas d'interdiction des ventes à découvert).
- Mais (x_1^2, x_2^2, x_3^2) ne correspond pas à un d'un tirage uniforme dans le simplexe
  - *Si U suit une loi uniforme sur* $[0,1]$, *ce n'est pas le cas de* U^2 *(plus grande densité de valeurs proches de zéro)*



$\boldsymbol{E_1 = 3\%, E_2 = 15\%, E_3 = 25\%, E_4 = 25\%,}$
$\boldsymbol{\sigma_1 = 20\%, \sigma_2 = 20\%, \sigma_3 = 20\%, \sigma_4 = 20\%,}$
$\boldsymbol{\rho = 40\%}$ **(équi-corrélation)**

Il est intéressant d'étudier la partie droite : elle correspond à des allocations de 100% dans chacun des 4 actifs



$\boldsymbol{E_1 = 3\%, E_2 = 15\%, E_3 = 25\%, E_4 = 45\%,}$
$\boldsymbol{\sigma_1 = 20\%, \sigma_2 = 20\%, \sigma_3 = 20\%, \sigma_4 = 20\%, \rho = 40\%}$ **(équi-corrélation)**

Simulation aléatoire dans un simplexe régulier et sur une sphère

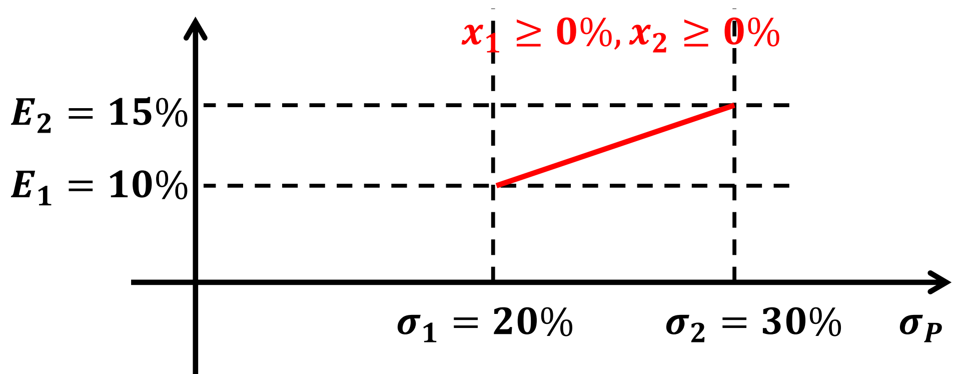
- Références mathématiques :
  - *Kim & Lee (2016). A uniformly distributed random portfolio. Quantitative Finance.*
  - *Rubinstein, & Melamed (1998). Modern simulation and modeling (Vol. 7). Wiley.*
  - *Polycopié de Charles Suquet sur la simulation, Université des Sciences et Technologies de Lille*
  - *Onn & Weissman (2011). Generating uniform random vectors over a simplex with implications to the volume of a certain polytope and to multivariate extremes. Annals of Operations Research.*

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- Problème : titres avec des rentabilités parfaitement corrélés
  - *Deux titres* $\mathbf{1, 2}$
  - *Espérances de rentabilités :* $E_1 = 10\%, E_2 = 15\%$
  - *Écart-types des rentabilités* $\sigma_1 = 20\%, \sigma_2 = 30\%$
  - *Coefficient de corrélation entre les rentabilités :* $\rho_{12} = +1$
  - *A) Représenter graphiquement dans le plan* (E_P, σ_P) *(écart-type des rentabilités en abscisse, espérance des rentabilités en ordonnée), l'ensemble des portefeuilles formés des titres* **1** *et* **2**. *On suppose qu'on ne peut vendre à découvert aucun des deux titres.*
  - *B) Représenter dans le plan* (E_P, σ_P), *l'ensemble des portefeuilles formés des titres* **1** *et* **2**. *On ne peut vendre à découvert* **2**, *mais c'est possible pour* **1**

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- A) On suppose qu'on ne peut vendre à découvert aucun des deux titres.

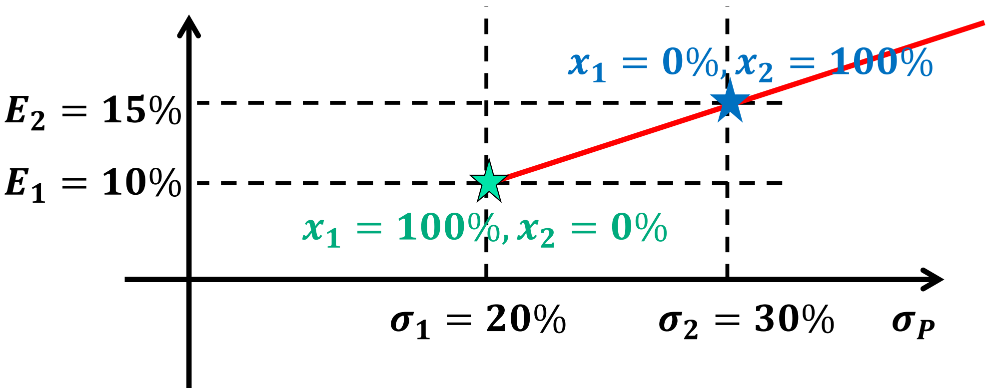


$E_P = x_1E_1 + x_2E_2$, $x_1 + x_2 = 100\%$

E_P moyenne pondérée de E_1 et de E_2

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

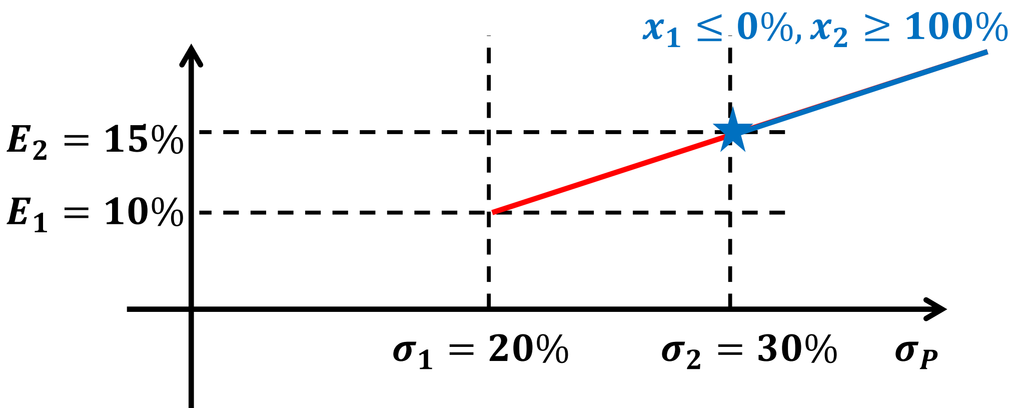
- B) On ne peut vendre à découvert **2**, mais c'est possible pour **1**



On prolonge le segment de droite précédent vers la droite

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- B) On ne peut vendre à découvert **2**, mais c'est possible pour **1**



$E_P = 10\% + x_2 \times 5\%$

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

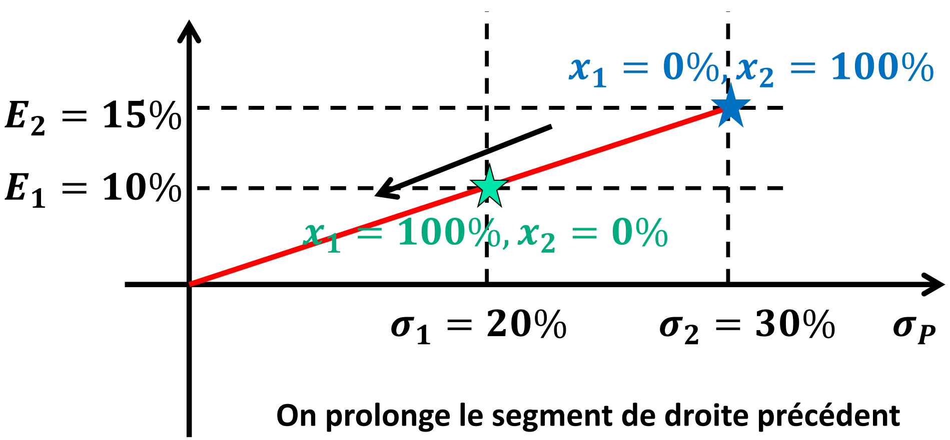
- Pour résoudre le problème B), il faut se souvenir que
  - *Quand le coefficient de corrélation est égal à* $\mathbf{+1}$ *ou à* $\mathbf{-1}$*, on a affaire à des segments de droites ou à des demi-droites*
  - $\boldsymbol{E_P = x_1E_1 + x_2E_2 = (1 - x_2) \times 10\% + x_2 \times 15\%}$
  - $\boldsymbol{E_P = 10\% + x_2 \times 5\%}$
  - *Interdiction de vendre à découvert le titre* **2**, $\boldsymbol{x_2 \geq 0}$
  - $\boldsymbol{x_2 \geq 0 \Leftrightarrow E_P \geq 10\% = E_1}$
  - *L'espérance des rentabilités des portefeuilles,* $\boldsymbol{E_P}$*, est toujours supérieure à l'espérance de rentabilité du titre* **1**
  - *La demi-droite en bleu correspond aux cas où le titre* **1** *est vendu à découvert (*$\boldsymbol{x_1 \leq 0\%}$*) et où* $\boldsymbol{x_2 \geq 100\%}$

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- Titres avec des rentabilités parfaitement corrélés (suite)
  - *C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre* **2** *mais pas le titre* **1***. Représenter dans le plan* $(\boldsymbol{E_P, \sigma_P})$*, l'ensemble des portefeuilles formés des titres* **1** *et* **2***.*
  - *On reprend des éléments de l'analyse précédente, mais il y a une difficulté supplémentaire*
  - *Commençons par ce qui est similaire au cas précédent*
  - *Contrainte d'absence de vente à découvert de* **1** *:* $\boldsymbol{x_1 \geq 0}$
  - $\boldsymbol{E_P = x_1E_1 + x_2E_2 = x_1E_1 + (1 - x_1)E_2 = E_2 + x_1 \times (E_1 - E_2)}$
  - $\boldsymbol{E_P = 15\% - x_1 \times 5\%}$
  - $\boldsymbol{x_1 \geq 0 \Leftrightarrow E_P \leq 15\%}$

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

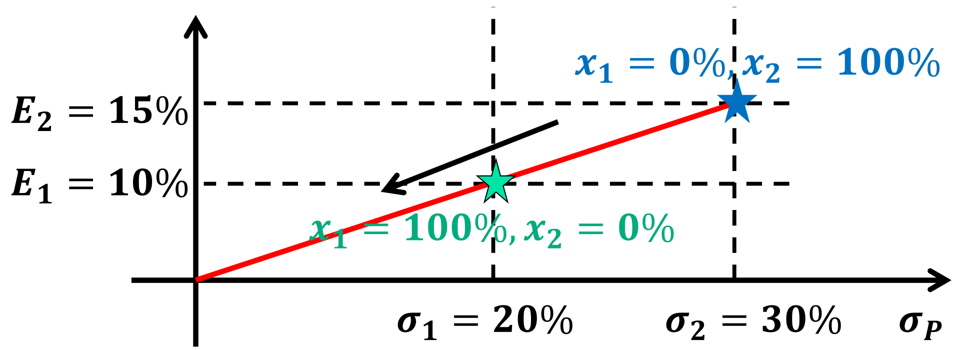
- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.



On prolonge le segment de droite précédent vers la gauche $\boldsymbol{x_1 \geq 0 \Leftrightarrow E_P \leq 15\%}$

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.



À chaque valeur de $\boldsymbol{x_1}$ **est associé un point sur le segment de droite rouge**

En augmentant $\boldsymbol{x_1}$**, on se déplace dans le sens de la flèche**

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

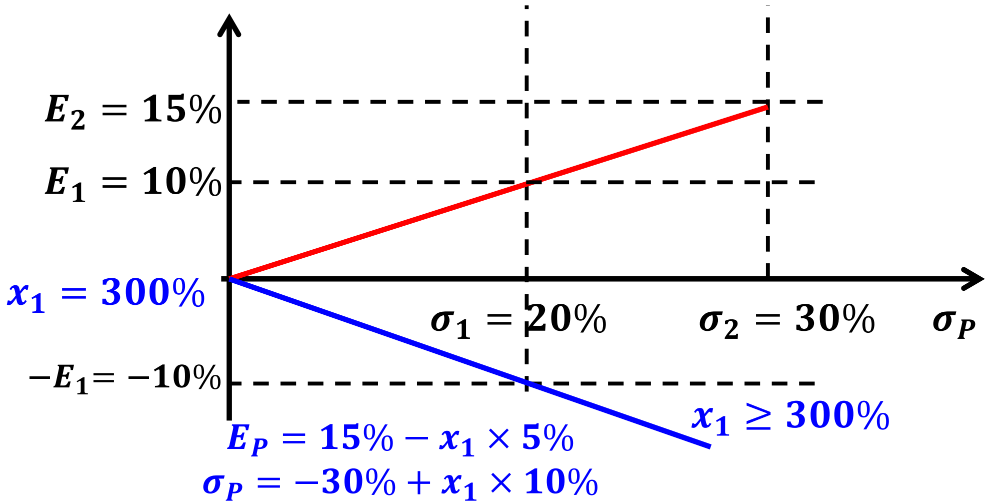
- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.
  - *En prolongeant le segment de droite précédent vers la gauche, on obtient une espérance de rentabilité égale à* **0**
  - $\boldsymbol{E_P = 15\% - x_1 \times 5\%}$
  - *Pour* $\boldsymbol{x_1 = 300\% \geq 0}$, $\boldsymbol{E_P = 0}$
  - *On peut voir sur le graphique qu'alors* $\boldsymbol{\sigma_P = 0}$
  - *Ceci provient de* $\boldsymbol{E_2/E_1 = \sigma_2/\sigma_1 = 1,5}$
  - *Autre approche : quand* $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P = |x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2| = |x_1\sigma_1 + (1 - x_1)\sigma_2|}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P = |\sigma_2 + x_1(\sigma_1 - \sigma_2)| = |30\% - x_1 \times 10\%|}$
  - $\boldsymbol{x_1 = 300\% \Rightarrow \sigma_P = 0\%}$

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.
  - *Remarque*
    - On a ainsi formé un portefeuille tel que $\boldsymbol{E_P = 0}$, $\boldsymbol{\sigma_P = 0}$
    - Actif sans risque/dépôt à vue non rémunéré sans risque de défaut
  - *On a vu en cours que l'ensemble des portefeuilles constitués de* **1** *et de* **2** *pouvait être formé de deux demi-droites*
    - Ici, si $\boldsymbol{x_1 \geq 300\%}$,
    - $\boldsymbol{E_P = 15\% - X_1 \times 5\% \leq 0}$
    - $\boldsymbol{\sigma_P = |30\% - x_1 \times 10\%|}$
    - $\boldsymbol{x_1 \geq 300\%}$, $\boldsymbol{30\% - x_1 \times 10\% \leq 0}$
    - $\boldsymbol{\sigma_P = -30\% + x_1 \times 10\%}$

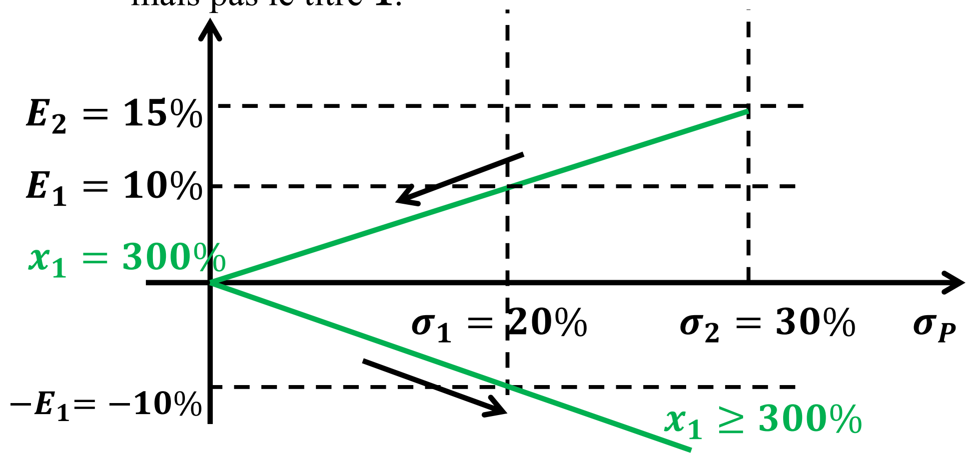
Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **1** mais pas le titre **2**.



Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.



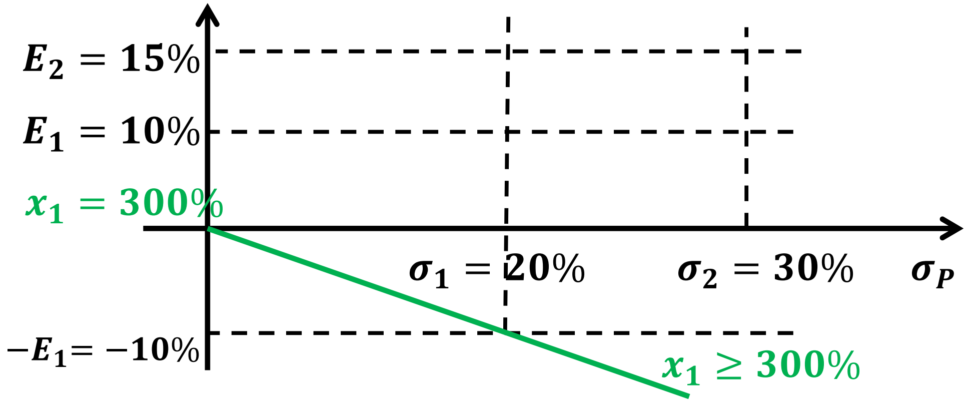
À chaque valeur de x_1 est associé un point
En augmentant x_1, on se déplace dans le sens de la flèche

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- D) Ensemble des portefeuilles formés des titres **1** et **2** qui ne sont jamais choisis par les investisseurs

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- D) Ensemble des portefeuilles formés des titres **1** et **2** qui ne sont jamais choisis par les investisseurs ayant des préférences moyenne-variance



Tous les titres sur la demi-droite en vert sont dominés par l'actif sans risque / dépôt à vue non rémunéré

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

- Examen du cas où des titres ou des portefeuilles de titres sont parfaitement corrélés
  - *Situation déjà examinée pour deux titres risqués*
  - *L'ensemble des portefeuilles constitués des deux titres en quantités positives est représenté par le segment de droite reliant les points associés à ces deux titres*
  - *Que se passe-t-il si on peut vendre à découvert ces deux titres ?*
- Dans le cas où on combine un actif sans risque et un titre risqué, l'ensemble des portefeuilles est représenté par une demi-droite
  - *Y a-t-il un lien avec le cas précédent ?*

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

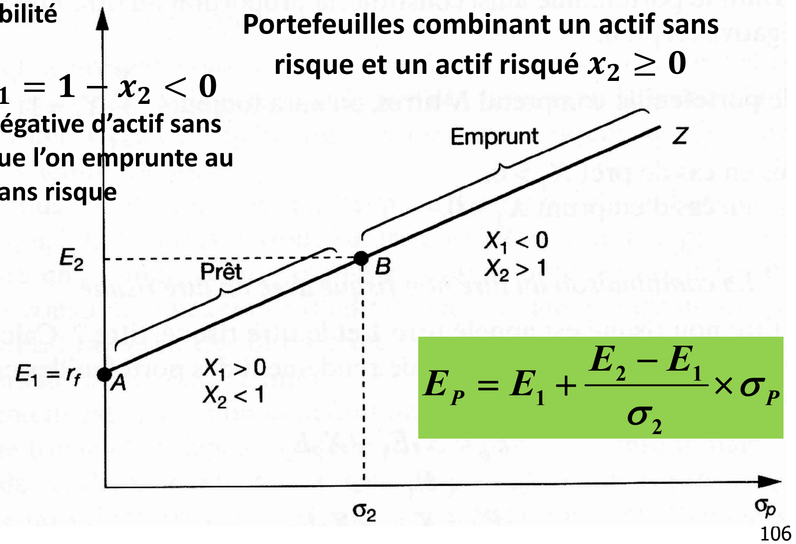
Graphique 2.10

Relation affine entre σ_P et E_P

Portefeuilles combinant un actif sans risque et un actif risqué $x_2 \geq 0$

$x_2 > 1 \Rightarrow x_1 = 1 - x_2 < 0$

Une quantité négative d'actif sans risque signifie que l'on emprunte au taux sans risque



$$E_P = E_1 + \frac{E_2 - E_1}{\sigma_2} \times \sigma_P$$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

Le segment de droite reliant les points A et B représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2, en quantités positives, pour un niveau de corrélation égal à 1

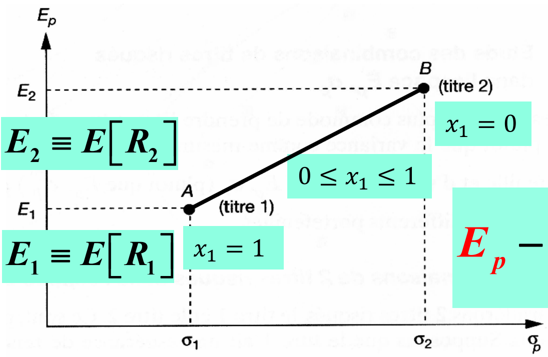
- Corrélation $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$
- **Segment de droite ?**

$$E_p = x_1 \times E[R_1] + (1 - x_1) \times E[R_2]$$

$$E_p - E_2 = x_1 \times (E_1 - E_2)$$

$$\sigma_P = x_1\sigma_1 + (1 - x_1)\sigma_2$$

$$\sigma_P - \sigma_2 = x_1(\sigma_1 - \sigma_2)$$



$$E_p - E_2 = (\sigma_P - \sigma_2) \times \frac{E_1 - E_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

Relation affine entre espérance de rentabilité et écart-type des rentabilités

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

- Etude du cas $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$
  - *Fraction de la richesse investie dans le titre 1 :* $\boldsymbol{x_1 = x}$
  - *Rentabilité du portefeuille* $\boldsymbol{R_P = xR_1 + (1 - x)R_2}$
  - *Espérances des rentabilités* $\boldsymbol{E_1 = E[R_1], E_2 = E[R_2]}$

$$E[R_P] = E_P = xE[R_1] + (1 - x)E[R_2] = E_2 + x(E_1 - E_2)$$

  - *Variance des rentabilités :*

$$\mathrm{Var}[R_P] = \sigma_P^2 = x^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}x(1 - x)\sigma_1\sigma_2 + (1 - x)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = x^2\sigma_1^2 + 2x(1 - x)\sigma_1\sigma_2 + (1 - x)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = (x\sigma_1 + (1 - x)\sigma_2)^2$$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

$\sigma_P^2 = (x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2)^2$

- *Écart-type des rentabilités*

$$\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2|$$

  - Fait intervenir une valeur absolue
  - Si $\boldsymbol{x_1 = x \geq 0}$ et $\boldsymbol{x_2 = 1 - x \geq 0}$,
  - alors $\boldsymbol{x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 \geq 0}$
  - Puisque $\boldsymbol{\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0}$
  - Dans ce cas, $\boldsymbol{\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2| = x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2}$
  - Prenons $\boldsymbol{\sigma_2 = 20\%}$, $\boldsymbol{\sigma_1 = 10\%}$, $\boldsymbol{x = 3}$, $\boldsymbol{1 - x = -2}$
  - $\boldsymbol{x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 = 3 \times 10\% + (1-3) \times 20\% = -10\%}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P = |-10\%| = 10\%}$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- Écart-type des rentabilités

$$\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2|$$

  - *Si* $\boldsymbol{x < 0}$ *ou* $\boldsymbol{1 - x < 0}$,
  - $\boldsymbol{x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2}$ *peut devenir négatif*
- $\boldsymbol{\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2| = -(x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2)}$
  - *Si* $\boldsymbol{x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 \leq 0}$
- $\boldsymbol{\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2| = x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2}$
  - *Si* $\boldsymbol{x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 \geq 0}$
  - *On peut transformer la condition de signe sur* $\boldsymbol{x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2}$ *en une condition sur* $\boldsymbol{x}$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- On peut transformer la condition de signe sur $\boldsymbol{x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2}$ en une condition sur $\boldsymbol{x}$
- $\boldsymbol{x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 = \sigma_2 + x(\sigma_1 - \sigma_2)}$
- On va supposer que $\boldsymbol{\sigma_2 > \sigma_1}$
  - $\boldsymbol{\sigma_1 - \sigma_2 < 0}$
  - $\boldsymbol{x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 > 0 \Leftrightarrow x(\sigma_1 - \sigma_2) > -\sigma_2}$
  - $\boldsymbol{x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 > 0 \Leftrightarrow x < -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)}$
- Si $\boldsymbol{x = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)}$,
- $\boldsymbol{\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2| = 0}$
- On a alors un portefeuille non risqué construit à partir de deux titres risqués

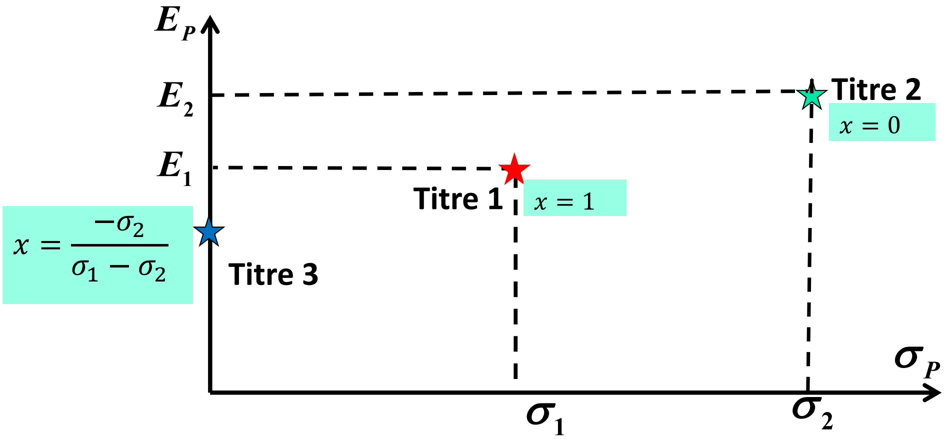
Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- Espérance de rentabilité de ce portefeuille non risqué
- $\boldsymbol{x = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)}$
- $\boldsymbol{E_P = E_2 + x(E_1 - E_2)}$
  - $\boldsymbol{E_P}$ *espérance de rentabilité du portefeuille non risqué*
  - $\boldsymbol{E_1}$ *espérance de rentabilité du titre* $\boldsymbol{1}$
  - $\boldsymbol{E_1}$ *espérance de rentabilité du titre* $\boldsymbol{2}$
- $\boldsymbol{E_P = E_2 - \sigma_2(E_1 - E_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)}$
- Considérerons le portefeuille non risqué comme un titre
  - *Noté 3*
  - $\boldsymbol{E_3 = E_P, \sigma_3 = \sigma_P = 0}$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage $\rho_{12} = +1$

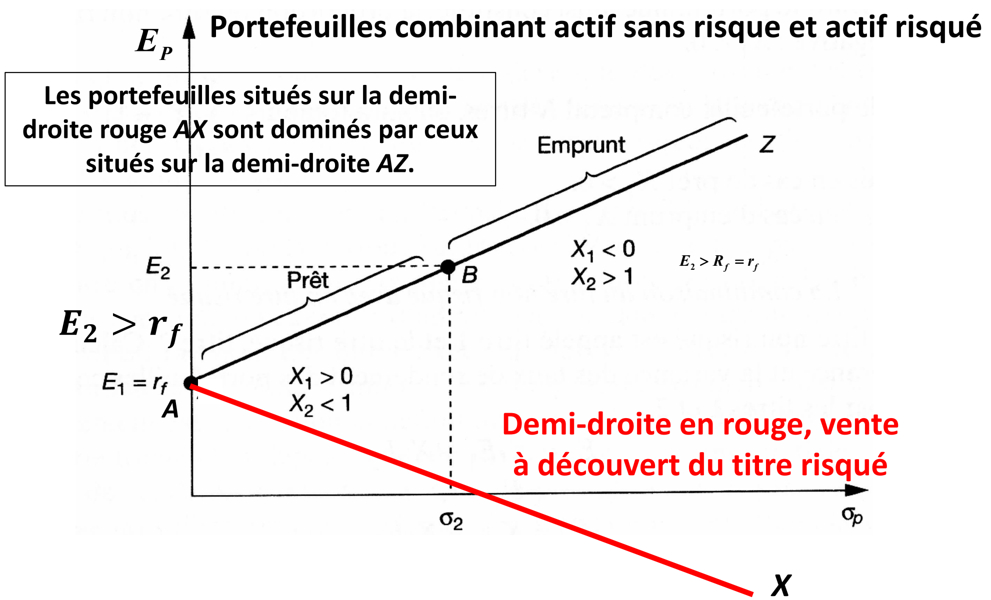
- Représentation des titres 1 et 2 et du portefeuille sans risque (3)
  - *Plan écart-type des rentabilités - espérance des rentabilités*
  - *Cas où* $E_2 > E_1, \sigma_2 > \sigma_1$



Exercice : corrélations parfaites - arbitrage $\rho_{12} = +1$

- Le portefeuille 3 non risqué est constitué de titres 1 et 2
- Tout portefeuille constitué de titres 3 et de titres 1 est donc composé de titres 1 et de titres 2
- En étudiant la CML, on a vu l'ensemble des portefeuilles constitué d'un placement sans risque et d'un titre risqué
  - *Ici le placement sans risque est le titre 3*
- Il s'agit de la réunion de deux demi-droites
  - *La demi-droite inférieure correspond à des espérances de rentabilité inférieures au taux sans risque.*
  - *Et à des ventes à découvert du titre risqué :*
  - *En effet,* $E_P = (1 - x_2) r_f + x_2 E_2 = r_f + x_2(E_2 - X_2)$
  - $E_P = R_F + x_2(E_2 - x_2) < r_f \Leftrightarrow x_2 < 0$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage $\rho_{12} = +1$



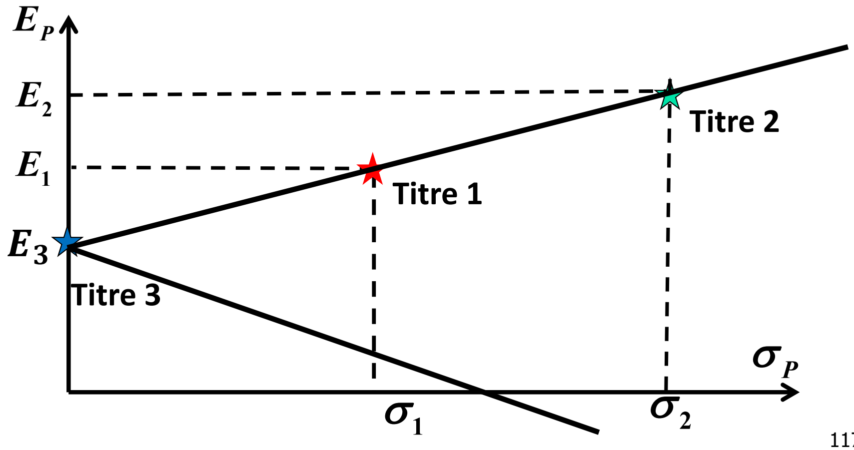
Exercice : corrélations parfaites - arbitrage $\rho_{12} = +1$

- Le portefeuille 3 non risqué est constitué de titres 1 et 2
- Tout portefeuille constitué de titres 3 et de titres 1 est donc composé de titres 1 et de titres 2
- En étudiant la CML, on a vu l'ensemble des portefeuilles constitué d'un placement sans risque et d'un titre risqué
  - *Ici le placement sans risque est le titre 3*
- Il s'agit de la réunion de deux demi-droites
  - *La demi-droite inférieure correspond à des espérances de rentabilité inférieures au taux sans risque.*
  - *Et à des ventes à découvert du titre risqué :*
  - *En effet,* $E_P = (1 - x_2) r_f + x_2 E_2 = r_f + x_2(E_2 - X_2)$
  - $E_P = r_f + x_2(E_2 - x_2) < r_f \Leftrightarrow x_2 < 0$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

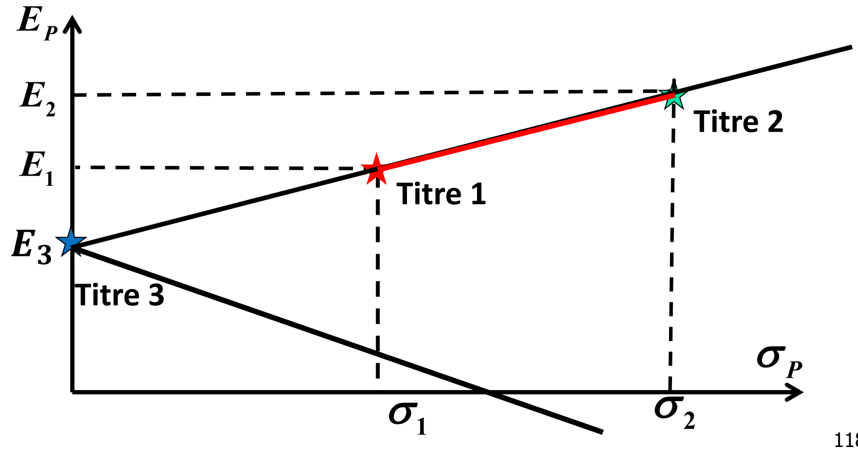
- Représentation des titres 1 et 2 et du portefeuille sans risque (3)
  - *Plan écart-type des rentabilités - espérance des rentabilités*
  - *Cas où* $\boldsymbol{E_2 > E_1, \sigma_2 > \sigma_1}$



Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- Ensemble des portefeuilles formés de 1 et de 2
  - *Pour toutes les valeurs de x*
  - *En rouge, portefeuilles sans vente à découvert,* $\boldsymbol{0 \leq x \leq 1}$



Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- On rappelle que si $\boldsymbol{x = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)}$,
- $\boldsymbol{\sigma_P = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2| = 0}$
- $\boldsymbol{E_P = E_3 = E_2 - \sigma_2(E_1 - E_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)}$
- S'il existe un placement sans risque au taux $\boldsymbol{r_f}$, alors $\boldsymbol{E_3 = r_f}$
  - *En l'absence d'opportunités d'arbitrage*
  - *Si* $\boldsymbol{E_3 > r_f}$*, on peut emprunter* $\boldsymbol{k > 0}$ *euros au taux* $\boldsymbol{r_f}$ *et investir cette somme dans le titre* $\boldsymbol{3}$
  - *La mise de fonds à la date courante est nulle*
  - *À la date suivant la date courante, on doit rembourser l'emprunt soit* $\boldsymbol{k \times (1 + r_f)}$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- *À la date suivant la date courante, on doit rembourser l'emprunt soit* $\boldsymbol{k \times (1 + r_f)}$
- *On récupère* $\boldsymbol{k \times (1 + E_3)}$ *du placement en titre* $\boldsymbol{3}$
- *Soit* $\boldsymbol{k \times (E_3 - r_f) > 0}$
- *Comme* $\boldsymbol{k}$ *est arbitrairement grand, le profit à la date future est arbitrairement grand*
- *Le risque est nul : les rentabilités sont non aléatoires*
- *La mise de fonds initiale est nulle*
- *La situation précédente est une opportunité d'arbitrage*
- *On admet couramment qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage sur les marchés « sans frictions »*
- *Donc, on ne peut avoir* $\boldsymbol{E_3 > r_f}$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

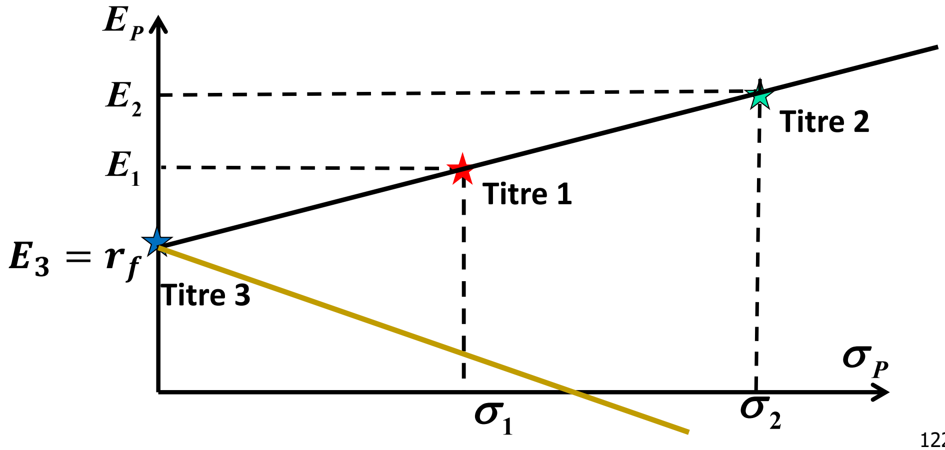
$\rho_{12} = +1$

- Si l'on suppose maintenant que $\boldsymbol{E_3 < r_f}$
  - *On prête une somme* $\boldsymbol{k}$ *au taux* $\boldsymbol{r_f}$
  - *On vend à découvert des titres* **3** *pour un montant* $\boldsymbol{k}$
  - *L'investissement net à la date courante est nul*
  - *On récupère à la date suivant la date courante le montant*
  - $\boldsymbol{k \times (r_f - E_3) > 0}$
  - *On a à nouveau construit une opportunité d'arbitrage*
  - *S'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage, on ne peut pas avoir* $\boldsymbol{E_3 < r_f}$
- La seule valeur de $\boldsymbol{E_3}$ compatible avec l'absence d'opportunité d'arbitrage est $\boldsymbol{E_3 = r_f}$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- *La demi-droite noire représente les portefeuilles constitués de placement sans risque et de titre* **2**
- *Le titre* **1** *était en fait un portefeuille constitué de placement sans risque et de titre* **2**



Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Exercice : étude du cas extrême $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$
  - *Ensemble des portefeuilles constitués de deux actifs quand le coefficient de corrélation est égal à* $\mathbf{-1}$ *?*
    - Fraction de la richesse investie dans le titre **1** : $\boldsymbol{x_1 = x}$
    - Rentabilité du portefeuille $\boldsymbol{R_P = xR_1 + (1-x)R_2}$
    - Espérances des rentabilités : $\boldsymbol{E_1 = E[R_1], E_2 = E[R_2]}$

$$E[R_P] = E_P = xE[R_1] + (1-x)E[R_2] = E_2 + x(E_1 - E_2)$$

- Variance des rentabilités :

$$\mathrm{Var}[R_P] = \sigma_P^2 = x^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}x(1-x)\sigma_1\sigma_2 + (1-x)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = x^2\sigma_1^2 - 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2 + (1-x)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = (x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2)^2$$

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Écart-type des rentabilités

$$\sigma_P = |x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2|$$

- Fait intervenir une valeur absolue

$$\begin{cases} \sigma_P = x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2, \text{ si } x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2 \geq 0 \\ \sigma_P = -x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2, \text{ si } x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2 \leq 0 \end{cases}$$

- $\boldsymbol{\sigma_P = 0}$ si $\boldsymbol{x = \sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2)}$. Alors,

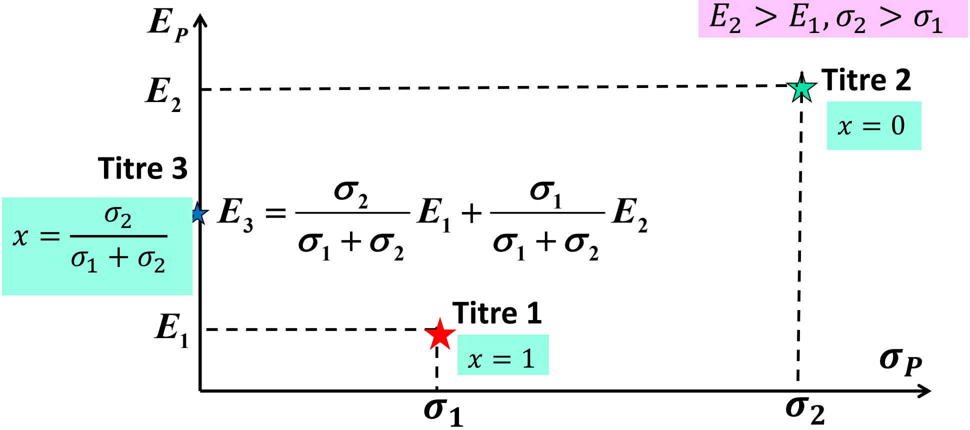
$$x \geq 0, 1 - x = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \geq 0$$

- *Dans le cas* $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$ *on peut constituer un portefeuille sans risque (titre 3) à partir des titres risqués* 1 *et* 2.
  - Taux sans risque associé $E_P = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}E_1 + \dfrac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}E_2$

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

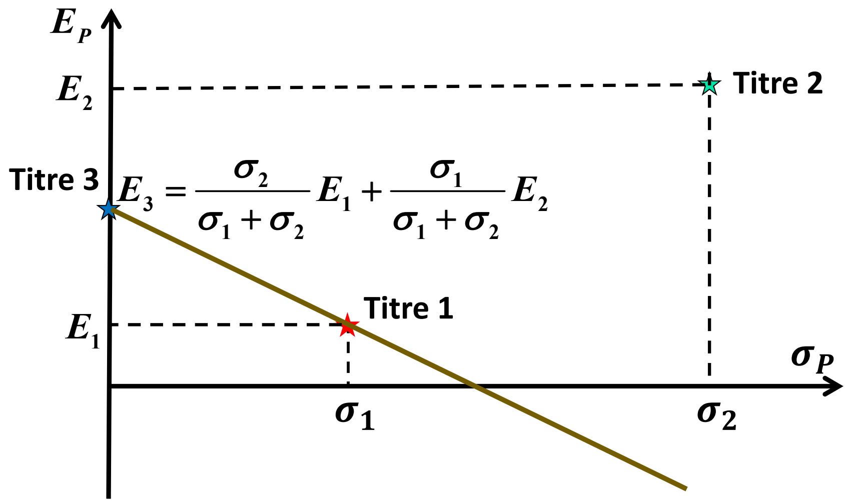
- Représentation des deux titres **1** et **2** et du titre **3** (sans risque)
  - *Plan (écart-type des rentabilités, espérance des rentabilités)*
  - *Pour simplifier l'analyse, on se restreint au cas :*

$$E_2 > E_1, \sigma_2 > \sigma_1$$



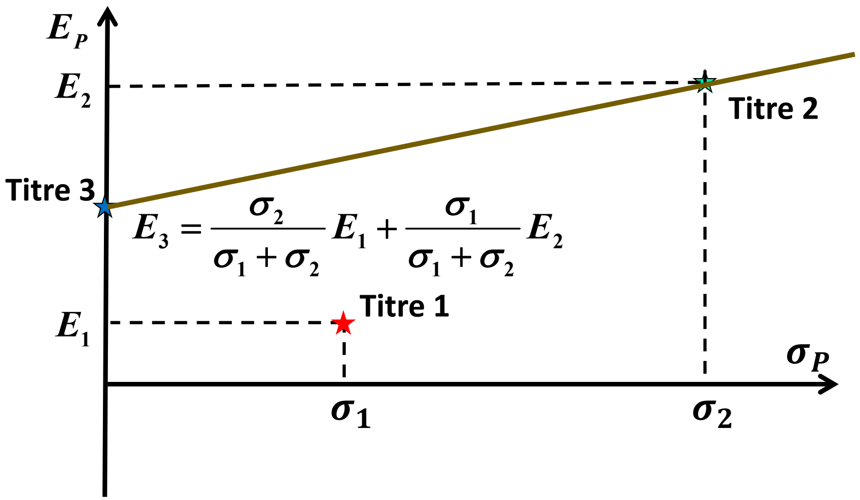
Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Si on combine les titres 1 et 3, on obtient la demi-droite reliant les points associés aux titres 1 et 3



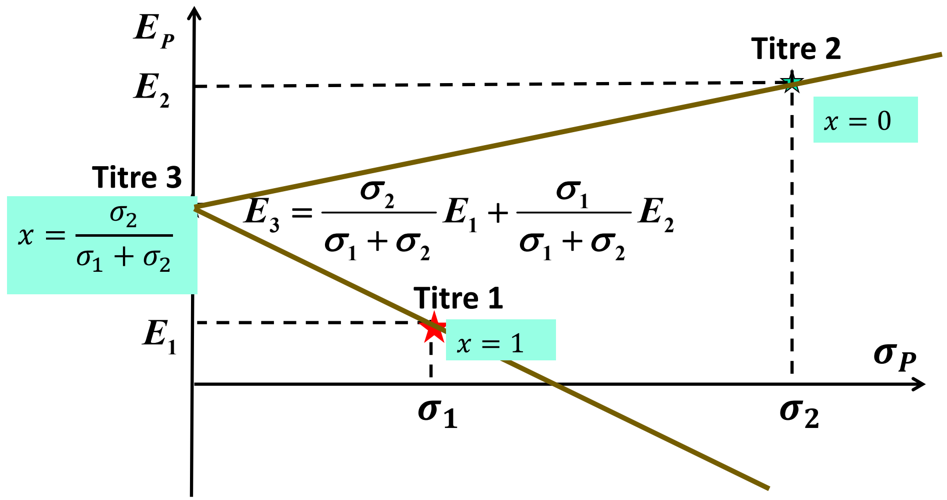
Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Si on combine les titres 2 et 3, on obtient la demi-droite reliant les points associés aux titres 2 et 3



Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Au total, l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2 est représenté par la réunion des deux demi-droites précédentes



Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- On remarque que l'ensemble des portefeuilles constitués des titres risqués 1 et 2, quand $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$
- a exactement la même forme géométrique que l'ensemble des portefeuilles constitués de l'actif sans risque et d'un actif risqué
  - *Réunion de deux demi-droites*
  - *Ce n'est pas une coïncidence car quand $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$, on peut reconstituer un actif sans risque 3, à partir des titres 1 et 2.*
  - *Le portefeuille 3 comporte une quantité non nulle de titre 1*

$$x = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} > 0$$

  - *L'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2 est identique à l'ensemble des portefeuilles combinant le titre 1 et le portefeuille 3.*

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Étude du cas où les ventes à découvert sont interdites :

$$0 \leq x \leq 1$$

  - *Le transparent précédent représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2, de rentabilité*
  - $\boldsymbol{R_P = x \times R_1 + (1-x) \times R_2}, \quad \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}$
  - *Dans le plan (écart-type des rentabilités, espérance des rentabilités)*
  - *L'ensemble des portefeuilles de rentabilité $\boldsymbol{R_P = x \times R_1 + (1-x) \times R_2}$, $\boldsymbol{x \in [0,1]}$*
  - *est donc inclus dans la réunion des deux demi-droites présentées dans le transparent précédent.*
  - *Déterminons quelle partie de deux demi-droites retenir*

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Examinons comment la rentabilité des portefeuilles constitués de titres **1** et **2** dépend de $\boldsymbol{x}$

$$R_P = x \times R_1 + (1-x) \times R_2, \qquad x \in \mathbb{R}$$

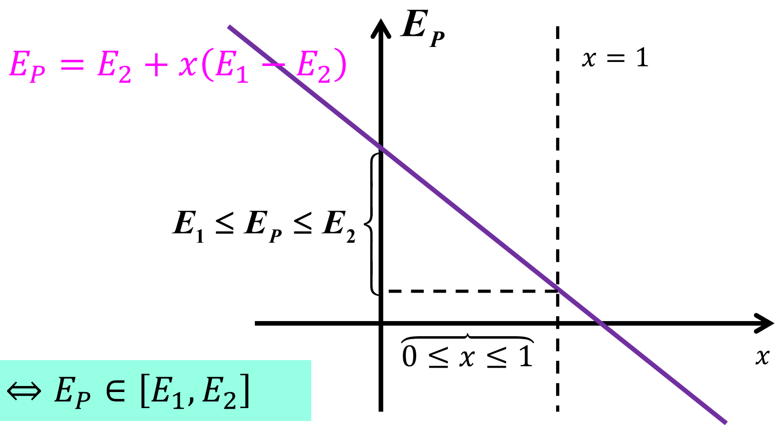
  - *On rappelle que :*

$$E[R_P] = E_P = xE[R_1] + (1-x)E[R_2] = E_2 + x(E_1 - E_2)$$

  - *Avec* $\boldsymbol{E_1 < E_2}$. $\boldsymbol{E_P}$ *est une fonction affine décroissante de* $\boldsymbol{X}$
    - Quand $\boldsymbol{x < 0}$, $\boldsymbol{E_P > E_2}$
    - Quand $\boldsymbol{x > 1}$, $\boldsymbol{E_P < E_1}$
    - Quand x croit de **0** à **1**, $\boldsymbol{E_P}$ décroit de $\boldsymbol{E_2}$à $\boldsymbol{E_1}$
  - *Au total* $\quad x \in [0,1] \Leftrightarrow E_P \in [E_1, E_2]$

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

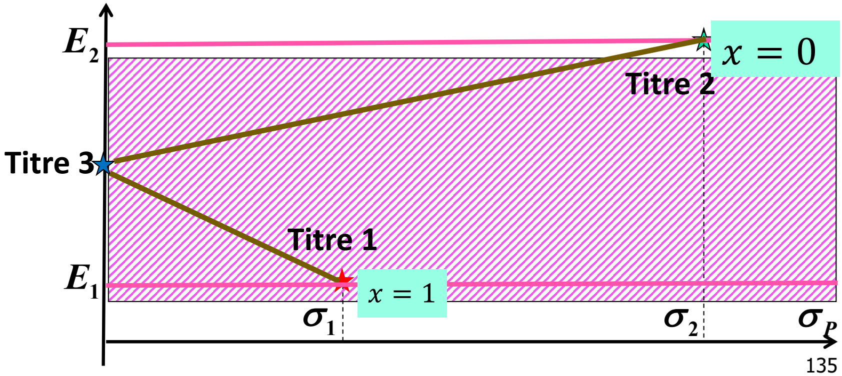
- Espérance de rentabilité des portefeuilles constitués de titres 1 et 2 en fonction de x



$x \in [0,1] \Leftrightarrow E_P \in [E_1, E_2]$

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- *Ventes à découvert interdites :* $\boldsymbol{E_P \in [E_1, E_2] \Leftrightarrow X \in [0,1]}$
- *La zone hachurée en rose correspond à l'ensemble des portefeuilles tels que :* $\boldsymbol{E_P \in [E_1, E_2]}$
- *Les portefeuilles formés des titres 1 et 2 en quantités positives correspondent à l'intersection des deux demi-droites précédentes et de la zone hachurée*



Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Ventes à découvert interdites : $\boldsymbol{0 \leq x \leq 1}$
  - *L'ensemble des portefeuilles formés des titres 1 et 2 en quantités positives est la réunion des deux segments de droite*