Décision et Sure Thing Principle

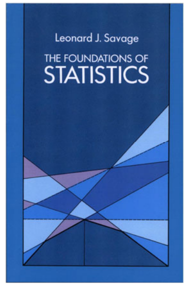
UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Décision

- Formalisation d'un problème de décision en situation d'incertitude
  - *Distinction entre états de la nature (incertitude), décisions (acts, prospects, profils de gain) et « consequences » (paiements, outcomes)*

TABLE 1. AN EXAMPLE ILLUSTRATING ACTS, STATES, AND CONSEQUENCES

Act	State: Good	State: Rotten
break into bowl	six-egg omelet	no omelet, and five good eggs destroyed
break into saucer	six-egg omelet, and a saucer to wash	five-egg omelet, and a saucer to wash
throw away	five-egg omelet, and one good egg destroyed	five-egg omelet



- Savage : Foundations of Statistics

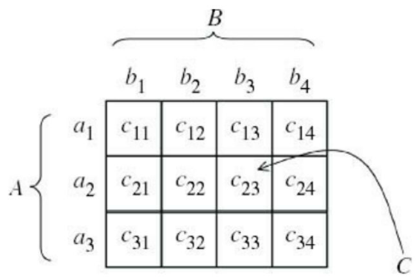
Décision

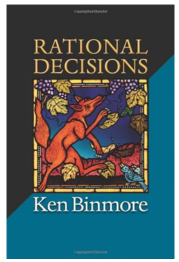
- Terminologie (Savage)

Term	Definition
the **world**	the object about which the person is concerned
a **state** (of the world)	a description of the world, leaving no relevant aspect undescribed
the **true** state (of the world)	the state that does in fact obtain, i.e., the true description of the world

Décision

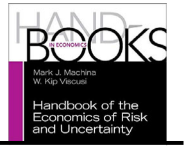
- A : ensemble des choix possibles (acts) pour le décideur (lignes du tableau)
- B : ensemble des états de la nature (ce que la « nature » décide)
- C : ensemble des conséquences (payoffs)





Knowledge. Ken Arrow (1971, p. 45) tells us that each state in *B* should be "a description of the world so complete that, if true and known, the consequences of every action would be known." But how

Décision

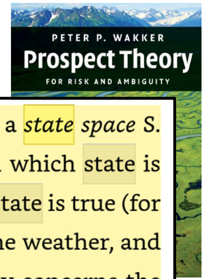


1.3.1 Savage's Analytical Framework

In the wake of Savage's (1954) seminal work, it is commonplace to model decision making under uncertainty by constructing a choice set using two primitive sets: a set, S, of *states of the nature* (or states, for brevity), and a set, C, whose elements are referred to as *consequences*. The choice set, F, is the set of mappings from the set of states to the set of consequences. Elements of F are referred to as *acts* and have the interpretation of courses of action.

States are resolutions of uncertainty, "a description of the world so complete that, if true and known, the consequences of every action would be known" (Arrow, 1971,

- Karni (2014). Axiomatic foundations of expected utility and subjective probability. *Handbook of the Economics of Risk and Uncertainty*.
- *"Act" : fonction de l'ensemble des états de la nature dans l'ensemble des conséquences (disons ℝ).*
- *C'est donc une variable aléatoire réelle*

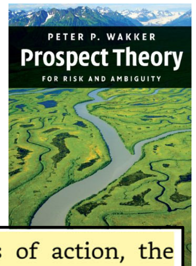


The basic concepts of uncertainty. We will model uncertainty through a *state space* S. One state s ∈ S is true and the other states are not true. It is uncertain which state is the true one. The decision maker does not have any influence on which state is true (for details, see §1.7). In Example 1.1.1 (vendor), the uncertainty concerns the weather, and the state space S is $\{s_1,s_2,s_3\}$. In Example 1.1.2 (finance) the uncertainty concerns the copper price next month. We take the nonnegative real axis as state space, so that S =

Table 1.1.2. ***Net profits depending on the copper price***

	price ≥ 2.53 (E_1)	2.53 > *price* ≥ 2.47 (E_2)	2.47 > *price* (E_3)
x	50K	−30K	−30K
y	−30K	−30K	50K
0 ("neither")	0	0	0
x + y ("both")	20K	−60K	20K

Décision



Prospects designate state-contingent outcomes. They are courses of action, the outcome of which depends on which state of nature is the true one. Formally, *prospects* map states to the reals, describing the resulting outcome for every state if that state is the true state. They are random variables, but possibly without probabilities specified. We

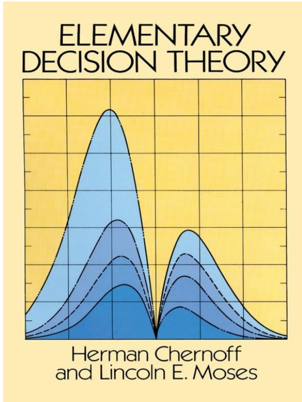
- Synonymes : acts, prospects, payoff (functions), profils de paiement, state-contingent outcomes, variables aléatoires

Décision

- « Dominance » (prédominance, supériorité)
  - *Comparaison entre des payoffs*
  - $a_1 \succcurlyeq a_2$ *si on obtient plus au sens large dans tous les états de la nature (weak dominance)*
  - $a_1 \succ a_2$ *si on obtient plus dans tous les états de la nature et strictement plus dans au moins un état (strong dominance)*

		States	
		$s = 1$	$s = 2$
Acts	$x = 1$	c_{11}	c_{12}
	$x = 2$	c_{21}	c_{22}

  - $a_1 = (3,0,) \succcurlyeq a_2 = (1,0)$
- Définit un ordre partiel sur l'ensemble des profils de paiement
- Ici, on n'a pas spécifié de probabilité sur l'ensemble des états



Sure Thing Principle

- Choisir entre des paris, loteries ou investissements ?
  - *Il faut préciser les gains nets possibles ; exemple* $\{3,0,7\}$
    - Dans une unité de compte, par exemple en euros.
    - Pour chaque « état de la nature » (événement élémentaire)
    - Ici, ensemble des états de la nature $\{s_1, s_2, s_3\}$
  - *Pour les paris* f *et* g*, ci-dessous le tableau des gains*

	s_1	s_2	s_3
f	3	0	7
g	3	1	5

  - *On n'a pas indiqué ici de probabilités pour les états de la nature*

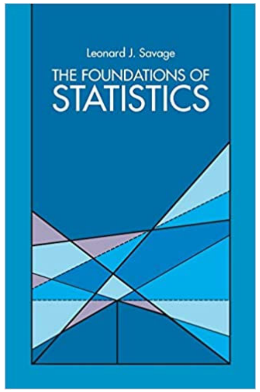
Sure Thing Principle (STP)

- Relation de préférence sur les prospects (profils de gains)
  - *Soit* f *et* g *sont deux paris,* $f \succcurlyeq g$ *ou* $f \succ g$ *signifie que* f *est préféré à* g,
- Relation d'ordre (réflexive, antisymétrique et transitive)
  - $f \succcurlyeq f$ *: réflexivité*
  - $f \succcurlyeq g \succcurlyeq h \Rightarrow f \succcurlyeq h$ *: transitivité*
  - $f \succcurlyeq g$ *et* $g \succcurlyeq f \Rightarrow f = g$ *: antisymétrie*
- **Préordre : réflexivité et transitivité**
- Ordre total : $\forall f, g \; f \succcurlyeq g$ ou $g \succcurlyeq f$
- Équivalence : $f \sim g \Leftrightarrow f \succcurlyeq g$ et $g \succcurlyeq f$
- Ordre strict $f \succ g \Leftrightarrow f \succcurlyeq g$ et $g \not\succcurlyeq f$

Sure Thing Principle (STP)

- Illustration du STP donnée par Savage (1954)
  - A businessman contemplates buying a certain piece of property.
  - He considers the outcome of the next presidential election relevant.
  - So, to clarify the matter to himself, he asks whether he would buy if he knew that the Democratic candidate were going to win, and decides that he would.
  - Similarly, he considers whether he would buy if he knew that the Republican candidate were going to win, and again finds that he would.
  - Seeing that he would buy in either event, he decides that he should buy, even though he does not know which event obtains, or will obtain, as we would ordinarily say
- Savage : "*I Know of no other extralogical principle governing decisions that finds such ready acceptance*"

Sure Thing Principle (STP)



- Sure Thing Principle (introduction)
  - Savage (1954) – Foundations of Statistics
  - *Soit f et g deux profils de gain, B un événement*
  - $\succcurlyeq$ *est une relation de préordre*
  - *Si $f \succcurlyeq g|B$ et si $f \succcurlyeq g|B^c$ alors $f \succcurlyeq g$*
  - *Ceci suppose que l'on ait bien défini $f|B$*
    - « Sachant » B ?
    - « Conditionnellement » à B ?

Sure Thing Principle (STP)

- Illustration : tableau des gains pour les trois états de la nature
  - $B = \{s_2, s_3\}$, $B^c = \{s_1\}$

	B^c	B	B
	s_1	s_2	s_3
f	3	0	7
g	3	1	5

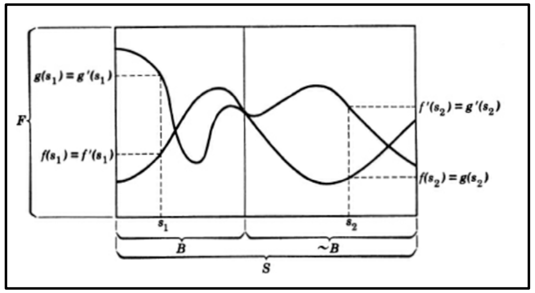
  - *Dans l'état s_1, gains égaux : B^c est une alternative non pertinente*
  - *Il suffit donc de comparer les gains pour l'ensemble d'états B*

	B	B
	s_2	s_3
$f\|B$	0	7
$g\|B$	1	5

  - *Supposons $f|B \succcurlyeq g|B$, alors $f \succcurlyeq g$*

Sure Thing Principle (STP)

- Sure Thing Principle (formulation P2)
  - *Ici, on retrouve des profils de paiement dépendant des états s*



  - $f|B = f'|B$ *et* $g|B = g'|B$
  - $f|B^c = g|B^c$ *et* $f'|B^c = g'|B^c$
  - *Si $f \succcurlyeq g$ alors $f' \succcurlyeq g'$*

Sure Thing Principle (STP)

- STP permet de réduire l'analyse aux alternatives pertinentes
  - *On reprend les données précédentes pour f et g*
    - On rappelle que : $f \succcurlyeq g|B$

	B^c	B	B
	s_1	s_2	s_3
f	**3**	0	7
g	**3**	1	5
f'	**4**	0	7
g'	**4**	1	5

  - *On veut comparer f'et g'*
  - *f et f' coïncident sur B, g et g' coïncident sur B*
  - *$B^c = \{s_1\}$: alternative non-pertinente car f' et g' coïncident sur B^c*
  - *Donc $f' \succcurlyeq g'$*

Sure Thing Principle (STP)

- Conséquence du STP

A finite set of events B_i is a **partition** of B; if $B_i \cap B_j = 0$, for $i \neq j$, and $\bigcup_i B_i = B$. With this definition, it is easily proved by arithmetic induction that

THEOREM 2 If B_i is a partition of B, and $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$ given B_i for each i, then $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$ given B. If, in addition, $\mathbf{f} < \mathbf{g}$ given B_j for at least one j, then $\mathbf{f} < \mathbf{g}$ given B.

- Le STP ne présuppose pas l'existence de probabilités.
- Mais cette hypothèse permet à Savage de passer de probabilités qualitatives à des probabilités (subjectives) quantitatives
  - *Avec un formalisme différent de celui de Finetti*

Sure Thing Principle (STP)

- A propos de l'axiomatique de Savage et du STP
  - Baccelli & Hartmann (2023). The Sure-Thing Principle. *Journal of Mathematical Economics*.
  - Jeffrey (1982). The sure thing principle. In *PSA: Proceedings of the biennial meeting of the philosophy of science association*.
  - Raiffa (1961). Risk, ambiguity, and the Savage axioms: comment. *The Quarterly Journal of Economics*.
  - Roberts (1963). Risk, ambiguity, and the Savage axioms: Comment. *The Quarterly Journal of Economics*.
  - Segal (1987). The Ellsberg paradox and risk aversion: An anticipated utility approach. *International Economic Review*.
  - Machina (2003). States of the World and the State of Decision Theory. *The economics of risk*.

Sure Thing Principle (STP)

- Violation du STP : paradoxe d'Allais
- En général, l'ordre des choix est $f \succ g$ et $g' \succ f'$

The Sure-thing Principle. If $f \geq g$ then $f' \geq g'$.

	I	R	R
	s_1	s_2	s_3
f	3	0	7
g	3	1	5
f'	4	0	7
g'	4	1	5

Figure 2 Allais Paradox

state probabilities:	0.89	0.10	0.01
	I	R	R
	s_1	s_2	s_3
f	0	$5M$	0
g	0	$1M$	$1M$
f'	$1M$	$5M$	0
g'	$1M$	$1M$	$1M$

- Fishburn, & Wakker (1995). The invention of the independence condition for preferences. *Management Science*.
- Quiggin (1989). Sure things—Dominance and independence rules for choice under uncertainty. *Annals of Operations Research*.

Sure Thing Principle

- Critique de Kahneman et Tversky (1979) : loteries proposées

p_1 :	2 400 avec prob 1	p_2 :	2 400 avec prob 0,34 0 avec prob 0,66
q_1 :	2 500 avec prob 0,33 2 400 avec prob 0,66 0 avec prob 0,01	q_2 :	2 500 avec prob 0,33 0 avec prob 0,67

- *p_1 : placement sans risque*
- *82% des participants préfèrent p_1 à q_1 : $p_1 \succ q_1$*
  - Préférence pour la sécurité au voisinage de la certitude (Allais)
- *83% des participants préfèrent q_2 à p_2 : $q_2 \succ p_2$*
  - Pleasure of gambling
- *Intersection entre les deux groupes : 61% des participants, soit $p_1 \succ q_1$ et $q_2 \succ p_2$*

Sure Thing Principle

p_1 :	2 400 avec prob 1	p_2 :	2 400 avec prob 0,34 0 avec prob 0,66
q_1 :	2 500 avec prob 0,33 2 400 avec prob 0,66 0 avec prob 0,01	q_2 :	2 500 avec prob 0,33 0 avec prob 0,67

- Présentation équivalente pour les probabilités de gain. On tire de manière équiprobable un nombre entier entre 1 et 100 :

	1	2 – 34	35 – 100
q_1	0	2500	**2400**
p_1	2400	2400	**2400**
q_2	0	2500	**0**
p_2	2400	2400	**0**

- D'après l'étude de Kahneman et Tversky : $p_1 \succ q_1$ et $q_2 \succ p_2$

Sure Thing Principle

- On tire de manière uniforme un nombre entre 1 et 100 (un ticket numéroté ou un jeton) :

	1	2 – 34	35 – 100
q_1	0	2500	**2400**
p_1	2400	2400	**2400**
q_2	0	2500	**0**
p_2	2400	2400	**0**

- Notons $B = \{35, \ldots, 100\}$, $B^c = \{1, 2, \ldots, 34\}$
- Comparons q_1 et p_1. B est une alternative non-pertinente.
- Raisonnement par l'absurde : Si $p_1 \preccurlyeq q_1 | B^c$, alors par le STP $q_1 \preccurlyeq p_1$.
- Or $p_1 \succ q_1$. Donc $p_1 \preccurlyeq q_1 | B^c$ est faux, cad $p_1 \succ q_1 | B^c$
- comme $q_2 = q_1$ et $p_2 = p_1$ sur B^c, $p_2 \succ q_2 | B^c$
- B est une alternative non-pertinente quand on compare q_2 et p_2
- Par le STP, $p_2 \succ q_2$
- Les choix des agents $p_1 \succ q_1$ et $q_2 \succ p_2$ sont incompatibles avec le STP

Exercice : réduction de loteries composées

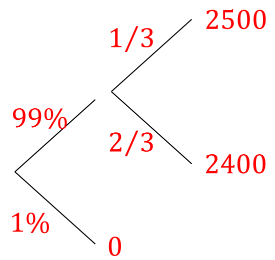
p_1 :	2 400 avec prob 1	p_2 :	2 400 avec prob 0,34 0 avec prob 0,66
q_1 :	2 500 avec prob 0,33 2 400 avec prob 0,66 0 avec prob 0,01	q_2 :	2 500 avec prob 0,33 0 avec prob 0,67

- On reprend le tableau de loteries de Kahneman et Tversky
- Peut-on représenter q_1 comme une loterie composée ?
- Peut-on faire un lien avec la présentation équivalente au niveau des probabilités ?

	1	2 – 34	35 – 100
q_1	0	2500	**2400**
p_1	2400	2400	**2400**
q_2	0	2500	**0**
p_2	2400	2400	**0**

Exercice : réduction de loteries composées

- Peut-on représenter q_1 comme une **loterie composée** ?
- Peut-on faire un lien avec la présentation équivalente au niveau des probabilités ?



q_1 :	2 500 avec prob 0,33 2 400 avec prob 0,66 0 avec prob 0,01

- *La réponse est oui : la loterie simple (à droite) et composée (à gauche) sont « stochastiquement équivalentes » : les distributions de probabilités associées aux gains sont identiques*

Exercice : réduction de loteries composées

- On tire de manière uniforme un nombre entre 1 et 100

	1	2 – 34	35 – 100
q_1	0	2500	**2400**
p_1	2400	2400	**2400**
q_2	0	2500	**0**
p_2	2400	2400	**0**

- Effet de cadrage : si l'on présente le tableau précédent qui introduit des événements élémentaires plutôt que les probabilités sur les gains (ci-dessous), les violations du STP sont moins fréquentes.
  - *Le parieur se rend mieux compte que si $p_1 \succ q_1$, alors $p_1 \succ q_1|B^c$, alors $p_2 \succ q_2|B^c$, alors $p_2 \succ q_2$*

p_1 : 2 400 avec prob 1	p_2 : 2 400 avec prob 0,34 0 avec prob 0,66
q_1 : 2 500 avec prob 0,33 2 400 avec prob 0,66 0 avec prob 0,01	q_2 : 2 500 avec prob 0,33 0 avec prob 0,67

Exercice : réduction de loteries composées et effet de cadrage

- On rappelle que 83% des participants préfèrent q_2 à p_2 : $q_2 \succ p_2$

p_2 : 2 400 avec prob 0,34 0 avec prob 0,66
q_2 : 2 500 avec prob 0,33 0 avec prob 0,67

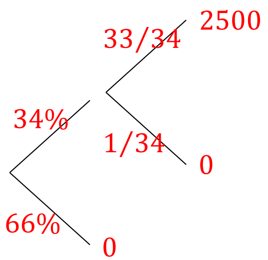
	1	2 – 34	35 – 100
q_2	0	2500	**0**
p_2	2400	2400	**0**

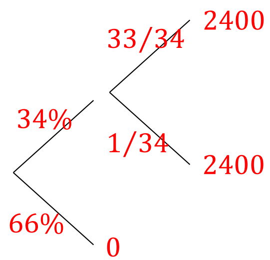
- Représenter q_2 et p_2 comme des loteries composées

Exercice : réduction de loteries composées et effet de cadrage

	1	2 – 34	35 – 100
q_2	0	2500	**0**
p_2	2400	2400	**0**

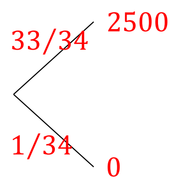
- A gauche, la loterie q_2 (sous forme composée), à droite p_2

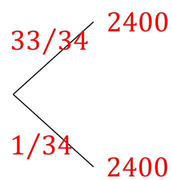




Exercice : réduction de loteries composées et effet de cadrage

- En présentant la loterie sous sa forme composée, le décideur va spontanément comparer





- La préférence pour la sécurité au voisinage de la certitude fait préférer la loterie sur la droite.
- D'où $p_2 \succ q_2$.
- L'incohérence entre les choix disparaît si l'on change la présentation et si l'on dissipe l'illusion stochastique.

Exercice : réduction de loteries composées et effet de cadrage

- La réduction d'une loterie composée revient à la transformer en une loterie simple telle que les deux distributions de gain soient identiques
- Représenter le jeu de manière séquentielle ou non fait partie du cadre (frame)
- L'illusion stochastique résulte de l'influence du cadre de présentation des choix (Kahneman et Tversky : framing effect)
- L'hypothèse d'équivalence stochastique est connue en microéconomie comme l'axiome de réduction et en analyse de risque comme l'invariance en loi.
- Même après dissipation de l'illusion stochastique, les agents peuvent préférer jouer de manière séquentielle (tirage du loto)

Rappel : effet de cadrage et illusion stochastique

Participants were asked to choose between two treatments for 600 people affected by a deadly disease. Treatment A was predicted to result in 400 deaths, whereas treatment B had a 33% chance that no one would die but a 66% chance that everyone would die. This choice was then presented to participants either with positive framing, i.e. how many people would live, or with negative framing, i.e. how many people would die.

Framing	Treatment A	Treatment B
Positive	"Saves 200 lives"	"A 33% chance of saving all 600 people, 66% possibility of saving no one."
Negative	"400 people will die"	"A 33% chance that no people will die, 66% probability that all 600 will die."

Treatment A was chosen by 72% of participants when it was presented with positive framing ("saves 200 lives") dropping to 22% when the same choice was presented with negative framing ("400 people will die").

Rappel : effet de cadrage et illusion stochastique

- Tversky, A., & Kahneman, D. (1981). The framing of decisions and the psychology of choice. *science*, *211*(4481), 453-458.

The Framing of Decisions and the Psychology of Choice

Amos Tversky and Daniel Kahneman

Summary. The psychological principles that govern the perception of decision problems and the evaluation of probabilities and outcomes produce predictable shifts of preference when the same problem is framed in different ways. Reversals of preference are demonstrated in choices regarding monetary outcomes, both hypothetical and real, and in questions pertaining to the loss of human lives. The effects of frames on preferences are compared to the effects of perspectives on perceptual appearance. The dependence of preferences on the formulation of decision problems is a significant concern for the theory of rational choice.

Rappel : effet de cadrage et illusion stochastique

- La notion d'absence d'illusion stochastique apparait chez Ramsey sous la dénomination de propositions « ethically neutral »
  - Ramsey (1926). Truth and probability. In *Readings in Formal Epistemology*.

we shall call ethically neutral. More precisely an atomic proposition p is called ethically neutral if two possible worlds differing only in regard to the truth of p are always of equal value ; and a non-atomic proposition p is called ethically

Sure Thing Principle et axiome d'indépendance (par mélanges)

- Jusqu'à présent, les conséquences étaient monétaires
- On peut considérer le cas où ce sont des loteries
- Considérons le cas de trois loteries : $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ avec $\mathcal{L}_1 \succcurlyeq \mathcal{L}_2$
  - *Loterie composée de la loterie $\mathcal{L}$ avec probabilité α et de la loterie $\mathcal{L}_1$ avec probabilité $1 - \alpha$*
  - *Loterie composée de la loterie $\mathcal{L}$ avec probabilité α et de la loterie $\mathcal{L}_2$ avec probabilité $1 - \alpha$*
  - *Si on assimile $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ à des variables aléatoires, on peut réduire les loteries composées aux loteries $B\mathcal{L} + (1 - B)\mathcal{L}_1$ et $B\mathcal{L} + (1 - B)\mathcal{L}_2$*
  - *Où B : variable de Bernoulli, de paramètre α, indépendante de $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$*
  - *Sur l'événement $B = 1$, les deux loteries coïncident*
  - *Sur l'événement $B = 0$, $B\mathcal{L} + (1 - B)\mathcal{L}_1 \succcurlyeq B\mathcal{L} + (1 - B)\mathcal{L}_2$*
  - *D'où $B\mathcal{L} + (1 - B)\mathcal{L}_1 \succcurlyeq B\mathcal{L} + (1 - B)\mathcal{L}_2$, soit l'axiome d'indépendance par mélanges.*

Sure Thing Principle et axiome d'indépendance

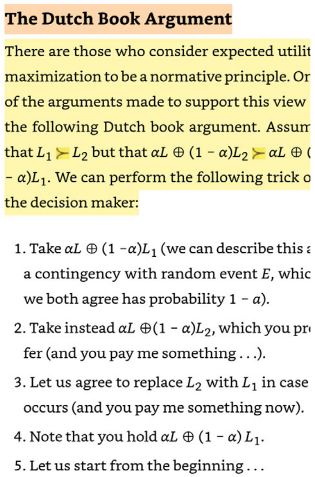
- Il n'est pas nécessaire de représenter les loteries composées comme des loteries simples et d'utiliser l'axiome de réduction.
- Le STP implique alors que $1 \succcurlyeq 2$ où
  - $1 \sim$ *loterie composée de la loterie $\mathcal{L}$ avec probabilité α et de la loterie $\mathcal{L}_1$ avec probabilité $1 - \alpha$*
  - $2 \sim$ *loterie composée de la loterie $\mathcal{L}$ avec probabilité α et de la loterie $\mathcal{L}_2$ avec probabilité $1 - \alpha$*
- Segal utilise le terme de « compound independence »

Econometrica, Vol. 58, No. 2 (March, 1990), 349–377

TWO-STAGE LOTTERIES WITHOUT THE REDUCTION AXIOM[1]

BY UZI SEGAL

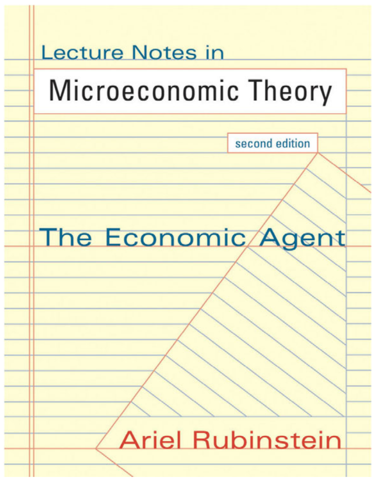
- Axiome d'indépendance et arbitrage (dutch book)
- Transitivité et money pump



The Dutch Book Argument

There are those who consider expected utilit
maximization to be a normative principle. Or
of the arguments made to support this view
the following Dutch book argument. Assum
that $L_1 \succ L_2$ but that $\alpha L \oplus (1 - \alpha)L_2 \succ \alpha L \oplus ($
$- \alpha)L_1$. We can perform the following trick o
the decision maker:

1. Take $\alpha L \oplus (1 - \alpha)L_1$ (we can describe this a
   a contingency with random event E, whic
   we both agree has probability $1 - \alpha$).
2. Take instead $\alpha L \oplus (1 - \alpha)L_2$, which you pr
   fer (and you pay me something . . .).
3. Let us agree to replace L_2 with L_1 in case
   occurs (and you pay me something now).
4. Note that you hold $\alpha L \oplus (1 - \alpha) L_1$.
5. Let us start from the beginning . . .



Sure Thing Principle et paradoxe d'Ellsberg

- Les violations précédentes du STP résultent d'un effet de cadrage (framing effect).
- Quand ils en prennent conscience, les agents économiques modifient leurs choix dans le sens de la rationalité.
- En revanche, ce n'est pas le cas du paradoxe d'Ellsberg qui met en évidence une aversion à l'ambiguïté.
- Par ambiguïté, on entend ici imprécision sur les probabilités.
  - Segal (1987). The Ellsberg paradox and risk aversion: An anticipated utility approach. *International Economic Review*.
  - Ellsberg (1961). Risk, ambiguity, and the Savage axioms. *The quarterly journal of economics*.
  - Machina (2003). States of the World and the State of Decision Theory. *The economics of risk*.

Sure Thing Principle, absence d'illusion stochastique et dominance stochastique

- « Dominance » (prédominance, supériorité)
  - *Comparaison entre des profils de gains*
  - $X \geq Y$ *si l'inégalité est vraie au sens large pour tous les états de la nature*
  - $X \geq Y \Leftrightarrow X(s) \geq Y(s), \forall s \in \{1, \dots, S\}$
  - $\geq$ *: Statewise dominance, state-by-state dominance*
    - Quiggin (1989). Sure things—Dominance and independence rules for choice under uncertainty. *Annals of Operations Research*.
    - Zimper (2008). Revisiting independence and stochastic dominance for compound lotteries. *The BE Journal of Theoretical Economics*.
  - *Quiggin parle de "zero-order" dominance.*
  - *Il parle également de "true sure thing principle" au sens où* X *est préféré à* Y *sur* $\{1, \dots, S\}$ *entier (sans que l'on ait besoin de compartimenter l'ensemble des états)*

Sure Thing Principle, absence d'illusion stochastique et dominance stochastique

- Dominance stochastique au premier ordre (ordre stochastique usuel)
  - *On considère une probabilité* P
  - $X \succcurlyeq Y \Leftrightarrow P(X \leq x) \leq P(Y \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$
    - ou $P(X > x) \geq P(Y > x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
  - $X \geq Y \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(Y \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$
- $X \geq Y \Rightarrow X \succcurlyeq Y$
- Dans l'exemple suivant, on montre que si $X \succcurlyeq Y$ et en l'absence d'illusion stochastique, on peut se ramener au cas $X \geq Y$
- On peut ainsi définir la dominance stochastique au premier ordre comme la possibilité de réarranger les états afin que $X \geq Y$ (Quiggin – 1989)

Sure Thing Principle, absence d'illusion stochastique et dominance stochastique

- Exemple (probabilité uniforme sur les états)
  - $A \geq B$
  - C *ne domine pas* B*, mais* C *domine* B *au premier ordre.*
  - *Avec* C *on gagne* 3 *et* 1*, avec* C*,* 2 *et* 1 *de manière équiprobable*

Consider three gambles over a single toss of a fair six-sided die:

State (die result)	1	2	3	4	5	6
gamble A wins $	1	1	2	2	2	2
gamble B wins $	1	1	1	2	2	2
gamble C wins $	3	3	3	1	1	1

  - *Construire* $C^* \sim C$ *avec* $C^* \geq B$.
  - $C^* \sim C$ *signifie que* C^* *et* C *sont de même loi.*
  - *On peut faire une permutation sur les états sans changer de loi*
  - C^* *prend la valeur* 1 *sur les états* 1,2,3 *et* 3 *sur les autres états*

Sure Thing Principle & conjoint independence

- Conjoint independence
  - Fishburn & Wakker (1995). The invention of the independence condition for preferences. *Management Science*.

Independence and the sure-thing principle are equivalent for decision under risk, but in a less elementary way than has sometimes been thought. The sure-thing principle for decision under uncertainty and conjoint independence are identical in a mathematical sense.

The mathematics underlying our three preference conditions has an older history. The independence condition for decision under risk can be recognized in the characterization of "associative means," and conjoint independence for multiattribute decisions in solutions to the "generalized associativity functional equation."

(*Expected Utility; Independence Condition; Conjoint Independence; History of Utility Theory*)

We observe that conjoint independence can be identified with the sure-thing principle.

Figure 3 **Conjoint Independence. If $x \geq y$ then $x' \geq y'$.**

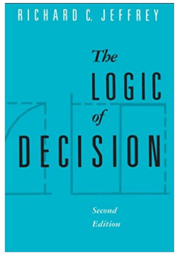
	R	I	R	I
x	3	1	5	7
y	4	1	6	7
x'	3	2	5	8
y'	4	2	6	8

image 10

Probabilités subjectives

- Approche d'Aumann et Anscombe

Sure Thing Principle



- Critique de Jeffrey (1982)
  - *"Change Savage's example to make the election be merely for the choice of mayor, and suppose that the businessman thinks - perhaps correctly, and perhaps with excellent reason - that his buying the property would improve the Democratic contender's chances of winning".*
    - Jeffrey, The sure thing principle. In *PSA: Proceedings of the biennial meeting of the philosophy of science association.*
  - *Dans ce cas, la décision d'acheter peut être excellente <u>après</u> l'élection, mais pas <u>avant</u> l'élection, si l'arrivée d'un maire démocrate avait des conséquences funestes pour notre homme d'affaires.*
    - La décision d'acheter modifie la probabilité de l'événement conditionnant *B*

Sure Thing Principle : critique de Jeffrey

- Exemple : choix entre deux investissements immobiliers
  - $B = \{\text{élection d'un maire démocrate}\}$
  - *Si achat de A, probabilité de 5% de réaliser une plus-value si le démocrate est élu.*
  - *Comparons les décisions d'acheter A ou B : achat de B plus intéressant que le candidat démocrate ou que le candidat républicain soit élu.*

	Achat propriété A		Achat propriété B	
	1 M$	0 $	1M$	0 $
Victoire démocrate	5%	95%	**7,5%**	92.5%
Victoire républicain	**30%**	70%	40%	60%

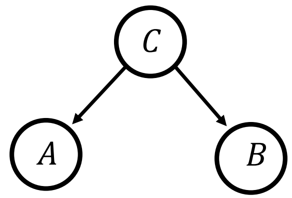
  - *Mais si l'achat de A faisait gagner avec certitude le républicain et que l'achat de B faisait gagner avec certitude le démocrate, il faudrait acheter A*
    - Probabilité de 30% de faire une plus value contre 7,5% si achat de A

Sure Thing Principle

- Reformulation de Judea Pearl pour éviter la critique de Jeffrey
    - Pearl (2016). The sure-thing principle. *Journal of Causal Inference*.
  - *Causal Sure-Thing Principle (CSTP)*
  - *Soit f et g, deux choix et B un événement dont la probabilité n'est pas affectée par le choix de f ou g : $P\big(B|do(f)\big) = P\big(B|do(g)\big)$*
  - *Si $f \succ g|B$ et si $f \succ g|B^c$ alors $f \succ g$*
  - *Remarque : On n'a pas nécessairement $P\big(B|do(f)\big) = P(B)$, c'est-à-dire que le choix f peut modifier la probabilité de B*
    - Judea Pearl sur twitter : https://twitter.com/yudapearl
- Aumann et al donnent un exemple intéressant du traitement des probabilités conditionnelles entraînant une violation du STP
    - Aumann, Hart & Perry (2005). *Conditioning and the sure-thing principle.*

Indépendance non conditionnelle et conditionnelle et causalité (rappel : voir éthique et finance)

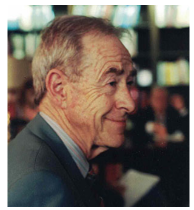
- Judea Pearl insiste sur distinction entre savoir et pouvoir
  - $A = \{\text{s'endormir avec ses habits du jour}\}$
  - $B = \{\text{avoir une migraine}\}$
  - $P(B|A) > P(B)$ *: dépendance positive. On n'a alors pas $A \perp B$*
  - $C = \{\text{gros excès d'alcool la veille}\}$
  - *Il est très possible que $A \perp B|C$*
  - *A et B ont une cause commune C.*



Indépendance non conditionnelle et conditionnelle et causalité (rappel : voir éthique et finance)

- Judea Pearl insiste sur distinction entre savoir et pouvoir
  - $A = \{\text{s'endormir avec ses habits du jour}\}$
  - $B = \{\text{avoir une migraine}\}$
  - $P(B|A) > P(B)$ *: dépendance positive*
  - *Notre système 1 (associatif) recherche des interprétations causales (pouvoir).*
    - Identifier une cause (inconnue) à partir d'effet connus : abduction (Peirce)
  - *Si on décide de s'endormir avec ses habits du jour (pouvoir), allons-nous avoir une migraine ? Pas de lien causal évident.*
  - *En d'autres termes $P(B|do(A)) = P(B)$*
    - Voir également discussion sur l'analyse du Sure Thing Principle
  - *Mais $P(B|do(C)) > P(B)$: mieux vaut s'abstenir de boire si on veut éviter la migraine (entre autres) !*

Sure Thing Principle (STP)



Colin Blyth

- La critique de Blyth (1972)
  - *Blyth (1972). On Simpson's paradox and the sure-thing principle.*
    - Journal of the American Statistical Association.
    - Blyth est à l'origine du terme "*Simpson's paradox*".
- Soit A, B, C trois événements avec "Simpson's reversal"
  - $P(C|A) > P(C|A^c)$
  - $P(C|A,B) < P(C|A^c,B)$ *et* $P(C|A,B^c) < P(C|A^c,B^c)$
- f : On parie un euro sur C à la première fois que l'on tire A^c
- g : on parie un euro sur C à la première fois que l'on tire A
- $f \succ g|B$ car $P(C|A,B) < P(C|A^c,B)$
- $f \succ g|B^c$car $P(C|A,B^c) < P(C|A^c,B^c)$
- Pourtant, $g \succ f$ car $P(C|A) > P(C|A^c)$
- **L'opportunité d'arbitrage vient de la possibilité de jouer de manière répétée**.

Premières hypothèses sur les choix risqués dans le cadre de l'approche VNM

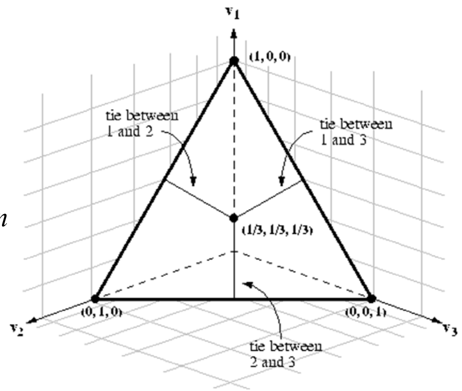
UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Loteries et lois de probabilité

- On précise les gains possibles, par exemple $\{-1,0,10,500\}$
  - Dans une unité de compte, par exemple en euros.
- Ensemble des gains $w = \{w_1, \dots, w_S\}$
  - Gains différents : $w_1 > \cdots > w_S$
- Probabilités associées à ces gains : $p_1, \dots, p_S$
  - *Avec* $p_1 \geq 0, \dots, p_S \geq 0$ *et* $p_1 + \cdots + p_S = 1$
- On peut voir w comme une variable aléatoire :
  - $P(w = w_1) = p_1, \dots P(w = w_S) = p_S$
  - $P = (p_1, \dots, p_S) \to$ *mesure de probabilité*
- Pour un ensemble de gains nets $w = \{w_1, \dots, w_S\}$ **donné**, on peut se contenter de définir les probabilités $p_1, \dots, p_S$
- Sous-ensemble de $\mathbb{R}^S$ défini par $S_U = \{(p_1, \dots, p_S), p_1 \geq 0, \dots, p_S \geq 0, p_1 + \cdots + p_S = 1\}$: **simplexe** de $\mathbb{R}^S$
  - Voir TD de finance pour tirages aléatoires dans le simplexe.

Loteries et lois de probabilité

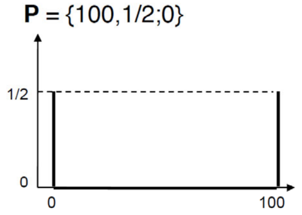
- Cas $S = 3$. Extrémités de S_U ?
- *Points* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *et* $(0,0,1)$ *: vecteurs canoniques de* $\mathbb{R}^3$
  - *Ou loteries certaines*
- S_U s'obtient par combinaison convexe des points extrémaux
- $P \in S_U \Leftrightarrow P = (p_1, p_2, p_3) = p_1(1,0,0) + p_2(0,1,0) + p_3(0,0,1)$
- $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0$
- $p_1 + p_2 + p_3 = 1$
- Représentation graphique du simplexe dans l'espace
  - *Remarque : le simplexe forme un triangle équilatéral*
  - *Le barycentre correspond à une loterie équiprobable*



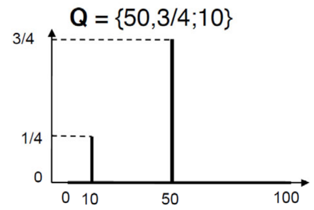
Loteries et lois de probabilité

- Cas où $S = 3$ (suite)
- $S_U = \{P = (p_1, p_2, p_3), p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0, p_1 + p_2 + p_3 = 1\}$
- Prenons $P, Q \in S_U$,et $0 \leq \alpha \leq 1$, alors $\alpha P + (1-\alpha)Q \in S_U$
  - $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$
  - $\alpha p_i + (1-\alpha)q_i \geq 0$, $i = 1,2,3$
  - $\sum_{i=1}^{3}(\alpha p_i + (1-\alpha)q_i) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{3} p_i\right) + (1-\alpha) \times \left(\sum_{i=1}^{3} q_i\right) = 1$
- S_U est un ensemble convexe
  - *Rappel : Un ensemble E est convexe si et seulement si $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha \in [0,1]$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in E$*
- Une combinaison convexe de mesures de probabilités Pet Q, $\alpha P + (1-\alpha)Q$ est aussi une mesure de probabilité
  - *Exemple (transparent suivant) : $\alpha =$*

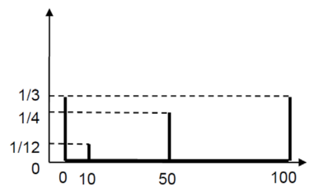
Combinaison convexe des paris P et Q. $X = \{0{,}10{,}50{,}100\}$
Représentation graphique : en ordonnées les probabilités, en abscisses les gains



x 2/3



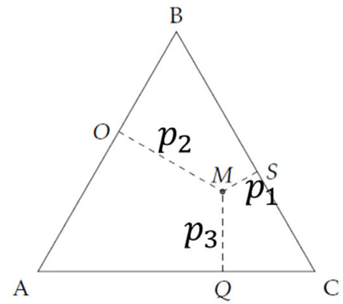
x 1/3



2/3 P + 1/3 Q

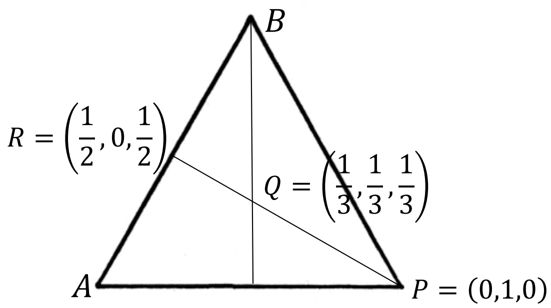
Exercice : représentation géométrique de loteries

- Les gains sont donnés (trois valeurs). Une loterie est représentée par les probabilités de gain associées.
- Représenter et construire géométriquement les loteries $P = (0,1,0)$, $Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $R = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ dans le triangle ci-dessous. Que remarque-t-on ?



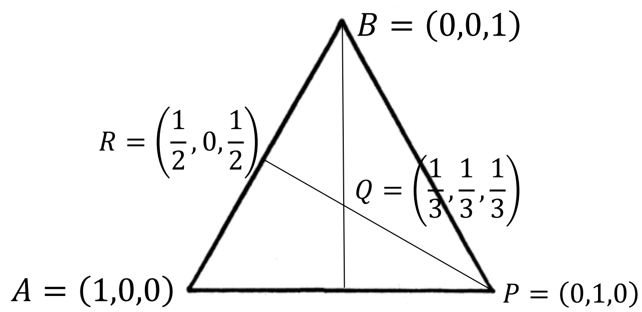
Exercice : représentation géométrique de loteries

- On rappelle que barycentre (point d'intersection des médianes) et orthocentre (point d'intersection des hauteurs) sont identiques pour un triangle équilatéral
- On représente ci-dessous deux hauteurs (ou médianes) ; elles sont de longueur 1. Q est le barycentre du triangle, R est le milieu de AB, P est l'un des trois sommets. P, Q, R sont alignés



Exercice : représentation géométrique de loteries

- Suite de l'exercice : Interpréter les intervalles QP, QR et RP comme des ensembles convexes de loteries.
- Interpréter Q comme une combinaison de loteries



Exercice : représentation géométrique de loteries

- Interpréter les intervalles QP, QR et RP comme des ensembles convexes de loteries.
  - $QP = \{\alpha P + (1-\alpha)Q, \alpha \in [0,1]\}$ *combinaisons convexes de la loterie équiprobable sur* $\{w_1, w_2, w_3\}$ *et de la loterie qui donne* w_2 *de manière certaine. On peut vérifier que cet ensemble est bien convexe :*
    - Toute combinaison convexe d'éléments de cet ensemble est dans l'ensemble
  - $QR = \{\beta P + (1-\beta)Q, \beta \in [0,1]\}$ *combinaisons convexes des loteries équiprobables sur* $\{w_1, w_2, w_3\}$ *et sur* $\{w_1, w_3\}$
  - $RP = \{\gamma P + (1-\gamma)Q, \gamma \in [0,1]\}$ *combinaisons convexes de la loterie qui donne* w_2 *de manière certaine et de la loterie équiprobable sur* $\{w_1, w_3\}$
- Interpréter Q comme une combinaison de loteries
  - Q *étant le barycentre, les longueurs* QR *et* QP *sont égales à* $1/3$ *et* $2/3$
  - $Q = \frac{2}{3}R + \frac{1}{3}P$. *Si l'axiome de réduction des loteries est vérifié,* Q *peut être vu comme une loterie composée.*

Théorème de Von Neumann et Morgenstern (préliminaire)

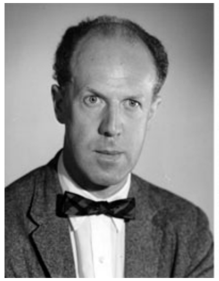
- A propos des classements des loteries
- On a supposé l'ensemble des gains donnés
- On compare ici des distributions de probabilité sur ces gains
  - *L'approche présentée ici a été initiée par Marschak (1950) et Samuelson (1952), légèrement différente de l'approche de von Neumann-Morgenstern (1947)*
  - *Savage (1954) dans sa construction part d'un autre ensemble d'hypothèses dont le STP (qui est l'hypothèse comportementale discutable).*
  - *Savage ne présuppose pas l'existence d'une probabilité sur les événements, mais un ensemble d'hypothèses sur les choix possibles qui implique l'existence d'une probabilité (subjective) sur les événements*
  - *Par exemple, si l'on s'intéresse à des paris boursiers ou sur des courses de chevaux, les probabilités ne sont pas données a priori*

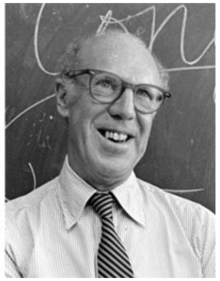
Théorème de Von Neumann et Morgenstern (préliminaire)

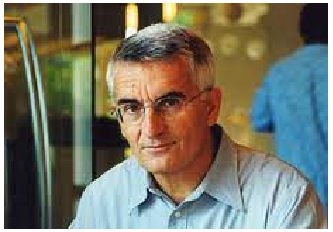
- **Hypothèse 1 (préordre total)** : Il existe une relation de préférence sur S_U, notée $\succcurlyeq$ telle que
  - $\forall P \in S_U, P \succcurlyeq P$ *(réflexivité)*
  - $\forall P, Q, R \in S_U$, $P \succcurlyeq Q \succcurlyeq R \Rightarrow P \succcurlyeq R$ *: transitivité*
  - $\forall P, Q \in S_U$, $P \succcurlyeq Q$ *ou* $Q \succcurlyeq P$ *(ordre total)*
- Equivalence : $P \sim Q \Leftrightarrow P \succcurlyeq Q$ et $Q \succcurlyeq P$
- Ordre strict $P \succ Q \Leftrightarrow P \succcurlyeq Q$ et $Q \not\succcurlyeq P$
- **Hypothèse 2 (continuité)** : $\forall P, Q, R \in S_U, P \succcurlyeq Q \succcurlyeq R$, $\exists \alpha \in [0,1]$ tel que : $\alpha P + (1-\alpha)R \sim Q$
  - *En combinant la bonne loterie P avec la mauvaise loterie R, on peut arriver à trouver une loterie équivalente à la loterie Q*
  - *Il existe plusieurs formulations légèrement différentes de cette hypothèse*

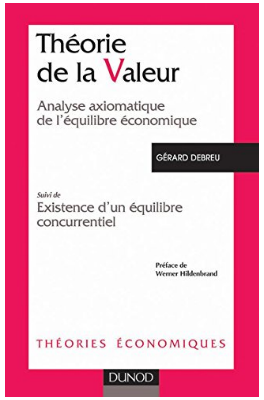
Théorème de Von Neumann et Morgenstern (préliminaire)

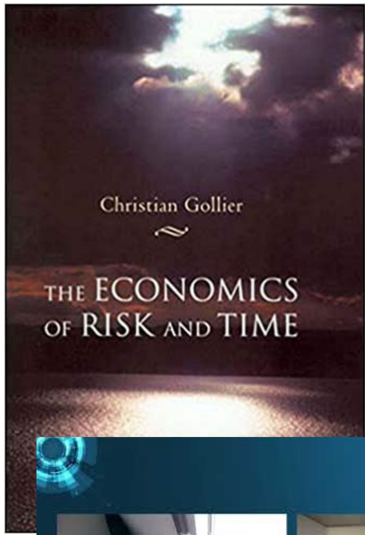
- H1 : Il existe une relation de préordre total $\succcurlyeq$ sur les loteries ($\succ$ ordre strict associé)
- H2 (Axiome de continuité) : $\forall P, Q, R \in S_U$, $P \succcurlyeq Q \succcurlyeq R$, $\exists \alpha \in [0,1]$ tel que : $\alpha P + (1-\alpha)R \sim Q$
- Théorème : Sous les hypothèses précédentes, $\exists$ une fonction U continue de S_U dans $\mathbb{R}$, telle que $P \succ Q \Leftrightarrow U(P) > U(Q)$
  - *U est appelée fonction d'utilité.* $U(P)$ *est l'utilité de la loterie P*
- Réciproquement, s'il existe une fonction d'utilité continue U, la relation de préférence, définie par $P \succ Q \Leftrightarrow U(P) > U(Q)$, vérifie H1 et H2.
  - *Théorèmes admis et non spécifiques à l'économie du risque (Gollier, The economics of risk and time, page 5 ou Debreu, Théorie de la Valeur).*











The welfare cost of vaccine misallocation, delays and nationalism

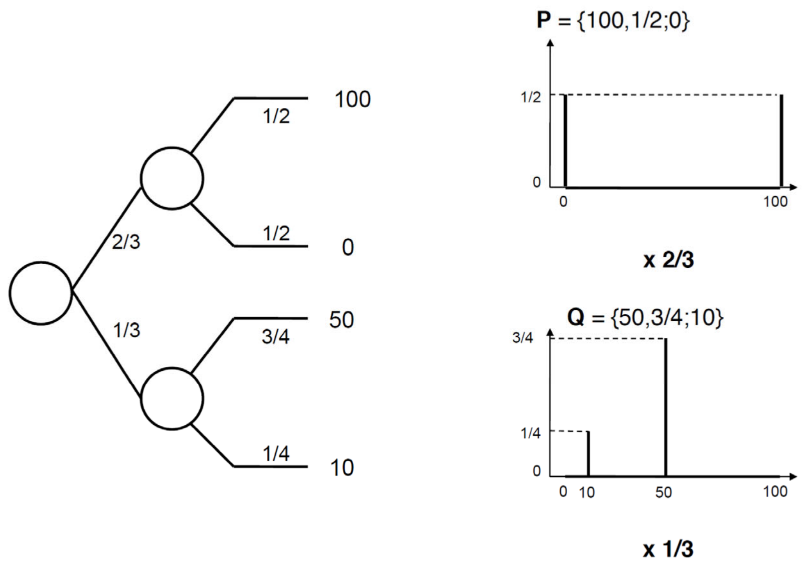
Christian Gollier
Toulouse School of Economics
University Toulouse-Capitole

March 24, 2021

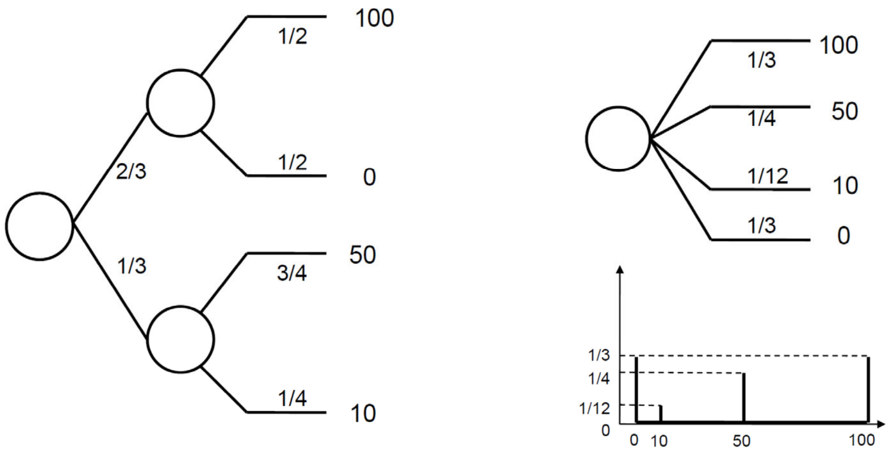
Réduction des loteries composées, axiome d'indépendance

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Loterie composée : première étape : on choisit « au hasard » (avec probabilités $2/3$ et $1/3$) si l'on va ensuite jouer à la loterie P ou à la loterie Q



Réduction de la loterie composée : la loi de probabilité des gains est équivalente à celle obtenue pour la loterie simple à droite

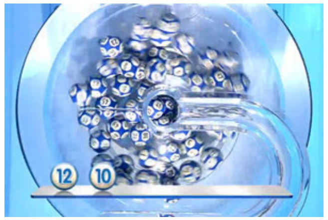


2/3 P + 1/3 Q

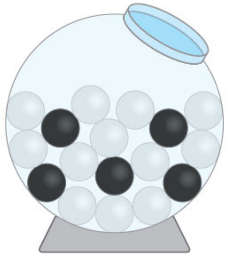
Axiome de réduction des loteries composées : la loterie composée étant associée à la même distribution de probabilité que la loterie réduite simple, elles sont équivalentes (absence d'illusion stochastique)

Exemple de loterie composée

- Le loto comme exemple de loterie composée…
- La distinction avec une loterie simple est alors évidente



- La première étape est analogue à ce que Piaget appelle le « *brassage* » des boules
- Procéder à des tirages avec une remise dans une urne (contenant des galets noirs et blancs) remonte à Bernoulli
  - Voir transparent suivant
- C'est le prototype du « tirage au hasard »



To illustrate this by an example, I suppose that without your knowledge there are concealed in an urn 3000 white pebbles and 2000 black pebbles, and in trying to determine the numbers of these pebbles you take out one pebble after another (each time replacing the pebble you have drawn before choosing the next, in order not to decrease the number of pebbles in the urn), and that you observe how often a white and how often a black pebble is withdrawn. The question is, can you do this so often that it becomes ten times, one hundred times, one thousand times, etc., more probable (that is, it be morally certain) that the numbers of whites and blacks chosen are in the same 3 : 2 ratio as the pebbles in the urn, rather than in any other different ratio? (Bernoulli, 1713, pp. 225–226)

Traduction du latin par Stephen Stigler

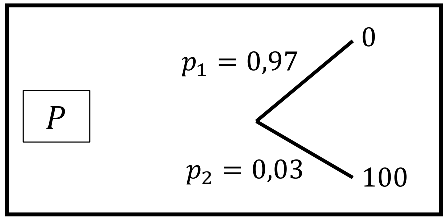
Exemple de loterie composée

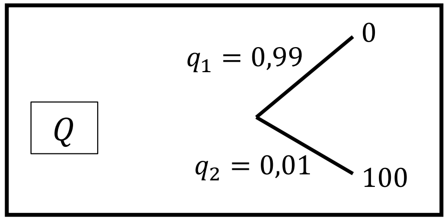
- Les loteries séquentielles sont très souvent utilisées
  - *Ci-dessous le tirage pour les matches de poule de la Champion's League*

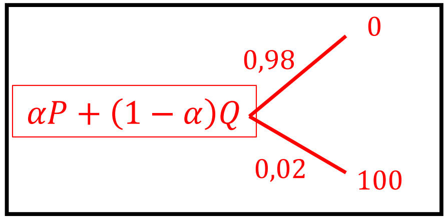
  - *Sepp Blatter, ancien président de la Fédération Internationale de Football indique comment certains tirages auraient pu être truqués*
  - *En refroidissant au préalable certaines boules …*

Exercice : réduction de loterie composée

- $w_1 = 0, w_2 = 100$ (richesses)
- $P = (p_1, p_2) = \left(\frac{97}{100}, \frac{3}{100}\right)$
- $Q = (q_1, q_2) = \left(\frac{99}{100}, \frac{1}{100}\right)$
- $\alpha = \frac{1}{2}$
- $\alpha P + (1-\alpha)Q = \frac{1}{2}\left(\frac{97}{100}, \frac{3}{100}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{99}{100}, \frac{1}{100}\right) = \left(\frac{98}{100}, \frac{2}{100}\right)$

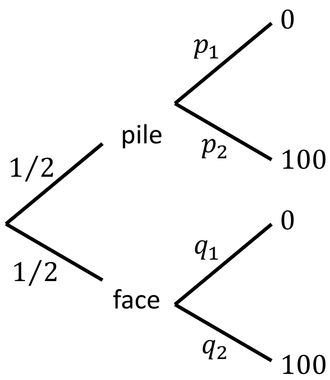






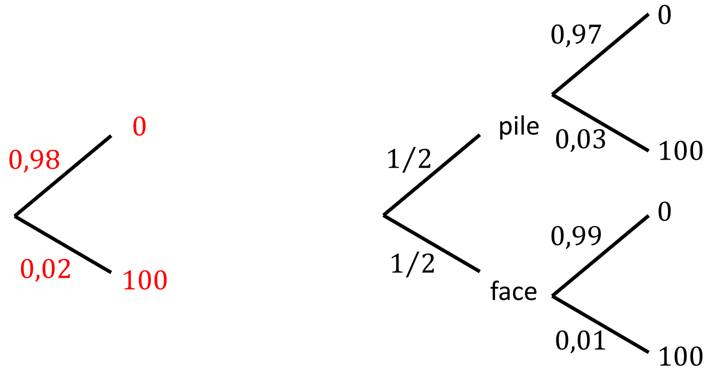
Exercice : réduction de loterie composée

- *Sous forme de loterie composée, on commence par jouer à pile ou face, pour savoir si on joue à la loterie P ou à la loterie Q*
- $w_1 = 0, w_2 = 100$
- $P = (p_1, p_2) = \left(\frac{97}{100}, \frac{3}{100}\right)$
- $Q = (q_1, q_2) = \left(\frac{99}{100}, \frac{1}{100}\right)$
- *Probabilité d'obtenir* 0
- $\frac{1}{2} \times p_1 + \frac{1}{2} \times q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{97}{100} + \frac{99}{100}\right) = \frac{98}{100}$
- *Probabilité d'obtenir* 100
- $\frac{1}{2} \times p_2 + \frac{1}{2} \times q_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{100} + \frac{1}{100}\right) = \frac{2}{100}$
- *Axiome de réduction des loteries composées : indifférence entre jouer en une fois ou de manière séquentielle*



Exemple : réduction de loterie composée

- Axiome de réduction des loteries composées : indifférence entre jouer en une fois ou de manière séquentielle



Exercice : comparaison de loteries

- La loterie P est a priori préférable à la loterie Q

  - *Il peut cependant y avoir des situations où P rapporte 100 et Q, 0 (donc pas optimal ex-post)*
- Question : peut-on imaginer une procédure qui permet d'éviter ce problème ? Cad faire en sorte qu'ex-post, il soit toujours préférable de choisir P

Exercice : comparaison de loteries

- On peut imaginer cette première procédure
  - *On commence par tirer un nombre au hasard entre* 1 *et* 100
  - *La loterie P est définie comme : on gagne* 100 *si le nombre tiré est compris entre* 1 *et* 3
  - *La loterie Q est définie comme : on gagne* 100 *si le nombre tiré est égal à* 1
  - *On est donc certain de toujours gagner plus en jouant à la loterie P*
  - *Si on avait défini la loterie, Q comme : on gagne* 100 *si le nombre tiré est égal à* 4*, il y aurait en cas de tirage du nombre* 4*, la loterie Q rapporterait* 100 *et P,* 0
  - *Pourtant, les distributions de gains sont les mêmes dans les deux cas*
- Question ouverte : Peut-on imaginer une autre procédure à partir de loteries composées ?

Exercice : comparaison de loteries

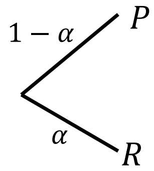
- Question ouverte : Peut-on imaginer une autre procédure à partir de loteries composées ?

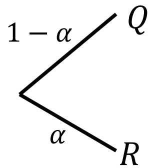
Axiome d'indépendance (par mélanges)

- H3 : Strong Independence Axiom
  - *On suppose que l'on a trois loteries P, Q, R*
  - *On suppose $P \succcurlyeq Q$*
  - *Soit $\alpha \in]0,1[$, alors $(1-\alpha)P + \alpha R \succcurlyeq (1-\alpha)Q + \alpha R$*
    - Rappel : Toute combinaison convexe de probabilités (ou mélange) est une loi de probabilité (donc une loterie).
- On peut présenter l'axiome d'indépendance de manière intuitive à partir de l'axiome de réduction des loteries composées et du STP (Sure Thing Principle) : « axiome d'indépendance par mélanges »
  - *Voir transparents suivants*
  - *L'axiome d'indépendance est l'axiome comportemental le plus crucial et le plus contesté dans la théorie des choix risqués*

Axiome d'indépendance (par composition de loteries)

- Interprétation de $(1-\alpha)P + \alpha R$: On choisit d'abord P avec probabilité $1-\alpha$ ou R avec probabilité α. On parle de **loterie composée**.



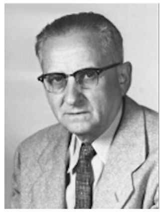


  - Soit B_R, l'événement associé au tirage de la loterie R
  - Sur B_R, on préfère (au sens large) $(1-\alpha)P + \alpha R = R$ à $(1-\alpha)Q + \alpha R = R$
  - Sur B_R^C, on préfère $(1-\alpha)P + \alpha R = P$ à $(1-\alpha)Q + \alpha R = Q$
- *En vertu du Sure Thing Principle, on préfère $(1-\alpha)P + \alpha R$ à $(1-\alpha)Q + \alpha R = Q$*
- *Si en outre, on admet l'axiome de réduction des loteries composées, on obtient l'axiome d'indépendance (par mélanges)*

Axiome d'indépendance (par mélanges)

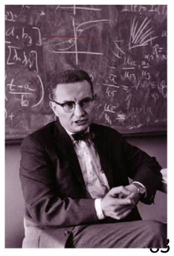
- Sure Thing Principle (STP) + Axiome de réduction des loteries composées ⇒ Mixture Independence Axiom ⇒ Strong Independence Axiom
  - *A propos des axiomes d'indépendance et de réduction des loteries composées*
    - Segal (1990). Two-stage lotteries without the reduction axiom. *Econometrica*.
    - Segal (1992). The independence axiom versus the reduction axiom: Must we have both? In Utility theories: Measurements and applications. Springer.
  - *Aux origines de l'axiome d'indépendance*
    - Fishburn & Wakker (1995). The invention of the independence condition for preferences. *Management Science*
    - Marschak (1950). Rational behavior, uncertain prospects, and measurable utility. *Econometrica.*
    - Samuelson (1952). Probability, utility, and the independence axiom. *Econometrica*.

Segal



Marschak

Samuelson



Axiomes d'indépendance

- H3 : Axiome d'indépendance
  - *Trois loteries P, Q, R avec $P \succcurlyeq Q$*
  - *Soit $\alpha \in]0,1[$, alors $(1-\alpha)P + \alpha R \succcurlyeq (1-\alpha)Q + \alpha R$*
- Corollaire (axiome d'indépendance par équivalence) : sous H3, $P \sim Q \Rightarrow (1-\alpha)P + \alpha R \sim (1-\alpha)Q + \alpha R$
  - *Preuve : $P \sim Q \Leftrightarrow P \succcurlyeq Q$ et $Q \succcurlyeq P$*
  - *$P \succcurlyeq Q \Rightarrow (1-\alpha)P + \alpha R \succcurlyeq (1-\alpha)Q + \alpha R$*
  - *$Q \succcurlyeq P \Rightarrow (1-\alpha)Q + \alpha R \succcurlyeq (1-\alpha)P + \alpha R$*
  - *D'où $(1-\alpha)P + \alpha R \sim (1-\alpha)Q + \alpha R$*
- Remarque : si l'axiome de réduction des loteries composées non vérifié, on doit distinguer $(1-\alpha)P + \alpha R$ et $(1-\alpha)P \oplus \alpha R$ où $\oplus$ est associé à loterie composée

Lien entre STP et axiome d'indépendance

strong independence axiom, M2. These axioms are closely related in that if Axiom S2 is not accepted, then Axiom M2 would not be accepted. Similarly, if Axiom M2 would not be accepted, a probability space and set of random variables exist such that Axiom S2 cannot be accepted.

This can be seen by writing the sure-thing principle in terms of probability distributions. Assuming $\mu(B) = \alpha$, where $\alpha > 0$ and $1 - \alpha > 0$, the induced probability measure of $f_B(\cdot, a)$ can be written as $P_B(\cdot, a)$; similarly $f_B(\cdot, b)$ induces measure of $P_B(\cdot, b)$ and so forth. We can also write

$$P(\cdot, a) = \alpha P_B(\cdot, a) + (1-\alpha) P_{\bar{B}}(\cdot, a).$$

Thus Axiom S2 can be written as:

$$\text{if } \alpha P_B(\cdot, a) + (1-\alpha) P_{\bar{B}}(\cdot, a) \overset{\Gamma}{\leqq} \alpha P_B(\cdot, a) + (1-\alpha) P_{\bar{B}}(\cdot, b),$$
$$\text{then } \alpha P_B(\cdot, c) + (1-\alpha) P_{\bar{B}}(\cdot, a) \overset{\Gamma}{\leqq} \alpha P_B(\cdot, d) + (1-\alpha) P_{\bar{B}}(\cdot, b).$$

This is clearly implied by Axiom M2. Hence we cannot accept the strong independence axiom and reject the sure-thing principle.

Unfortunately, it is not true that if the strong independence axiom, M2, is rejected we must reject the sure-thing principle, S2. The difficulty is that the probability space (Ω, θ, μ), and the set of random variables Γ, to induce the probability distribution on the rewards, are not uniquely defined. However, there will exist some probability space (Ω, θ, μ) such that Axiom S2 is not accepted. To see this consider the inequality

$$\alpha P(\cdot, i) + (1-\alpha) P(\cdot, j) \overset{\Pi}{\leqq} P(\cdot, k) + (1-\alpha) P(\cdot, j).$$

Lien entre STP et axiome d'indépendance

- STP corollaire du théorème de monotonicité

THEOREM 3 ("the sure-thing principle"). If $a \succ b$, then for any $\lambda \in)0,1($

$$a \succ \lambda a + (1-\lambda) b \quad \text{and} \quad \lambda a + (1-\lambda) b \succ b.$$

Proof. This theorem is a special case of theorem 2 for $\lambda = 1$ and $\mu = 0$.

Exercice : loteries simples et composées

- Vous avez deux dés non pipés. Dans une loterie simple, vous jetterez les deux dés en même temps, dans une loterie composée, on lance d'abord un dé, puis l'autre.
- Calculer la probabilité d'obtenir un 5 et un 6, d'obtenir deux 6
- Est-ce que cela dépend de la procédure ?
- Prenons le cas de deux 6 : Que voyez-vous comme différence dans la procédure associée la loterie ?
- Remarque : on peut jouer à la loterie composée avec un seul dé !

Exercice : loteries simples et composées

- On suppose qu'un des deux dés est pipé, la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{5}$, la probabilité d'obtenir 5 est $\frac{4}{25}$. Vous ne savez pas quel est le dé pipé.
- Reprenez les questions précédentes. En quoi la procédure séquentielle a-t-elle changé ?
- Si vous aviez à organiser un jeu, quelle procédure proposeriez-vous ?
- Question subsidiaire : vous avez un seul dé à six faces (non pipé). Trouvez une procédure rapide pour faire un tirage uniforme sur {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} (ou plus généralement sur un ensemble de valeurs de cardinal 10)

Exercice corrigé : loteries simples et composées

- Vous avez deux dés non pipés. Dans une loterie simple, vous jetterez les deux dés en même temps, dans une loterie composée, on lance d'abord un dé, puis l'autre.
- Calculer la probabilité d'obtenir un 5 et un 6, d'obtenir deux 6
  - *Probabilité d'obtenir un* 5 *et un* $6 = \frac{2}{36} = 5{,}56\%$, *d'obtenir deux 6,* $\frac{1}{36}$
  - *Remarque : les réponses sont assez évidentes, mais seulement 20% des lycéens ou étudiants ayant suivi un cours de probabilité arrivent à différencier les deux situations.*
  - *On parle de biais d'équiprobabilité ou d'équirépartition*
    - Lecoutre & Durand (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational studies in mathematics.*

Exercice corrigé : loteries simples et composées

- Calculer la probabilité d'obtenir un 5 et un 6, d'obtenir deux 6
- Est-ce que cela dépend de la procédure ?
  - *Non, bien sûr, sous l'hypothèse usuelle et assez raisonnable que les tirages sont indépendants*
- Prenons le cas de deux 6 : Que voyez-vous comme différence dans la procédure associée la loterie ?
  - *Le caractère séquentiel de la procédure en deux coups permet une « résolution progressive » de l'incertitude.*
  - *On peut imaginer des procédures en 3 ou 4 tirages : par exemple 1) tirage compris entre 1 et 4, 2) pair ou impair, puis 3) tirage du numéro* 1 *:* $\frac{4}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$. *Cette procédure est d'autant plus intéressante qu'il y a de nombreux joueurs.*

Exercice corrigé : loteries simples et composées

- On suppose qu'un des deux dés est pipé, la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{5}$, la probabilité d'obtenir 5 est $\frac{4}{25}$. Vous ne savez pas quel est le dé pipé.
- Reprenez les questions précédentes. En quoi la procédure séquentielle a-t-elle changé ?
  - *Probabilité d'obtenir deux* $6 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6}$ *avec les deux procédures.*

    Probabilité d'obtenir le couple $(5{,}6) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{4}{25} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{50} = 6\%$.

    Avec la procédure séquentielle, on ne connait pas la probabilité conditionnelle d'obtenir un 6 *au second coup.*
- Si vous aviez à organiser un jeu, quelle procédure proposeriez-vous ?
  - *A priori, la procédure séquentielle, le suspens étant plus grand*

Exercice corrigé : loteries simples et composées

- Question subsidiaire : vous avez un seul dé à six faces (non pipé). Trouvez une procédure rapide pour faire un tirage uniforme sur {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} (ou plus généralement sur un ensemble de valeurs de cardinal 10)
  - *Il est toujours intéressant de penser à des méthodes de tirage aléatoire uniforme.*
  - *https://automathssite.wordpress.com/2017/06/17/probabilites-2-lancer-de-des-et-loi-uniforme/ donne une procédure (peu efficace) via un tableau de correspondance.*

Dé 1	Dé 2	Correspondance
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
1	2	7
3	4	8
5	6	9
6	5	10

Exercice corrigé : loteries simples et composées

- Le problème de la procédure précédente est qu'un double tirage ne suffit pas forcément : si on tire 4 pour le dé 1 et 3 pour le dé 2, il faut procéder à un nouveau tirage.
- Sur 36 combinaisons possibles, on n'en retient 10, on est donc amené à procéder à un nouveau tirage dans $\frac{26}{36} = 72\%$ des cas.
  - *Avec l'algorithme : premier tirage de dé : pair ou impair*
  - *Si premier tirage pair et second tirage compris entre* 1 *et* 5, *on retient le second nombre*
  - *Si premier tirage impair et second tirage compris entre* 1 *et* 5, *on retient le second nombre* $+5$
  - *Le taux de rejet passe de* 72% *à* $\frac{1}{6} = 17\%$
- Avec 2 dés à 6 faces, on peut effectuer un tirage uniforme dans $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ avec seulement 2 tirages (regrouper les nombres par paires). La procédure des dés de Miwin est plus complexe

Loteries composées et probabilités négligeables de Cournot

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Loteries composées et probabilités négligeables de Cournot

- Le problème posé notamment par Cournot est le suivant : à partir de quand une probabilité est suffisamment petite pour que l'événement associé soit considéré comme négligeable.
  - *Il peut aussi s'agir de décider si un résultat est « statistiquement significatif » pour qu'on lui accorde un crédit*
  - *Ou de décider si un test statistique permet de rejeter une hypothèse et/ou de valider une hypothèse alternative*
  - *Supposons par exemple que l'on s'intéresse à tester si une pièce est biaisée. L'hypothèse nulle est* $p = \frac{1}{2}$
  - *On procède à* n *tirages. On note* $\hat{f}$ *la fréquence d'apparition de pile*
  - *Sous les conditions habituelles de la loi (forte) des grands nombres,* $\hat{f}$ *tend vers* $p = \frac{1}{2}$ *quand* $n \to \infty$
  - *Mais en pratique, la limite n'est jamais atteinte et dans l'approche fréquentiste, l'évaluation exacte (objective) de* p *est impossible*


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
clɔ Iɔcc XIII.

Bernoulli s'intéresse aux différences entre fréquence empirique (à probabilité connue) et au problème inverse d'évaluer une probabilité inconnue à partir de fréquences empiriques : points fondamentaux pour l'analyse statistique, cad au rapport entre probabilité théorique et données.

Digression mathématique : La démonstration de Bernoulli repose sur des méthodes de dénombrement (d'une certaine manière, le « hasard » n'intervient pas), alors que la présentation au Lycée de la loi faible des grands nombres résulte de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui elle-même provient de l'inégalité de Markov. En outre, Bernoulli établit un résultat « exact » au sens où la probabilité que la fréquence dévie de la probabilité est majorée dans un échantillon de taille finie.

Loteries composées et probabilités négligeables de Cournot

- *Courtebras : Mathématiser le hasard, une histoire du calcul des probabilités*
- *Courtebras fait référence au livre de Borel « Valeur pratique et philosophie des probabilités »*

On doit par ailleurs à Emile BOREL d'avoir conceptualisé, notamment dans le prolongement des travaux de BUFFON et de COURNOT, le "principe des probabilités négligeables" qui conduit à poser comme impossible un événement de très petite probabilité. Notons qu'il s'agit là d'un principe extérieur à la théorie mathématique puisqu'il concerne son interprétation, c'est-à-dire la relation de la théorie au réel. Le "principe des probabilités négligeables" énonce que *« les événements dont la probabilité est suffisamment petite ne se produisent jamais »*

Loteries composées et probabilités négligeables de Cournot

LA VALEUR OBJECTIVE DU CALCUL DES PROBABILITÉS
SELON COURNOT

Thierry MARTIN[1]

RÉSUMÉ — *Dans les années 1930-1950, le débat opposant partisans de l'interprétation objectiviste et tenants de l'interprétation subjectiviste des probabilités mobilise un principe des probabilités négligeables, identifié par les auteurs comme «principe de Cournot», afin d'assurer la valeur objective du calcul des probabilités. Le but de l'article est de montrer que le principe tel qu'il est formulé par Cournot lui-même, et qu'on peut dénommer principe de l'impossibilité physique, ne se confond pas avec ce que les auteurs appelleront plus tard «principe de Cournot», puis d'en interroger le fondement et le statut, afin de mieux comprendre la façon originale dont Cournot confère au calcul des probabilités sa valeur objective.*

- *Martin (1994). La valeur objective du calcul des probabilités selon Cournot. Mathématiques et Sciences humaines.*
- *Martin (2018). Les probabilités négligeables selon Émile Borel. Images des mathématiques.*
  - https://images.math.cnrs.fr/Les-probabilites-negligeables-selon-Emile-Borel.html

Loteries composées et probabilités négligeables de Cournot

- Pour Cournot, « *l'événement physiquement impossible est celui dont la probabilité mathématique est infiniment petite*»
  - *Cournot, Exposition de la théorie des chances et des probabilités, 1843*
- Pour de Finetti, « *des événements pratiquement impossibles ne se vérifient jamais* »
- Pour Borel, « *les phénomènes extrêmement improbables ne se produisent jamais* »
  - *Borel, Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes, 1941*
- Pour Fréchet, « *quand un événement est de probabilité extrêmement petite, il convient d'agir comme s'il ne devait pas se produire*»
  - *Fréchet, Rapport général sur les travaux de la section de calcul des probabilités, 1951*
- C'est la présentation de Fréchet qui semble la plus pertinente
  - *Elle suit une approche pragmatique et non ontologique : rapport entre mathématiques et réel. On se place dans une problématique de décision*

PROBABILITÉ ET CERTITUDE

par

Émile BOREL

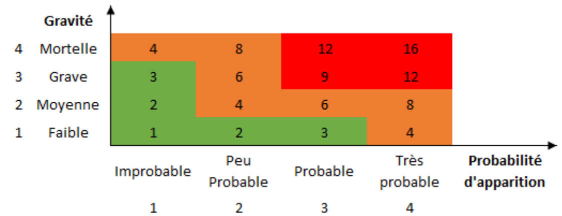
Membre de l'Institut

je suis arrivé à la conclusion qu'on ne devrait pas craindre d'employer le mot de *certitude* pour désigner une probabilité qui diffère de l'unité d'une quantité suffisamment petite. Je me rends d'autant mieux compte des objections que l'on peut faire à ce changement de langage, que je m'étais fait à moi-même ces objections autrefois et qu'elles m'avaient alors convaincu ; il ne m'a donc pas paru inutile de consacrer ce petit livre à un examen approfondi des divers aspects de la question.

BOREL É., «Sur les probabilités universellement négligeables», *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 190, 1930, 537-540 ; repris in *Œuvres de Émile Borel*, Paris, C.N.R.S., 1972, t. II, 1139-1142.

Loteries composées et probabilités négligeables de Cournot

- Dans l'analyse de la criticité des risques, on examine souvent, ce qu'on appelle une matrice des risques ou de sévérité (probabilité vs impact)



- Un risque très peu probable, mais avec une gravité extrême (accident nucléaire) doit être pris en compte
  - *De même, pour le défaut d'un état, d'une banque (risque millénaire)*
- L'approche fréquentielle est mal adaptée à ces risques : pas ou peu d'observations (low default portfolios)

Probabilités négligeables : low default portfolios

- Van der Burgt (2008). Calibrating low-default portfolios, using the cumulative accuracy profile. *Journal of Risk Model Validation*

Rating	Sovereigns	Defaults	X	Y	PD curve
			0%	0%	
CC	1	1	1%	50%	17,83%
CCC+	1	0	2%	50%	16,24%
B-	5	0	8%	50%	12,27%
B	6	0	15%	50%	7,34%
B+	3	0	19%	50%	4,82%
BB-	4	1	23%	100%	3,48%
BB	8	0	33%	100%	1,99%
BB+	5	0	38%	100%	1,08%
BBB-	2	0	41%	100%	0,78%
BBB	5	0	47%	100%	0,56%
BBB+	4	0	51%	100%	0,37%
A-	9	0	62%	100%	0,20%
A	5	0	67%	100%	0,10%
A+	6	0	74%	100%	0,06%
AA-	2	0	77%	100%	0,04%
AA	1	0	78%	100%	0,04%
AA+	3	0	81%	100%	0,03%
AAA	16	0	100%	100%	0,01%
Total	***86***	***2***			

Probabilités négligeables : low default portfolios

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION

BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS

Basel Committee Newsletter No. 6 (September 2005)

Validation of low-default portfolios in the Basel II Framework

The purpose of this Newsletter is to set forth the views of the Basel Committee Accord Implementation Group's Validation Subgroup (AIGV) regarding the appropriate treatment in the internal ratings-based (IRB) approaches in the Basel II Framework of portfolios where banks may have limited loss data. This Newsletter was developed in response to industry questions and concerns regarding such portfolios.

Loteries composées et probabilités négligeables de Cournot

- Au casino de Monte Carlo, le 18 août 1913, on remarqua que le noir était sorti consécutivement un certain nombre de fois.

Le casino de Monte Carlo

- A la 27e fois, le rouge sortit. La probabilité d'avoir 26 tirages de noirs consécutifs est de $\left(\frac{18}{37}\right)^{26} \approx$ 1 chance sur 100 millions.
- Cet exemple amène à l'analyse d'un problème important en en analyse des risques, celui des très petites probabilités…

Loteries composées et probabilités négligeables de Cournot

- Loterie composée et épreuves répétées.
  - *Considérons la loterie suivante : probabilité de sinistre de* $\frac{1}{1000}$
  - *Elle est (Presque) stochastiquement équivalente à la loterie composée suivante : tirage consécutif de 10 fois face dans un jeu de pile ou face*
  - $2^{10} = 1024$
  - *Vu sous l'angle d'une loterie composée, le risque apparaît plus grand.*
  - *Du point de vue de la décision, la loterie composée sera effectivement moins risquée si l'on peut envisager des actions de remédiation (mitigation) du risque en cours de parcours.*

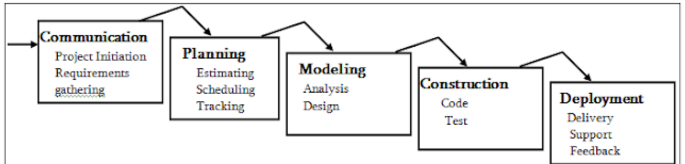


Figure : Linear Sequential Process

Représentation graphiques de loteries, démonstration du théorème de VNM (trois états)

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Espérance d'utilité et théorème de Von Neumann et Morgenstern

- Le critère d'espérance d'utilité (EU) de Von Neumann et Morgenstern permet de choisir entre des loteries
- On peut lui associer un certain nombre de propriétés
  - *Préordre total sur les loteries*
  - *Vérifie les axiomes de continuité et d'indépendance*
  - *Linéarité par rapport aux probabilités*
- Réciproquement, sous les hypothèses précédentes, il existe une fonction d'utilité telle que les loteries peuvent être classées sont l'espérance de l'utilité de la richesse

Théorème de Von Neumann et Morgenstern

- H3 : Axiome d'indépendance par mélanges (rappel) :
  - $P \succcurlyeq Q$ *et* $\alpha \in]0,1[\Rightarrow (1-\alpha)P + \alpha R \succcurlyeq (1-\alpha)Q + \alpha R$
  - *Autre formulation (axiome d'indépendance par équivalence) :*
  - $P \sim Q$ *et* $\alpha \in]0,1[\Rightarrow (1-\alpha)P + \alpha R \sim (1-\alpha)Q + \alpha R$
- Théorème (VNM) : Sous les trois hypothèses H1-H2-H3, il existe $u_1, \dots, u_S$, tels que $P \succ Q \Leftrightarrow U(P) = \sum_{s=1}^{S} p_s u_s > U(Q) = \sum_{s=1}^{S} q_s u_s$
  - $s \in \{1, \dots, S\} \rightarrow \tilde{u}(s) = u_s$. *$\tilde{u}$ variable aléatoire*
  - $U(P) = E^P[\tilde{u}]$ *: Espérance de l'utilité,* $U(Q) = E^Q[\tilde{u}]$
  - *On peut montrer que $\tilde{u}$ est définie à une transformation affine croissante près.*
  - *$\tilde{u}$: utilité cardinale*

Théorème de Von Neumann et Morgenstern : Démonstration (cas $S = 3$)

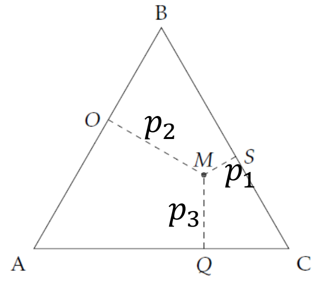
- On suppose $S = 3$ et $w_1 < w_2 < w_3$
- D'où $(1,0,0) \prec (0,1,0) \prec (0,0,1)$
  - *Les trois loteries précédentes sont associées aux richesses certaines w_1, w_2, w_3 (et on préfère plus à moins)*
- On va chercher à démontrer que $U(p_1, p_2, p_3) = p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3$
  - *À une transformation affine croissante près*
- $U(1,0,0) = u_1 < U(0,1,0) = u_2 < U(0,0,1) = u_3$
  - *u_1 représente l'utilité de la richesse w_1, u_3 celle de w_3*
  - *u_2 représente l'utilité de la richesse w_2*
- On pose $u_1 = 0$ et $u_3 = 1$
  - *Transformation affine (deux degrés de liberté)*

Théorème de Von Neumann et Morgenstern : Démonstration (cas $S = 3$)

- Utilisons l'hypothèse de continuité
- $\exists \alpha \in [0,1]$ tel que $(1-\alpha)(1,0,0) + \alpha(0,0,1) \sim (0,1,0)$
  - $(1-\alpha)(1,0,0) + \alpha(0,0,1)$ *représente recevoir* w_1 *avec probabilité* $1-\alpha$ *et* w_3 *avec probabilité* α
- On a alors $U(0,1,0) = u_2$
  - u_2 *représente l'utilité de la richesse* w_2
  - *On rappelle que* $u_1 = 0$ *et* $u_3 = 1$
  - *Si la conjecture* $U(p_1, p_2, p_3) = p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3$ *est vraie, alors* $U(0,1,0) = u_2 = (1-\alpha)u_1 + \alpha u_3 = \alpha$
- Dans ce cas, $U(p_1, p_2, p_3) = p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3 = \alpha p_2 + p_3$ représente le préordre.

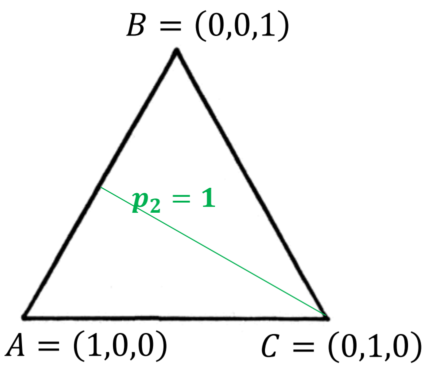
Théorème de Von Neumann et Morgenstern : Démonstration (cas $S = 3$)

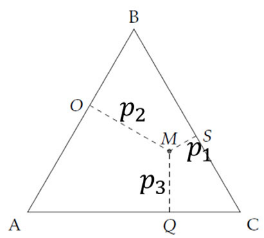
- On rappelle que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$
- Théorème de Viviani : dans un triangle équilatéral, la somme des distances d'un point intérieur aux trois côtés est constante
- $MO + MS + MQ$ ne dépend pas de M
- En particulier, si la hauteur du triangle équilatéral est égale à 1 et si on prend $M = B$, $MO = MS = 0$ et $MQ = 1$
- D'où $MO + MS + MQ = 1$
- $p_1 = MS, p_2 = MO, p_3 = MQ$



Théorème de Von Neumann et Morgenstern : Démonstration (cas $S = 3$)

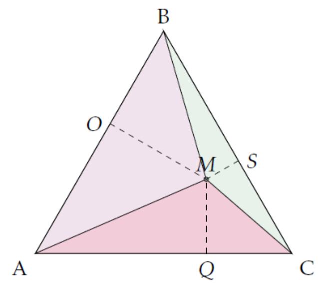
- Coordonnées des sommets du triangle
  - *Sommet C (exemple) :* $p_2 = 1$, $p_1 = p_3 = 0$
  - *C correspond à la loterie certaine qui rapporte* w_2
  - A, B *loteries certaines qui rapportent* w_1, w_3
  - *On préfère B à C et C à A* ($w_1 < w_2 < w_3$)





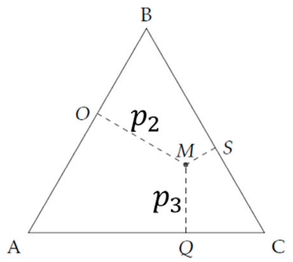
Théorème de Von Neumann et Morgenstern : Démonstration (cas $S = 3$)

- Aparté : démonstration du théorème de Viviani
  - *Notons h la hauteur du triangle ABC*
  - *Aire du triangle ABC* $= \frac{AC \times h}{2}$
  - *Aire du triangle ABM* $= \frac{AB \times MO}{2}$
  - *Aire du triangle BCM* $= \frac{BC \times MS}{2}$
  - *Aire du triangle ACM* $= \frac{AC \times MQ}{2}$
  - *D'où* $\frac{AC \times h}{2} = \frac{AB \times MO}{2} + \frac{BC \times MS}{2} + \frac{AC \times MQ}{2}$
  - *Et comme* $AC = AB = BC$,
  - $h = MO + MS + MQ$
  - *Ce qu'on voulait démontrer*
  - *On peut donc représenter simplement une loterie par un point M dans le triangle équilatéral précédent.*



Théorème de Von Neumann et Morgenstern : Démonstration (cas $S = 3$)

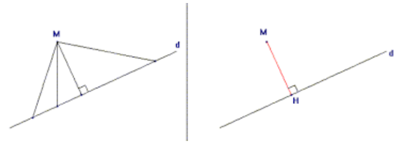
- (p_2, p_3) sont les coordonnées du point M dans le système d'axes (non-perpendiculaires) AC, AB



- Donc $p_3 + ap_2 = cte$ est donc l'équation d'une droite
  - *Exemples*
  - $p_2 = cte$, *droite parallèle à AB*
  - $p_3 = cte$, *droite parallèle à AC*

Théorème de Von Neumann et Morgenstern : Démonstration (cas $S = 3$)

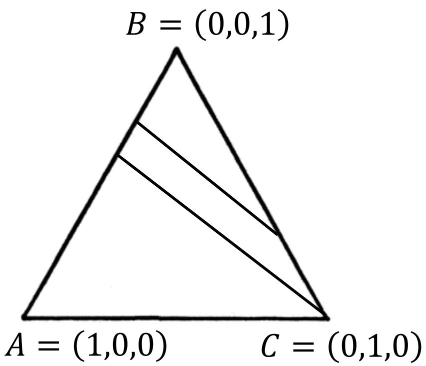
- Autre démonstration du résultat précédent : $MO = p_2$ et $MQ = p_3$ sont des fonctions affines des coordonnées de M
- En effet, distance d'un point M de coordonnées cartésiennes (x_M, y_M) à une droite d'équation $y = \bar{a}x + b$: $\frac{|y_M - \bar{a}x_M - b|}{\sqrt{1+\bar{a}^2}}$



  - https://fr.wikipedia.org/wiki/Distance_d%27un_point_%C3%A0_une_droite
  - *Remarque : si le point M est sous la droite* $y_M < \bar{a}x_M - b$
  - *M reste du même côté des trois droites AB, AC, BC*
  - *Donc* p_2 *et* p_3 *sont des fonctions affines de* x_M *et* y_M
  - *De même pour* $p_3 + ap_2$
- $p_3 + ap_2 = cte$ est donc l'équation d'une droite

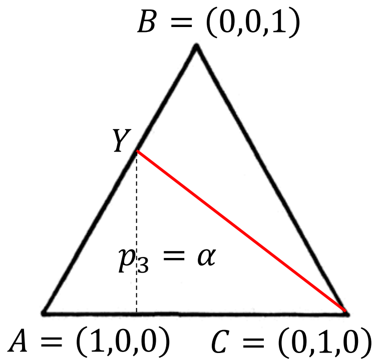
Théorème de Von Neumann et Morgenstern : Démonstration (cas $S = 3$)

- $p_3 + ap_2$ est une fonction affine des coordonnées de M
- $\{M, p_3 + ap_2 = cte, 0 \leq p_2 \leq 1, 0 \leq p_3 \leq 1\}$, a étant donné, donne des (segments de) droites parallèles
  - *Se déplaçant vers le haut du triangle quand* $cte \uparrow$



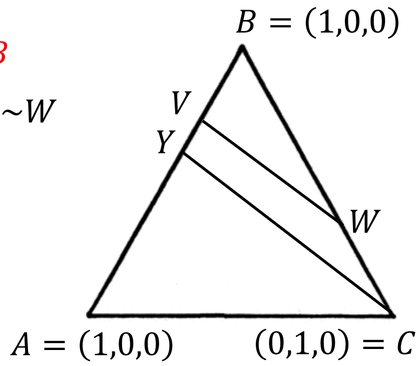
Théorème de Von Neumann et Morgenstern : Démonstration (cas $S = 3$)

- Soit Y le point associé à la loterie $(1-\alpha)(1,0,0) + \alpha(0,0,1)$
- $Y = (1-\alpha, 0, \alpha)$: $p_3 = \alpha$ et $p_2 = 0$ (voir graphique)
- Pour $C = (0,1,0)$, $p_3 = 0$, $p_2 = 1$ (voir graphique)
- Rappel (axiome de continuité) : $Y = (1-\alpha, 0, \alpha) \sim (0,1,0) = C$



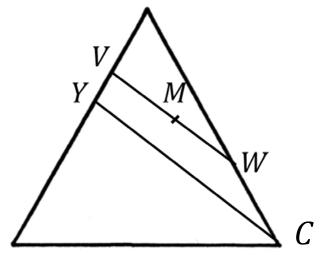
Théorème de Von Neumann et Morgenstern : Démonstration (cas $S = 3$)

- Soit VW le segment parallèle à YC (on rappelle que $Y \sim C$)
- Théorème de Thalès $\Rightarrow \frac{BV}{BY} = \frac{BW}{BC} = \lambda$
- $\frac{BV}{BY} = \lambda \Rightarrow V = \lambda Y + (1 - \lambda)B$
- $\frac{BW}{BC} = \lambda \Rightarrow W = \lambda C + (1 - \lambda)B$
- Par l'axiome d'indépendance $V \sim W$
  - *Que faire si $\lambda > 1$*
  - *Choisir A au lieu de B*



Théorème de Von Neumann et Morgenstern : Démonstration (cas $S = 3$)

- Soit M sur le segment VW
- On peut écrire $M = \delta V + (1 - \delta)W$, pour $\delta \in [0,1]$
- Et $V = \delta V + (1 - \delta)V$
- Comme $V \sim W$, par l'axiome d'indépendance : $M \sim V$



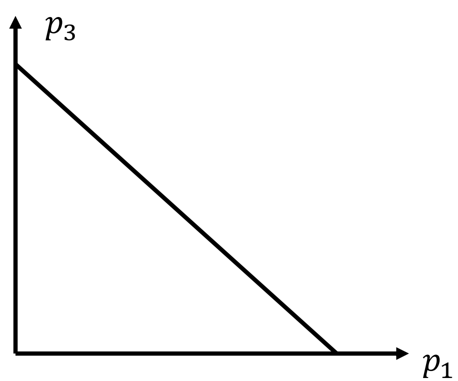
- Équivalence des loteries du segment VW
  - *Et en particulier, équivalence des loteries du segment YC*
  - *Les segments parallèles à YC sont des courbes d'iso-utilité*

Théorème de Von Neumann et Morgenstern : Démonstration (cas $S = 3$)

- Les courbes d'iso-utilité sont des segments de droites parallèles
- Dans le système de coordonnées (p_2, p_3) les segments de droite parallèles vérifient des équations de la forme $p_3 + ap_2 = cte$ (a donné)
- $U(p_1, p_2, p_3) = cte \Leftrightarrow p_3 + ap_2 = \overline{cte}$
- $\Leftrightarrow U(p_1, p_2, p_3)$ fonction affine de p_1, p_2, p_3
- En revenant aux transparents précédents, les égalités $U(1,0,0) = u_1 = 0$, $U(0,0,1) = u_3 = 1$ et $U(0,1,0) = u_2 = (1 - \alpha)u_1 + \alpha u_3 = \alpha$
- On obtient l'utilité sous la forme $\alpha p_2 + p_3$, ce qu'on voulait démontrer.
- L'axiome d'indépendance est essentiel pour la linéarité

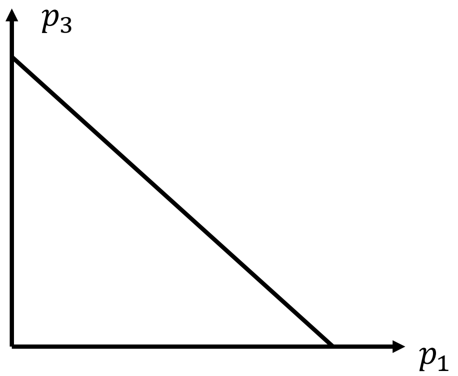
Triangle de Marschak-Machina : exercice

- Représentation du point $P = (p_1, p_2, p_3)$ dans le plan (p_1, p_3) avec $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_3 \geq 0$
  - *On supposera que les richesses associées vérifient $w_1 < w_2 < w_3$*
  - *De (p_1, p_3), on peut déduire $p_2 = 1 - p_1 - p_3$*



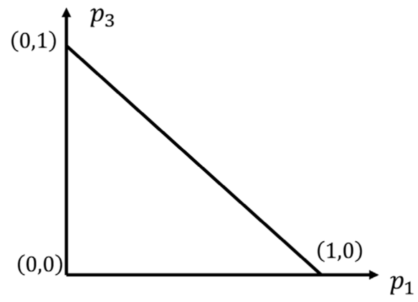
Triangle de Marschak-Machina : exercice

- Représentation du point $P = (p_1, p_2, p_3)$ dans le plan (p_1, p_3) avec $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_3 \geq 0$
  - *A quoi correspondent les trois sommets du triangle ?*
  - *A quoi correspondent les trois côtés du triangle ?*



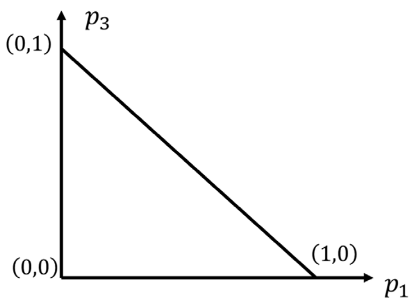
Triangle de Marschak-Machina : exercice

- Représentation du point $P = (p_1, p_2, p_3)$ dans le plan (p_1, p_3) avec $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_3 \geq 0$
  - *A quoi correspondent les trois extrémités du triangle ?*
  - *(1,0) est associé à $p_1 = 1$, loterie certaine rapportant w_1*
  - *(0,0) est associé à $p_2 = 1$, loterie certaine rapportant w_2*
  - *(0,1) est associé à $p_3 = 1$, loterie certaine rapportant w_3*



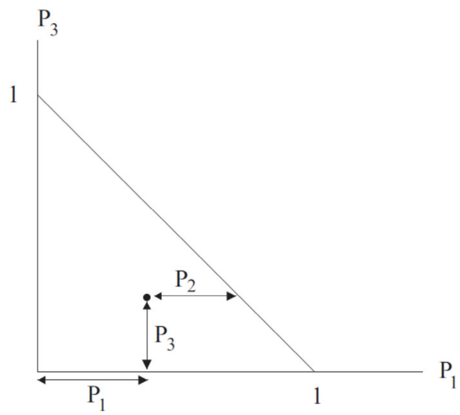
Triangle de Marschak-Machina : exercice

- Représentation du point $P = (p_1, p_2, p_3)$ dans le plan (p_1, p_3) avec $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_3 \geq 0$
  - *A quoi correspondent les trois côtés du triangle ?*
  - *Segment $\{p_1 = 0, 0 \leq p_3 \leq 1\}$: loteries dont le support est $\{w_2, w_3\}$*
  - *Segment $\{p_3 = 0, 0 \leq p_1 \leq 1\}$: loteries dont le support est $\{w_1, w_2\}$*
  - *Segment $\{p_1 + p_3 = 1, p_1 \geq 0, p_3 \geq 0\}$ loteries telles que dont le $p_2 = 0$, c'est-à-dire dont le support est $\{w_1, w_3\}$*



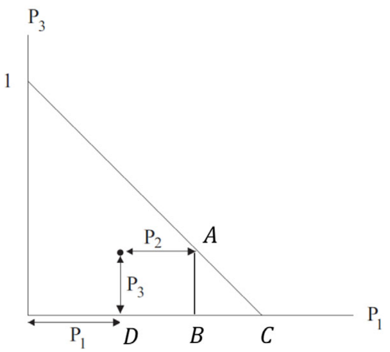
Exercice : coordonnées d'une loterie et triangle de Machina

- Montrer que l'on peut représenter p_1, p_2, p_3 comme dans le graphique ci-dessous



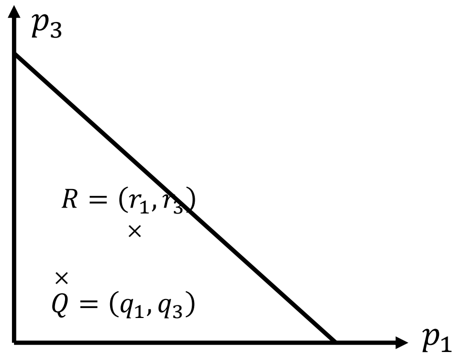
Exercice : coordonnées d'une loterie et triangle de Machina

- Montrer que l'on peut représenter p_1, p_2, p_3 comme dans le graphique ci-dessous
  - *ABC est semblable au triangle de Machina donc isocèle, d'où $p_3 = AB = BC$*
  - $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, *d'où $DB = p_2$*



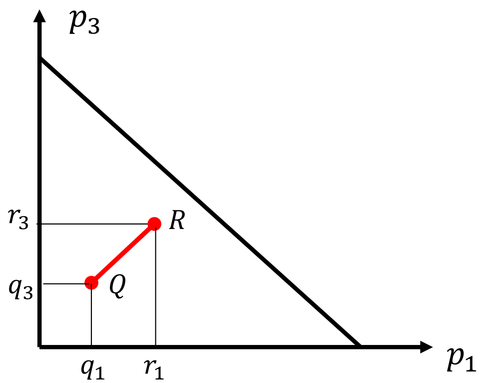
Exercice : combinaison de loteries dans le triangle de Machina

- On considère deux loteries $R = (r_1, r_2, r_3), Q = (q_1, q_2, q_3)$ représentées par leur coordonnées (r_1, r_3) et (q_1, q_3) dans le triangle de Machina
  - *Représenter graphiquement dans le triangle de Machina l'ensemble des loteries $\{\alpha R + (1-\alpha)Q, \alpha \in [0,1]\}$*

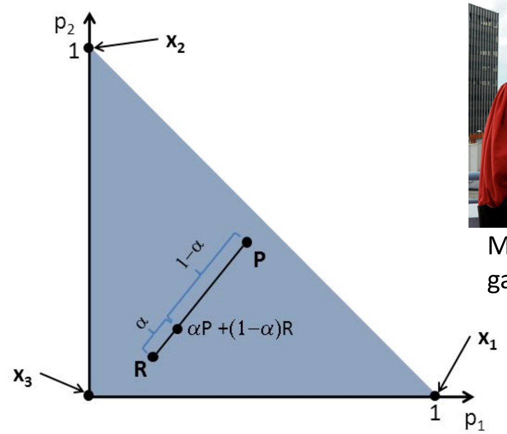


Exercice : combinaison de loteries dans le triangle de Machina

- $R = (r_1, r_2, r_3), Q = (q_1, q_2, q_3)$ représentées dans le triangle de Machina par les points de coordonnées $(r_1, r_3), (q_1, q_3)$
- Pour $\alpha \in [0,1]$ $\alpha R + (1-\alpha)Q = (\alpha r_1 + (1-\alpha)q_1, \alpha r_2 + (1-\alpha)q_2, \alpha r_3 + (1-\alpha)q_3)$, cad points de coordonnées $\alpha(r_1, r_3) + (1-\alpha)(q_1, q_3)$ dans le triangle de Machina, cad le segment RQ



Triangle de Machina et représentation de loteries composées



Mark Machina, deuxième sur la gauche sur la terrasse de la MSE

Si R et P sont deux loteries, les loteries composées $\alpha P + (1-\alpha)R$ forment le segment RP dans le triangle de Machina

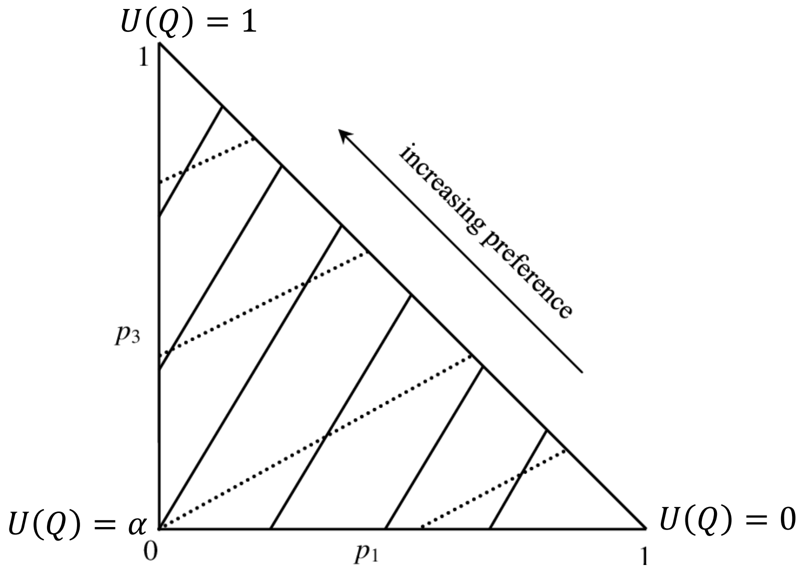
Triangle de Machina et courbes d'iso-utilité

- $p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3 = U(Q)$
- $p_2 = 1 - p_1 - p_3$
- $p_1(u_1 - u_2) + p_3(u_3 - u_2) = U(Q) - u_2$
- $p_3 = \left(\frac{u_2-u_1}{u_3-u_2}\right)p_1 + \frac{U(Q)-u_2}{u_3-u_2}$
- Les courbes d'iso-utilité sont des segments de droites de pente $\frac{u_2-u_1}{u_3-u_2}$ dans le plan (p_3, p_1)
- Ces segments sont parallèles dans le triangle de Machina
- L'axiome d'indépendance implique que les courbes d'indifférence sont ces segments de droites

Triangle de Machina et courbes d'iso-utilité

- $p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3 = U(Q)$
- Supposons $u_1 = 0, u_2 = \alpha, u_3 = 1$ avec $0 < \alpha < 1$
- D'où : $u_1 = 0 \leq U(Q) \leq u_3 = 1$
- Courbes d'iso-utilité dans le triangle de Machina
  - $p_3 = \left(\frac{u_2-u_1}{u_3-u_2}\right)p_1 + \frac{U(Q)-u_2}{u_3-u_2}$
- Devient : $p_3 = \frac{\alpha}{1-\alpha}p_1 + \frac{U(Q)-\alpha}{1-\alpha}$
- Les courbes d'iso-utilité sont des (segments de) droites de pente $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ dans le plan (p_3, p_1)
- Si $\alpha > 0{,}5$, $\frac{\alpha}{1-\alpha} > 1$
- Si $U(Q) = \alpha$, le segment de droite passe par l'origine

Triangle de Machina et courbes d'iso-utilité selon que $\alpha > 0{,}5$ ou $\alpha < 0{,}5$



Exercice : loteries et probabilités

- On reprend le tableau de Kahneman et Tversky (1979)

p_1 :	2 400 avec prob 1	p_2 :	2 400 avec prob 0,34 0 avec prob 0,66
q_1 :	2 500 avec prob 0,33 2 400 avec prob 0,66 0 avec prob 0,01	q_2 :	2 500 avec prob 0,33 0 avec prob 0,67

  - *Décrire l'ensemble des gains pour les quatre loteries*
  - *On reprend les notations précédentes :* $p_1 = g$, $q_1 = f$, $p_2 = g'$, $q_2 = f'$ *. Donner les triplets de probabilité associés aux quatre loteries.*

Exercice : loteries et probabilités

- On reprend le tableau de Kahneman et Tversky (1979)

p_1 :	2 400 avec prob 1	p_2 :	2 400 avec prob 0,34 0 avec prob 0,66
q_1 :	2 500 avec prob 0,33 2 400 avec prob 0,66 0 avec prob 0,01	q_2 :	2 500 avec prob 0,33 0 avec prob 0,67

  - *Décrire l'ensemble des gains pour les quatre loteries*
  - $w_1 = 0$, $w_2 = 2400$, $w_3 = 2500$
  - *On reprend les notations précédentes :* $p_1 = g$, $q_1 = f$, $p_2 = g'$, $q_2 = f'$ *. Donner les triplets de probabilité associés aux quatre loteries.*
  - *Pour g:* $(0,1,0)$, *pour f :* $\left(\frac{1}{100}, \frac{66}{100}, \frac{33}{100}\right)$, *pour* g' *:* $\left(\frac{66}{100}, \frac{34}{100}, 0\right)$, *pour* f' *:* $\left(\frac{67}{100}, 0, \frac{33}{100}\right)$

Exercice : loteries et probabilités

- On reprend la présentation des loteries sous la forme du tableau suivant. Identifier l'ensemble des événements

	1	2 – 34	35 – 100
f	0	2500	**2400**
g	2400	2400	**2400**
f'	0	2500	**0**
g'	2400	2400	**0**

Exercice : loteries et probabilités

- On reprend la présentation des loteries sous la forme du tableau suivant. Identifier l'ensemble des événements

	1	2 – 34	35 – 100
f	0	2500	**2400**
g	2400	2400	**2400**
f'	0	2500	**0**
g'	2400	2400	**0**

- Les événements correspondent aux ensembles d'états élémentaires dont on peut calculer les probabilités de gain.
- Les événements $\{1\}, \{2, \dots, 34\}, \{35, \dots, 100\}$ forment une partition de $\Omega = \{1, \dots, 100\}$
- L'ensemble des événements est : $\{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2, \dots, 34\}, \{35, \dots, 100\}, \{1, \dots, 34\}, \{2, \dots, 100\}, \{1, 35, \dots, 100\}\}$

Exercice : loteries et probabilités

- On suppose qu'il existe un marché des paris, qui opère sur les combinaisons linéaires des paris f, g, f', g'
  - *Il existe des brokers de paris et on peut parier pour (dans ce cas, on verse une prime) ou contre (on reçoit la prime)*
- Comment créer un pari contingent à l'événement $\{35, \dots, 100\}$?
- Comment créer un pari contingent à l'événement $\{2, \dots, 34\}$?
- Comment créer un pari contingent à l'événement $\{1\}$?

Exercice : loteries et probabilités

	1	2 – 34	35 – 100
f	0	2500	**2400**
g	2400	2400	**2400**
f'	0	2500	**0**
g'	2400	2400	**0**

- Comment créer un pari contingent à l'événement $\{35, \ldots, 100\}$?
  - *Être long dans g et court dans le pari g' (soit $g - g'$) rapporte 2400 si $\{35, \ldots, 100\}$ se réalise et 0 sinon*
- Comment créer un pari contingent à l'événement $\{2, \ldots, 34\}$?
  - *f' ou $f - g + g'$ rapportent 2500 si $\{2, \ldots, 34\}$ se réalise et 0 sinon*
- Comment créer un pari contingent à l'événement $\{1\}$?
  - *$g' - \frac{24}{25} f'$ rapporte 2400 dans l'état $\{1\}$ et zéro sinon*

Exercice : loteries et probabilités

- On note π la fonction qui à un pari associe son prix (la mise).
  - *π est supposé linéaire : Pas de frictions dans le marché des brokers de pari : Marché concurrentiel*
  - *$\pi(g), \pi(f), \pi(f'), \pi(g')$ sont donnés*
- Pourquoi les primes des paris sur les événements $\{1\}$, $\{2, \ldots, 34\}$,$\{35, \ldots, 100\}$ doivent-elles être positives ?
- Ecrire les conditions pour que les primes des paris sur les événements $\{1\}$, $\{2, \ldots, 34\}$,$\{35, \ldots, 100\}$ soit positives
- Montrer que les payoffs f, g, f', g' sont linéairement dépendants. En déduire une condition sur π pour qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage.

Exercice : loteries et probabilités

- Pourquoi les primes des paris sur les événements $\{1\}$, $\{2, \ldots, 34\}$,$\{35, \ldots, 100\}$ doivent-elles être positives ?
  - *Parier sur les événements précédents est associé à un gain strictement positif avec une probabilité strictement positif et une probabilité nulle de perte*
  - *Si la prime était nulle, il s'agirait d'un repas gratuit, si la prime était négative, on aurait une opportunité d'arbitrage*
- Ecrire les conditions pour que le prix des paris sur les événements $\{1\}$, $\{2, \ldots, 34\}$,$\{35, \ldots, 100\}$ soit positifs
  - $\pi(g - g') > 0$, $\pi(f') > 0$, $\pi(f - g + g') > 0$, $\pi\left(g' - \frac{24}{25} f'\right) > 0$

Exercice : loteries et probabilités

- Montrer que les payoffs f, g, f', g' sont linéairement dépendants. En déduire une condition sur π pour qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage.
  - *Nous avons vu que $f' = f - g + g'$ ou $f' - f + g - g' = 0$*
  - *D'où $\pi(f' - f + g - g') = 0$*
  - *En effet si $\pi(f' - f + g - g') < 0$, acheter le pari $f' - f + g - g'$ est une opportunité d'arbitrage*
  - *Si $\pi(f' - f + g - g') > 0$, vendre le pari $f' - f + g - g'$ est une opportunité d'arbitrage*
  - *Dans les deux cas, payoff $= 0$ et on touche une prime positive.*
- On supposera par la suite que $\pi(f' - f + g - g') = 0$
- Montrer que les conditions précédentes assurent l'AOA (absence d'opportunités d'arbitrage)

Exercice : loteries et probabilités

- Montrer que les conditions précédentes assurent l'AOA (absence d'opportunités d'arbitrage)
  - $\pi(f' - f + g - g') = 0$
  - $\pi(g - g') > 0$, $\pi(f') > 0$, $\pi\left(g' - \frac{24}{25}f'\right) > 0$
  - *Si on considère f, g, f', g' à travers les trois valeurs prises par chaque pari, on remarque que f, g, f', g' sont des vecteurs dans un espace similaire à $\mathbb{R}^3$*
  - *Comme il y a quatre paris, l'un d'entre eux est redondant*
  - *L'ensemble des payoffs associés à des prime positives est un cône convexe épointé (auquel on a enlevé l'origine).*
  - *Tout payoff positif est une combinaison linéaire à coefficients positifs des payoffs associés aux événements élémentaires* $\{1\}$, $\{2, \ldots, 34\}$, $\{35, \ldots, 100\}$

Exercice : loteries et probabilités

- Montrer que les conditions précédentes assurent l'AOA (absence d'opportunités d'arbitrage)
  - $\pi(f' - f + g - g') = 0$
  - $\pi(g - g') > 0$, $\pi(f') > 0$, $\pi\left(g' - \frac{24}{25}f'\right) > 0$
  - *Si on considère f, g, f', g' à travers les trois valeurs prises par chaque pari, on remarque que f, g, f', g' sont des vecteurs dans un espace similaire à $\mathbb{R}^3$*
  - *Comme il y a quatre paris, l'un d'entre eux est redondant*
  - *L'ensemble des payoffs associés à des prime positives est un cône convexe épointé (auquel on a enlevé l'origine).*
  - *Tout payoff positif est une combinaison linéaire à coefficients positifs des payoffs associés aux événements élémentaires* $\{1\}$, $\{2, \ldots, 34\}$, $\{35, \ldots, 100\}$

Exercice : loteries et probabilités - suite

- Montrer que les conditions précédentes assurent l'AOA (absence d'opportunités d'arbitrage)
  - $\pi(g - g') > 0$, $\pi(f') > 0$, $\pi\left(g' - \frac{24}{25}f'\right) > 0$
  - *Tout payoff positif est une combinaison linéaire à coefficients positifs des payoffs associés aux événements élémentaires* $\{1\}$, $\{2, \ldots, 34\}$, $\{35, \ldots, 100\}$ *(raisonner par l'absurde)*
  - *Si les inégalités précédentes sont vérifiées, la positivité d'un payoff implique que la prime payée doit être positive, cad qu'il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage.*
  - *Remarque : du fait du nombre limité de paris traités dans le marché (quatre, trois indépendants), on ne peut dupliquer chaque état élémentaire.*
  - *Le marché des paris est incomplet.*

Exercice : loteries et probabilités

- On veut montrer que $g \succ f$ et $f' \succ g'$(violation du STP) implique des opportunités d'arbitrage (Ramsey, de Finetti, Savage)
- Montrer que comment un broker de paris peut tirer avantage de $g \succ f$ pour un client et de $f' \succ g'$ pour un autre client en constituant un « Dutch book »
  - *On rappelle qu'un Dutch book est lié à un portefeuille (ou book) parfaitement couvert statiquement (aucun risque à terme) et de valeur actuelle positive, cad une opportunité d'arbitrage.*
  - *On reste dans le contexte d'un marché de paris*
  - *Mais maintenant, on considère un marché de gré à gré*

Exercice : loteries et probabilités - corrigé

- Remarque : on peut aborder la question sous deux angles différents et complémentaires
  - *Un manque de cohérence individuelle : pour un même individu $g \succ f$ et $f' \succ g'$*
  - *Un manque de cohérence interpersonnel : pour un individu $g \succ f$ (et $g' \succ f'$) et pour un autre individu $f \succ g$ (et $f' \succ g'$)*
  - *C'est plutôt le second cas qui a une importance pratique pour le financier.*

Exercice : loteries et probabilités - corrigé

- Supposons $g \succ f$ pour le premier client. On lui propose $g - f$ et on encaisse une prime $p > 0$
  - *Comme $g \succ f$, le client 1 est prêt à payer pour $g - f$*
- Supposons $f' \succ g'$ pour le second client. On lui propose $f' \succ g'$ et on encaisse une prime $p' > 0$
  - *Comme $f' \succ g'$, le client 1 est prêt à payer pour $f' - g'$*
- Au total, le broker doit payer $f' - f + g - g' = 0$ et il reçoit $p + p' > 0$.
- S'il n'y a qu'un seul client, $g \succ f$ et $f' \succ g'$ (violation du STP) peuvent amener à ce que le client transfère de l'argent au broker sans aucune contrepartie, ce qui n'est pas compatible avec la rationalité économique

Théorème de Von Neumann et Morgenstern : espérance de l'utilité de la richesse aléatoire (nombre fini d'états)

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Théorème de monotonicité

- Théorème de monotonicité : soit P, Q deux loteries telles que $P \succcurlyeq Q$. Si l'axiome d'indépendance est vérifié et $\alpha, \beta \in [0,1]$ alors $\alpha P + (1-\alpha)Q \succcurlyeq \beta P + (1-\beta)Q \Leftrightarrow \alpha \geq \beta$
  - *Supposons* $\alpha \geq \beta$, *alors*, $\gamma = \frac{\alpha-\beta}{1-\beta} \in [0,1]$ *et* $1-\gamma = \frac{1-\alpha}{1-\beta}$

0 β α 1

  - $\gamma P + (1-\gamma)(\beta P + (1-\beta)Q) = \frac{\alpha-\beta}{1-\beta} P + \frac{1-\alpha}{1-\beta}(\beta P + (1-\beta)Q)$
  - $\gamma P + (1-\gamma)(\beta P + (1-\beta)Q) = \frac{\alpha-\beta+\beta-\alpha\beta}{1-\beta} P + \frac{1-\alpha}{1-\beta}(1-\beta)Q$
  - *Donc* $\alpha P + (1-\alpha)Q = \gamma P + (1-\gamma)(\beta P + (1-\beta)Q)$
  - *Axiome d'indépendance : (1)* $P = \alpha P + (1-\alpha)P \succcurlyeq \alpha P + (1-\alpha)Q$
  - $(1) +$ *axiome d'indépendance à nouveau* $\Rightarrow$
  - $\gamma P + (1-\gamma)(\beta P + (1-\beta)Q) \succcurlyeq \gamma(\beta P + (1-\beta)Q) + (1-\gamma)(\beta P + (1-\beta)Q)$

Théorème de monotonicité

- Suite de la preuve (adaptée de Gollier, page 7) :
  - *Terme de droite dans la relation précédente*
  - $\gamma(\beta P + (1-\beta)Q) + (1-\gamma)(\beta P + (1-\beta)Q)$ *est égal à :*
  - $(\gamma\beta + (1-\gamma)\beta)P + \big(\gamma(1-\beta) + (1-\gamma)(1-\beta)\big)Q$
  - $\beta P + (1-\beta)Q$
  - *Comme le terme de gauche était égal à* $\alpha P + (1-\alpha)$, *on obtient la relation désirée* $\alpha P + (1-\alpha)Q \succcurlyeq \beta P + (1-\beta)Q$
- Autre démonstration
  - *On considère* $R = \frac{\beta}{1-(\alpha-\beta)} P + \frac{1-\alpha}{1-(\alpha-\beta)} Q$
  - $\alpha P + (1-\alpha)Q = (\alpha-\beta)P + \big(1-(\alpha-\beta)\big)R$
  - $\beta\, P + (1-\beta)Q = (\alpha-\beta)Q + \big(1-(\alpha-\beta)\big)R$
  - *Et on utilise l'axiome d'indépendance* $(\alpha-\beta)P + \big(1-(\alpha-\beta)\big)R \succcurlyeq (\alpha-\beta)Q + \big(1-(\alpha-\beta)\big)R$

Théorème de monotonicité

- Réciproque du théorème

Similarly, if $a \succ b$ and $\lambda a + (1-\lambda)b \succ \mu a + (1-\mu)b$, then $\lambda > \mu$. Suppose namely on the contrary that $\mu \geqslant \lambda$. $\mu = \lambda$ implies that $\lambda a + (1-\lambda)b = \mu a + (1-\mu)b$, a contradiction of the assumption. Therefore $(\mu-\lambda) \in)0, 1)$. Consider $\lambda a + (1-\lambda)b = (\mu-\lambda)b + (1-(\mu-\lambda))d$ and $\mu a + (1-\mu)b = (\mu-\lambda)a + (1-(\mu-\lambda))d$, where $d = \left(\frac{\lambda}{1-(\mu-\lambda)}a + \frac{1-\mu}{1-(\mu-\lambda)}b\right) \in S$. Then $\mu a + (1-\mu)b \succ \lambda a + (1-\lambda)b$ by axiom 3, which contradicts the assumption. Hence $\lambda > \mu$.

Théorème de monotonicité et Sure Thing Principle

- STP comme corollaire du théorème de monotonicité
  - *Voir infra : démonstration du théorème de VNM (cas général)*

Théorème de Von Neumann et Morgenstern (fin de la démonstration d'après Gollier)

- Propriété : Il existe des loteries L_m (meilleure) et L_p (pire) : $\forall P \in S_U, L_m \succcurlyeq P \succcurlyeq L_p$
  - *L_m : celle qui donne la richesse la plus élevée avec certitude*
  - *L_p : celle qui donne la richesse la plus faible avec certitude*
  - *On supposera par la suite que $L_m \succ L_p$ (sinon toutes les loteries sont équivalentes)*
- Propriété : : $\forall P \in S_U, \exists!\, \alpha \in [0,1], P \sim \alpha L_p + (1-\alpha)L_m$.
  - *L'axiome de continuité implique l'existence de $\alpha \in [0,1]$ vérifiant la propriété.*
  - *S'il existe β tel que $P \sim \beta L_p + (1-\beta)L_m$, alors $\alpha L_p + (1-\alpha)L_m \succcurlyeq \beta L_p + (1-\beta)L_m$ donc $\alpha \geq \beta$*
  - *Et $\beta L_p + (1-\beta)L_m \succcurlyeq \alpha L_p + (1-\alpha)L_m$ donc $\beta \geq \alpha$*
  - *Ce qui implique l'unicité de α*

Théorème de Von Neumann et Morgenstern (fin de la démonstration d'après Gollier)

- Soit $P \in S_U$. On définit U, par $U(P) = \alpha$
  - *Remarque : $U(L_m) = 1$, $U(L_p) = 0$*
- Propriété : $\forall P, Q \in S_U, U(\beta P + (1-\beta)Q) = \beta U(P) + (1-\beta)U(Q)$ pour $\beta \in [0,1]$

- Fishburn (1970). *Utility theory for decision making*.
- Gollier (2001). *The economics of risk and time.*

Linéarité par rapport aux probabilités

- Linéarité par rapport aux probabilités
- Si $U(P) = E^P[\tilde{u}]$, alors $U(\alpha P + (1-\alpha)Q) = \alpha U(P) + (1-\alpha)U(Q)$ pour $\alpha \in [0,1]$
- Preuve :
- $U(\alpha P + (1-\alpha)Q) = \sum_{s=1}^{S}(\alpha p_s + (1-\alpha)q_s)u_s$
- $\sum_{s=1}^{S}(\alpha p_s + (1-\alpha)q_s)u_s = \alpha\left(\sum_{s=1}^{S} p_s u_s\right) + (1-\alpha)\left(\sum_{s=1}^{S} q_s u_s\right)$
- $= \alpha U(P) + (1-\alpha)U(Q)$

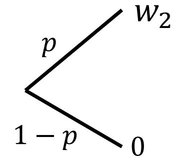
Espérance d'utilité et théorème de Von Neumann et Morgenstern

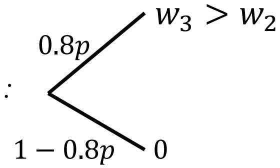
- Critère de choix en présence de risque
- On considère un ensemble d'états de la nature $s \in \{1, \ldots, S\}$ avec des probabilités $p_1, \ldots, p_S$
- Dans l'état de la nature s, on reçoit w_s
- Définit une variable aléatoire $\widetilde{w}$: $P(\widetilde{w} = w_s) = p_s$
- On considère une fonction réelle croissante et concave u
- Espérance d'utilité : $\sum_{s=1}^{S} p_s \, u(w_s)$
- Critère de choix : $\sum_{s=1}^{S} p_s \, u(w_s) > \sum_{s=1}^{S} q_s \, u(w_s^*)$?
- $\sum_{s=1}^{S} p_s \, u(w_s) > \sum_{s=1}^{S} q_s \, u(w_s)$?
  - *On fait alors varier uniquement les probabilités $P = (p_1, \ldots, p_S)$ et $Q = (q_1, \ldots, q_S)$ et on note $u(w_s) = u_s$*
- $\sum_{s=1}^{S} p_s \, u(w_s) > \sum_{s=1}^{S} p_s \, u(w_s^*)$? Probabilités données

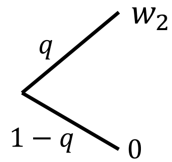
Choix de loteries, paradoxes d'Allais et finance comportementale

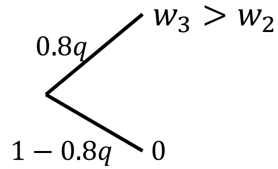
UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT
DE LA SORBONNE

Les deux paradoxes d'Allais : common ratio effect

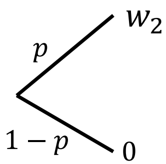
- « Common ratio effect » (on suppose $u(w_1) = 0$)
  - *Pari* $S(p)$ *:* 

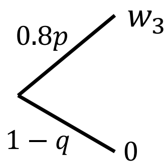
Pari $R(p)$ *:* 

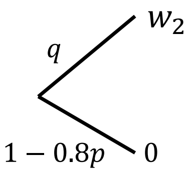
- $S(p) \succ R(p) \Leftrightarrow pu(w_2) > 0.8pu(w_3) \Leftrightarrow u(w_2) > 0.8u(w_3) \Leftrightarrow qu(w_2) > 0.8qu(w_3) \Leftrightarrow S(q) \succ R(q)$
  - *Pari* $S(q)$ *:* 

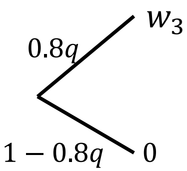
Pari $R(q)$ *:* 

Les deux paradoxes d'Allais : common ratio effect

- « Common ratio effect » : Ratio commun
  - *Pari* $S(p)$ *:* 

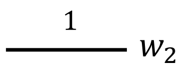
Pari $R(p)$ *:* 

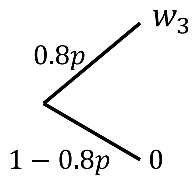
  - *Comparons* $R(p)$ *et* $S(p)$ *: **ratio des probabilités de gain*** 0.8
  - *Pari* $S(q)$ *:* 

Pari $R(q)$ *:* 

  - *Comparons* $R(q)$ *et* $S(q)$ *: **ratio des probabilités de gain*** 0.8, $\forall q$

Les deux paradoxes d'Allais : common ratio effect

- « Common ratio effect »
  - *Cas* $p = 1$ *: pari* $S(1)$ *rapporte* w_2 *avec certitude*
  - *Pari* $S(1)$ *:* 

Pari $R(1)$ *:* 

- On peut avoir $S(1) \succ R(1)$ (préférence pour la certitude) et $S(p) \prec R(p)$ pour $p < 1$ (en contradiction avec EU)
- $w_1 = 0, w_2 = 3000, w_3 = 4000$ Kahneman et Tversky (1979)
- $w_1 = 0, w_2 = 100, \ w_3 = 500$ Allais (1953)

Common ratio effect

- Terminologie due à MacCrimmon et Larsson (1979)

Expected Utility Theory (EUT) is one of the oldest and widely used criteria for decision making under risk. Bernoulli (1738) first proposed EUT to resolve the St. Petersburg Paradox. Von Neumann and Morgenstern (1947) provided a normatively appealing axiomatization of EUT. Yet, Allais (1953) challenged the descriptive accuracy of EUT with two examples. His first example (Allais 1953, p. 527) is known as the Allais Paradox or common-consequence effect. Following MacCrimmon and Larsson (1979), his second example (Allais 1953, p. 529) is known as the common-ratio effect. One illustration of this effect, due to Kahneman and Tversky (1979, p. 266), is that subjects choose $3,000 for sure over an 80% chance of winning $4,000 but choose a 20% chance of $4,000 over a 25% chance of $3,000 (when probabilities are scaled down by the same ratio, which gives the effect its name).

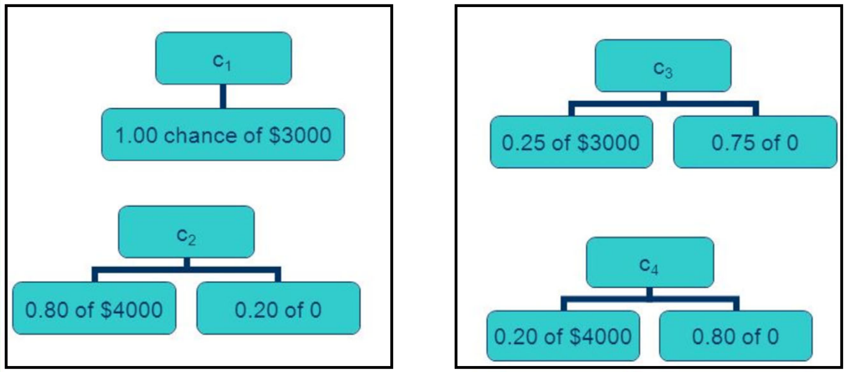
Common ratio effect

Although sometimes overshadowed by the fame of the paradox, Allais penned another brilliant counter-example in 1952-1953. The violation of the EU hypothesis in the first arises when one pair of choices results from the other by a homothetic reduction of the probability values of the best outcomes. MacCrimmon and Larsson (1979, p. 350) also gave this phenomenon algebraic form and studied it experimentally using differing numerical values for the parameters. They use the term *common ratio* to refer to either the parametric form or the associated effect. Today's decision theory – see again Machina (1983, 1987) – has taken up the expression, this time keeping the initial parametric form unchanged:

p_1 : x with prob p; 0 with prob 1-p	p_2 : x with prob αp, 0 with prob 1-αp
q_1 : y with prob q; 0 with prob 1-q	q_2 : y with prob αq, 0 with prob 1-αq

with $p > q$, $x < y$, and α (the homothetic factor) lying between 0 and 1. The subject makes the choices (p_1, q_2), which contravenes the EU hypothesis.[26] The many studies bearing on this effect, including MacCrimmon and Larsson's (1979, p. 359), show rates of violations clearly above those obtained for the common consequence effect.

Kahneman and Tverskey: Common Ratio Effect



Ratio des probabilités de gain = 0.8 que l'on compare c_2 à c_1 ou c_4 à c_3.
A gauche, Préférence pour la sécurité au voisinage de la certitude : $c_1 \succ c_2$
A droite, "pleasure of gambling" : $c_4 \succ c_3$

Common ratio effect : données de Kahneman et Tversky (1979, p. 266)

- 80% des sujets préfèrent B à A, 65% préfèrent C à D

PROBLEM 3:

A:	(4,000,.80),	or	B:	(3,000).
$N = 95$	[20]			[80]*

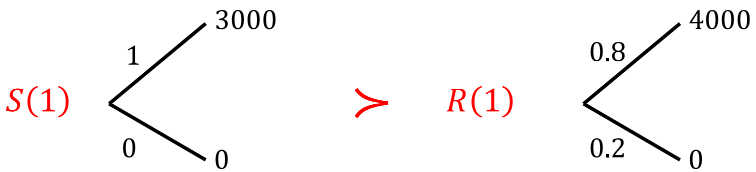
PROBLEM 4:

C:	(4,000,.20),	or	D:	(3,000,.25).
$N = 95$	[65]*			[35]

- Kahneman & Tversky (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica*, *47*(2), 263-292.
- MacCrimmon & Larsson (1979). Utility theory: Axioms versus 'paradoxes' : à l'origine du terme "Common ratio effect"
- Kuilen & Wakker (2006). Learning in the Allais paradox. *Journal of Risk and Uncertainty*.
- Allais(1953). Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica.*

Common ratio effect : données de Kahneman et Tversky (1979, p. 266)

- Gains $w_1 = 0 < w_2 = 3000 < w_3 = 4000$
  - $S(p) = (1-p; p; 0)$, $R(p) = (1-0.8p; 0; 0.8p)$
    - Ratio des probabilités de gain = 0.8
  - $S(1) = (0; 1; 0)$, $R(1) = (0.2; 0; 0.8)$



  - *Pour 80% des participants à l'expérience (préférence pour la sécurité au voisinage de la certitude)*

Common ratio effect : données de Kahneman et Tversky (1979, p. 266)

- $S(p) = (1-p; p; 0)$, $R(p) = (1-0.8p; 0; 0.8p)$
- $S(0.25) = (0.75; 0.25; 0)$, $R(0.25) = (0.8; 0; 0.2)$

- *Pour 65% des participants à l'expérience (« pleasure of gambling »)*
- *Ici, le ratio commun est* $\frac{0.2}{0.25} = 0.8$

Exercice : Common ratio effect (données de Kahneman et Tversky)

- Indiquer les coordonnées des loteries, $S(1), R(1)$, $S(0.25)$, $R(0.25)$, dans le triangle de Machina
- Représenter les 4 loteries dans le triangle de Machina

Exercice : Common ratio effect (données de Kahneman et Tversky)

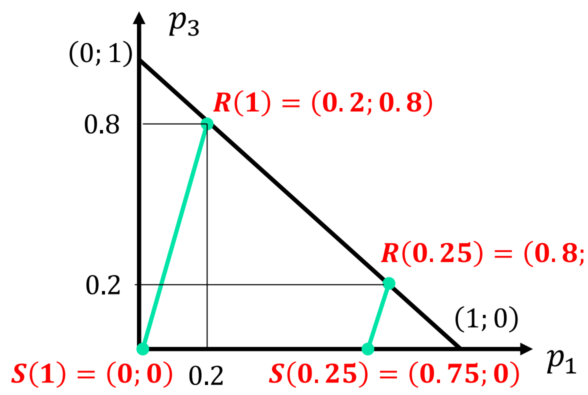
- Indiquer les coordonnées des loteries, $S(1), R(1)$, $S(0.25)$, $R(0.25)$, dans le triangle de Machina
  - *On rappelle que dans le triangle de Machina une probabilité* $P = (p_1; p_2; p_3)$ *est représentée dans le plan par le point* $(p_1; p_3)$
    - Cela suffit à caractériser P puisque $p_2 = 1 - p_1 - p_3$
  - $S(1) = (0; 1; 0)$ *correspondant au point de coordonnées* $(\mathbf{0}; \mathbf{0})$
  - $R(1) = (0.2; 0; 0.8)$ *correspondant au point de coordonnées* $(\mathbf{0.2}; \mathbf{0.8})$
  - $S(0.25) = (0.75; 0.25; 0)$, *correspondant au point de coordonnées* $(\mathbf{0.75}; \mathbf{0})$
  - $R(0.25) = (0.8; 0; 0.2)$ *correspondant au point de coordonnées* $(\mathbf{0.75}; \mathbf{0})$

Exercice : Common ratio effect (données de Kahneman et Tversky)

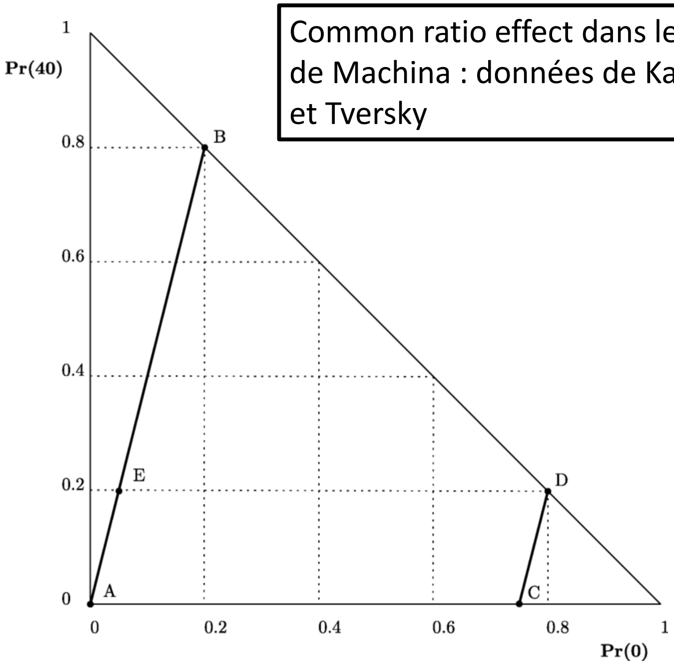
- Représenter les 4 loteries dans le triangle de Machina

Exercice : Common ratio effect (données de Kahneman et Tversky)

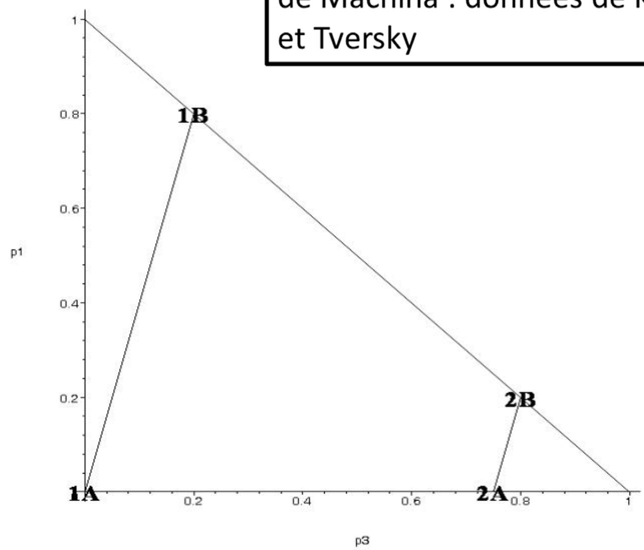
- Représenter les 4 loteries dans le triangle de Machina
  - $S(1) = (0; 0)$, $R(1) = (0.2; 0.8)$
  - $S(0.25) = (0.75; 0)$, $R(0.25) = (0.8; 0.2)$



Common ratio effect dans le triangle de Machina : données de Kahneman et Tversky

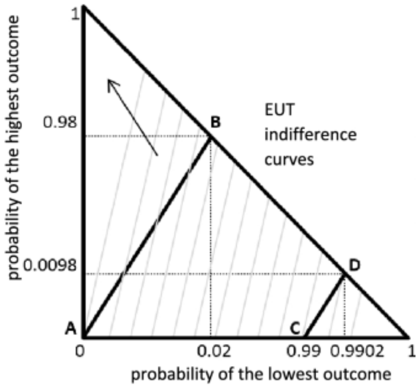


Common ratio effect dans le triangle de Machina : données de Kahneman et Tversky



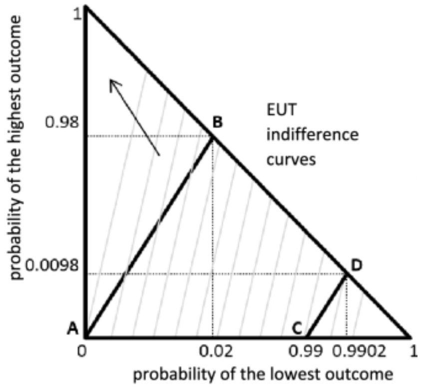
Common ratio effect et incompatibilité avec l'EUT (expected utility theory)

- Les lignes en gris clair représentent les courbes d'iso-utilité.
  - *Ici les pentes sont supérieures à celles des segments AB et CD.*
  - *Ce qui veut dire que C est préféré à D*
  - *Dans ce cas, A doit être préféré à B*



Common ratio effect et incompatibilité avec l'EUT (expected utility theory)

- *Si les pentes des courbes d'iso-utilité étaient inférieures à celles des segments AB et CD.*
- *D serait préféré à C, B serait préféré à A*
- *C'est cette cohérence des choix qui est remise en cause par l'économie expérimentale (encore faut-il préciser les conditions expérimentales)*



Common ratio effect : exercice – suite (données de Kahneman et Tversky)

- On suppose que $S(1) \succ R(1)$ et $S(0.25) \prec R(0.25)$
- Exprimer les loteries $S(1/4)$ et $R(1/4)$ comme des loteries mélanges impliquant $S(1)$ et $R(1)$ et le ratio commun 0.25
- Utiliser l'axiome d'indépendance pour montrer que $S(0.25) \succ R(0.25)$
  - *Ceci a été utilisé par Kahneman et Tversky (1979) pour mettre en évidence que l'axiome d'indépendance n'était pas forcément compatible avec les prises de décision individuelles.*
  - *Ce qu'on a vu précédemment, c'était l'incompatibilité des choix individuels avec l'approche par espérance d'utilité.*

Common ratio effect : exercice - suite

- Exprimer les loteries $S(1/4)$ et $R(1/4)$ comme des loteries mélanges impliquant $S(1)$ et $R(1)$ et le ratio commun 0.25

- $S(0.25) = (0.75; 0) = 0.75 \times (1; 0) + 0.25 \times (0; 0)$
- $(1; 0)$ est la loterie qui donne $w_1 = 0$ avec certitude
- $S(0.25) = (0.75; 0) = 0.75 \times (1; 0) + 0.25 \times S(1)$

- $R(0.25) = (0.8; 0.2) = 0.75 \times (1; 0) + 0.25 \times (0.2; 0.8)$
- $R(0.25) = (0.8; 0.2) = 0.75 \times (1; 0) + 0.25 \times R(1)$

Common ratio effect : exercice - suite

- Exprimer les loteries $S(1/4)$ et $R(1/4)$ comme des loteries mélanges impliquant $S(1)$ et $R(1)$
- Puis utiliser l'axiome d'indépendance pour montrer que $S(0.25) \succ R(0.25)$

- Par l'axiome d'indépendance
  - $S(1) \succ R(1) \Rightarrow 0.75 \times (1;0) + 0.25 \times S(1) \succ 0.75 \times (1;0) + 0.25 \times R(1) \Leftrightarrow S(1/4) \succ R(1/4)$
  - *On ne peut donc pas avoir $S(1) \succ R(1)$ et $R(1/4) \succ S(1/4)$*

Common ratio effect : données d'Allais

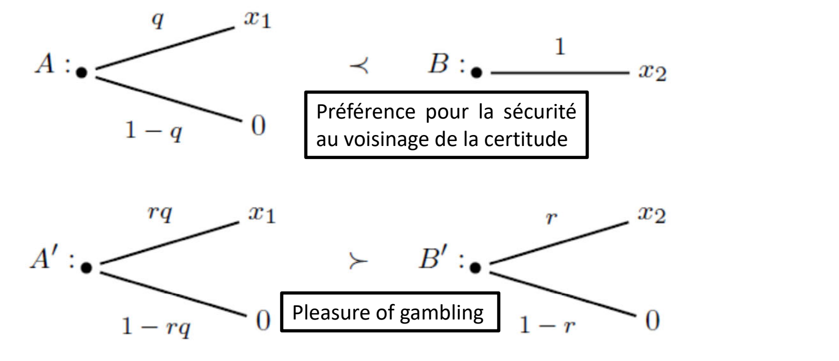


Fig. 1: Common Ratio Effect pattern of choices (Allais 1953)

Ici, $w_1 = 0 < w_2 = x_2 = 100 < w_3 = x_1$=500. Les notations pour les probabilités diffèrent et le ratio commun est q (antérieurement 0.8)

Common ratio effect : exercice (Allais, 1953, p. 529)

- $w_1 = 0, w_2 = 100, w_2 = 500$

$$(P_1)\begin{cases} \frac{98}{100} & 500 \text{ millions} \\ \frac{2}{100} & 0 \end{cases}, \quad (P_2)\begin{cases} \text{Certitude} \\ \text{de } 100 \\ \text{millions} \end{cases},$$

  - Graphique extrait de l'article d'Allais
  - Blavatskyy, Ortmann & Panchenko (2020). How Common Is the Common-Ratio Effect?

The original Allais (1953, p. 529) example of the common-ratio effect is the following: A decision maker can prefer ₣100 million for certain over 98% chance of ₣500 million (and a 2% chance of nothing) and, at the same time, she can prefer 0.98% chance of ₣500 million (and a 99.02% chance of nothing) over a 1% chance of ₣100 million (and 99% chance of nothing). In the second binary choice problem, the chances of positive gains are scaled down from the corresponding chances in the first binary choice problem by a *common ratio* of 1/100. This gives the effect its name.

Common ratio effect : exercice (Allais, 1953, p. 529)

- $w_1 = 0, w_2 = 100, w_2 = 500$

$$(P_1)\begin{cases} \frac{98}{100} & 500 \text{ millions} \\ \frac{2}{100} & 0 \end{cases}, \quad (P_2)\begin{cases} \text{Certitude} \\ \text{de } 100 \\ \text{millions} \end{cases},$$

  - Graphique extrait de l'article d'Allais (1953)
- *P_1, P_2 sont au voisinage de la certitude. Selon Allais $P_1 \prec P_2$*

L'expérience montre que des gens jugés comme parfaitement rationnels, mais prudents, préfèreront la *certitude* de 100 millions à 98 chances sur 100 de gagner 500 millions, accompagnées de 2 chances sur 100 de ne rien gagner du tout. Pour eux on aura donc

$$(P_1) < (P_2). \tag{20}$$

Common ratio effect : exercice (Allais, 1953, p. 529)

$$(P_1)\begin{cases}\frac{98}{100} & 500 \text{ millions} \\ \frac{2}{100} & 0\end{cases}, \qquad (P_2)\begin{cases}\text{Certitude} \\ \text{de } 100 \\ \text{millions}\end{cases},$$

- *Allais considère ensuite la situation où l'on divise les probabilités de gain par* 100.
- *On se rapproche beaucoup d'un jeu de loto*

Mais l'expérience montre *en même temps* qu'ils peuvent préférer 0,98 chances sur 100 de gagner 500 millions (d'espérance mathématique égale à 4,9 millions) à une chance sur 100 de gagner 100 millions (d'espérance mathématique égale à 1 million), parce que loin de la certitude ils pondèrent les valeurs psychologiques suivant les probabilités, c'est-à-

Common ratio effect : exercice (Allais, 1953, p. 529)

- Représenter les probabilités associées aux loteries P_1, P_2
- Indiquer leurs coordonnées dans le triangle de Machina

- On considère maintenant les loteries P_1', P_2' où les probabilités de gains sont divisées par 100
- Représenter les probabilités associées aux loteries P_1', P_2'
- Indiquer leurs coordonnées dans le triangle de Machina

- Calculer les pentes des segments de droite P_2P_1 et $P_1'P_2'$
- Montrer que les préférences $P_1 \prec P_2$ et $P_1' \succ P_2'$ sont incompatibles avec l'axiome d'indifférence

Common ratio effect : exercice (Allais, 1953, p. 529)

- Représenter les probabilités associées aux loteries P_1, P_2
- $P_1 = (2\%; 0\%; 98\%), P_2 = (0\%; 100\%; 0\%)$
- Indiquer leurs coordonnées dans le triangle de Machina
- Dans le triangle de Machina les coordonnées de P_1 sont $(2\%; 98\%)$, celles de $P_2, (0\%; 0\%)$

- Représenter les probabilités associées aux loteries P_1', P_2'
- $P_1' = (99.02\%, 0\%, 0.98\%)$, $P_2' = (99\%, 1\%, 0\%)$
- Indiquer leurs coordonnées dans le triangle de Machina
- Dans le triangle de Machina les coordonnées de P_1' sont $(99.02\%; 0.98\%)$ et celles de $P_2' = (99\%; 0\%)$

Common ratio effect : exercice (Allais, 1953, p. 529)

- Calculer les pentes des segments de droite P_2P_1 et $P_2'P_1'$
  - $P_2 = (0\%; 0\%)$ $P_1 = (2\%; 98\%)$
  - *Pente de* $P_2P_1 = \frac{0.98}{0.02} = 49$
  - $P_2' = (99\%; 0\%), P_1' = (99.02\%; 0.98\%)$
  - *Pente de* $P_2'P_1' = \frac{0.98\%}{0.02\%} = 49$
  - *Comme avec les données de Kahneman et Tversky, les segments de droite* P_2P_1 *et* $P_2'P_1'$ *sont parallèles*
  - *Leurs origines sont sur l'axe des abscisses. L'autre extrémité est située sur le côté opposé à l'origine.*

Common ratio effect : exercice (Allais, 1953, p. 529)

- Montrer que les préférences $P_1 \prec P_2$ et $P_1' \succ P_2'$ sont incompatibles avec l'axiome d'indifférence.
    - Même raisonnement qu'avec les données de Kahneman et Tversky
  - *On considère la loterie qui rapporte* 0 *de manière certaine située sur le sommet droit du triangle de Machina de coordonnées* $(1;0)$
  - *Comme les segments P_2P_1 et $P_2'P_1'$ sont parallèles, il résulte du théorème de Thalès que*
    - $P_1' = \alpha P_1 + (1-\alpha) \times (1;0)$
    - $P_2' = \alpha P_2 + (1-\alpha) \times (1;0)$
    - la seconde équation donne $P_2' = (99\%; 0\%) = (1-\alpha) \times (1;0)$
    - Soit $\alpha = 1\%$ qui est le ratio commun
  - *D'après l'axiome d'indépendance* $P_1 \prec P_2 \Rightarrow P_1' = \alpha P_1 + (1-\alpha) \times (1;0) \prec \alpha P_2 + (1-\alpha) \times (1;0) = P_2'$
  - *D'où la contradiction*

Common ratio effect : exercice (Allais, 1953, p. 529)

- Remarque : Allais utilise une loterie $(P_3) \begin{cases} \text{Certitude} \\ \text{de 1 franc} \end{cases}$ et non pas certitude de 0 franc

$$(P_1') \equiv \frac{1}{100}(P_1) + \frac{99}{100}(P_3) > (P_2') \equiv \frac{1}{100}(P_2) + \frac{99}{100}(P_3).$$

On a en effet

$$(P_1') = \frac{1}{100}(P_1) + \frac{99}{100}(P_3) \equiv \begin{cases} \frac{0,98}{100} & \text{500 millions} \\ \frac{99}{100} & \text{1 franc} \\ \frac{0,02}{100} & 0 \end{cases}$$

On a alors un résultat approché

soit pratiquement $\begin{cases} \frac{0,98}{100} & \text{500 millions} \\ \frac{99,02}{100} & 0 \end{cases}$

Common consequence effect : exercice (Allais, 1953)

Les figures 9 et 10 donnent la représentation géométrique des deux questions suivantes:

(1) *Préférez-vous la situation A à la situation B?*

SITUATION A : *Certitude* de recevoir 100 millions.

SITUATION B
- *10 chances sur 100* de gagner 500 millions.
- *89 chances sur 100* de gagner 100 millions.
- *1 chance sur 100* de ne rien gagner.

(2) *Préférez-vous la situation C à la situation D?*

SITUATION C
- *11 chances sur 100* de gagner 100 millions.
- *89 chances sur 100* de ne rien gagner.

SITUATION D
- *10 chances sur 100* de gagner 500 millions.
- *90 chances sur 100* de ne rien gagner.

Common consequence effect : exercice (Allais, 1953)

- A et B peuvent prendre une valeur (conséquence) commune : 100 avec probabilités de 1 et 0.89
- On passe de A, B à C, D
  - *En retirant* 0.89 *des deux probabilités associées à la conséquence commune* 100 *: elles passent à* 0.11 *et* 0
  - *En ajoutant* 0.89 *aux probabilités à la conséquence* 0 *: elles deviennent* 0.89 *et* 0.90
  - *On remarque que* 0 *est une conséquence commune de C et D et que l'opération précédente est réversible*
  - *Dans l'effet de ratio commun, on diminue les probabilités de gain d'un même ratio*
  - *Dans l'effet de conséquence commune, on diminue les probabilités de gain d'une conséquence commune d'un même montant*

Common consequence effect : exercice (Allais, 1953)

- Exercice
  - *Représenter les loteries A, B, C, D sous forme de probabilités*
  - *Les représenter dans le triangle de Machina*

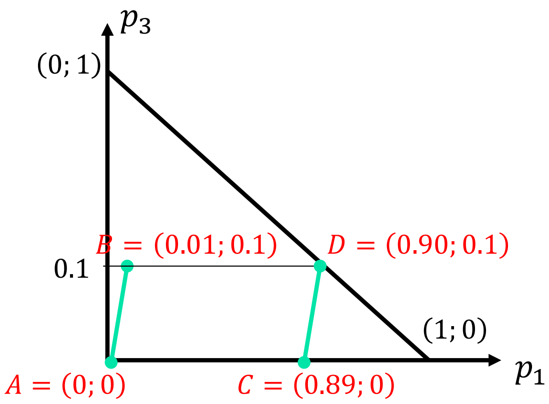
Common consequence effect : exercice (Allais, 1953)

- Représenter les loteries A, B, C, D sous forme de probabilités
- $w_1 = 0, w_2 = 100, w_3 = 500$
- $A = (0{,}1{,}0) \equiv (0; 0)$
- $B = \left(\frac{1}{100}, \frac{89}{100}, \frac{10}{100}\right) \equiv \left(\frac{1}{100}; \frac{10}{100}\right)$
- $C = \left(\frac{89}{100}, \frac{11}{100}, \frac{0}{100}\right) \equiv \left(\frac{89}{100}; 0\right)$
- $D = \left(\frac{90}{100}, \frac{0}{100}, \frac{10}{100}\right) \equiv \left(\frac{90}{100}; \frac{10}{100}\right)$

- Représenter A, B, C, D dans le triangle de Machina

Common consequence effect : exercice (Allais, 1953)

- Représenter A, B, C, D dans le triangle de Machina
  - *On remarque que $ACDB$ est un parallélogramme*



Common consequence effect : exercice (Allais, 1953)

- On va introduire la loterie auxiliaire E
  - *E rapporte 500 avec probabilité $\frac{10}{11}$ et 0 avec probabilité $\frac{1}{11}$*
- Montrer que $B = 0.11 \times E + 0.89 \times A$
- Montrer que $A = 0.11 \times A + 0.89 \times A$

Common consequence effect : exercice (Allais, 1953)

- On va introduire la loterie auxiliaire E
  - *E rapporte* 500 *avec probabilité* $\frac{10}{11}$ *et* 0 *avec probabilité* $\frac{1}{11}$
- Montrer que $B = 0.11 \times E + 0.89 \times A$
- Montrer que $A = 0.11 \times A + 0.89 \times A$
  - $0.11 \times E + 0.89 \times A$
  - *Rapporte* 0 *avec probabilité* $0.11 \times \frac{1}{11} = 0.01$
  - *Rapporte* 100 *avec probabilité* 0.89
  - *Rapporte* 500 *avec probabilité* $0.11 \times \frac{10}{11} = 0.1$
  - *Ce qui correspond à B*
  - *$A = 0.11 \times A + 0.89 \times A$ est une simple réécriture de A pour faire apparaître le parallélisme avec celle de B*

Common consequence effect : exercice (Allais, 1953)

- On va introduire la loterie auxiliaire E
  - *E rapporte* 500 *avec probabilité* $\frac{10}{11}$ *et* 0 *avec probabilité* $\frac{1}{11}$
- Montrer que $D = 0.11 \times E + 0.89 \times O$
  - *Où O est la loterie qui rapporte* 0 *de manière certaine*
  - $0.11 \times E + 0.89 \times O$
  - *Rapporte* 0 *avec probabilité* $0.11 \times \frac{1}{11} + 0.89 = 0.9$
  - *Rapporte* 500 *avec probabilité* $0.11 \times \frac{10}{11} = 0.1$
  - *Ce qui correspond à D*
- Montrer que $C = 0.11 \times E + 0.89 \times A$

A compléter …

l : 500 with prob 10/11,
0 with prob 1/11,

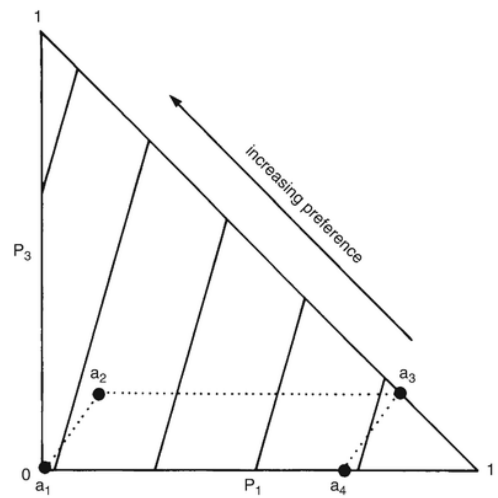
and then restate the original choice problem as follows:

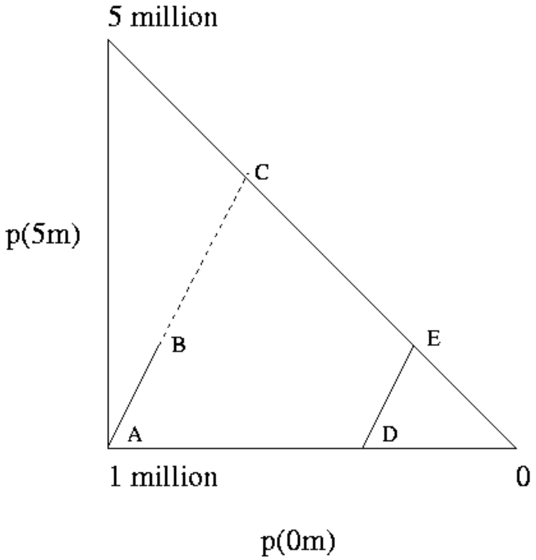
p'_1 : 100 with prob 0.11; 100 with prob 0.89	p_2 : 100 with prob 0.11; 0 with prob 0.89
q'_1 : l with prob 0.11; 100 with prob 0.89	q'_2 : l with prob 0.11; 0 with prob 0.89

With this restatement, the preference comparisons become $p'_1\ P\ q'_1$ and $q'_2\ P\ p_2$, and the violation now relates to (A3) specifically. Indeed, by (A3), it does not matter whether the common outcome is 100 or 0, so that $p'_1\ P\ q'_1$ is equivalent to 100 P l, and $q'_2\ P\ p_2$ to l P 100. Actually, (A1) is needed to make P asymmetric; ignoring this detail, one imputes blame to (A3).

Common consequence effect : exercice (Allais, 1953)

- Représentation des loteries dans le triangle de Machina





A compléter …

A famous violation of expected utility theory that seems intuitively appealing to many human decision makers, a typical example being as follows. An urn contains 100 chips numbered 1 to 100. First, you are given a choice between the following pair of options:Option *A*: A chip is drawn at random from the urn. If it is numbered 1–20, you receive nothing; if it is numbered 21–100, you receive £16.Option *B*: You receive £10 with certainty.Now you face a choice between a second pair of options:Option *C*: A chip is drawn at random from the urn. If it is numbered 1–80, you receive nothing; if it is numbered 81–100, you receive £16.Option *D*: A chip is drawn at random from the urn. If it is numbered 1–75, you receive nothing; if it is numbered 76–100, you receive £10.Many people prefer *B* to *A*, because it guarantees a substantial payoff without the risk associated with *A*, and many of the same people also prefer *C* to *D*, because it offers the prospect of a higher payoff than *D* with only slightly greater risk. But it is easy to show that this pattern of preferences violates expected utility theory. Writing $u(16)$ for the utility of £16 and $u(10)$ for the utility of £10, the preference of *B* over *A* implies that $.80\ u(16) < u(10)$, which means that $u(16) < 1.25\ u(10)$. But the preference of *C* over *D* implies that $.20 \times u(16) > .25 \times u(10)$, which simplifies to $u(16) > 1.25 \times u(10)$, a contradiction. In general, if $x > y > z$ are sums of money, and p and q are non-zero probabilities, then the common ratio effect occurs if a decision maker prefers the prospect $py + (1 - p)y$ to $px + (1 - p)z$, and also prefers $p(1 - q)x + (1 - p)(1 - q)z + qz$ to $p(1 - q)y + (1 - p)(1 - q)y + qz$. Compare Allais paradox, Ellsberg paradox, modified Ellsberg paradox, St Petersburg paradox. CRE abbrev.

Paradoxe d'Allais et critique de l'axiome d'indépendance

ECONOMETRICA

VOLUME 21 OCTOBER, 1953 NUMBER 4

LE COMPORTEMENT DE L'HOMME RATIONNEL DEVANT LE RISQUE: CRITIQUE DES POSTULATS ET AXIOMES DE L'ECOLE AMERICAINE[1]

PAR M. ALLAIS[2]

Critique de l'axiome d'indépendance par mélanges

on ne peut considérer en aucune façon qu'il puisse s'imposer d'un point de vue rationnel. Soient en effet (P_1) et (P_2) deux perspectives équivalentes, l'équivalence s'exprimant par la relation symbolique

$$(P_1) = (P_2).$$

L'axiome de substitution signifie que (P_3) étant une perspective aléatoire quelconque, on doit avoir, quel que soit α,

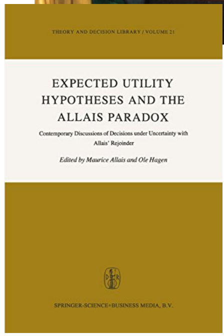
$$\alpha(P_1) + (1 - \alpha)(P_3) = \alpha(P_2) + (1 - \alpha)(P_3),$$

où le symbole $[\alpha(P_1) + (1 - \alpha)(P_3)]$ représente un billet de loterie donnant la probabilité α de gagner la perspective (P_1) et la probabilité $(1 - \alpha)$ de gagner la perspective (P_3). Cet axiome se justifie, dit-on, parce que, que l'évènement E_α de probabilité α se réalise ou non, l'individu considéré se trouvera finalement en possession de deux perspectives équivalentes. Ce point de vue est en réalité inacceptable, car il suppose le premier tirage correspondant aux probabilités $[\alpha, (1 - \alpha)]$ *comme neutre*, alors qu'il ne l'est pas, et il se place "ex post" alors qu'il faut se placer "ex ante".[24]

Paradoxe d'Allais

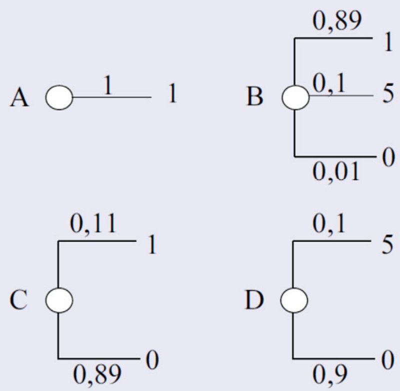
Maurice Allais

- Dans un célèbre sondage, Maurice Allais a proposé des choix parmi quatre loteries
  - Mongin (2019). The Allais paradox: what it became, what it really was, what it now suggests to us. *Economics & Philosophy*.
  - https://philarchive.org/archive/MONTAP-13v1
  - *Sondage administré en 1952 à une centaine de participants*
    - Quelques détails sur les résultats ont été donnés uniquement en 1979, dans le livre ci-contre (vendu au modeste prix de 458 euros sur Amazon ou 750 euros en occasion)
  - *Certain mystère autour de ce sondage et à propos d'échanges entre Allais et Savage*
    - Jallais & Pradier (2005). The Allais paradox and its immediate consequences for expected utility theory. *The Experiment in the history of economics*.



Paradoxe d'Allais (1952) : incompatibilité avec la théorie de l'utilité espérée

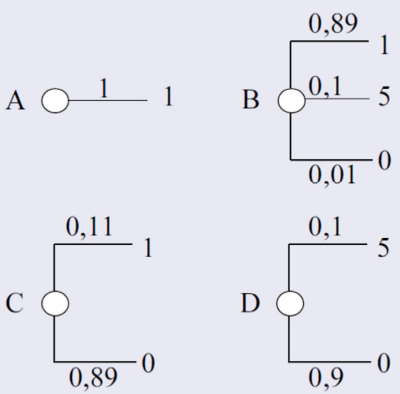
Expérience



- Comparons les loteries A et B
  - *A donne 1 avec certitude*
  - *B donne 1 avec probabilité 89%, 5 avec probabilité 10% et 0 avec probabilité 1%*
- Que préférez-vous ?
- Comparons les loteries C et D
  - *C donne 1 avec probabilité 11% et 0 avec probabilité 89%*
  - *D donne 5 avec probabilité 10% et 0 avec probabilité 90%*
- Que préférez-vous ?

Paradoxe d'Allais (1952) : incompatibilité avec la théorie de l'utilité espérée

Expérience

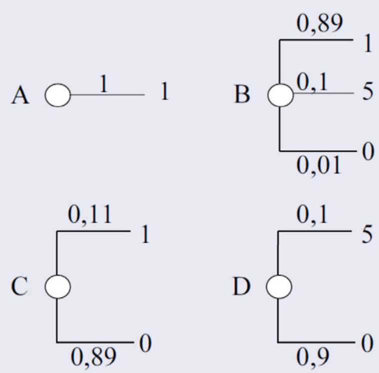


- Comparons les loteries A et B
  - *La loterie A est souvent préférée à B : préférence pour la sécurité au voisinage de la certitude (certainty effect) (Kahneman and Tversky (1979), Wakker (2010)) ou aversion au zéro (zero effect)*
- Comparons les loteries C et D
  - *La loterie D est souvent préférée à C car pour une petite réduction de la probabilité de gain, le gain est en contrepartie beaucoup plus important*
  - *Plaisir attaché au risque (« pleasure of gambling »)*

Paradoxe d'Allais : incompatibilité avec la théorie de l'utilité espérée

Pour Allais, un individu rationnel doit préférer A à B et D à C

Expérience



Résultats

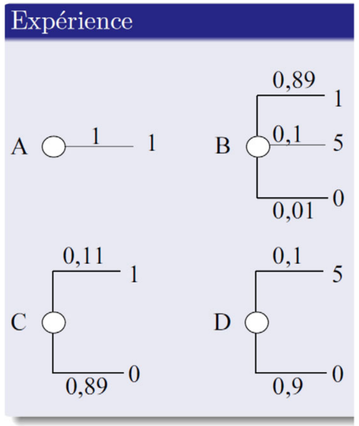
- $A \succ B$ et $D \succ C$

Interprétation

- $A \succ B \Rightarrow$ $u(1) >$ $0,89u(1) + 0,1u(5) + 0,01u(0)$ $\Rightarrow u(1) > 10/11$
- $D \succ C \Rightarrow$ $0,1u(5) + 0,9u(0) >$ $0,11u(1) + 0,89u(0)$ $\Rightarrow u(1) < 10/11$

On suppose $u(0) = 0$, $u(5) = 1$ (utilité définie à une transformation affine + près)

Paradoxe d'Allais : incompatibilité avec la théorie de l'utilité espérée



- Pour Allais, $A \succ B$.
- En termes d'espérance d'utilité :
  - $u(1) > 0{,}89u(1) + 0{,}1u(5) + 0{,}01u(0)$
- $0{,}11u(1) > 0{,}1u(5) + 0{,}01u(0)$
- Pour Allais, $C \prec D$.
- En termes d'espérance d'utilité :
  - $0{,}11u(1) + 0{,}89u(0) < 0{,}1u(5) + 0{,}9u(0)$
- $0{,}11u(1) < 0{,}1u(5) + 0{,}01u(0)$
- Il y a donc une contradiction
  - *Remarque :*
  - *On passe de A à C en retirant* $0{,}89u(1)$ *et en ajoutant* $0{,}89u(0)$
  - *On passe de B à D en retirant* $0{,}89u(1)$ *et en ajoutant* $0{,}89u(0)$

Paradoxe d'Allais et violation de l'axiome d'indépendance par mélanges

- On peut voir A et B comme des loteries composées
  - *R : loterie qui rapporte* 1 *avec certitude,*
  - *P : loterie qui rapporte* 5 *avec probabilité* $\frac{10}{11}$ *et* 0 *avec probabilité* $\frac{1}{11}$
  - *V : loterie qui rapporte* 0 *avec certitude*
  - *Si* $R \succ P$*, alors* $A = 0{,}89R + 0{,}11R \succ 0{,}89R + 0{,}11P = B$
  - *Si* $R \succ P$*, alors* $C = 0{,}89V + 0{,}11R \succ 0{,}89V + 0{,}11P = D$

Experiment 1				Experiment 2			
Gamble 1A		Gamble 1B		Gamble 2A		Gamble 2B	
Winnings	Chance	Winnings	Chance	Winnings	Chance	Winnings	Chance
$1 million	89%	$1 million	89%	Nothing	89%	Nothing	89%
$1 million	11%	Nothing	1%	$1 million	11%	Nothing	1%
		$5 million	10%			$5 million	10%

Paradoxe d'Allais et violation du STP

- On reprend les données de Kahneman et Tversky (1979)

	1	2 – 34	35 – 100
f	0	2500	**2400**
g	2400	2400	**2400**
f'	0	2500	**0**
g'	2400	2400	**0**

- Utilité de f : $0{,}01u(0) + 0{,}33u(2500) + 0{,}66u(2400)$
- Utilité de g : $0{,}01u(2400) + 0{,}33u(2400) + 0{,}66u(2400)$
- $g \succ f \Rightarrow 0{,}34u(2400) > 0{,}01u(0) + 0{,}33u(2500)$
- Utilité de f' : $0{,}01u(0) + 0{,}33u(2500) + 0{,}66u(0)$
- Utilité de g' : $0{,}01u(2400) + 0{,}33u(2400) + 0{,}66u(0)$
- $f' \succ g' \Rightarrow 0{,}34u(2400) < 0{,}01u(0) + 0{,}33u(2500)$
- Ces choix impliquent à la fois violation du STP et du critère EU

Paradoxe d'Allais et violation du principe d'indépendance

- On reprend les données de Kahneman et Tversky (1979)

	1	2 – 34	35 – 100
f	0	2500	**2400**
g	2400	2400	**2400**
f'	0	2500	**0**
g'	2400	2400	**0**

- Montrer que $g \succ f$ et $f' \succ g'$ n'est pas compatible avec l'axiome d'indépendance.
  - *Comme précédemment, on note* $w_1 = 0$, $w_2 = 2400$, $w_3 = 2500$
  - *On commencera par représenter les loteries* f, g, f', g' *dans le triangle de Machina*

Paradoxe d'Allais et violation du principe d'indépendance

	1	2 – 34	35 – 100
f	0	2500	**2400**
g	2400	2400	**2400**
f'	0	2500	**0**
g'	2400	2400	**0**

- Représentation de f, g, f', g' dans le triangle de Machina
- Le pari f est associé au point $\left(\frac{1}{100}; \frac{33}{100}\right)$
- Le pari g est associé au point $(0; 0)$
- Le pari f'est associé au point $\left(\frac{67}{100}; \frac{33}{100}\right)$
- Le pari g'est associé au point $\left(\frac{66}{100}; 0\right)$

$g \succ f$ et $f' \succ g'$ compatible avec l'axiome d'indépendance ?

- Représentation de f, g, f', g' dans le triangle de Machina
- $gg'f'f$ sont les sommets d'un parallélogramme