Valeur Actuelle Nette et Taux de Rentabilité Interne

Valeur actuelle nette (VAN) et TRI

- Introduction
- Diagramme de flux
- VAN et TRI :
  - *définitions*
  - *Exemples*
- Fonctions financières d'Excel
- Choix d'investissements : VAN et TRI
- Investissement et comptabilité
- TRI et rentabilité moyenne
- Les limites du taux actuariel : obligations risquées
- Justification économique de la VAN en univers certain (absence d'opportunités d'arbitrage)

Choix d'investissement

- On a examiné comment des investisseurs extérieurs à l'entreprise pouvaient faire des choix de portefeuilles d'actifs financiers
  - *Modèle à une période*
  - *Markowitz, MEDAF*
- On va poursuivre cette analyse
  - *En introduisant plusieurs périodes*
  - *Différents types d'échéanciers de flux*
- Et des critères tels que la valeur actuelle nette (VAN) ou le taux de rentabilité interne (TRI)
  - *Étudier la pertinence de ces critères*
  - *Choix du bon taux d'actualisation pour la VAN*

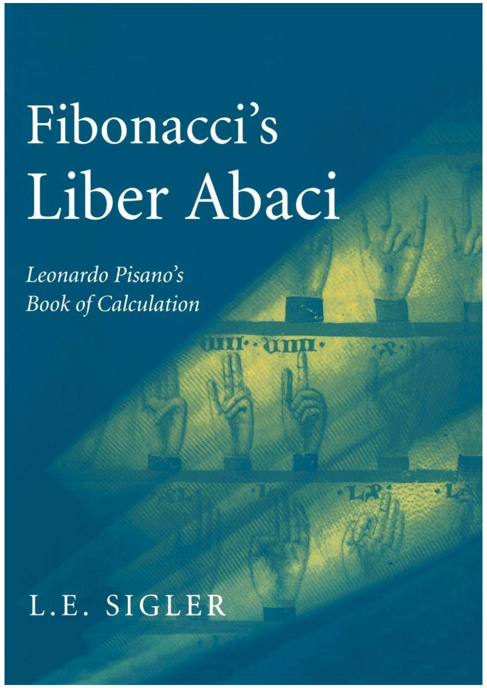
Calculs financiers (VAN, TRI)

"The discovery of calculation (logismos) ended civil conflict and increased concord. For when there is calculation there is no unfair advantage, and there is equality, for it is by calculation that we come to agreement in our transactions."

Archytas de Tarente, 435 – 347 av. J.-C.

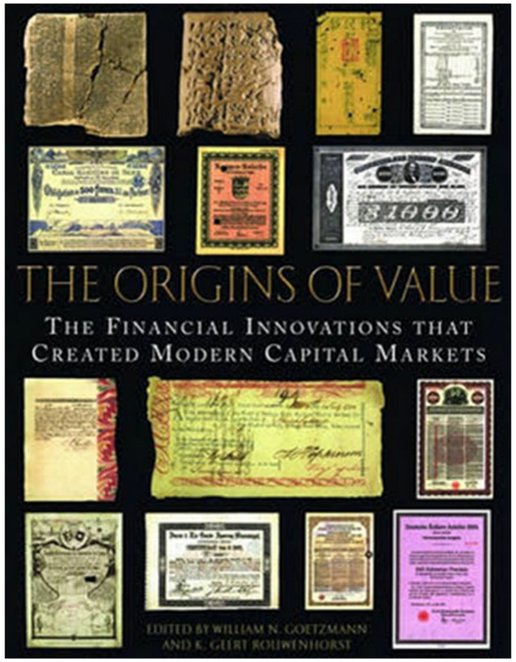
Aux origines de la valeur actuelle

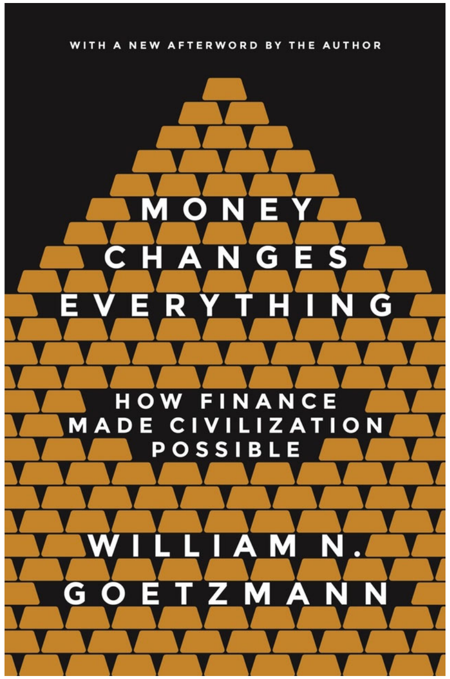
- *Leonard de Pise ou Fibonacci*
- *1202 – Liber Abaci (livre des calculs)*
- *Traite essentiellement de mathématiques financières*
- *Raisonnements financiers rigoureux*
- *Valeur actuelle, facteurs d'actualisation, absence d'opportunités d'arbitrage*
- *Précède de peu les attaques de l'Église contre l'usure*
  - Fibonacci and the Financial Revolution
  - William N. Goetzmann
  - NBER Working Paper No. 10352, 2004



Intérêts composes :

A certain man gave one denaro at interest so that in five years he must receive double the denari, and in another five he must have double two of the denari, and thus forever from 5 to 5 years the capital and interest are doubled; it is sought how many denari from this one denaro he must have in 100 years...





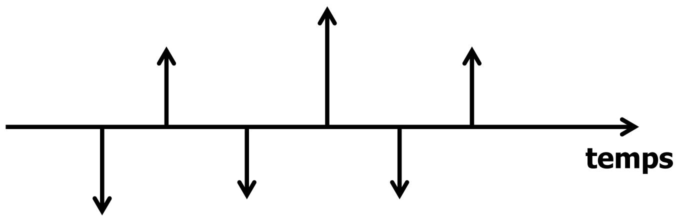
Remarques les investissements

- Caractéristiques d'un investissement
  - *Caractère « irréversible » des dépenses engagées*
    - Les dépenses engagées pour creuser le tunnel sous la Manche le sont à fonds perdus
    - On peut arrêter l'exploitation mais on ne va pas combler le tunnel
  - *Caractère non divisible de l'investissement*
    - On ne peut pas creuser une fraction du tunnel
- Mais on peut titriser cet investissement en créant une société cotée en Bourse et portant ce projet
    - Les investisseurs initiaux peuvent alors revendre leurs parts sans attendre la fin de vie (éventuellement très lointaine) du projet
  - *La cotation en Bourse d'une entreprise (actions et obligations) rend de fait l'investissement divisibles en parts*
    - Solidarité des … bailleurs de fonds

Diagrammes de flux

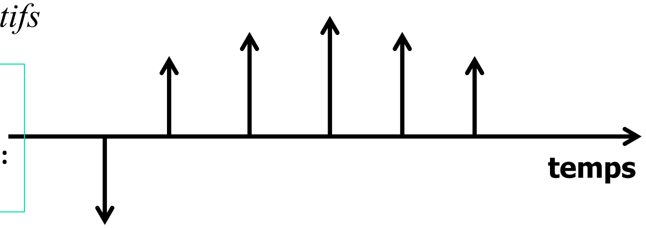
- *Échéancier de flux général : aucune indication sur le signe des flux*

Diagramme de flux :
En abscisse, le temps
En ordonnée, les flux de trésorerie à chaque date de paiement



- ***Investissement simple** : un montant décaissé à la date initiale, puis des flux positifs*

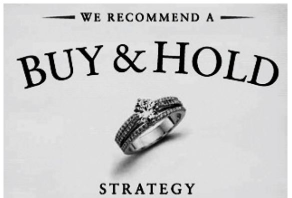
Flèche vers le bas : flux décaissé
Flèche vers le haut : Flux encaissé



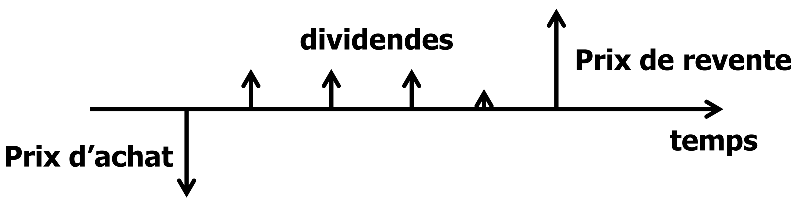
Diagrammes de flux

- On parlera d'un investissement simple quand il y a un décaissement à la date initiale t_0 ou $\mathbf{0}$
  - *Montant de l'investissement $I > 0$*
- …Suivi d'une suite de flux de trésorerie positifs
  - *Ces flux peuvent être régulièrement espacés au cours du temps*
  - *Ils peuvent être d'un montant identique*
    - On parle alors de rente
    - Ils peuvent être déterministes ou constants en espérance
    - Ils peuvent être payés jusqu'à l'infini
    - Rente perpétuelle

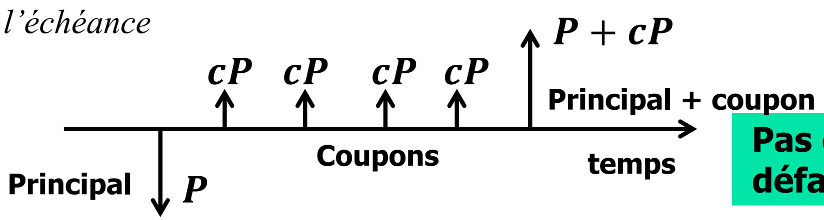
Diagrammes de flux



- Investissement simples
  - *Stratégie « buy and hold » : cas d'une action*



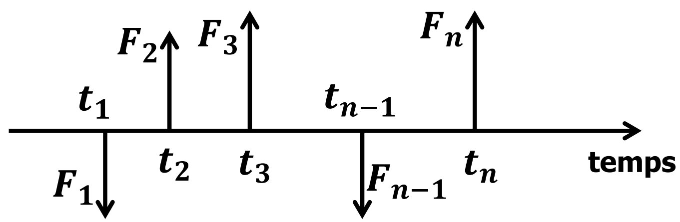
  - *Achat d'une obligation à l'émission et détention jusqu'à l'échéance*



Pas de défaut

Diagrammes de flux

- Échéancier de flux associés à un projet d'investissement
- Ensemble de flux financiers : $F_1, F_2, \dots, F_n$
- payés à des dates données : $t_1, t_2, \dots, t_n$
  - *Les flux futurs peuvent être aléatoires ou prédéterminés*
  - *Ils sont exprimés dans une devise donnée*



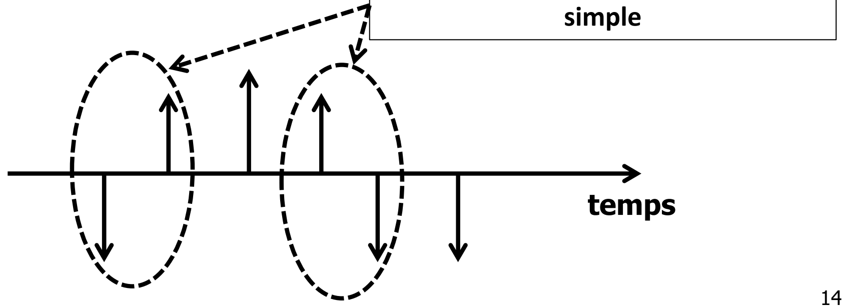
Diagrammes de flux : opérations à terme

- La date courante peut être ou non confondue avec la date à laquelle on décide de mettre en œuvre de l'investissement
- Le flux de trésorerie à la date courante est alors nul, On parle d'**opération** (ou d'investissement) **à terme**
- Immobilier, achat d'actions, d'obligations, etc.
  - *Par exemple pour les actions, le réglement et la livraison du titre ont souvent lieu un ou deux jours ouvrés après la date de négociation du titre.*

Diagrammes de flux : changement de signe

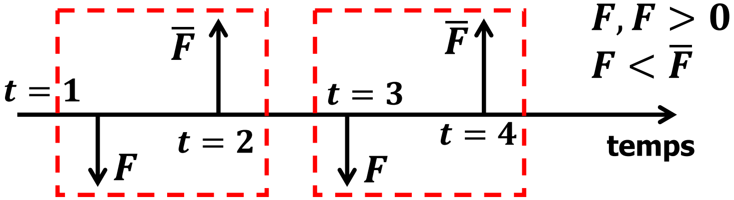
- Investissements qui ne sont pas « simples »
  - *Investissements au début du projet*
    - Cash-flows négatifs
  - *Période d'exploitation*
    - Cash-flows positifs
  - *Coûts de dépollution*
    - Cash-flows négatifs
    - Sortie du nucléaire ?

Il y a deux changements de signe dans l'échéancier de flux
Un seul pour un investissement simple



Diagrammes de flux : investissements renouvelés

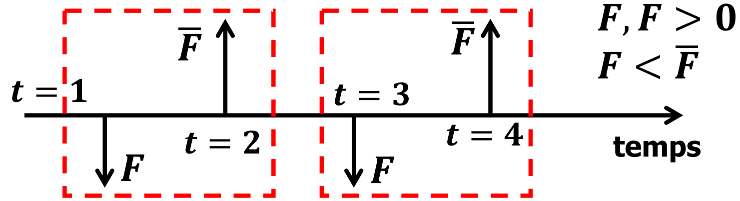
- Investissements qui ne sont pas simples
  - *Superposition de deux investissements simples*



- écart de deux périodes entre les deux investissements
- S'il s'agit de deux décisions prises séparément, il faut évaluer chaque investissement séparément

Diagrammes de flux

- Investissements qui ne sont pas simples
  - *Superposition de deux investissements simples*



- Si la décision de renouveler l'investissement est prise dès le début, sans possibilité ultérieure d'abandonner le « second » projet, il s'agit d'un seul investissement.
  - *Investissements routiniers ou de renouvellement*
  - *Problématique de la détermination d'un projet et des flux*

VAN (Valeur actuelle nette)

- Cas particulier d'échéanciers de flux
  - *Flux équirépartis dans le temps (« annuity »)*
  - $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_n - t_{n-1}$
  - *Pour simplifier :*
  - $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots, t_{n-1} = n-1, t_n = n$

$$\boxed{\mathrm{VAN} = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^k}}$$

- Pour calculer la VAN, outre l'échéancier de flux, il faut se donner un taux d'actualisation r
- La VAN peut être positive pour certaines valeurs de r et négative pour d'autres valeurs de r

VAN (Valeur actuelle nette)

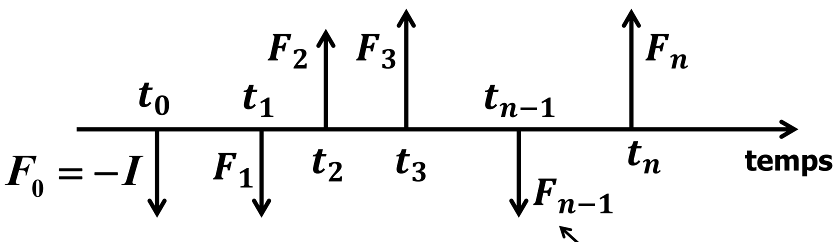
- Cas où le premier flux est un décaissement lié à un investissement de montant I : $F_0 = -I$
  - *Cash-flows futurs :* $F_1, \ldots, F_n$

$$VAN = -I + \frac{F_1}{1+r} + \cdots + \frac{F_n}{(1+r)^n} = 0$$

- VAN = valeur actuelle des cash-flows futurs net de l'investissement initial
  - *Taux de Rentabilité Interne (TRI)*
  - *Taux d'actualisation* r *tel que* $\sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^k} = 0$

Valeur actuelle nette

- VAN d'un échéancier (dates de paiement quelconques)



- À la date t_0, au taux d'actualisation discret r

$$VAN = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k - t_0}}$$

Convention
flèche vers le haut = encaissement
Flèche vers le bas = décaissement

TRI : Taux de rentabilité interne

- Taux d'actualisation r tel que $\mathrm{VAN} = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^k} = 0$
- Cas où le premier flux est un décaissement lié à un investissement de montant I : $F_0 = -I$
  - *Cash-flows futurs :* $F_1, \ldots, F_n$

$$\underbrace{I}_{\substack{\text{investissement} \\ \text{initial}}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^k}}_{\substack{\text{valeur actuelle des} \\ \text{cash-flows futurs}}}$$

  - *Un TRI est un taux d'actualisation tel que la valeur actuelle des cash-flows futurs est égale à l'investissement initial.*

VAN et TRI

- Un taux de rentabilité interne associé à un projet d'investissement est tel que la valeur actuelle nette des flux actualisés à ce taux est nulle
  - *En matière de choix d'investissement, le principe est que l'on préfère des projets dont le TRI est élevé.*
  - *Le calcul du taux de rentabilité interne ne fait intervenir que l'échéancier de flux, dates de paiement et montant des flux.*
  - *D'où le nom de taux « interne »*
    - C'est un avantage pratique
  - *Inconvénients pratiques*
    - Un échéancier de flux peut admettre plusieurs TRI
    - Un échéancier de flux peut n'admettre aucun TRI
    - Attention au TRI calculé avec les outils informatiques « standard »

Existence et unicité du TRI (investissements simples)

- $\boldsymbol{F_0 = -I < 0, F_1 > 0, \dots, F_n > 0}$
- Il faut chercher un taux d'actualisation r tel que :

$$\boldsymbol{I = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^k}}$$

Valeur actuelle des cash-flows futurs

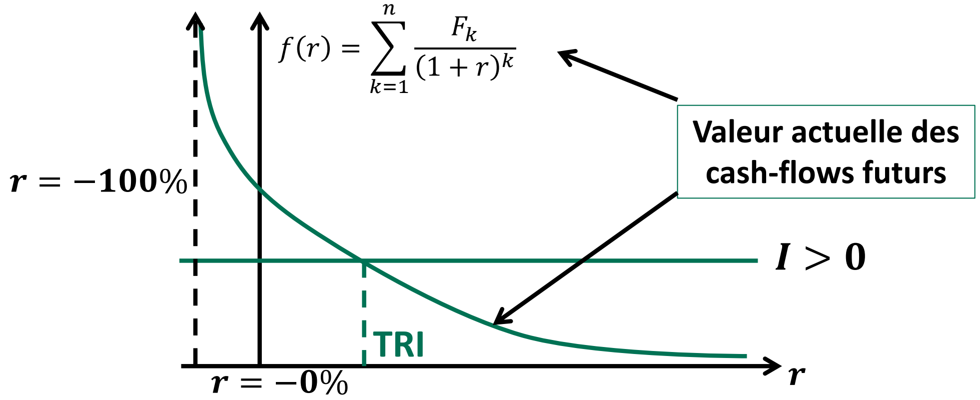
  - *La fonction* $r \in \left]-100\%, +\infty\right[\rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^k}$ *est décroissante :*

$$\boldsymbol{f(r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^k} \Rightarrow f'(r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{-k \times F_k}{(1+r)^{k+1}} < 0}$$

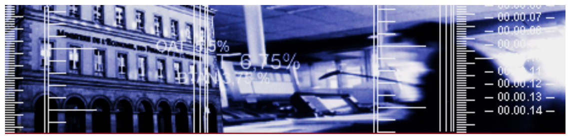
Existence et unicité du TRI (investissements simples)

- Existence et unicité d'un TRI pour un investissement simple
  - *Domaine de variation de la valeur actuelle des cash-flows futurs*

$$\lim_{r \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^k} = 0 \qquad \lim_{r \to -100\%} \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^k} = +\infty$$

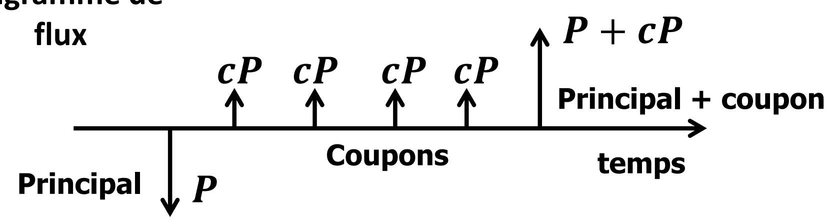


Obligation à amortissement in fine

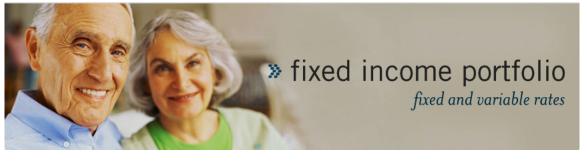


- OAT : Obligations Assimilables du Trésor, émises par l'état français
  - ***P*** *: principal (1 euro)*
  - ***cP*** *coupon (annuel)*
  - *Remboursement du principal en une seule fois*

Diagramme de flux



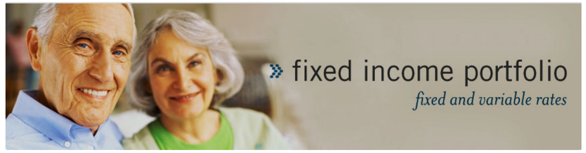
Obligation à amortissement in fine



- Achat d'une obligation in fine (cash-flows certains)
  - *Prix d'acquisition de l'obligation* = 100
  - *Maturité* = 4 *ans*
  - *Taux de coupon* = 5 %

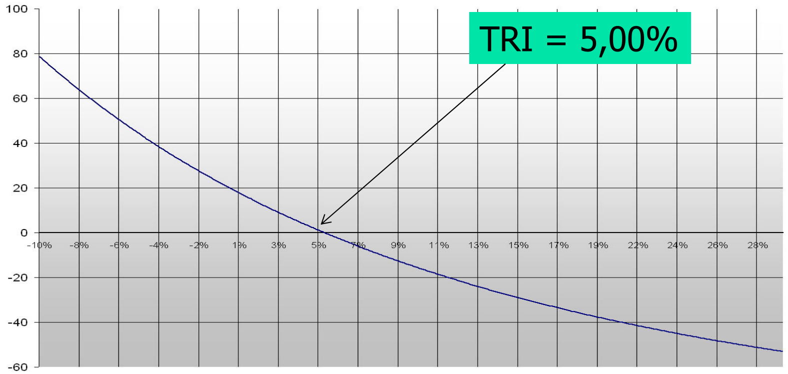
dates	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
	0	1	2	3	4
flux	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4
	-100	5	5	5	105

Obligation à amortissement in fine



- Valeur actuelle nette (VAN) des flux futurs d'une obligation in fine en fonction du taux d'actualisation
  - *On remarque que dans l'exemple choisi, la VAN décroit avec le taux d'actualisation*
  - *Le Taux de Rentabilité Interne (TRI ou TIR) est égal à 5%*

En abscisse, le taux d'actualisation. En ordonnée, la valeur actuelle nette



Annuités constantes

- Rentes temporaires ou perpétuelles
  - *Suite de cash-flows de montant constant*
  - $\boldsymbol{F_1 = F_2 = \cdots = F_n = F}$
  - *Dates de paiement équiréparties (annuité)*
  - $\boldsymbol{t = 1, 2, \ldots, n}$
    - Annuité
    - Dans nos exemples, l'unité de temps est l'année
- Si $\boldsymbol{n} = +\infty$, on parle de rente perpétuelle
- Nombre fini de dates de paiement : rente temporaire
  - *Première date de paiement est dans un an : rente à terme échu*

Annuités constantes

- Echéancier de flux : exemple

dates	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
flux	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
	-1000	110	110	110	110	110	110	110	110	110	110

Annuités constantes : valeur actuelle

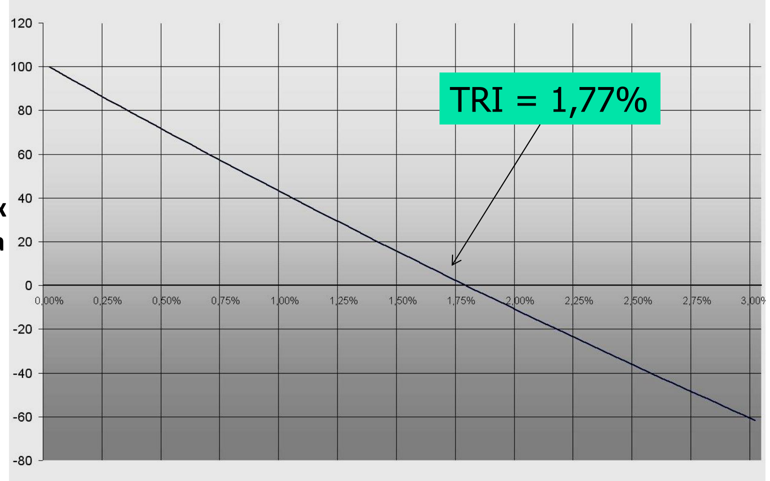
- Valeur actuelle de rentes temporaires ou perpétuelles
- $F/(1+r) + F/(1+r)^2 \cdots + F/(1+r)^n = F \times \left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)$
- Démonstration
  - $z = 1/(1+r)$
  - $(1 + z + \cdots + z^{n-1}) \times (1-z) = 1 - z^n$
- Valeur actuelle d'une rente perpétuelle $\boldsymbol{F/r}$

le graphique suivant représente la valeur actuelle de l'échéancier $\sum_{k=0}^{10} \frac{F_k}{(1+i)^k}$ en fonction du taux d'actualisation i. Les taux d'actualisation varient entre 0% et 3%. On remarque que la valeur actuelle est une fonction décroissante du taux d'actualisation.

Annuités constantes

- Valeur actuelle d'un prêt à remboursements par mensualités constantes
  - *En abscisse, le taux d'actualisation, en ordonnée, la VAN*

Il s'agit d'un investissement simple : la VAN est une fonction décroissante du taux d'actualisation. Il y a un unique TRI



Développement durable

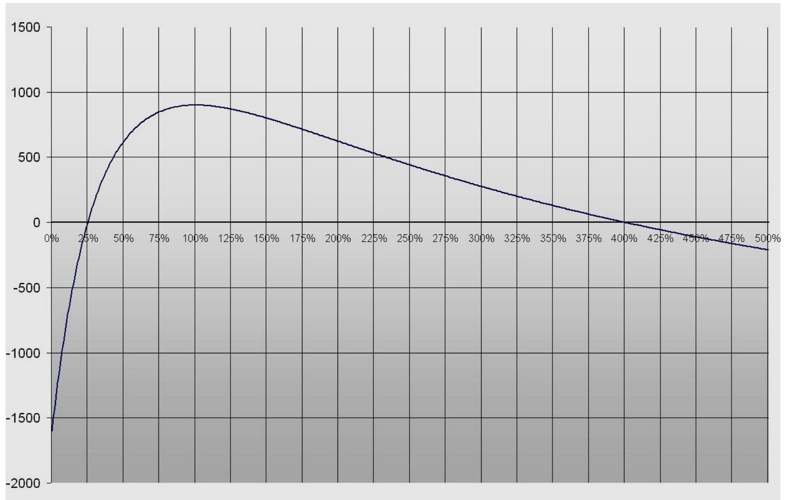
- Projet de type « développement durable »
  - *On s'est limité à un projet d'investissement avec seulement trois flux.*
    - Le premier flux correspond à l'investissement initial
    - Le deuxième flux aux flux issus de l'exploitation de cet investissement
    - Le dernier flux correspond à un coût de sortie du projet

dates	t_0	t_1	t_2
	0	1	2
flux	- 1 600	+ 10 000	- 10 000

Développement durable

- Projet de développement durable, deux TRI
  - *En abscisse, le taux d'actualisation, en ordonnée, la VAN*

La valeur actuelle nette n'est pas une fonction monotone du taux d'actualisation.
Il ne s'agit pas d'un investissement simple.



Développement durable

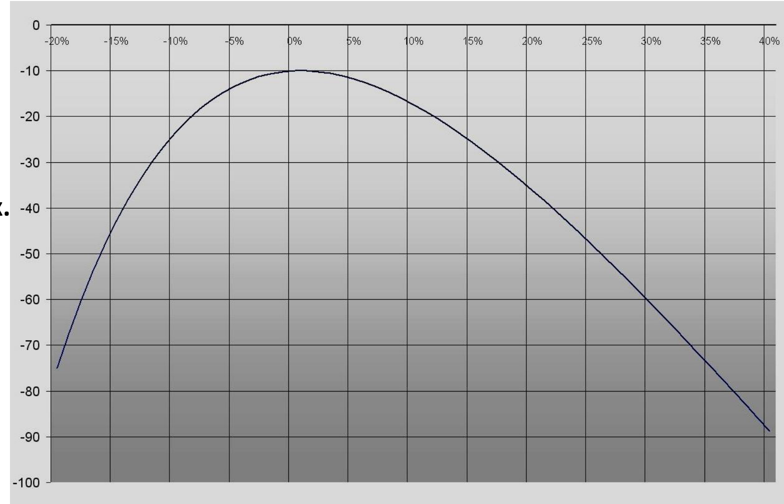
- Projet de type « développement durable »
  - *On s'est limité à un projet d'investissement avec seulement trois flux.*
    - Le premier flux correspond à l'investissement initial
    - Le deuxième flux aux flux issus de l'exploitation de cet investissement
    - Le dernier flux correspond à un coût de sortie du projet

dates	t_0	t_1	t_2
	0	**1**	**2**
flux	**- 1 000**	**+ 1 990**	**- 1 000**

Développement durable

- Projet de développement durable, pas de TRI
- En abscisse, le taux d'actualisation, en ordonnée, la VAN

La VAN reste négative.
Il n'y a pas de TRI associé à cet échéancier de flux.
Ce n'est pas un investissement « simple »



Utilisation de fonctions financières

- Calcul de VAN (NPV) sous Excel
  - http://office.microsoft.com/en-us/excel-help/npv-function-HP010342728.aspx
- $NPV = \sum_{j=1}^{n} values_j/(1+rate)^j$
- Dates de paiement équiréparties
- La première date est la date **1**
  - *Attention s'il y a un flux d'investissement à date* **0**
- Calcul de TRI (IRR) sous Excel
  - http://office.microsoft.com/en-us/excel-help/irr-function-HP010342631.aspx
- Uniquement pour des dates de paiement équiréparties
- Convergence non garantie
- Ne traite pas les cas de multiples TRI ou d'absence de TRI
  - *Pour les cas complexes, tracer le graphe de* $\boldsymbol{r} \rightarrow \boldsymbol{VAN}(\boldsymbol{r})$

http://office.microsoft.com/fr-fr/excel-help/rendement-titre-HP005209345.aspx

Utilisation de fonctions financières

- *Taux actuariel d'obligations dans Excel*
- *Excel calcule le taux actuariel par la méthode de Newton.*
  - Nombre d'itérations maximal : 100
- Utilisation d'Excel (version française)
  - *RENDEMENT.TITRE(règlement;échéance;taux;valeur_nominale;valeur_échéance;fréquence;base)*
  - *Règlement : date de règlement*
    - On peut trouver « liquidation » au lieu de règlement comme nom du champ
    - Si la date de règlement est le 23 mai 2013, utiliser DATE(2013;5;23)
  - *Échéance : date d'échéance (du dernier paiement) de l'obligation*
  - *Taux : taux de coupon (attention pour un taux de 5%, entrer 0.05)*
  - *Valeur_nominale : il s'agit en fait du prix pied de coupon du titre*

Utilisation de fonctions financières

- Utilisation d'Excel (version française)
  - RENDEMENT.TITRE(règlement;échéance;taux;valeur_nominale;valeur_échéance;fréquence;base)
  - *Valeur_échéance : c'est en principe la valeur faciale*
  - *Fréquence : 1 pour un coupon payé annuellement*
    - voir le champ frequency de la fonction yield
  - *Base : 1 pour la norme ACT/ACT*
    - La norme ACT/ACT (Actual/Actual ou Exact/Exact) est utilisée pour le calcul du coupon couru par exemple pour les obligations d'État françaises (OAT)
    - voir le champ basis de la fonction yield
- RENDEMENT.TITRE(DATE(2012;3;3) ; DATE(2022;6;1); 0.05; 95.05034;100;1;1)
- Taux actuariel : 5.64601%

VAN et TRI

- Valeur Actuelle Nette : VAN
- « Net Present Value » : NPV
  - *Nette ?*
  - *Prise en compte du premier cash-flow*
- Taux de rentabilité interne : TRI
- « Internal rate of return » : IRR
- Taux d'actualisation : discount rate
- Actualiser : to discount

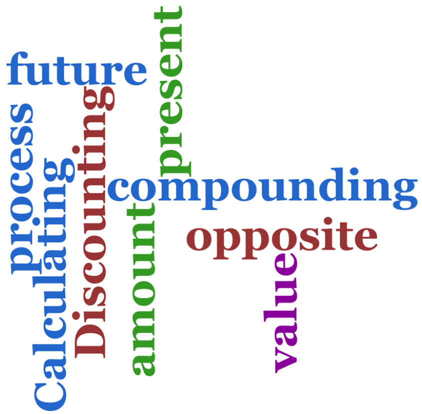
NPV = Total PV of future cashflows – Intial cashflow (CF_0)

$$NPV = \sum_{i=1}^{n} \frac{CFi}{(1+r)^{\wedge}i} - CFo$$

$$NPV = \left[\frac{CF1}{(1+r)^{\wedge}1} + \frac{CF2}{(1+r)^{\wedge}2} + \ldots\right] - CFo$$

r = discount rate

n = time period of the project / investment

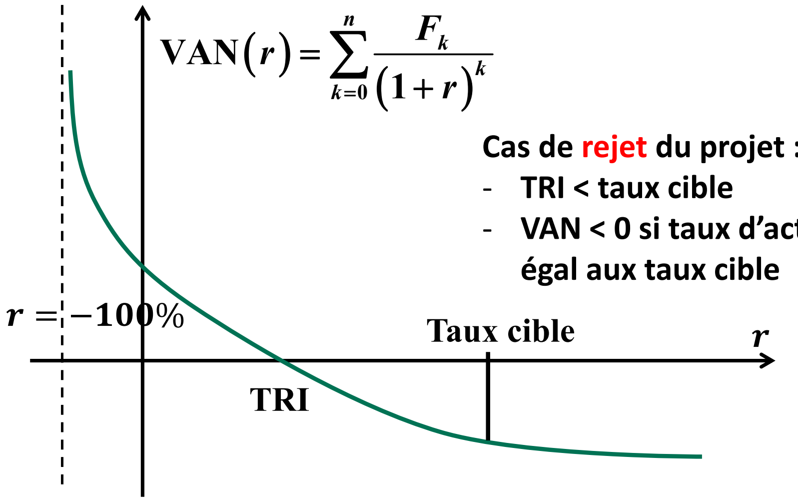


PRESENT VALUE

VAN et TRI

- Comparaison entre les critères de la VAN et du TRI
  - *Investissements simples*

$$\mathrm{VAN}(r) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^k}$$



Cas de rejet du projet :

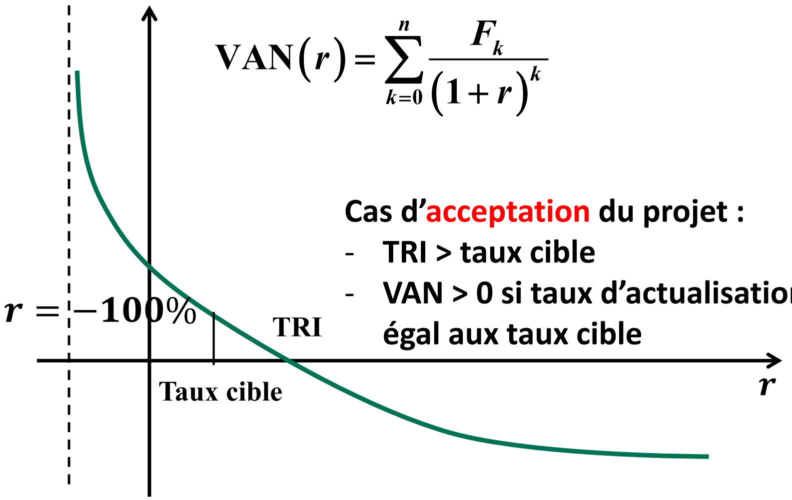
- **TRI < taux cible**
- **VAN < 0 si taux d'actualisation égal aux taux cible**

PRESENT VALUE

VAN vs TRI

- Comparaison entre les critères de la VAN et du TRI
  - *Investissements simples*

$$\mathrm{VAN}(r) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^k}$$



VAN : NPV
TRI : IRR

Cas d'acceptation du projet :

- **TRI > taux cible**
- **VAN > 0 si taux d'actualisation égal aux taux cible**

PRESENT VALUE

VAN vs TRI

- Comparaison entre l'utilisation de la VAN et du TRI
  - *Critère de la VAN*
    - Un projet est retenu si sa valeur actuelle nette au taux d'actualisation pertinent est positive
    - Taux d'actualisation « pertinent » donné par le MEDAF et le Beta du projet $\boldsymbol{r = r_f + \beta(E_M - r_f)}$
    - Beta supposé ici constant au cours du temps
  - *Critère du TRI*
    - Un projet est accepté si son TRI est supérieur à un taux de rentabilité cible
    - Le taux de rentabilité cible est <u>le même</u> que celui utilisé pour le calcul de la VAN
  - *On s'intéresse ici à des <u>investissements simples</u>*
    - Unique TRI, VAN fonction décroissante du taux d'actualisation

VAN vs TRI

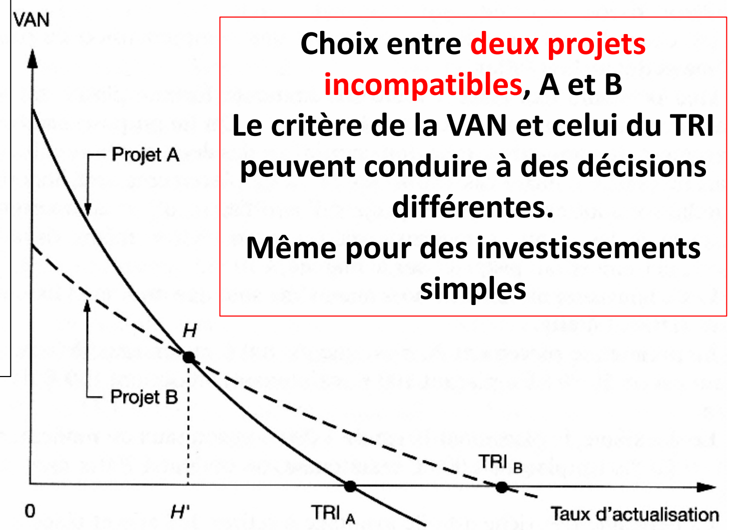
- Comparaison entre les critères de la VAN et du TRI
  - *Dans certains cas, comme les investissements simples, les deux critères aboutissent aux mêmes décisions*
  - *Pour des investissements correspondant à des échéanciers de flux généraux, toutes les situations peuvent se produire*
    - Acceptation du projet selon les deux critères
    - Acceptation du projet selon le critère de la VAN et rejet selon le critère du TRI
    - Acceptation du projet selon le critère du TRI et rejet selon le critère de la VAN
    - Rejet des deux projets
  - *La situation précédente correspond à la situation d'un seul projet d'investissement*
    - La décision à prendre est l'acceptation ou non du projet proposé
  - *Que se passe-t-il si un ensemble de projets est considéré ?*

VAN vs TRI

Graphique 6.5 – *Comparaison des critères de la VAN et du TRI pour classer 2 projets par ordre de préférence*

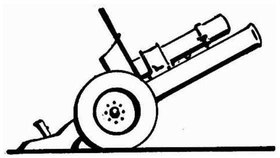
Selon le critère du TRI, le projet B est préféré au projet A.

Si le taux d'actualisation utilisé pour le calcul de la VAN est compris entre 0 et H', le critère de la VAN amène à préférer le projet A au projet B



Choix entre deux projets incompatibles, A et B
Le critère de la VAN et celui du TRI peuvent conduire à des décisions différentes.
Même pour des investissements simples

VAN vs TRI



- Pourquoi deux projets d'investissement seraient-ils incompatibles ?
  - *Par exemple, si l'entreprise ne possède pas les ressources nécessaires pour mener l'un et l'autre simultanément*
  - *Il y a donc trois choix possibles*
    - Ne réaliser aucun des deux projets
    - Réaliser le projet $\{A\}$
    - Réaliser le projet $\{B\}$
  - *Dans l'exemple précédent, si le taux d'actualisation est correctement défini, le critère de la VAN est préférable*
  - *VAN grandeur monétaire qui mesure la création de richesse*
  - *Pour l'investisseur, choix du projet qui crée le plus de richesse*

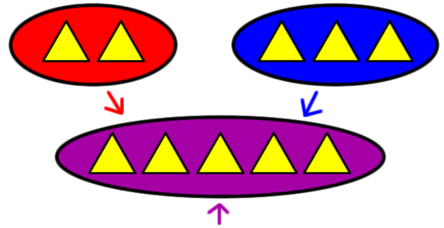
VAN vs TRI

- Choix parmi un ensemble de projets d'investissement
  - *Considérons qu'une entreprise considère trois projets d'investissement :* $\{\boldsymbol{A}\}$, $\{\boldsymbol{B}\}$ *et* $\{\boldsymbol{C}\}$
  - *Le projet* $\{\boldsymbol{A}\}$ *mobilise beaucoup de ressources et ne peut pas être mené de front avec* $\{\boldsymbol{B}\}$ *ou* $\{\boldsymbol{C}\}$
  - *La VAN du projet* $\{\boldsymbol{A}\}$ *est égale à* **100**
  - *Les projets* $\{\boldsymbol{B}\}$ *et* $\{\boldsymbol{C}\}$ *de taille plus modeste peuvent être menés de front.*
  - *La VAN du projet* $\{\boldsymbol{B}\}$ *est de* **60** *et celle du projet* $\{\boldsymbol{C}\}$ *de* **50**
  - *L'entreprise a intérêt à réaliser* $\{\boldsymbol{B}\}$ *et* $\{\boldsymbol{C}\}$*, la VAN étant égale à* **110** *et à renoncer au projet* $\{\boldsymbol{A}\}$*, dont la VAN prise isolément est plus élevée*

VAN vs TRI

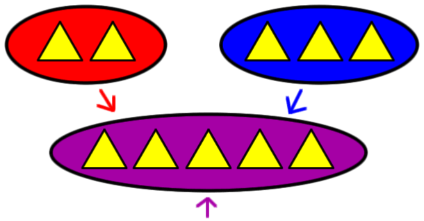
- Il faut expliciter la ou les décisions à prendre
- Il peut s'agir de réaliser ou pas un projet d'investissement donné
  - *On va alors regarder la suite des cash-flows si le projet n'est pas mis en œuvre*
  - *La suite des cash-flows si le projet est mis en œuvre*
  - *Il faut alors examiner la suite de cash-flows obtenue par différence*
  - *Et examiner si la valeur actuelle nette de cette suite de cash-flows est positive.*
  - *On suppose implicitement que la décision à prendre est « réaliser l'investissement tout de suite » ou son abandon*

Externalités



- Additivité de la VAN
- $\{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\}=\{\boldsymbol{A}\}+\{\boldsymbol{B}\}$?
- Soit deux projets d'investissements $\{\boldsymbol{A}\}$ et $\{\boldsymbol{B}\}$
- $\boldsymbol{F_{1A}, F_{2A}, \dots, F_{nA}}$ cash-flows associés au projet $\{\boldsymbol{A}\}$
- $\boldsymbol{F_{1B}, F_{2B}, \dots, F_{nB}}$ cash-flows associés au projet $\{\boldsymbol{B}\}$
- On suppose que le taux d'actualisation pertinent est le même pour les deux projets, mettons $\mathbf{12}\%$.
- A-t-on $\boldsymbol{VAN_{A+B}=VAN_A+VAN_B}$?

Externalités



- Additivité de la VAN ?
- $\{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\}=\{\boldsymbol{A}\}+\{\boldsymbol{B}\}$
- A-t-on $\boldsymbol{VAN_{A+B}=VAN_A+VAN_B}$?
- Si la réalisation **simultanée** des projets $\{\boldsymbol{A}\}$ et $\{\boldsymbol{B}\}$ entraîne des synergies : $\boldsymbol{F_{A+B,k} > F_{A,k}+F_{B,k},\ k = 1,\dots,n}$
  - *À taux d'actualisation inchangé, on a alors* $\boldsymbol{VAN_{A+B} > VAN_A+VAN_B}$
- Il se peut que le taux d'actualisation à appliquer à $\{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\}$ soit supérieur à $\mathbf{12}\%$ et que $\boldsymbol{VAN_{A+B} < VAN_A+VAN_B}$
  - *La modification des cash-flows peut entraîner des modifications des Betas*

Investissements et comptabilité

- En matière de choix d'investissement, l'accent est mis sur les **flux de trésorerie**
- Les grandeurs comptables ont également une importance
  - *Le résultat net est une variable directement et facilement accessible aux actionnaires et aux analystes financiers*
  - *Signal envoyé aux actionnaires extérieurs à l'entreprise*
  - *L'entreprise a une latitude pour déterminer son résultat*
    - Décision de déprécier certains actifs (impairment)
    - Réalisation de plus ou moins values sur des cessions
  - *Ce signal peut donner des indications sur la performance financière de l'entreprise et les flux de trésorerie futurs*

Investissements et comptabilité

- Les règles comptables ont des conséquences sur les flux de trésorerie
  - *Exemple : dotation aux amortissements*
  - *Ces flux comptables ont une incidence sur les flux de trésorerie*
    - Par exemple, les mécanismes de dotation aux amortissements ont un effet sur le résultat comptable et donc sur l'impôt sur les bénéfices.
    - L'impôt sur les bénéfices étant bien un flux de trésorerie
  - *Si le résultat est négatif, difficulté à verser des dividendes*
  - *Cela peut également suspendre les paiements d'intérêt sur les dettes subordonnées*
  - *Si le résultat est négatif, aucun avantage fiscal à l'endettement*

Investissements et comptabilité

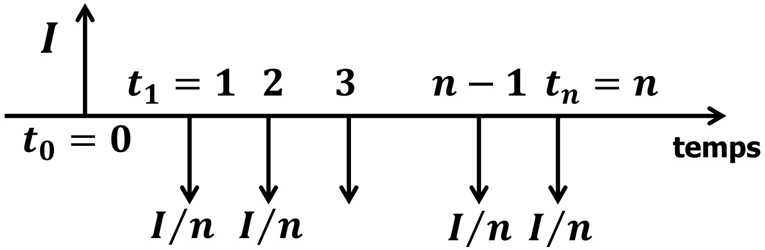
- Améliorer le résultat net en détruisant de la valeur !
  - *1 milliard € amortissement linéaire en dix ans*
  - *Dotation annuelle aux amortissements : 100 millions €*
  - *Cash-flows dégagés à partir de la date $t = 2$: 400 millions €*
  - *À la date $t = 1$, pas de cash-flows*
  - *VAN au taux $r = 15\%$*
  - $-1000 + \frac{0}{(1+15\%)} + \frac{400}{(1+15\%)^2} + \cdots + \frac{400}{(1+15\%)^{10}} = 660$
  - *Abandonner l'investissement améliore le résultat de 100 millions € à la date $t = 1$*
- Résultat : mauvais indicateur de la performance d'une valeur de croissance

Investissements et comptabilité

- Pourquoi choisir des flux de trésorerie ?
- Exemple de la dotation aux amortissements
- Investissement d'un montant $\boldsymbol{I}$ en $\boldsymbol{t_0 = 0}$
  - *Montant effectivement décaissé par l'investisseur*
  - *N'est pas disponible pour un autre usage*
- Amortissement linéaire sur une durée de n années
  - *Dotation aux amortissements : $\boldsymbol{I/n}$ de $\boldsymbol{t_1 = 1}$ à $\boldsymbol{t_n = n}$*
- Les flux comptables donnent l'illusion que les décaissements liés à l'investissement sont plus tardifs
- Minore le coût effectif pour l'investisseur si $\boldsymbol{r > 0}$
  - *Préférence pour un paiement demain plutôt qu'aujourd'hui*

Investissements et comptabilité

- Les flux comptables donnent l'illusion que les décaissements liés à l'investissement sont plus tardifs



- Ceci minore le coût effectif pour l'investisseur si le taux d'actualisation $r > 0$
  - *Préférence pour un paiement demain plutôt qu'aujourd'hui*

Exercice : TRI et rentabilité moyenne

- Holding détenant une participation financière dans une filiale
- Cash-flows négatifs : apports en capital
- Cash-flow positifs : remontée de dividendes, rachat d'actions.
- Cas 1 : la filiale est cotée en Bourse, on connait les prix de l'action
- Cas 2 : la filiale n'est pas cotée. Peut-on avoir une idée de la rentabilité du point de vue de la holding ?
- …

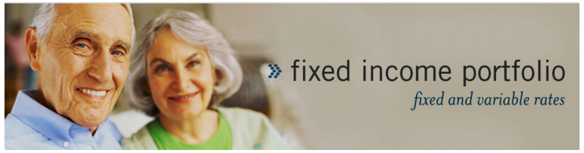
TRI et rentabilité moyenne

- Faisons comme si la filiale était cotée en Bourse
- On note P_t, la valeur boursière à la date t
- $R_t = \frac{P_t + d_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ est le taux de rentabilité de l'investissement entre $t-1$ et t
  - *d_t est le cash-flow net reçu par la holding à la date t*
  - *$P_0 = 0$ (capitalisation nulle avant création) et $P_T = 0$ (T date de liquidation)*
  - $P_{t-1} = \frac{P_t + d_t}{1 + R_t}$
  - *Supposons le taux de rentabilité constant $R_t = r$*
  - $\sum_{t=0}^{T} \frac{d_t}{(1+r)^t} = 0$, *donc r est un TRI des cash-flows reçus*

TRI et rentabilité moyenne

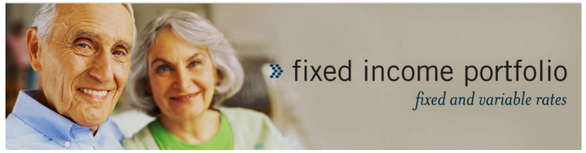
- Remarque : on peut interpréter le TRI comme un taux de rentabilité hypothétique s'il avait été constant
- Dans l'exemple précédent, le TRI n'est pas forcément unique
- Si on note $V_T = d_T, V_t = d_t + \frac{V_{t+1}}{1+R_{t+1}}, t = 0,1, \dots, T-1$
- V_t est la valeur actuelle des cash-flows reçus postérieurement à t
- Si $V_t \geq 0$, alors $\min_t R_t \leq \text{TRI} \leq \max_t R_t$
  - *Peut-on comparer les TRI et les rentabilités moyennes (arithmétique ou géométrique) ?*

Limites du TRI



- Dans le cas des obligations, le taux de rentabilité interne s'appelle le « taux actuariel »
  - *Yield ou Yield to maturity*
- Disparité des taux actuariels des obligations émises par les états souverains de la zone euro
  - *Et pour une même maturité*
  - *Par exemple, 10 ans*
- Les taux actuariels des obligations d'état permettent-ils de déterminer des taux sans risque ?

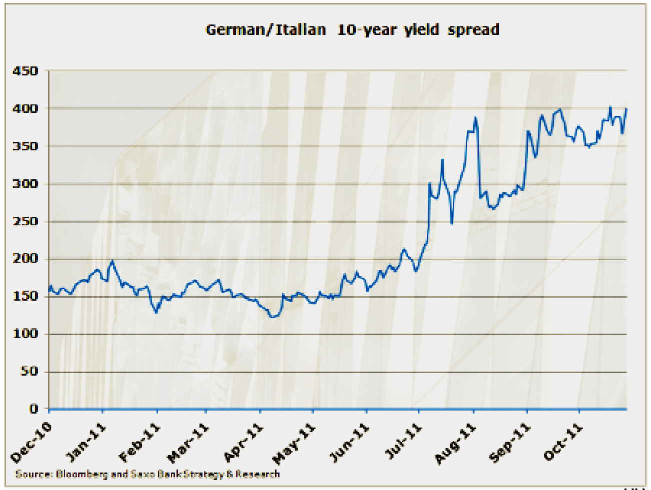
Les limites des TRI



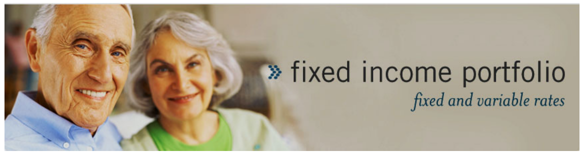
- Écart de taux de rentabilité interne des obligations à 10 ans
  - *Allemagne contre Italie*

De décembre 2010
À novembre 2011

En ordonnée, l'écart entre les TRI en points de base.
100 points de base = 1%

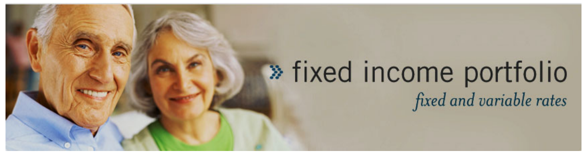


Les limites des TRI



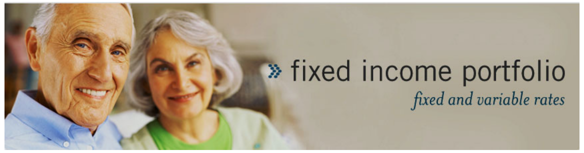
- Le TRI des obligations italiennes en euros à 10 ans à l'automne 2011 était d'environ de 6%
- Celui des obligations allemandes est environ de 2%
- Faut-il en conclure qu'il faut acheter des obligations italiennes ?
  - *Application du critère du TRI ?*
  - *Où est passé le risque « de défaut » de l'émetteur dans le calcul du TRI ?*
  - *Quels sont les flux de trésorerie utilisés pour calculer le TRI ?*
  - *Dans l'approche utilisée sur les marchés obligataires, on utilise les flux associés à l'obligation en cas de « non-défaut »*
    - Ou flux contractuels

Les limites des TRI



- En cas de défaut ou de restructuration de la dette d'un état en difficulté financière
- Les flux de trésorerie effectivement reçus par les investisseurs ne sont pas ceux qui étaient effectivement prévus
  - *Exemple : répudiation totale de la dette*
  - *L'emprunteur n'effectue aucun des versements prévus*
  - *Les investisseurs obligataires ne reçoivent plus aucun flux après la date de répudiation de la dette.*
  - *Pour une date de paiement de coupon, le vrai cash-flow n'est pas le coupon promis mais*
    - Le coupon promis si la date de répudiation de la dette est postérieure à la date de paiement
    - Zéro, sinon

Les limites des TRI



- Suite de l'exemple précédent
  - *Le taux actuariel est un taux de rentabilité interne construit à partir d'un échéancier de flux optimiste pour l'investisseur*
  - *Correspondant au scénario de non-défaut*
  - *C'est même le scénario le plus optimiste*
  - *Les cash-flows effectifs sont inférieurs ou égaux aux cash-flows contractuels*
  - *Les TRI calculés à partir des cash-flows contractuels sont surévalués*
    - Ceci va expliquer une partie de l'écart des TRI entre les emprunts allemands et italiens
  - *Les vrais cash-flows sont aléatoires à cause du risque de défaut*

Les limites des TRI

- Les vrais cash-flows des obligations sont aléatoires
  - Difficulté pratique de calcul du TRI
  - TRI faciles à calculer à partir des cash-flows contractuels déterministes
  - Pas de modèle probabiliste pour la survenance et la gravité du défaut
- *Importance de connaître les limites des pratiques de marché*
  - **Ce n'est pas le critère du TRI qui est en cause**
  - **Mais l'analyse des flux de trésorerie**
- *Problématique répétitive*
  - Crédits subprime, emprunts toxiques des collectivités territoriales,
  - TRI calculés à partir de flux de trésorerie dans des scénarios particuliers et biaisés.

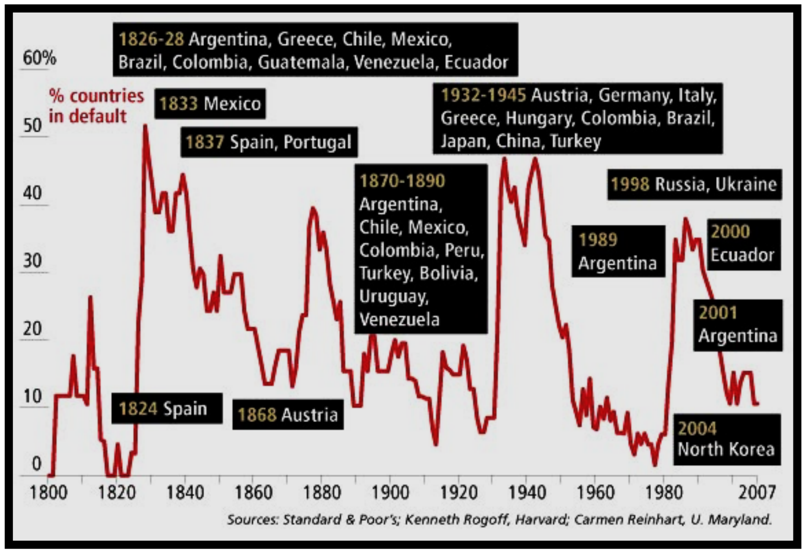
Les limites des TRI

Ne pas minorer les risques des obligations (souveraines ou corporate)

Obligation d'état grecque
Coupon 4,6%
Échéance 05/13
Juillet 2010 – Juillet 2011
Plus haut 90% du nominal
Plus bas 62% du nominal
Source Bloomberg

Les limites du TRI

- Les défauts sur les dettes publiques sont monnaie courante



Les limites des TRI

- Ne pas minorer le risque de défaut d'un Etat

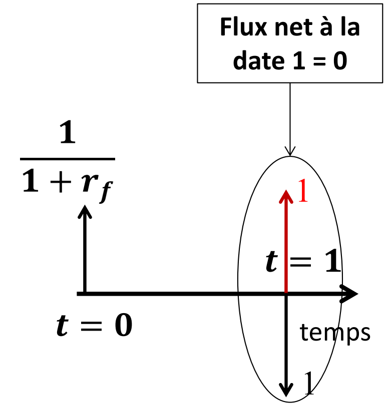
Emprunt russe

Justification économique de la VAN (cash-flows certains)

- Justification économique de la VAN
  - *Raisonnement par « absence d'opportunités d'arbitrage »*
  - *Pour simplifier la présentation, considérons deux dates*
    - $t = 0$, aujourd'hui, $t = 1$, demain
  - *On suppose que l'on peut emprunter et prêter auprès d'une « banque » à un taux (simple)* r_f
    - Pas de risque de défaut, de liquidité, de coûts liés à ces opérations financières
    - Ce marché de prêts/emprunts « sans frictions » va servir de marché « pivot ».
  - *Considérons un flux de* $\mathbf{1}$ *(une unité monétaire) reçu à la date* $\mathbf{1}$ *.*
  - *Empruntons* $1/1 + r_f$ *à la banque à la date 0*

Justification économique de la VAN (cash-flows certains)

- Justification économique de la VAN
  - *À la date 1, il faut rembourser à la banque* $\underbrace{\frac{1}{1+r_f}}_{\text{montant emprunté}} \times (1 + r_f) = 1$
  - *Flux de trésorerie*
  - *En rouge, le flux initial reçu de 1 à la date 1, en noir les flux échangés avec la banque*
  - *Le flux net à la date 1 est égal à :*
    - $+1 - 1 = 0$
  - *Au total, on dispose d'une somme de* $1/1 + r_f$
    - Et il n'y a aucun flux futur



Cash-flows certains

U.S. DEPARTMENT OF THE TREASURY
http://www.treasury.gov/Pages/default.aspx

- Interprétation
  - *Grâce à une opération élémentaire*
    - Emprunt simple auprès de la « banque »
  - *On a « transformé » un flux à recevoir à la date 1 en une somme immédiatement disponible*
  - *Égale à la valeur actuelle du flux à recevoir*
  - *Le taux d'actualisation est le taux de prêt/emprunt à la « banque »*
  - *C'est le principe de l'escompte, des lettres de crédit : on peut « mobiliser » une créance (la promesse d'un paiement futur) contre un paiement aujourd'hui*

VAN / Cash-flows certains

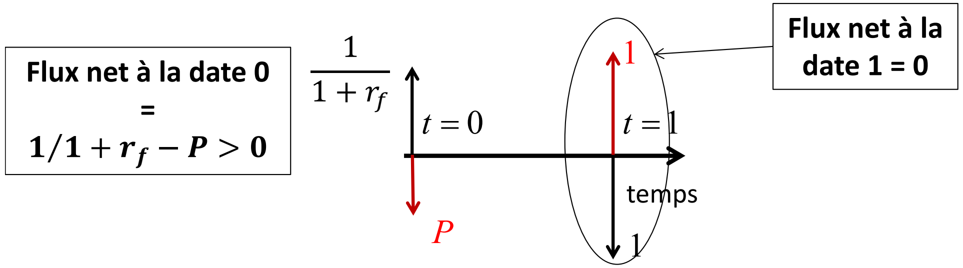
- Notons ***P***, le prix à la date 0, du titre précédent
- Montrons qu'en l'absence de frictions et d'opportunités d'arbitrage, on a nécessairement :

$$\boxed{\boldsymbol{P = \frac{1}{1+r_f}}}$$

- Raisonnement par l'absurde
  - *Supposons que :* $\boldsymbol{P < 1/(1+r_f)}$
  - *Réalisons les opérations suivantes :*
  - 1) *Achat du titre : décaissement de* $\boldsymbol{P}$ *à la date* 0, *encaissement de* 1 *à la date* 1
  - 2) *Emprunt de* $\boldsymbol{1/1+r_f}$ *à la banque : encaissement de* $\boldsymbol{1/1+r_f}$ *à la date* 0, *décaissement de* 1 *à la date* 1

VAN / Cash-flows certains

- Suite du raisonnement précédent
  - *Représentons les flux de trésorerie associés aux deux opérations précédentes*
    - En rouge, les flux liés à l'achat du zéro-coupon
    - En noir, les flux liés à l'emprunt auprès de la banque
  - *Le solde des opérations financières fait apparaître un flux positif de* $\boldsymbol{1/1+r_f - P}$



Cash-flows certains

- Il s'agit d'une opportunité d'arbitrage
  - *Arbitrage entre le marché de l'actif zéro-coupon et le marché des prêts/emprunts à la banque*
  - *Permettant de réaliser un profit immédiat, sans risque, sans mise de fonds, sans aucun engagement futur*
  - *Techniquement, une « opportunité d'arbitrage » est un échéancier de flux positifs ou nuls*
    - Avec au moins un flux strictement positif
  - *S'il existe une opportunité d'arbitrage, la demande est infinie*
    - Incompatibilité avec l'équilibre, « no free-lunch »
  - *D'où l'hypothèse couramment faite d'absence d'opportunités d'arbitrage*

Cash-flows certains

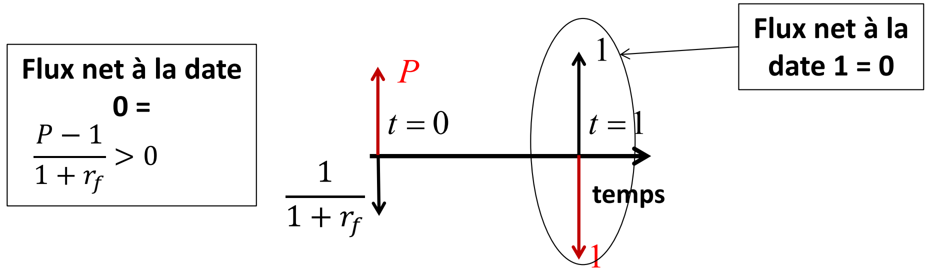
- Enrichissement sans cause de l'« arbitrageur » ?
  - *« arbitrageur » : celui qui réalise l'opération financière précédente.*
  - *Ici, par opposition à « spéculateur », puisqu'il n'y a aucune prise de risque.*
    - Terminologies « non déposées »
  - *L'arbitrageur a une fonction économique de maintien de la cohérence du système de prix*
    - Garantie donnée aux investisseurs finaux de payer le même prix pour deux échéanciers de flux futurs identiques
  - *Mais si les marchés sont efficients dans le sens précédent, il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage et donc pas d'arbitrageurs*
    - Ce qui résout la question morale posée plus haut…

Cash-flows certains

- Reprenons le raisonnement précédent
  - *Si* $\boldsymbol{P} < \mathbf{1}/(\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f})$*, il est possible de construire une opportunité d'arbitrage*
  - *Contradiction avec l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, donc nécessairement :* $\boldsymbol{P} \geq \mathbf{1}/\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f}$
  - *Supposons maintenant que* $\boldsymbol{P} > \mathbf{1}/(\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f})$
    - Le prix P du zéro-coupon est élevé
    - Il faut donc vendre cet actif
    - Toujours vendre ce qui est cher et acheter ce qui est bon marché
    - On va réaliser des opérations financières symétriques à celles effectuées précédemment
    - 1) vente de l'actif zéro-coupon
    - 2) prêt d'un montant $\mathbf{1}/(\mathbf{1} + \boldsymbol{R_F})$ à la banque

Cash-flows certains

- Flux de trésorerie associés aux opérations financières précédentes
  - *En rouge, les flux liés à la vente du titre*
  - *En noir, les flux liés au prêt à la banque*



  - *Le solde net des flux de trésorerie fait apparaître une opportunité d'arbitrage*

Cash-flows certains

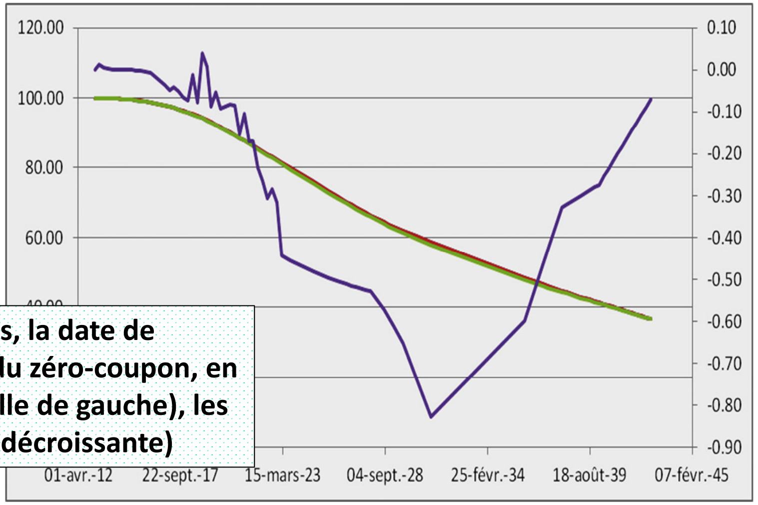
- Si l'on suppose qu'il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage, la situation précédente est impossible
- On ne peut pas avoir : $\boldsymbol{P} - \mathbf{1}/(\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f}) > \mathbf{0}$
- Donc, $\boldsymbol{P} \leq \mathbf{1}/\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f}$
- Au total, on doit avoir : $\boldsymbol{P} \leq \mathbf{1}/\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f}$ et $\boldsymbol{P} \geq \mathbf{1}/\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f}$
- Soit $\boldsymbol{P} = \mathbf{1}/\mathbf{1} + \boldsymbol{r_F}$
- Le seul prix de l'actif zéro-coupon compatible avec l'absence d'opportunité d'arbitrage est la valeur actuelle du flux futur (1)
- Le taux d'actualisation étant le taux de prêt/emprunt sans risque auprès de la « banque »
  - *Cash-flow associé au zéro-coupon :aucun risque*

Justification économique de la VAN

- Il ne peut exister qu'un taux sans risque pour une maturité donnée
  - *En l'absence d'opportunités d'arbitrage*
  - *Sinon, on emprunterait au taux bas et prêter au taux élevé*
- Le même raisonnement montre qu'il n'existe qu'un seul prix aujourd'hui pour un actif donné
  - *Par exemple une action*
  - *Loi du prix unique dans des marchés sans frictions*
  - *S'il existe deux prix différents au même moment pour le même actif, on peut acheter l'actif au prix bas, le revendre au prix haut*
  - *Il s'agit d'une opportunité d'arbitrage*

Cash-flows certains

- Prix des coupons strips et des principal strips aux U.S.



En abscisses, la date de remboursement du zéro-coupon, en ordonnées (échelle de gauche), les prix (courbe décroissante)

Investissement financé par endettement (VAR)

Airbus Total Liabilities / Total Assets = 88.73% (2015)

- Investissement d'un montant $\boldsymbol{I}$ à la date $\mathbf{0}$
- Flux d'activité générés par l'investissement $\boldsymbol{F_{A,t}}, \boldsymbol{t} = \mathbf{1, 2, \ldots}$
  - *On suppose que* $\boldsymbol{F_{A,t}} \geq \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{t} = \mathbf{1, 2, \ldots}$
- L'investissement est financé à 100% par fonds propres
  - *Base d'imposition sur les sociétés : flux d'activité* $\boldsymbol{F_{A,t}}$
    - $\boldsymbol{T_c}$: taux d'imposition sur les bénéfices
    - Montant de l'impôt à la date $\boldsymbol{t} = \mathbf{1, 2, \ldots}$: $\boldsymbol{T_c} \times \boldsymbol{F_{A,t}}$
  - *Cash-flow to equity :* $\boldsymbol{F_{E,t}} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c}) \times \boldsymbol{F_{A,t}}, \boldsymbol{t} = \mathbf{1, 2, \ldots}$

- Cash-flows versés aux actionnaires $\boldsymbol{F_{E,t}}$?
- Fraction des flux d'activité $\boldsymbol{F_{A,t}}$: $\boldsymbol{F_{E,t}} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c}) \times \boldsymbol{F_{A,t}}$
  - *Fraction constante si le taux de l'impôt sur les sociétés,* $\boldsymbol{T_c}$*, reste constant.*
- On en déduit que $\boldsymbol{E_t} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c})\boldsymbol{A_t}$
  - *D'où :* $\boldsymbol{R_{E,t+1}} = \frac{E_{t+1} - E_t + F_{E,t+1}}{E_t} = \frac{A_{t+1} - A_t + F_{A,t+1}}{A_t} = \boldsymbol{r_{A,t+1}}$
  - *Donc :* $\boldsymbol{\beta_E} = \boldsymbol{\beta_A}$
  - *Le taux d'actualisation des flux reçus par les actionnaires est donc* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_f} + \boldsymbol{\beta_A} \times \left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r_M}) - \boldsymbol{r_f}\right)$
    - « Coût d'opportunité du capital »

- VAN du projet financé à 100% par fonds propres
- $\mathbf{VAN} = -\boldsymbol{I} + \sum_{t=1,2,\ldots} \frac{E\left[F_{E,t}\right]}{(1+r)^t}$
- Supposons le flux d'activité stationnaire : $\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{F_{A,t}}\right] = \overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{A}}$
  - *Même niveau moyen à toutes les dates futures*
- $\overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{F_{E,t}}\right] = (\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c})\overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{A}}$
- Date de fin du projet $= \boldsymbol{n}$. $\boldsymbol{F_{A,t}} = \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{n}$
- $\mathbf{VAN} = -\boldsymbol{I} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c})\overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{A}} \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$
- Projet perpétuel : $\boldsymbol{n} = \infty$
- $\mathbf{VAN} = -\boldsymbol{I} + \frac{(1-T_c)\overline{F}_A}{r}$

Investissement financé par endettement

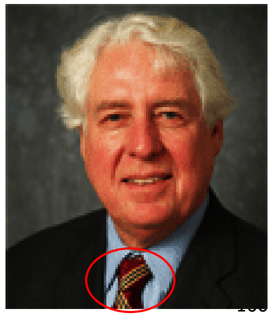
- Cas où le projet est financé par fonds propres et par endettement
  - *On fait l'hypothèse que les flux d'activité* $\boldsymbol{F_{A,t}}$ *restent inchangés*
- Cash-flows reçus par les bailleurs de fonds, somme
  - *des flux versés par l'entreprise non endettée* $\boldsymbol{(1-T_c)F_{A,t}}$
  - *et des flux liés à l'économie fiscale de la dette*

Investissement financé par endettement

- Flux liés à l'économie fiscale de l'endettement
  - *Par rapport à un financement uniquement par fonds propres*
  - *Une fraction* $\boldsymbol{L}$ *de l'investissement* $\boldsymbol{I}$ *est financée par endettement*
  - *Montant emprunté :* $\boldsymbol{D = L \times I}$
- On suppose que le montant de la dette reste constant
  - $\boldsymbol{D_t = D, \forall t \geq 1}$
  - *Économie fiscale de la dette alors égale à* $\boldsymbol{T_c \times r_f \times D}$
  - *Soit* $\boldsymbol{T_c \times r_f \times L \times I}$
- Pour un projet d'investissement perpétuel, l'avantage fiscal de la dette est égal à : $\boldsymbol{\frac{T_c r_f D}{r_f} = T_c D = T_c L I}$

Investissement financé par endettement

- La valeur actuelle nette du projet précédent est égale à la somme de la valeur actuelle nette du projet financé à 100% par fonds propres et de l'économie fiscale de la dette.
- Soit valeur actuelle du projet $= \boldsymbol{-I + \frac{(1-T_c)\bar{F}_A}{r} + T_c L I}$
- On utilise la terminologie « valeur actuelle rajustée » (VAR)
  - *Il s'agit de la « vraie » valeur actuelle du projet pour les bailleurs de fonds*
  - *Traduction de « Adjusted Present Value »*
  - *Adjusted : rajusté*
- Notion introduite par Stewart Myers
  - *The Future of Corporate Governance*
    - MIT lecture, 2005
    - **http://mitworld.mit.edu/video/330**



Investissement financé par endettement

- Les bailleurs de fonds investissent $\boldsymbol{I}$ pour acquérir des flux de même risque que les flux d'activité $(\mathbf{1}-\boldsymbol{T_c})\boldsymbol{F_{A,t}}$ et des flux sans risque liés à l'économie fiscale de la dette $\boldsymbol{T_c LI} \times \boldsymbol{r_f}$
  - *Décomposition des flux de manière additive en fonction du risque qui s'y rattache.*
  - *Les bailleurs de fonds détiennent un portefeuille constitué de $\mathbf{1}-\boldsymbol{T_c}$ unités d'actif A et de $\boldsymbol{T_c LI}$ unités de rente perpétuelle*
  - *Portefeuille composé d'actif risqué et d'actif sans risque*
- Le projet est retenu si sa VAR est positive
- On regarde l'intérêt collectif des bailleurs de fonds,
  - *Pas de conflit d'intérêts entre actionnaires et créanciers*

Investissement financé par endettement

- La méthode précédente repose sur une analyse des flux de trésorerie et de leur risque
  - *Décomposition des flux futurs reçus par les bailleurs de fonds en flux s'additionnant mais de risques différents*
  - *Chaque catégorie de flux fait appel à un taux d'actualisation spécifique, donné par le MEDAF*
  - *La valeur de marché de l'ensemble est la somme des valeurs de marché des deux composantes.*
  - *Cette méthode peut se généraliser à des situations de projets ayant une durée de vie finie, des flux de trésorerie non stationnaire, des changements de taux de l'IS*

Investissement financé par endettement

- De la valeur actuelle rajustée au taux d'actualisation ajusté
- Le projet d'investissement est retenu si la VAR est positive
- **VAR** $= -\boldsymbol{I} + \frac{(1-T_c)\bar{F}_A}{r} + T_c L I \geq 0$
- Notons $\color{red}{\bar{F}_{A,U} = (1-T_c)\bar{F}_A}$ l'espérance des flux reçus par les bailleurs de fonds d'une entreprise non endettée
  - $\boldsymbol{U}$ *: Unleveraged*
- **VAR** $= -I + \frac{\bar{F}_{A,U}}{r} + T_c L I = -I \times (1 - T_c L) + \frac{\bar{F}_{A,U}}{r} \geq 0$
- $-I \times (1 - T_c L) + \frac{\bar{F}_{A,U}}{r} \geq 0 \Leftrightarrow -I + \frac{\bar{F}_{A,U}}{r(1-T_c L)} \geq 0$
- $r^* = r(1 - T_c L)$: **taux d'actualisation ajusté**
- **VAR** $\geq 0 \Leftrightarrow -I + \frac{\bar{F}_{A,U}}{r^*} \geq 0$

Investissement financé par endettement

- Interprétation du résultat précédent
- $-I + \frac{\bar{F}_{A,U}}{r^*}$ est la VAN des flux reçus par les bailleurs de fonds quand le projet est financé sans endettement
  - *flux futurs espérés* $\bar{F}_{A,U}$
- Et quand le taux d'actualisation est $\color{red}{r^*}$
  - r^* *Taux d'actualisation ajusté ou coût du capital ajusté*
  - ***Avantage fiscal de la dette caché dans le taux d'actualisation***
  - $r^* = r(1 - T_c L) \leq r \Rightarrow -I + \frac{\bar{F}_{A,U}}{r^*} \geq -I + \frac{\bar{F}_{A,U}}{r}$
  - $r^* = r(1 - T_c L)$ *: Formule de Modigliani Miller*

Investissement financé par endettement

- Formule de Modigliani Miller **:** $\color{red}{r^* = r(1 - T_c L)}$
  - r *: coût d'opportunité du capital*
  - r^* ***: coût du capital rajusté***
  - $L = D/I$ *: fraction de l'investissement financée par dette*
  - T_c *: taux d'imposition sur les bénéfices des sociétés*
- Application : **VAR** $\geq 0 \Leftrightarrow -I + \frac{\bar{F}_{A,U}}{r^*} \geq 0$
- On investit dans le projet si $\bar{F}_{A,U} \geq r^* \times I$
  - $r^* \times I$ *: Cash-flow limite*
- Méthode rapide mais dépend de nombreuses hypothèses :
  - *Niveau de dette constant,* $D_t = D, \forall t \geq 1$
  - *Cash-flows stationnaires* $E[F_{A,t}] = \bar{F}_A$
  - *Projet perpétuel,* $n = \infty$*, etc.*

Investissement financé par endettement

- VAR, $\boldsymbol{VAN_{CCR}}$ et taux d'actualisation ajusté $\boldsymbol{r^*}$
- On a établi que : $\mathbf{VAR} = -\boldsymbol{I} \times (\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c L}) + \frac{\boldsymbol{\bar{F}_{A,U}}}{\boldsymbol{r}}$
- Comme $\boldsymbol{r^*} = \boldsymbol{r}(\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c L})$, on peut écrire :
- $\mathbf{VAR} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c L})\left(-\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{\bar{F}_{A,U}}}{\boldsymbol{r^*}}\right)$
- $\mathbf{VAN_{CCR}} = -\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{\bar{F}_{A,U}}}{\boldsymbol{r^*}}$
  - *CCR : Coût du Capital Rajusté*
- $\mathbf{VAR} \neq \mathbf{VAN_{CCR}}$
  - *sauf si* $-\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{\bar{F}_{A,U}}}{\boldsymbol{r^*}} = \mathbf{0}$
  - *C'est la* **VAR** *qui mesure la création de richesse*

Investissement financé par endettement

- Taux d'actualisation ajusté $\boldsymbol{r^*}$ pour un **projet à durée de vie limitée** $\boldsymbol{n} < \infty$
  - *Formule de Modigliani-Miller :* $\boldsymbol{r^*} = \boldsymbol{r}(\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c L})$ *pour un projet perpétuel,* $\boldsymbol{n} = \infty$
  - *Pour un projet de durée de vie* $\boldsymbol{n} < \infty$*, il reste possible de déterminer un taux d'actualisation ajusté* $\boldsymbol{r^*}$
  - *Mais on perd la simplicité de la formule de Modigliani-Miller*
  - *L'économie fiscale de la dette à la date* $\boldsymbol{t} + \mathbf{1} \leq \boldsymbol{n}$ *est égale à* $\boldsymbol{r_f T_c D} = \boldsymbol{r_f T_c L I}$
  - *L'avantage fiscal de la dette est la valeur d'une rente temporaire sans risque de montant* $\boldsymbol{r_f T_c L I}$ *et de durée* $\boldsymbol{n}$
  - *Soit :* $\boldsymbol{r_f T_c L I} \times \frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{r_f}} = \boldsymbol{T_c L I} \times \left(\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f})^{-\boldsymbol{n}}\right)$

Investissement financé par endettement

- Taux d'actualisation ajusté $\boldsymbol{r^*}$ pour un projet à durée de vie limitée $\boldsymbol{n} < \infty$ (suite)
  - *La VAN « de base » du projet correspond à un financement sans endettement*
  - *Rappelons qu'elle est égale à* $-\boldsymbol{I} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c})\boldsymbol{\bar{F}_A} \times \frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{r}}$
  - *Et que* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_f} + \boldsymbol{\beta_A} \times (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r_M}) - \boldsymbol{r_f}), \boldsymbol{\bar{F}_A} = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{F_{A,t}}]$
  - *La VAR est la somme de la VAN de base et de l'avantage fiscal de l'endettement*
  - $\mathbf{VAR} = -\boldsymbol{I} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c})\boldsymbol{\bar{F}_A}\frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{T_c L I}\left(\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f})^{-\boldsymbol{n}}\right)$
  - $\mathbf{VAR} = -\boldsymbol{I}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c L}\left(\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f})^{-\boldsymbol{n}}\right)\right) + \boldsymbol{\bar{F}_{A,U}}\left(\frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{r}}\right)$
  - *On rappelle que* $\boldsymbol{\bar{F}_{A,U}} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c})\boldsymbol{\bar{F}_A}$

Investissement financé par endettement

- Critère d'investissement $\mathbf{VAR} \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow -\boldsymbol{I}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c L}\left(\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f})^{-\boldsymbol{n}}\right)\right) + \boldsymbol{\bar{F}_{A,U}}\left(\frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{r}}\right) \geq \mathbf{0}$
- Cherchons $\boldsymbol{r^*}$ tel que :
- $\frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r^*})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{r^*}} = \left(\frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{r}}\right) \times \left(\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c L}\left(\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f})^{-\boldsymbol{n}}\right)\right)^{-\mathbf{1}}$
  - $\boldsymbol{r^*}$ *est bien défini : existence et unicité de* $\boldsymbol{r^*}$
- $-\boldsymbol{I}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c L}\left(\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r_f})^{-\boldsymbol{n}}\right)\right) + \boldsymbol{\bar{F}_{A,U}}\left(\frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{r}}\right) \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow$
  $-\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\bar{F}_{A,U}}\left(\frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r^*})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{r^*}}\right) \geq \mathbf{0}$
- A comparer à $\mathbf{VAR} \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow -\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{\bar{F}_{A,U}}}{\boldsymbol{r^*}} \geq 0$ quand $\boldsymbol{n} = \infty$

Investissement financé par endettement

- Taux d'actualisation ajusté $\boldsymbol{r}^*$ pour un projet à durée de vie limitée $\boldsymbol{n} < \infty$ (suite)
- $-\boldsymbol{I} + \overline{\boldsymbol{F}}_{A,U}\left(\frac{1-(1+r^*)^{-n}}{r^*}\right) \geq 0$
- $\mathbf{VAN}_{CCR} = -\boldsymbol{I} + \overline{\boldsymbol{F}}_{A,U}\left(\frac{1-(1+r^*)^{-n}}{r^*}\right)$ est la valeur actuelle nette des flux reçus par les bailleurs de fonds d'un projet financé en totalité par fonds propres
- quand le taux d'actualisation est $\boldsymbol{r}^*$
  - *Comme précédemment* $\mathbf{VAR} \neq \mathbf{VAN}_{CCR}$
- On peut s'interroger sur la pertinence de l'utilisation de taux d'actualisation ajustés : hypothèses fortes, calculs lourds, risques de confusion entre $\mathbf{VAR}$ et $\mathbf{VAN}_{CCR}$

Exercice : investissement financé par endettement

- Contexte : environnement de taux très bas, notamment dans la zone euro (novembre 2014)
  - *Taux sans risque pour une durée de 3 ans, 0%*
  - *Pour une durée de 10 ans, moins de 1%*
    - Conditions d'emprunt de l'Allemagne
  - *Montants liés à l'avantage fiscal de l'endettement, plus faibles qu'avec des données anciennes souvent utilisées*
- Objectif : mieux comprendre les effets liés à l'interaction entre maturité de l'investissement et niveau du taux sans risque dans le calcul de la VAAF
  - *VAAF : valeur actuelle de l'avantage fiscal*

Exercice : investissement financé par endettement

- Données et hypothèses :
  - $I = 1$ million €, $L = 50\%$, $T_c = 40\%$, $r = 7\%$
  - la VAN du projet financé à 100% par fonds propres est nulle
  - $\mathbf{VAN} = -\boldsymbol{I} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c})\overline{\boldsymbol{F}}_{A} \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = \mathbf{0}$
  - Ce qui donne $(\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c})\overline{\boldsymbol{F}}_{A} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{I})/(\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{r})^{-\boldsymbol{n}})$
  - Le tableau ci-dessous donne le flux d'activité après IS (EBITDA), $(\mathbf{1} - \boldsymbol{T_c})\overline{\boldsymbol{F}}_{A}$ en fonction de la durée du projet $\boldsymbol{n}$

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**10**	**15**	**30**	**10000**
1 070 000 €	**553 092 €**	**381 052 €**	**295 228 €**	**243 891 €**	**142 378 €**	**109 795 €**	**80 586 €**	**70 000 €**

  - Plus la durée du projet est grande, moins le flux d'activité permettant de rentabiliser le projet est élevé
  - On remarque que pour un investissement de dix ans, il faut un flux d'activité deux fois plus élevé que pour un investissement perpétuel.

Exercice : investissement financé par endettement

- VAAF pour un investissement d'un million d'euros
  - *En fonction de la maturité de l'investissement*
  - *Et du taux de la dette*
    - Pour un investissement à 10 ans, la VAAF est x 5 quand le taux passe de 1% à 7%
    - Pour un taux de 3% et un horizon de 10 ans, la VAAF n'est que de 50 k€ au lieu de 200 k€ si on utilise la formule $\boldsymbol{VAAF} = \boldsymbol{T_c LI}$

taux / durée investissement	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
1	1 980 €	3 922 €	5 825 €	7 692 €	9 524 €	11 321 €	13 084 €
2	3 941 €	7 766 €	11 481 €	15 089 €	18 594 €	22 001 €	25 312 €
3	5 882 €	11 536 €	16 972 €	22 201 €	27 232 €	32 076 €	36 740 €
4	7 804 €	15 231 €	22 303 €	29 039 €	35 460 €	41 581 €	47 421 €
5	9 707 €	18 854 €	27 478 €	35 615 €	43 295 €	50 548 €	57 403 €
10	**18 943 €**	**35 930 €**	**51 181 €**	**64 887 €**	**77 217 €**	**88 321 €**	**98 330 €**
15	27 730 €	51 397 €	71 628 €	88 947 €	103 797 €	116 547 €	127 511 €
30	51 615 €	89 586 €	117 603 €	138 336 €	153 725 €	165 178 €	173 727 €
10000	*200 000 €*	*200 000 €*	*200 000 €*	*200 000 €*	*200 000 €*	*200 000 €*	*200 000 €*

Exercice : investissement financé par endettement

- Le tableau présenté illustre les difficultés de calcul de la VAAF en environnement de taux bas
  - *Surestimation de l'avantage fiscal de la dette avec la méthode simple (investissement perpétuel)*
  - *La déductibilité des intérêts profite surtout aux entreprises payant des intérêts élevés*
    - On suppose ici que le taux d'actualisation pertinent pour le calcul de l'avantage fiscal de l'endettement est « le » taux de la dette financière de l'entreprise
    - Ceci est pertinent à condition que l'entreprise reste redevable de l'IS
    - Or un niveau excessif d'endettement et des taux élevés vont limiter la capacité bénéficiaire de l'entreprise
    - Il conviendrait alors d'appliquer un taux d'actualisation plus élevé pour compenser la baisse de la VAAF liée à l'effet précédent …

Investissement financé par endettement

- Domaine de validité de la formule $r^* = r(1 - T_c L)$
  - *On reste dans le cadre MM*
    - Endettement constant
  - *Et on centre l'analyse sur les effets taux et maturité*
  - *Les données sont les mêmes que précédemment*
    - On a retenu un taux de la dette de 3%

	1	2	3	4	5	10	15	30	1000
r^*	6,38%	6,17%	6,07%	6,01%	5,97%	5,88%	5,85%	5,80%	5,60%
$r(1 - T_c L)$	5,60%	5,60%	5,60%	5,60%	5,60%	5,60%	5,60%	5,60%	5,60%
Coût du capital r	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%

- On remarque que la formule de MM $r^* = r(1 - T_c L)$ surestime le coût du capital rajusté r^*
- Comme précédemment, l'approche simplifiée implique un surinvestissement